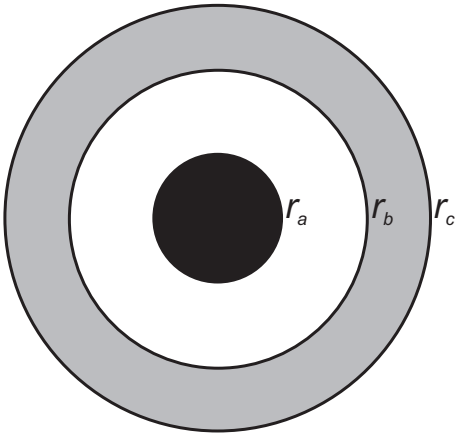
Aufgabe 1 (16 Punkte)

Hinweis: Die Aufgabenteile c) & d) können unabhängig voneinander und von a) & b) gelöst werden.

Gegeben ist folgende im Koordinatenursprung zentrierte, kugelsymmetrische Anordnung mit der Gesamtladung Q_{ges}.



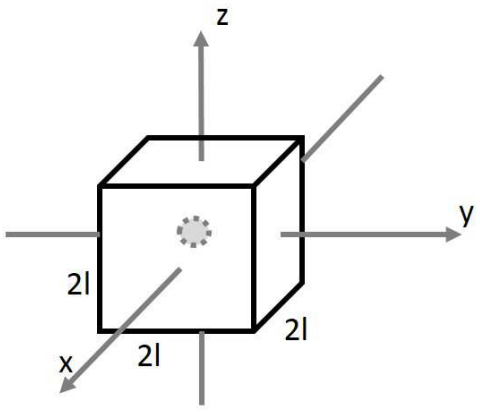
Für $r_c < r < \infty$ gelte $\kappa = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ und $\varrho = 0$.
Ferner weisen die einzelnen Kugelschalen folgende Charakteristika auf:

$$\begin{array}{lllll} 0 \le r < r_a: & \varrho = ??? & \kappa = 0 & \varepsilon = \varepsilon_0 & \vec{E} = \frac{\varrho_0}{2\varepsilon_0} r^6 \vec{e}_r \quad \vec{D} = ??? \\ r_a \le r < r_b: & \varrho = \varrho_0 & \kappa = 0 & \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{6}\frac{1}{r^2} & \vec{E} = ??? \quad \vec{D} = ??? \\ r_b \le r \le r_c: & \varrho = ??? & \kappa = \infty & \varepsilon = \varepsilon_0 & \vec{E} = ??? \quad \vec{D} = ??? \end{array}$$

a) Berechnen Sie die unbekannten Größen im Bereich $0 \le r \le r_c$.

b) Berechnen Sie die Gesamtladungen Q_b und Q_c sowie die Flächenladungsdichen σ_b und σ_c auf den beiden Kugeloberflächen bei $r = r_b$ und $r = r_c$.

Die Anordnung wird nun mit einem im Koordinatenursprung zentrierten und entlang der Koordinatenachsen ausgerichteten Würfel der Kantenlänge $2l$ $(l \gg r_c)$ umschlossen, siehe Abbildung.

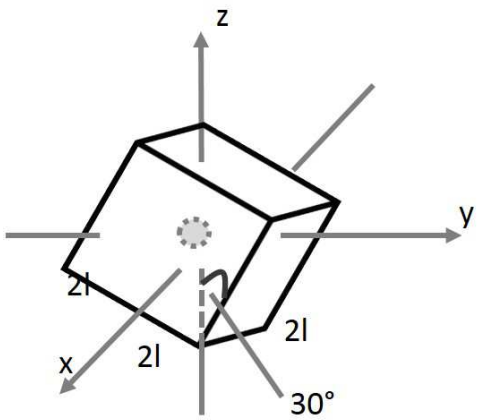


c) Berechnen Sie den Fluss Φ_E des elektrischen Feldes der geladenen, kugelsymmetrischen Anordnung aus a) durch die Oberfläche der Würfelseite bei $(x, y, z) = (0, l, 0)$. Nutzen Sie kartesische Koordinaten. Wie groß ist der Fluss durch die Oberfläche des gesamten Würfels?

