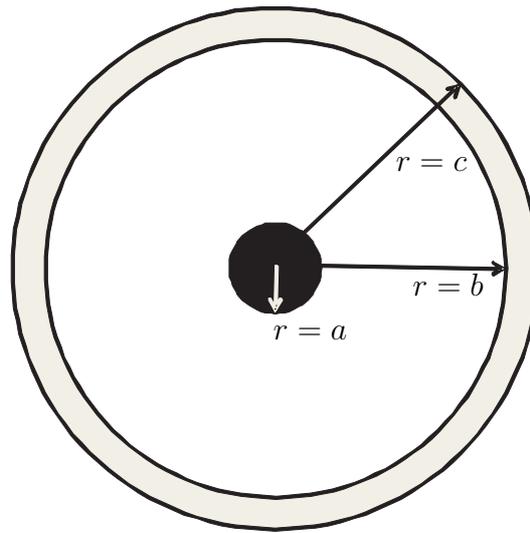


Aufgabe 1 (16 Punkte)

Gegeben ist folgende kugelsymmetrische Anordnung:



Die einzelnen Raumbereiche weisen dabei folgende Raumladungsdichten, Leitfähigkeiten und Dielektrizitätskonstanten auf.

$$\begin{array}{llll}
 0 \leq r < a : & \rho = 2\rho_0 \frac{r^3}{r_0^3} & \kappa = 0 & \epsilon = \epsilon_0 \\
 a \leq r < b : & \rho = \rho_0 & \kappa = 0 & \epsilon = \frac{r_0^2}{3r^2} \epsilon_0 \\
 b \leq r \leq c : & \rho = 0 & \kappa = \infty & \epsilon = \epsilon_0 \\
 c < r < \infty : & \rho = 0 & \kappa = 0 & \epsilon = \epsilon_0
 \end{array}$$

- a) Berechnen Sie die elektrische Feldstärke \vec{E} in Abhängigkeit von r im Bereich von $0 \leq r < b$.
- b) Die Raumladungsdichte ρ im Bereich $a \leq r < b$ soll nun in Abhängigkeit vom Radius r so geändert werden, so dass das dabei entstehende E-Feld \vec{E} unabhängig vom Radius a der inneren Kugel wird. Bestimmen Sie $\vec{E}(r)$ und $\rho(r)$ im Bereich $a \leq r < b$.

Wenn Sie kein Ergebnis für $\rho(r)$ aus Aufgabenteil b) berechnet haben, rechnen Sie im Bereich $a \leq r < b$ mit $\rho = \rho_0$ weiter.

- c) Berechnen Sie die elektrische Feldstärke \vec{E} in Abhängigkeit von r im Bereich von $b \leq r < \infty$.
- d) Berechnen Sie das elektrostatische Potential $\Phi(r)$ im Bereich $b \leq r < \infty$ unter der Voraussetzung $\Phi(\infty) = 0$.

Hinweis: starten Sie bei der Berechnung des Potentials bei $r = \infty$.

Lösung 1 (16 Punkte)

a) Elektrisches Feld: Satz von Gauss

$$\oint \vec{D} d\vec{f} = \int \rho dv$$

Kugelsymmetrie: $\vec{E} = E_r(r)\vec{e}_r$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \epsilon E_r r^2 \sin(\Theta) d\Theta d\Phi = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho r'^2 \sin(\Theta) d\Theta d\Phi dr'$$

$$4\pi \cdot \epsilon E_r r^2 = 4\pi \cdot \int \rho r'^2 dr'$$

 $0 \leq r < a :$

$$4\pi \cdot \epsilon_0 E_r r^2 = 4\pi \cdot \int_0^r 2 \frac{\rho_0}{r_0^3} r'^3 r'^2 dr'$$

$$= 4\pi \cdot 2 \frac{\rho_0}{r_0^3} \left[\frac{1}{6} r^6 \right]_0^r$$

$$\Rightarrow E_r = \frac{\rho_0}{3r_0^3 \epsilon_0} r^4$$

 $a \leq r < b :$

$$4\pi \cdot \epsilon E_r r^2 = 4\pi \cdot \int_0^a 2 \frac{\rho_0}{r_0^3} r'^5 dr' + 4\pi \cdot \int_a^r \rho_0 r'^2 dr'$$

$$4\pi \cdot \frac{r_0^2 \epsilon_0}{3r^2} E_r r^2 = 4\pi \cdot \frac{\rho_0}{3r_0^3} a^6 + 4\pi \cdot \rho_0 \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_a^r$$

$$4\pi \cdot \frac{r_0^2 \epsilon_0}{3r^2} E_r r^2 = 4\pi \cdot \frac{\rho_0}{3r_0^3} a^6 + 4\pi \cdot \frac{\rho_0}{3} (r^3 - a^3)$$

$$4\pi \cdot \frac{r_0^2 \epsilon_0}{3} E_r = 4\pi \cdot \frac{\rho_0}{3r_0^3} a^6 + 4\pi \cdot \frac{\rho_0}{3} (r^3 - a^3)$$

$$\Rightarrow E_r = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r^3}{r_0^2} + \frac{a^6}{r_0^5} - \frac{a^3}{r_0^2} \right)$$

b) Das E-Feld soll unabhängig von a sein: $a \leq r < b :$

$$4\pi \cdot \epsilon E_r r^2 = 4\pi \cdot \int_0^a 2 \frac{\rho_0}{r_0^3} r'^5 dr' + 4\pi \cdot \int_a^r \rho(r) r'^2 dr'$$

$$\frac{r_0^2 \epsilon_0}{3r^2} E_r r^2 = \underbrace{4\pi \cdot \frac{\rho_0}{3r_0^3} a^6}_A + 4\pi \cdot \int_a^r \rho(r) r'^2 dr'$$

Der konstante Faktor A muss kompensiert werden. Um a^6 in A kompensieren zu können wird $\rho(r)$ zunächst zu $\rho(r) = k\rho_0 r^3$ gewählt

$$4\pi \cdot \epsilon E_r r^2 = 4\pi \cdot \int_0^a 2 \frac{\rho_0}{r_0^3} r'^5 dr' + 4\pi \cdot \int_a^r k\rho_0 r'^5 dr'$$

$$4\pi \cdot \frac{r_0^2 \epsilon_0}{3r^2} E_r r^2 = 4\pi \cdot \frac{\rho_0}{3r_0^3} a^6 + 4\pi \cdot k\rho_0 \left[\frac{1}{6} r^6 \right]_a^r$$

$$4\pi \cdot \frac{r_0^2 \epsilon_0}{3r^2} E_r r^2 = 4\pi \cdot \frac{\rho_0}{3r_0^3} a^6 + 4\pi \cdot \frac{k\rho_0}{6} (r^6 - a^6)$$

Es ist leicht ersichtlich, dass A für $k = \frac{2}{r_0^3}$ verschwindet $\rightarrow \rho = \frac{2}{r_0^3} \rho_0 r^3$

$$4\pi \cdot \frac{r_0^2 \epsilon_0}{3r^2} E_r r^2 = 4\pi \cdot \frac{\rho_0}{3r_0^3} a^6 + 4\pi \cdot \frac{\rho_0}{3r_0^3} (r^6 - a^6)$$

$$\Rightarrow E_r = \frac{\rho_0}{r_0^5 \epsilon_0} r^6$$

c) $b \leq r \leq c$:

$$\Rightarrow E_r = 0 \quad (\text{idealer Leiter}) \quad \kappa = \infty$$

$c < r < \infty$:

$$4\pi \cdot \epsilon E_r r^2 = 4\pi \cdot \int_0^a 2 \frac{\rho_0}{r_0^3} r'^5 dr' + 4\pi \cdot \int_a^b 2 \frac{\rho_0}{r_0^3} r'^5 dr'$$

$$4\pi \cdot \epsilon_0 E_r r^2 = 4\pi \cdot \frac{\rho_0}{3r_0^3} a^6 + 4\pi \cdot \frac{\rho_0}{r_0^3} \left[\frac{1}{3} r^6 \right]_a^b$$

$$= 4\pi \cdot \frac{\rho_0}{3r_0^3} a^6 + 4\pi \cdot \frac{\rho_0}{3r_0^3} b^6 - 4\pi \cdot \frac{\rho_0}{3r_0^3} a^6$$

$$\Rightarrow E_r = \frac{\rho_0}{3r_0^3 \epsilon_0 r^2} b^6$$

Alternative Lösung für $\varrho = \rho_0$:

$c < r < \infty$:

$$4\pi \cdot \epsilon E_r r^2 = 4\pi \cdot \int_0^a 2 \frac{\rho_0}{r_0^3} r'^5 dr' + 4\pi \cdot \int_a^b \rho_0 r'^2 dr'$$

$$4\pi \cdot \epsilon_0 E_r r^2 = 4\pi \cdot \frac{\rho_0}{3r_0^3} a^6 + 4\pi \cdot \rho_0 \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_a^b$$

$$= 4\pi \cdot \frac{\rho_0}{3r_0^3} a^6 + 4\pi \cdot \frac{\rho_0}{3} b^3 - 4\pi \cdot \frac{\rho_0}{3} a^3$$

$$\Rightarrow E_r = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0 r^2} (b^3 + \frac{a^6}{r_0^3} - a^3)$$

d) Berechnung von $\Phi(r)$:

$$c < r < \infty:$$

$$\begin{aligned}\Phi(\infty) - \Phi(r) &= - \int_r^{\infty} E_r(r') dr' \\ \Phi(r) &= 0 + \int_r^{\infty} \frac{\rho_0}{3r_0^3 \epsilon_0 r'^2} b^6 dr' \\ &= \left[-\frac{\rho_0}{3r_0^3 \epsilon_0 r'} b^6 \right]_r^{\infty} \\ &= \frac{\rho_0}{3r_0^3 \epsilon_0 r} b^6\end{aligned}$$

Das Potential an der Stelle $r = c$ ist:

$$\Phi(c) = \frac{\rho_0}{3r_0^3 \epsilon_0 c} b^6$$

Alternative Lösung für $\varrho = \rho_0$:

$$\Phi(c) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0 c} \left(b^3 + \frac{a^6}{r_0^3} - a^3 \right)$$