Hinweis 1: $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$

Hinweis 2: $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^{1/2}} = \frac{1}{a(b^2-a^2)^{1/2}} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\sqrt{\frac{(b^2-a^2)}{(x^2+b^2)}}\right), \quad b^2 > a^2$

Der Würfel wird nun entlang der x-Achse um $\alpha = 30°$ im Uhrzeigersinn gekippt, siehe Abbildung. Der Raum außerhalb des Würfels wird mit einem Dielektrikum der unbekannten Dielektrizitätszahl ε_2 gefüllt.



d) Wie muss ε_2 gewählt werden, damit das $\vec{E}$-Feld entlang der positiven y-Achse beim Eintritt in das Dielektrikum eine Richtungsänderung um $45°$ erfährt?

Lösung 1 (16 Punkte)

a) $0 \leq r < r_a$:

Materialgleichung:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \cdot \vec{E} \\ &= \varepsilon_0 \cdot \frac{\varrho_0}{2\varepsilon_0} r^6 \cdot \vec{e}_r \\ \Rightarrow \vec{D} &= \frac{\varrho_0}{2} r^6 \cdot \vec{e}_r \end{aligned}$$

Satz von Gauss (differentielle Form):

$$\begin{aligned} \varrho &= \text{div}\vec{D} \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot D_r \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\varrho_0}{2} r^6 \right) \\ \Rightarrow \varrho(r) &= 4\varrho_0 r^5 \end{aligned}$$

$r_a \leq r < r_b$:

Kugelsymmetrie:

$$\vec{E} = E_r(r) \cdot \vec{e}_r$$

Satz von Gauss (integrale Form):

$$\begin{aligned} \oint \vec{D}\, d\vec{f} &= \int \varrho \, dv \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \varepsilon \, E_r \cdot \, r^2 \sin(\vartheta) \, d\vartheta \, d\varphi &= \int_0^{r} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \varrho(r') \, \cdot r'^2 \sin(\vartheta) \, d\vartheta \, d\varphi \, dr' \\ 4\pi r^2 \cdot \varepsilon E_r &= 4\pi \cdot \int_0^{r} \varrho(r') \cdot r'^2 \, dr' \\ 4\pi r^2 \cdot \frac{\varepsilon_0}{6r^2} E_r &= 4\pi \cdot \left(\int_0^{r_a} 4\varrho_0 r'^5 \cdot r'^2 \, dr' + \int_{r_a}^{r} \varrho_0 \cdot r'^2 \, dr' \right) \\ 4\pi \frac{\varepsilon_0}{6} E_r &= \underbrace{4\pi \frac{\rho_0}{6} \left(3{r_a}^8 + 2r^3 - 2{r_a}^3 \right)}_{Q_i} \\ \Rightarrow E_r &= \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(3{r_a}^8 + 2r^3 - 2{r_a}^3 \right) \\ \Rightarrow D_r &= \varepsilon E_r = \frac{\varrho_0}{6r^2} \left(3{r_a}^8 + 2r^3 - 2{r_a}^3 \right) \end{aligned}$$

$r_b \leq r \leq r_c$:

idealer Leiter ($\kappa = \infty$):

$$\Rightarrow E_r = 0 \quad D_r = 0 \quad \varrho = 0$$

b) Ansatz über Influenzladung auf den Oberflächen des idealen Leiters, da sich die gesamte Ladung der Anordnung im Bereich $r \leq r_c$. befindet. Aus Aufgabenteil a) folgt:

$$\begin{aligned} Q_b &= -Q_i|_{r=r_b} \\ &= -\frac{4\pi\varrho_0}{6} \cdot \left(3{r_a}^8 + 2{r_b}^3 - 2{r_a}^3\right) \\ Q_c &= -Q_b \\ &= +\frac{4\pi\varrho_0}{6} \left(3{r_a}^8 + 2{r_b}^3 - 2{r_a}^3\right) \end{aligned}$$

Mit $\sigma = Q/A$ folgt für die Flächenladungsdichten auf den Kugeloberflächen bei r_b und r_c:

$$\begin{aligned} \sigma_b(r = r_b) &= \frac{Q_b}{4\pi r_b^2} \\ &= -\frac{\varrho_0}{6r_b^2} \cdot \left(3{r_a}^8 + 2{r_b}^3 - 2{r_a}^3\right) \\ \sigma_c(r = r_c) &= \frac{Q_c}{4\pi r_c^2} \\ &= +\frac{\varrho_0}{6r_c^2} \cdot \left(3{r_a}^8 + 2{r_b}^3 - 2{r_a}^3\right) \end{aligned}$$

c) Das $\vec{E}$-Feld außerhalb einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung ist gleich dem Punktladungsfeld der im Kugelmittelpunkt zentrierten Gesamtladung.