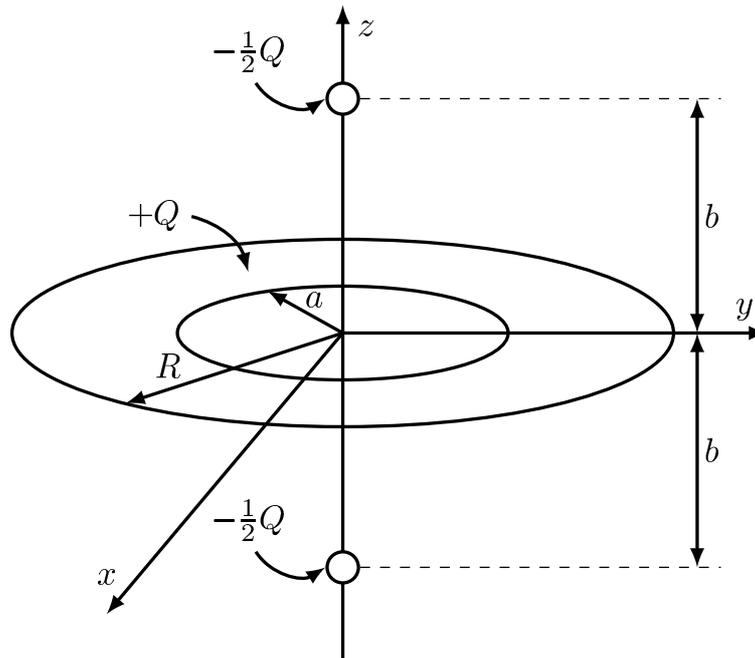
$b < r < c$: Es existiert kein Feld $\rightarrow \Phi(r) = \text{const.}$

$$\Phi(r) = \Phi(c) = \frac{\rho_0}{3r_0^3 \epsilon_0 c} b^6 = \Phi(b)$$

Alternative Lösung für $\varrho = \rho_0$:

$$\Phi(r) = \Phi(c) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0 c} \left(b^3 + \frac{a^6}{r_0^3} - a^3 \right) = \Phi(b)$$

Aufgabe 2 (16 Punkte)



Gegeben sei die oben dargestellte Kreisscheibe mit dem Radius R und einem Loch mit dem Radius a in der Mitte. Die Scheibe sei unendlich dünn und hat eine homogen verteilte positive Ladung $+Q$. Das Koordinatensystem ist rechtshändig, der Ursprung liegt im Zentrum der Kreisscheibe und die z -Achse verläuft senkrecht nach oben durch die Scheibe.

- Berechnen Sie das durch die Scheibe verursachte elektrische Potential $\Phi_S(z)$ auf der z -Achse mit Hilfe des COULOMB-Integrals. Das Potential $\Phi_S(z)$ ist so normiert, dass es im Unendlichen zu Null wird ($\Phi_S(\infty) = 0$). Starten Sie Ihre Berechnung mit der Bestimmung der Flächenladungsdichte σ , die sich aus der Gesamtladung $+Q$ ergibt.
- Berechnen Sie das elektrische Feld \vec{E} auf der z -Achse aus dem Potential $\Phi_S(z)$.

Die Anordnung wird nun erweitert. Im Abstand b wird ober- und unterhalb der Kreisscheibe jeweils eine Kugel mit der Ladung $-\frac{1}{2}Q$ platziert. Die Kugeln können als Punktladungen aufgefasst werden.

- Berechnen Sie das elektrische Feld \vec{E} der beiden Kugeln separat mit Hilfe des Satzes von GAUSS.
- Berechnen Sie aus dem elektrischen Feld \vec{E} das zugehörige Potential Φ_K für die beiden Kugeln. Das Potential ist so normiert, dass es im Unendlichen zu Null wird ($\Phi_K(\infty) = 0$). Geben Sie die Lösung in kartesischen Koordinaten an, deren Ursprung und Orientierung bereits in den vorherigen Aufgabenteilen a) und b) definiert wurde.

Hinweis: Berechnen Sie das Feld und das Potential in den Aufgabenteilen c) und d) unter der Annahme, die Kugeln befänden sich im Ursprung und verschieben Sie für Aufgabenteil d) Ihre Lösung anschließend auf der z -Achse in den kartesischen Koordinaten!

- Bestimmen Sie den Wert für a , bei dem im Ursprung ($\vec{r} = (0, 0, 0)$) das Gesamtpotential zu Null wird ($\Phi_{gesamt} = 0$), unter der Voraussetzung, dass $R = 2a$ entspricht.

Lösung 2 (16 Punkte)**a) Berechnung des Potentials mit Hilfe COULOMB-Integrals**

Das Volumenintegral für die Bestimmung des Potentials ist gegeben durch:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'. \quad (1)$$

Für eine unendlich dünne Scheibe vereinfacht sich das Integral zu einem Flächenintegral zu:

$$\Phi_S(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iint \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} df'. \quad (2)$$

Die Flächenladungsdichte σ berechnet sich durch:

$$\sigma = \frac{Q}{\pi \cdot (R^2 - a^2)}. \quad (3)$$

Ein infinitesimal kleines Flächenelement lässt als $df' = r' \cdot d\varphi' dr'$ ausdrücken. Für einen beliebigen Punkt auf der z -Achse lässt sich der Ausdruck $|\vec{r} - \vec{r}'|$ schreiben als $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + r'^2}$, damit ergibt sich für das Integral:

$$\Phi_S(z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon} \int_a^R \int_0^{2\pi} \frac{r'}{\sqrt{z^2 + r'^2}} d\varphi' dr'. \quad (4)$$