Transformation in kartesische Koordinaten:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{Q_{ges}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r \\ &= \frac{Q_{ges}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \left(\frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{r}\right)\Bigg|_{r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ &= \frac{Q_{ges}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Betrachtet wird die Würfelseite bei $(x, y, z) = (0, l, 0)$, d.h. $y = l$ und $d\vec{f} = \vec{e}_y \cdot dxdz$.

Elektrischer Fluss:

$$\begin{aligned}
\Phi_E &= \oint \vec{E} d\vec{f} \\
&= \frac{Q_{ges}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{-l}^{l} \int_{-l}^{l} \frac{l}{(x^2+l^2+z^2)^{3/2}} dz dx \\
&= \frac{Q_{ges}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot l \cdot \int_{-l}^{l} \left[\frac{z}{(x^2+l^2)(x^2+l^2+z^2)^{1/2}} \right] \Bigg|_{z=-l}^{l} dx \\
&= \frac{Q_{ges}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot l \cdot \int_{-l}^{l} \frac{2l}{(x^2+l^2)(x^2+2l^2)^{1/2}} dx \\
&= \frac{Q_{ges}}{2\pi\varepsilon_0} \cdot l^2 \cdot \left[\frac{1}{l^2} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{x}{l} \sqrt{\frac{l^2}{(x^2+2l^2)}} \right) \right] \Bigg|_{x=-l}^{l} \\
&= \frac{Q_{ges}}{2\pi\varepsilon_0} \cdot 2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{Q_{ges}}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\pi}{6} \\
\Rightarrow \Phi_E &= \frac{Q_{ges}}{6\epsilon_0}
\end{aligned}$$

Aus Symmetrieüberlegungen folgt der Fluss durch den gesamten Würfel als Summe der einzelnen Flüsse durch die Würfelseiten zu $\Phi_{E,ges} = 6 \cdot \Phi_E = \frac{Q_{ges}}{\epsilon_0}$.

d) Tangential– und Normalkomponenten:

$$\begin{aligned}
E_{t1} &= E_r \cdot \cos(60°) \\
E_{n1} &= E_r \cdot \sin(60°)
\end{aligned}$$

An der ladungsfreien Grenzfläche folgt:

$$\begin{aligned}
E_{t2} &= E_{t1} = \frac{1}{2} E_r \\
E_{n2} &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{n1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\sqrt{3}}{2} E_r
\end{aligned}$$

Zusammenfassung der y– und z–Anteile:

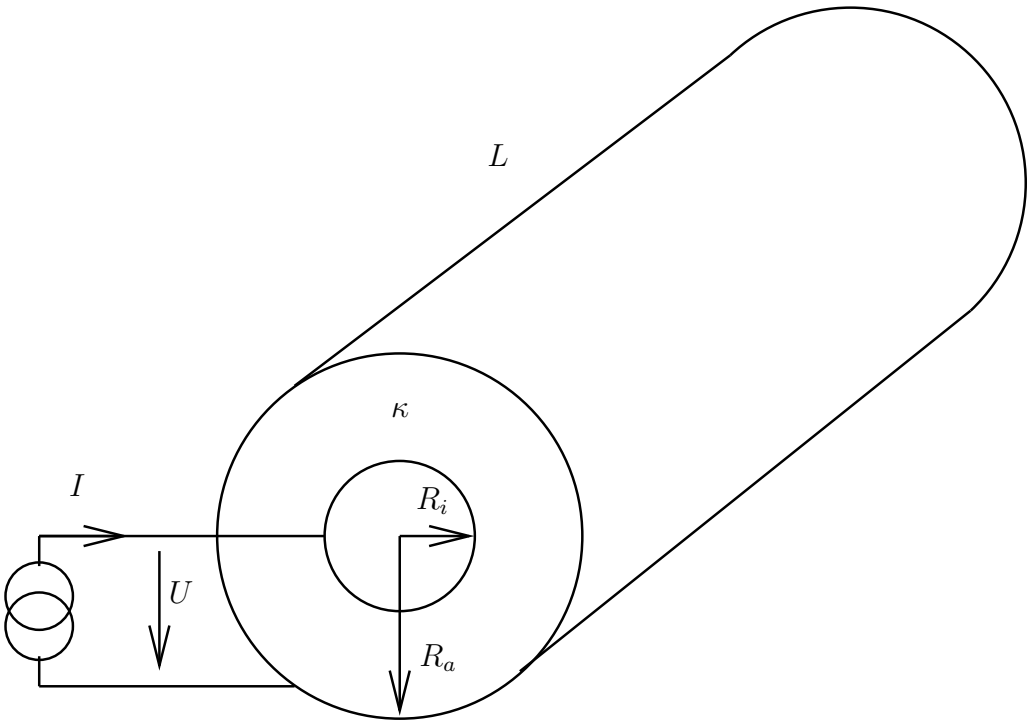
$$\begin{aligned}
E_{y2} &= E_{n2} \sin(60°) + E_{t2} \cos(60°) \\
&= \frac{1}{4} \left(3\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + 1 \right) E_r \\
E_{z2} &= -E_{n2} \cos(60°) + E_{t2} \sin(60°) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) E_r
\end{aligned}$$

Für die gewünschte Ablenkung muss gelten $E_{y2} \stackrel{!}{=} E_{z2}$, d.h.:

$$\begin{aligned}
3\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + 1 &\stackrel{!}{=} \sqrt{3} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \\
\Rightarrow \varepsilon_2 &= (3 + 2\sqrt{3}) \cdot \varepsilon_0
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (16 Punkte)

Gegeben ist ein Zylinderkondensator.



Die innere Elektrode des Kondensators befinde sich bei R_i, die äußere Elektrode bei R_a. Beide Elektroden besitzen unendlich hohe Leitfähigkeit. Der Zwischenraum ist mit einem Dielektrikum mit der Dielektrizität $\varepsilon = \varepsilon_0$ und der konstanten Leitfähigkeit von $\kappa = \kappa_0 \neq 0$ gefüllt.

a) Berechnen Sie mittels der Gleichung

$$\frac{\kappa}{\varepsilon}\,\varrho + \frac{\varepsilon}{\kappa}\,\vec{J}\,\cdot\,\text{grad}\,\frac{\kappa}{\varepsilon} = 0$$

die Raumladungsdichte ϱ zwischen beiden Zylindern.

b) Berechnen Sie das elektrische Feld zwischen beiden Zylindern als Funktion der Gesamtladung Q_i auf dem inneren Zylinder.

Von nun an sei die Leitfähigkeit des Dielektrikums im Zwischenraum radiusabhängig: $\kappa = \frac{\kappa_0 R_0}{r}$. Die angeschlossene Stromquelle liefert einen konstanten Strom $I = I_0$ der durch den Kondensator fließt.

c) Berechnen Sie die Stromdichte $\vec{j}(r)$ in Abhängigkeit von I_0.

d) Wie verändert sich die Raumladungsdichte ϱ zwischen den beiden Zylindern mit dem neuen Dielektrikum. Geben Sie ϱ in Abhängigkeit des Stroms I_0 an.

e) Bestimmen Sie das Skalarpotential $\Phi(r)$ im Bereich $R_i \leq r \leq R_a$. Das Potential der äußeren Elektrode sei gleich Null ($\Phi(R_a) = 0$). Berechnen Sie zusätzlich den Widerstand R des Zylinderkondensators.

Lösung 2 (16 Punkte)

a) $\kappa = \text{const.}$ und $\varepsilon = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \text{grad}\,\frac{k}{\varepsilon} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varrho = 0$

b) Es gilt $\oint\limits_{(V)} \vec{D}\, d\vec{f} = \int\limits_{V} \varrho\, dv$

Der innere Zylinder trage die Ladung Q_i. Aus Symmetriegründen gilt $\vec{D} = D_R(R) \cdot \vec{e}_R$ Da der Zwischenraum feldfrei ist, gilt:

$$Q_i = \oint\limits_{(V)} \vec{D}\, d\vec{f} = D_R(R) \cdot 2\pi\, \ell\, R$$

$$\Rightarrow \quad D_R(R) = \frac{Q_i}{2\pi\, \ell\, R}$$

$$\Rightarrow \quad E_R(R) = \frac{Q_i}{2\pi\, \ell\, R\, \varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q_i}{2\pi\, \ell\, R\, \varepsilon_0}\, \vec{e}_R$$

c) Ansatz: $\vec{I} = \int \vec{j} d\vec{f}$

Der Gesamtstrom durch jede Zylinderhülle zwischen R_i und R_a beträgt I_0. Aufgrund der Symmetrie besitzt $\vec{j}$ nur eine radiale Komponente j_r.

$$I_0 = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{l=0}^{L} j_r(r) r dl d\varphi = 2\pi r L j_r(r)$$

$$j_r(r) = \frac{I_0}{2\pi r L}$$

d) Die Raumladungsdichte im Dielektrikum kann über div $\vec{D} = \rho$ bestimmt werden.

$$\begin{aligned} D_r(r) &= \varepsilon_0 \frac{j_r(r)}{\kappa(r)} \\ &= \frac{I_0 \varepsilon_0}{2\pi r L} \cdot \frac{r}{\kappa_0 R_0} \\ &= \frac{I_0 \varepsilon_0}{2\pi L \kappa_0 R_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \text{div}\, \vec{D} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{I_0 \varepsilon_0}{2\pi L \kappa_0 R_0} \\ &= \frac{I_0 \varepsilon_0}{2\pi L \kappa_0 R_0 r} \end{aligned}$$

e) Ansatz: $\Phi = -\int \vec{E} d\vec{s}$

$$\begin{aligned}\Phi(r) - \underbrace{\Phi(R_a)}_{=0} &= -\int_{R_a}^{r} E_r(r')dr' \\ &= -\left[\frac{I_0}{2\pi L\kappa_0 R_0} r'\right]_{R_a}^{r} \\ &= \frac{I_0}{2\pi L\kappa_0 R_0}(R_a - r)\end{aligned}$$

Widerstand berechnen

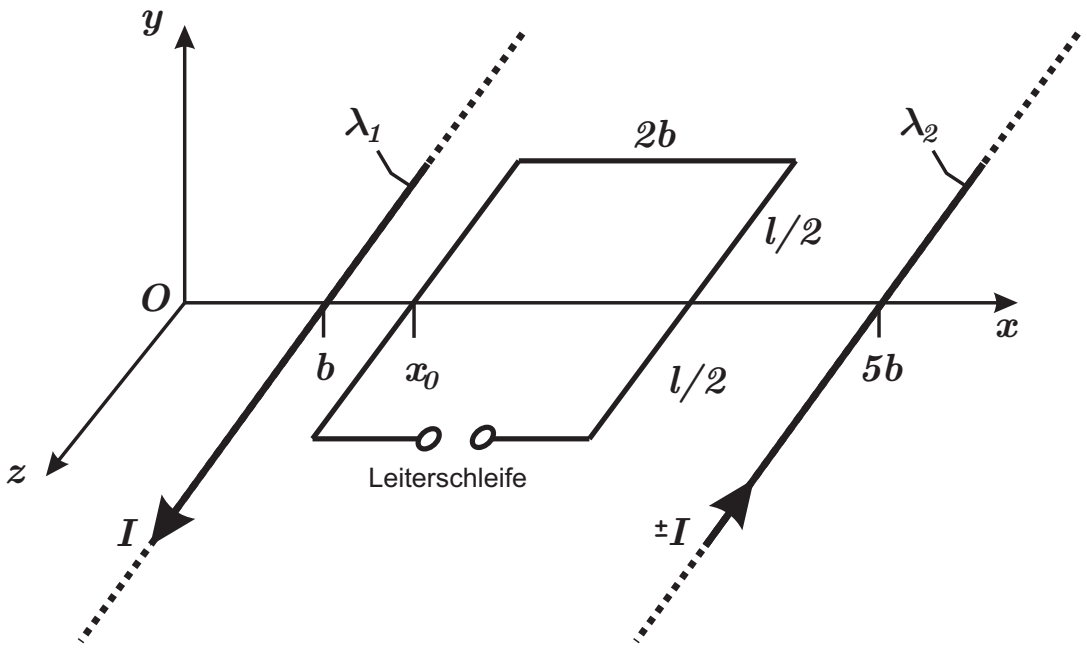
$$R = \frac{U}{I}$$

Spannung U aus Potentialdifferenz.