Da das Potential nicht vom Winkel φ abhängig ist, vereinfacht es sich zu:

$$\begin{aligned} \Phi_S(z) &= \frac{\sigma}{2\epsilon} \int_a^R \frac{r'}{\sqrt{z^2 + r'^2}} dr' \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon} \left[\sqrt{z^2 + r'^2} \right]_a^R \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon} \left[\sqrt{z^2 + R^2} - \sqrt{z^2 + a^2} \right] \\ &= \frac{Q}{2\epsilon\pi \cdot (R^2 - a^2)} \cdot \left[\sqrt{z^2 + R^2} - \sqrt{z^2 + a^2} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

b) Berechnung des elektrischen Feldes

Das elektrische Feld \vec{E} lässt durch Gradientenbildung des Potentials berechnen: $\vec{E} = -\text{grad } \Phi$. Aufgrund der symmetrischen Anordnung ist das elektrische Feld \vec{E} nur von der z -Richtung abhängig:

$$\begin{aligned} \vec{E}(z) &= -\frac{\sigma}{2\epsilon} \cdot \frac{d}{dz} \left[\sqrt{z^2 + R^2} - \sqrt{z^2 + a^2} \right] \vec{e}_z \\ &= -\frac{\sigma}{2\epsilon} \cdot z \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) \vec{e}_z \\ &= \frac{Q}{2\epsilon\pi (R^2 - a^2)} \cdot z \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (6)$$

c) **Berechnung der Kugelfelder mit Hilfe des Satzes von GAUSS**

Das elektrische Feld \vec{E} einer kugelförmigen Punktladung lässt sich durch $\oint \vec{E} d\vec{f} = \frac{Q}{\epsilon}$ ausdrücken. Für eine Kugel ergibt sich daraus:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi = -\frac{Q}{2\epsilon}$$

$$E [2\pi r^2 (-\cos(\vartheta))]_0^{\pi} = -\frac{Q}{2\epsilon} \quad (7)$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = -\frac{Q}{2\epsilon}$$

$$E = -\frac{Q}{8\pi r^2 \epsilon}.$$

d) **Bestimmung des elektrischen Potentials aus dem elektrischen Feld**

Durch Integration des elektrischen Feldes \vec{E} lässt sich das Potential bestimmen:

$$\Phi_K(r_1) - \Phi_K(r_2) = -\int_{r_2}^{r_1} \vec{E} d\vec{s}$$

$$\Phi_K(\infty) - \Phi_K(r) = -\int_r^{\infty} \vec{E} d\vec{s}$$

$$0 - \Phi_K(r) = -\int_r^{\infty} -\frac{Q}{8\pi r'^2 \epsilon} dr \quad \Leftarrow \vec{E} \text{ aus Aufgabenteil c) } \quad (8)$$

$$-\Phi_K(r) = -\left[\frac{Q}{8\pi \epsilon r'} \right]_r^{\infty}$$

$$\Phi_K(r) = -\frac{Q}{8\pi \epsilon r}.$$

Ersetzt man $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, so erhält man Φ_K in kartesischen Koordinaten:

$$\Phi_K(x, y, z) = -\frac{Q}{8\pi \epsilon \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (9)$$

Die Verschiebung um b der Kugeln auf der z -Achse führt auf:

$$\Phi_K(x, y, z) = -\frac{Q}{8\pi \epsilon \sqrt{x^2 + y^2 + (z \mp b)^2}}. \quad (10)$$

e) **Bestimmung des Lochdurchmessers a**

Bei $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und $R = 2a$ gilt für die einzelnen Potentiale:

$$\Phi_S(0) = \frac{Q}{2\pi \epsilon (3a^2)} \cdot (\sqrt{4a^2} - \sqrt{a^2})$$

$$= \frac{Q}{6\pi \epsilon a^2} \cdot a,$$

$$\Phi_K(0, 0, 0) = -\frac{Q}{8\pi \epsilon \sqrt{(\mp b)^2}}$$

$$= -\frac{Q}{8\pi \epsilon b}. \quad (11)$$

Für das Gesamtpotential lässt sich schreiben:

$$\begin{aligned}\Phi_{gesamt} &= \Phi_S(0) + 2 \cdot \Phi_K(0,0,0) \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{Q}{6\pi\epsilon a} - \frac{2 \cdot Q}{8\pi\epsilon b} &= 0 \\ \frac{1}{6a} &= \frac{2}{8b} \\ a &= \frac{2}{3}b.\end{aligned}\tag{12}$$

Aufgabe 3 (16 Punkte)

Gegeben sei ein Ring mit dem Radius a , siehe Abbildung 1. Der Mittelpunkt des Ringes befindet sich an der Stelle $(0, 0, z_r)^\top$. Dieser Ring sei mit der gleichmäßig verteilten elektrischen Ladung Q geladen und dreht sich mit der Frequenz f in mathematisch positiver Richtung um die z -Achse.

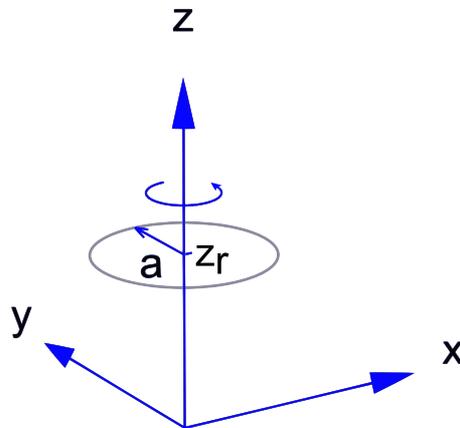


Abbildung 1: Homogen geladener Ring, der sich mit der Frequenz f um die z -Achse dreht.

- In welche der Richtungen $\vec{e}_R, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ muss die magnetische Feldstärke auf der z -Achse für die oben beschriebene Anordnung zeigen? Begründen Sie ohne Rechnung!
- Berechnen Sie die durch den rotierenden Ring entstehende magnetische Feldstärke entlang der z -Achse.