$$\begin{aligned}U &= \Phi(R_i) - \Phi(R_a) \\ &= \frac{I_0}{2\pi L\kappa_0 R_0}(R_a - R_i)\end{aligned}$$

$$R = \frac{R_a - R_i}{2\pi L\kappa_0 R_0}$$

Aufgabe 3 (16 Punkte)



Zwei unendlich lange, gerade Linienleiter λ_1, λ_2 verlaufen parallel zur z-Achse in der xz-Ebene, wie im Bild dargestellt. Der Betrag des konstanten Stromes in jedem Leiter sei I. **Die Leiterschleife sei zunächst noch nicht da.**

a) Für welchen Strom $+I$ oder $-I$ im Leiter λ_2 existiert im Raum ein H-Feld freier Ort? Wo befindet sich der Ort, und warum existiert dort kein H-Feld?
Hinweis: Orte im Unendlichen sind nicht zu betrachten.

Nun sei der Strom $-I$ im Leiter λ_2.

b) Bestimmen Sie die Komponenten H_x, H_y, H_z der magnetischen Feldstärke $\vec{H}$ zwischen den Leitern im Bereich $b < x < 5b$ in der Ebene $y = 0$.

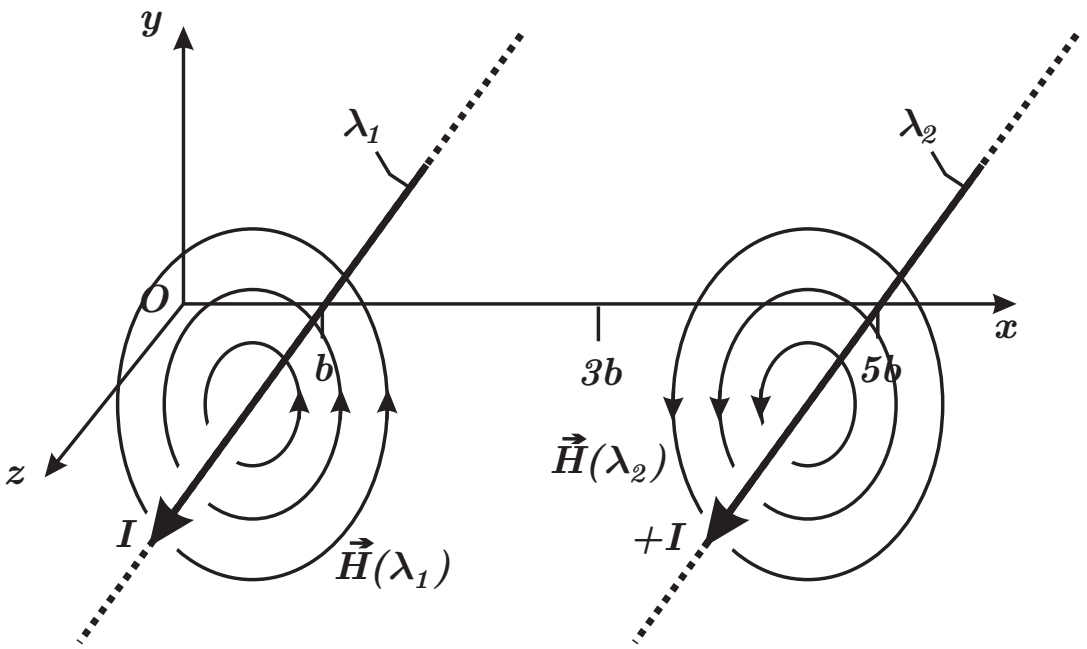
c) Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf des Betrags der magnetischen Feldstärke ($|\vec{H}|$) auf der x-Achse für die drei Bereiche $x < b$, $b < x < 5b$ und $x > 5b$.