Im Folgenden dreht sich nun ein Zylinder der Länge $2l$, dem Radius a und dem Zylindermittelpunkt $(0, 0, 0)^\top$ mit der Frequenz f in mathematisch positiver Richtung um die z -Achse, siehe Abbildung 2.. Hierbei sei auch der Zylinder mit der Ladung Q gleichmäßig verteilt geladen.

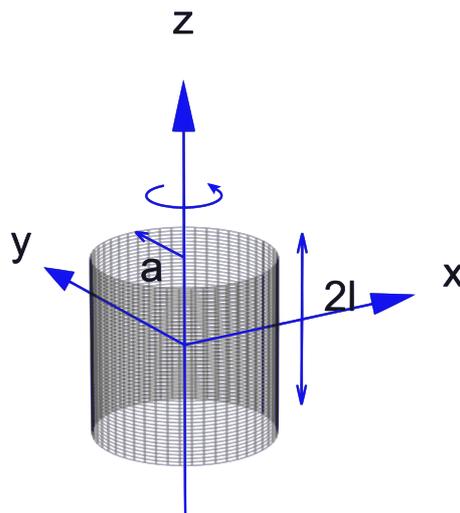


Abbildung 2: Homogen geladener Zylinder, der sich mit der Frequenz f um die z -Achse dreht.

- Berechnen Sie die durch den Zylinder entstehende magnetische Feldstärke entlang der z -Achse.

Hinweise:

- Stellen Sie den Zylinder als infinitesimal kleine Ringe in z -Richtung dar.

- $$\int \frac{1}{(x^2 + c)^{3/2}} dx = \frac{x}{c\sqrt{x^2 + c}}$$

Lösung 3 (16 Punkte)

- a) Auf der z -Achse bleibt aus Symmetriegründen nur eine Feldstärke in z -Richtung übrig, die anderen Feldkomponenten heben sich auf.
- b) Durch die Rotation des Ringes mit der Frequenz f entsteht ein Kreisstrom.

$$I = Q \cdot f$$

Dieser Kreisstrom erzeugt nach dem Gesetz von Biot-Savart folgende magnetische Flussdichte.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_S \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \Big|_{\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}} \text{ und } \vec{r}' = \begin{pmatrix} a \\ \varphi \\ z_r \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ a d\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ -\varphi \\ z - z_r \end{pmatrix}}{(a^2 + (z - z_r)^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\begin{pmatrix} a(z - z_r) d\varphi \\ 0 \\ a^2 d\varphi \end{pmatrix}}{(a^2 + (z - z_r)^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \left[\underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{a(z - z_r) d\varphi}{(a^2 + (z - z_r)^2)^{3/2}}}_{=0} \vec{e}_r + \int_0^{2\pi} \frac{a^2 d\varphi}{(a^2 + (z - z_r)^2)^{3/2}} \vec{e}_z \right]$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + (z - z_r)^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu Q f}{2} \frac{a^2}{(a^2 + (z - z_r)^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

Hieraus resultiert die magnetische Feldstärke:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{Q f}{2} \frac{a^2}{(a^2 + (z - z_r)^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

- c) Der Zylinder wird nun in infinitesimal kleine Ringe der Breite dz_r unterteilt. Jeder Ring trägt dabei die Ladung $Q \frac{dz_r}{2l}$. Somit ergibt sich für jeden Ring folgender Kreisstrom.

$$dI = Q \frac{dz_r}{2l} \cdot f$$

Mittels des Superpositionsprinzips kann nun die magnetische Flussdichte berechnet werden.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_S d\vec{B}$$

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu dI}{2} \frac{a^2}{(a^2 + (z - z_r)^2)^{3/2}} \vec{e}_z \quad \left| \quad dI = Q \frac{dz_r}{2l} \cdot f \text{ und } \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \right.$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu Q f}{4l} \int_{-l}^l \frac{a^2 dz_r}{(a^2 + (z - z_r)^2)^{3/2}} \vec{e}_z \quad \left| \quad t = z - z_r \Rightarrow dt = -dz_r \right.$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu Q f}{4l} \int_{z+l}^{z-l} \frac{a^2 dt}{(a^2 + t^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu Q f}{4l} \left[\frac{a^2 t}{(a^2 \sqrt{a^2 + t^2})} \vec{e}_z \right]_{z+l}^{z-l}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu Q f}{4l} \left[\frac{z+l}{\left(\sqrt{a^2 + (z+l)^2}\right)} - \frac{z-l}{\left(\sqrt{a^2 + (z-l)^2}\right)} \right] \vec{e}_z$$

Hieraus resultiert die magnetische Feldstärke:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{Q f}{4l} \left[\frac{z+l}{\left(\sqrt{a^2 + (z+l)^2}\right)} - \frac{z-l}{\left(\sqrt{a^2 + (z-l)^2}\right)} \right] \vec{e}_z$$

Aufgabe 4 (16 Punkte)

a) Das magnetische Vektorpotential eines Hertzchen Dipols laute:

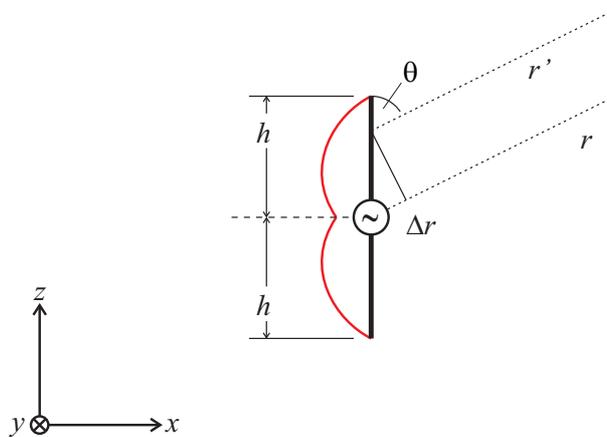
$$\vec{A} = A_z \vec{e}_z$$

$$A_z = \frac{\mu \hat{I} l}{4\pi r} \exp\{j(\omega t - k_0 r)\}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Stellen Sie das Vektorpotential \vec{A} in Kugelkoordinaten dar. Berechnen Sie aus dem Vektorpotential \vec{A} die magnetische Feldstärke \vec{H} des Hertzchen Dipols. Nutzen Sie dabei die Näherung für das Fernfeld $k_0 r \ll 1$. Geben Sie nur die im Fernfeld dominierenden Terme an.

b) Gegeben sei nun eine lineare Dipolantenne der Höhe $2h$.



Die von z abhängige Stromverteilung lautet:

$$I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(h - |z|)\right)$$

Das Fernfeld eines infinitesimal kleinen Dipols ist:

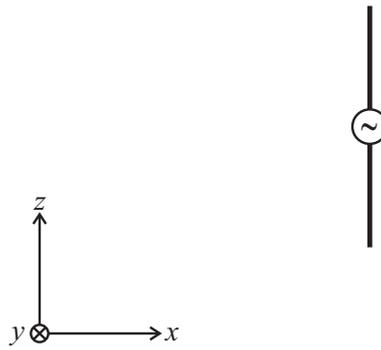
$$dE_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon} I \sin\theta \frac{\omega}{c_0^2 r} e^{j(\omega t - kr)} dl$$

Berechnen Sie das Fernfeld für große r . Beachten Sie, dass die Amplitude des Stroms von z abhängt und dass im Phasenterm mit zunehmenden z ein Wegunterschied Δr zu berücksichtigen ist.

Hinweis:

$$\int_{x=-b}^b \sin(a(b - |x|)) \cos(ax \cos(\gamma)) + j \sin(ax \cos(\gamma)) dx = \frac{2(\cos(ab \cos(\gamma)) - \cos ab)}{\sin^2(\gamma)}$$

- c) Skizzieren Sie die Richtcharakteristik $S(\theta)$ der Dipolantenne für $h = \frac{\lambda}{4}$ in die vorbereitete Abbildung.



- d) Wie verändert sich die Richtcharakteristik aus Aufgabe c, wenn die Antenne auf bis zu eine Länge von $h = \lambda$ verlängert wird? Beschreiben Sie qualitativ.

Lösung 4 (16 Punkte)

a) Das magnetische Vektorpotential \vec{A} lautet in Kugelkoordinaten:

$$\vec{A} = A_z (\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta)$$

Die magnetische Feldstärke lautet:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} A_z (\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta)$$

Nach Einsetzen von A_z aus der Aufgabenstellung kommt man auf:

$$\vec{H} = \frac{\hat{I}l}{4\pi} \exp\{j(\omega t - k_0 r)\} \frac{(1 + jk_0 r)}{r^2} \sin(\theta)\vec{e}_\phi$$

Mit der Näherung $k_0 r \ll 1$ für das Fernfeld bleibt der dominierende Term übrig:

$$\vec{H} = \frac{\hat{I}l}{4\pi} \exp\{j(\omega t - k_0 r)\} \frac{jk_0}{r} \sin(\theta)\vec{e}_\phi$$

b) Da der Dipol in z -Richtung zeigt, gilt folgender Ansatz:

$$E_\theta = \int_{z=-h}^h \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\omega}{c_0^2 r'} I_0 \sin(k(h - |z|)) e^{j(\omega t - kr')} \sin\theta dz$$

Für große r gilt $\frac{1}{r} \approx \frac{1}{r'}$ jedoch muss beim Phasenterm der Wegunterschied genau beachtet werden. Für große r sind die Strahlen r und r' parallel und es gilt:

$$r' = r - z \cos\theta$$

Damit lässt sich das Integral umformen zu:

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{I_0}{4\pi\epsilon} \frac{\omega}{c_0^2 r} \sin\theta \int_{z=-h}^h \sin(k(h - |z|)) e^{j(\omega t - kr + kz \cos\theta)} dz \\ &= \frac{I_0}{4\pi\epsilon} \frac{\omega}{c_0^2 r} \sin\theta e^{j(\omega t - kr)} \int_{z=-h}^h \sin(k(h - |z|)) e^{jkz \cos\theta} dz \\ &= \frac{I_0}{4\pi\epsilon} \frac{\omega}{c_0^2 r} \sin\theta e^{j(\omega t - kr)} \int_{z=-h}^h \sin(k(h - |z|)) (\cos(kz \cos\theta) + j \sin(kz \cos\theta)) dz \end{aligned}$$

Mit dem Hinweis aus der Aufgabenstellung kommt man auf:

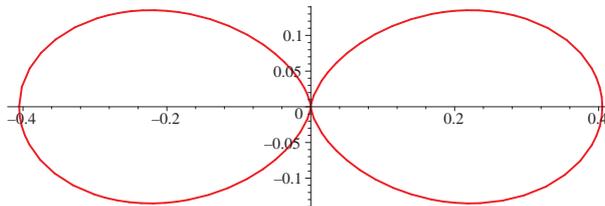
$$E_\theta = \frac{I_0}{2\pi\epsilon} \frac{\omega}{c_0^2 r} \sin\theta e^{j(\omega t - kr)} \frac{\cos(kh \cos\theta) - \cos kh}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{I_0}{2\pi\epsilon} \frac{\omega}{c_0^2 r} e^{j(\omega t - kr)} \frac{\cos(kh \cos\theta) - \cos kh}{\sin\theta}$$

c) Für die Richtcharakteristik ist nur die θ Abhängigkeit von Interesse:

$$S \sim \frac{(\cos(kh \cos\theta) - \cos kh)^2}{\sin^2\theta}$$

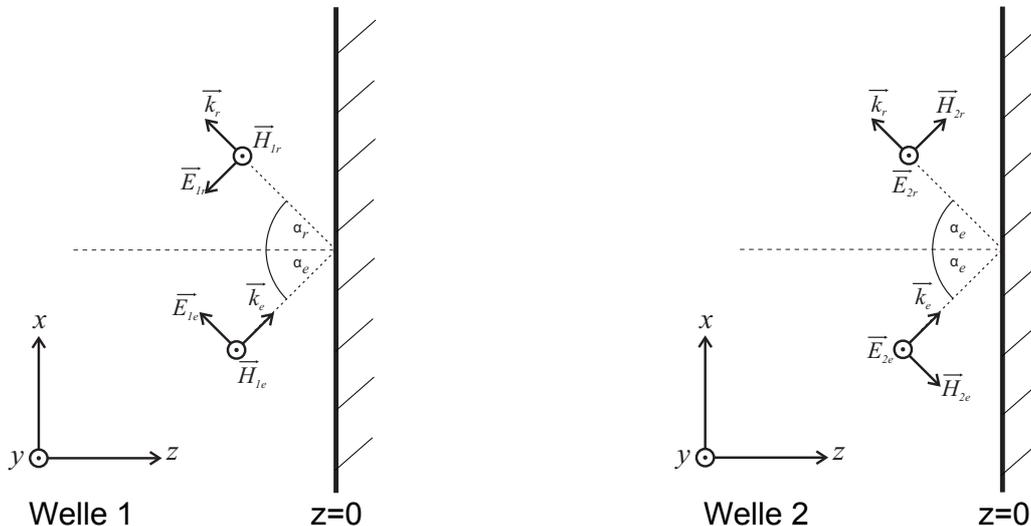
d) Die Richtcharakteristik $S(\theta)$ der Dipolantenne für $h = \frac{\lambda}{4}$:



e) Die Anzahl der Hauptkeulen erhöht sich. Bei einer Antenne der Länge $h = \lambda$ sind es vier. Wo bei einer Antenne der Länge $h = \frac{\lambda}{4}$ das Maximum der Richtcharakteristik lag, bilden sich für die Länge $h = \lambda$ die Nullstellen der Richtcharakteristik aus.

Aufgabe 5 (16 Punkte)

Eine ebene elektromagnetische Welle („Welle 1“) mit der Frequenz ω und dem H-Feld \vec{H}_{1e} trifft unter einem Winkel α_e auf eine Grenzfläche bei $z = 0$ zu einem ideal leitenden Medium. Die reflektierte Welle sei \vec{H}_{1r} . Im freien Raum sei $\varepsilon = \varepsilon_1$, im ganzen Raum gelte die Permeabilität μ .



Für das H-Feld sei die Amplitude H_{1e} bekannt. Es gilt:

$$\vec{H}_{1e} = H_{1e} e^{j(\omega t - k(\sin(\alpha_e)x + \cos(\alpha_e)z))} \vec{e}_y$$

$$\vec{H}_{1r} = H_{1r} e^{j(\omega t - k(\sin(\alpha_r)x - \cos(\alpha_r)z))} \vec{e}_y$$

- Bestimmen Sie für Welle 1 mit Hilfe der Maxwellgleichungen die zur hinlaufenden und zur rücklaufenden Welle gehörigen elektrischen Felder \vec{E}_{1e} und \vec{E}_{1r} in Abhängigkeit von H_{1e} bzw. H_{1r} .
- Bestimmen Sie für Welle 1 den Reflexionswinkel α_r sowie die Amplituden der rücklaufenden Welle! Geben Sie die elektrischen und magnetischen Felder der rücklaufenden Welle in Abhängigkeit von H_{1e} an!

Hinweis: Überlegen Sie, welche Grenzflächenbedingung im Falle eines idealen Leiters geeignet ist!

- Berechnen Sie an der Grenzfläche ($z = 0$) für Welle 1 den komplexen Poynting-Vektor der Überlagerung von hin- und rücklaufender Welle! In welche Richtung wird Wirkleistung übertragen?
- Nun wird der oben betrachteten Welle 1 eine weitere ebene Welle („Welle 2“) überlagert, deren Phase durch ϕ beschrieben ist. Diese Welle fällt ebenfalls im Winkel α_e ein und wird reflektiert, so dass das elektrische Feld der hinlaufenden und rücklaufenden Welle wie folgt lautet:

$$\vec{E}_{2e} = E_{2e} e^{j(\omega t - k(\sin(\alpha_e)x + \cos(\alpha_e)z))} e^{j\phi} \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_{2r} = -E_{2e} e^{j(\omega t - k(\sin(\alpha_e)x - \cos(\alpha_e)z))} e^{j\phi} \vec{e}_y$$

Berechnen Sie mittels der Gleichung $\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{e}_k \times \vec{E}$ das zu \vec{E}_{2e} gehörige Magnetfeld! Hierbei beschreibt \vec{e}_k den Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung der Welle.

- e) Wie müssen die Amplitude E_{2e} und der Phasenwinkel ϕ gewählt werden, damit die Überlagerung der beiden hinlaufenden Wellen eine rein zirkular polarisierte Welle darstellt?