Zwischen beiden Leitern liegt nun in der xz-Ebene im Abstand x_0 vom Koordinatenursprung O eine rechteckige, unterbrochene Leiterschleife der Länge l und der Breite $2b$. Die Längsseiten (l) der Schleife liegen parallel zu den beiden stromführenden Leitern λ_1 und λ_2.

d) Berechnen Sie den magnetischen Fluss $\Phi_m(x_0)$ durch die Leiterschleife für $b < x_0 < 3b$.
Hinweise:
- Im Raum sei die Permeabilität $\mu = \mu_0$.
- $\log \alpha - \log \beta = \log \frac{\alpha}{\beta}$ für $\alpha > 0, \beta > 0$ oder $\alpha < 0, \beta < 0$.

e) Wie groß ist der magnetische Fluss $\Phi_m(x_0 = 2b)$ durch die Leiterschleife? Warum?

Lösung 3 (16 Punkte)



a) Da die Ströme durch die Leiter λ_1 und λ_2 betragsmäßig gleich groß sind kann nur zwischen beiden Leitern ein H feldfreier Ort entstehen. Bedingung ist hierfür, dass die $\vec{H}$-Felder sich gegenseitig aufheben. Bei der eingezeichneten Orientierung des Stromzählpfeils von Leiter λ_2 muss der Strom $-I$ fließen damit sich die Felder aufheben.

Lösung Strom: $-I$;

Dies wird besser ersichtlich, wenn man die Zählpfeilrichtung von Leiter λ_2 umkehrt. Damit ändert sich auch das Vorzeichen des Stromes in Leiter λ_2 zu $+I$. Anschließende Anwendung der **rechten Hand-Regel** führt zu obiger Skizze.

Man erkennt die Symmetrie der Anordnung mit den entgegengesetzt gerichteten $\vec{H}$-Feldlinien zwischen den Leitern. Da beide Ströme vom Betrag her identisch sind hebt sich das Feld genau in der Mitte der beiden Leiter ($x = 3b$) auf der xz-Ebene auf.

Lösung feldfreier Raum:
Gerade $(x = 3b, y = 0, z)$ weil sich dort die $\vec{H}$-Felder gegenseitig aufheben

b) Die Feldlinien verlaufen in konzentrischen Kreisen um die stromdurchflossenen Leiter λ_1 und λ_2. Da die Leiter selbst in der $xz-$Ebene ($y = 0$) liegen, besitz das $\vec{H}$-Feld in der $xz-$Ebene nur eine H_y-Komponente. $H_x = H_z = 0$.

Berechnung von H_y:

Für den stromdurchflossenen Leiter gilt das Durchflutungsgesetz:

$$\int \vec{H} \cdot \vec{ds} = I \tag{1}$$

Die allgemeine Lösung in Zylinderkoordinaten (Leiter im Zentrum des Zylinders lautet):

$$I = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} H_r \\ H_\varphi \\ H_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ r d\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = H_\varphi 2\pi r \tag{2}$$

Somit:

$$H_\varphi(r) = \frac{I}{2\pi r} \tag{3}$$

Anpassung der Zylinderkoordinatenlösung auf die kartesischen Koordinaten:

I. Leiter λ_1:

Im Bereich $b < x < 5b$ verlaufen die Feldlinien in der Ebene $y = 0$ in **positive** y-Richtung. Die Position $x = b$ entspricht $r = 0$. Dieser Offset muss berücksichtigt werden:

$$\vec{H}_{y,\lambda_1}(x) = \frac{I}{2\pi(x-b)}\vec{e_y} \tag{4}$$

II. Leiter λ_2:

Im Bereich $b < x < 5b$ verlaufen die Feldlinien in der Ebene $y = 0$ in **negative** y-Richtung. Die Position $x = 5b$ entspricht $r = 0$. Dieser Offset muss berücksichtigt werden:

$$\vec{H}_{y,\lambda_2}(x) = \frac{I}{2\pi(5b-x)} \cdot -\vec{e_y} = \frac{I}{2\pi(x-5b)}\vec{e_y} \tag{5}$$