Lösung 5 (16 Punkte)

a) Mit der Maxwellgleichung

$$\text{rot } \vec{H}_{1e} = \dot{\vec{D}}_{1e} = j\omega\varepsilon\vec{E}_{1e}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H}_{1e} &= -\vec{e}_x H_{1e} e^{j(\omega t - k(\sin(\alpha_e)x + \cos(\alpha_e)z))} (-jk \cos \alpha_e) \\ &\quad + \vec{e}_z H_{1e} e^{j(\omega t - k(\sin(\alpha_e)x + \cos(\alpha_e)z))} (-jk \sin \alpha_e) \\ &= jk H_{1e} e^{j(\omega t - k(\sin(\alpha_e)x + \cos(\alpha_e)z))} (\cos \alpha_e \vec{e}_x - \sin \alpha_e \vec{e}_z) \\ \vec{E}_{1e} &= \underbrace{\frac{k}{\omega\varepsilon}}_{=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} H_{1e} e^{j(\omega t - k(\sin(\alpha_e)x + \cos(\alpha_e)z))} (\cos \alpha_e \vec{e}_x - \sin \alpha_e \vec{e}_z) \end{aligned}$$

Analog berechnet man \vec{E}_{1r} zu

$$\vec{E}_{1r} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_{1r} e^{j(\omega t - k(\sin(\alpha_r)x - \cos(\alpha_r)z))} (-\cos \alpha_r \vec{e}_x - \sin \alpha_r \vec{e}_z)$$

b) An einem idealen Leiter fließen beim Auftreffen eines elektrischen Feldes unbekannte Oberflächenströme. Daher ist die Grenzflächenbedingung für das elektrische Feld zu benutzen ($E_{tan1} = E_{tan2=0}$ im idealen Leiter)! Das elektrische Feld besteht aus einer tangentialen x-Komponente und einer normalen z-Komponente. An der Grenze ist $z = 0$.

$$\begin{aligned} E_{1e,tan} + E_{1r,tan} &= 0 \\ E_{1e,x} + E_{1r,x} &= 0 \\ \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_{1e} e^{j(\omega t - k \sin(\alpha_e)x)} \cos \alpha_e &= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_{1r} e^{j(\omega t - k \sin(\alpha_r)x)} \cos \alpha_r \end{aligned}$$

Nach Division gemeinsam enthaltener Faktoren vereinfacht sich dies zu

$$H_{1e} e^{-jk \sin(\alpha_e)x} \cos \alpha_e - H_{1r} e^{-jk \sin(\alpha_r)x} \cos \alpha_r = 0$$

Diese Gleichung kann – unabhängig von den Koeffizienten – nur für $\alpha_e = \alpha_r$ erfüllt sein. Dann folgt auch direkt $H_{1e} = H_{1r}$.

Somit ergeben sich die Felder der rücklaufenden Welle zu

$$\begin{aligned} \vec{E}_{1r} &= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_{1e} e^{j(\omega t - k(\sin(\alpha_e)x - \cos(\alpha_e)z))} (-\cos \alpha_e \vec{e}_x - \sin \alpha_e \vec{e}_z) \\ \vec{H}_{1r} &= H_{1e} e^{j(\omega t - k(\sin(\alpha_e)x - \cos(\alpha_e)z))} \vec{e}_y \end{aligned}$$

c) Der komplexe Poyntingvektor der überlagerten Felder ist

$$\begin{aligned}
 \vec{S}_{\text{ges}} &= (\vec{E}_{1e} + \vec{E}_{1r}) \times (\vec{H}_{1e} + \vec{H}_{1r})^* \\
 &= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_{1e} (e^{j(\omega t - k \sin(\alpha_e) x)} (\cos \alpha_e \vec{e}_x - \sin \alpha_e \vec{e}_z) \\
 &\quad + e^{j(\omega t - k \sin(\alpha_e) x)} (-\cos \alpha_e \vec{e}_x - \sin \alpha_e \vec{e}_z)) \\
 &\quad \times H_{1e} \vec{e}_y (e^{j(\omega t - k \sin(\alpha_e) x)} + e^{j(\omega t - k \sin(\alpha_e) x)})^* \\
 &= 2 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_{1e}^2 \sin(\alpha_e) x \vec{e}_x e^{j(\omega t - k \sin(\alpha_e) x)} (2 e^{j(\omega t - k \sin(\alpha_e) x)})^* \\
 &= 4 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_{1e}^2 \sin(\alpha_e) x \vec{e}_x
 \end{aligned}$$

Wirkleistung wird also nur in x-Richtung übertragen.

d)

$$\begin{aligned}
 \vec{H}_{2e} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\sin \alpha_e \vec{e}_x + \cos \alpha_e \vec{e}_z) \times E_{2e} e^{j(\omega t - k(\sin(\alpha_e) x + \cos(\alpha_e) z))} e^{j\phi} \vec{e}_y \\
 &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{2e} e^{j\phi} (\sin \alpha_e \vec{e}_z - \cos \alpha_e \vec{e}_x) e^{j(\omega t - k(\sin(\alpha_e) x + \cos(\alpha_e) z))}
 \end{aligned}$$

e) Die Amplituden müssen gleich sein, d.h. $E_{2e} = E_{1e} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} H_{1e}$. Zudem müssen die parallel und die senkrecht polarisierte Komponente der Welle um $\pi/2$ phasenverschoben sein, d.h. $\phi = \pm\pi/2$.