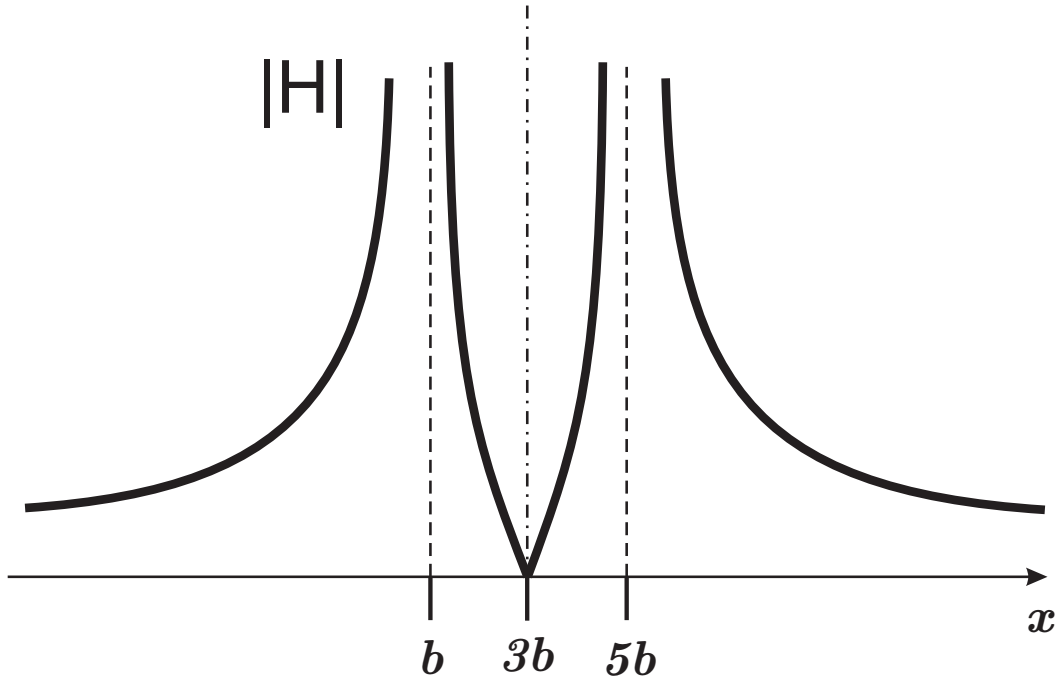
III. Summe der H-Felder:

$$\vec{H}_y(x) = \vec{H}_{y,\lambda_1}(x) + \vec{H}_{y,\lambda_2}(x) = \frac{I}{2\pi}\left(\frac{1}{(x-b)} + \frac{1}{(x-5b)}\right)\vec{e_y} \tag{6}$$

Lösung: $H_x = H_z = 0.$ $\quad H_y(x) = \frac{I}{2\pi}\left(\frac{1}{(x-b)} + \frac{1}{(x-5b)}\right)$

N.B.:
Kontrolle feldfreier Raum aus Aufgabe a) bei $x = 3b$ liefert: $H_y(3b) = \frac{I}{2\pi}\left(\frac{1}{2b} + \frac{1}{-2b}\right) = 0$

c) Da der Betrag der Feldstärke zu skizzieren ist muss der Verlauf spiegelsymmetrisch sein, da beide Leiter betragsmäßig die selbe Feldstärke verursachen. Die Spiegelache muss duch $x = 3b$ gehen, da hier das Feld zu 0 wird. In den Bereichen $x < b$ und $x > 5b$ zeigt die Feldstärke den klassischen 1/r Abfall. Dieser ist auch im Zwischen-Bereich $x < b < 5b$ gegeben nur mit der Randbedingung, dass bei $x = 3b$ das Feld zu 0 werden muss.



d) Allgemein berechnet sich der magenetische Fluß Φ_m durch eine Fläche A zu:

$$\Phi_m = \iint_A \vec{B}\, d\vec{A} \tag{7}$$

mit

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ H_y(x) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Die Feldstärke ist entlang z-Position konstant. Daher muss nur entlang der x-Achse integriert werden. Für den differentiellen Flächenvektor folgt:

$$d\vec{A} = l \cdot dx \cdot \vec{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ l \\ 0 \end{pmatrix} dx. \tag{9}$$

Somit erhält man für den magnetischen Fluss durch die Leiterschleife für $b < x_0 < 3b$:

$$\Phi_m(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+2b} \mu \begin{pmatrix} 0 \\ H_y(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ l \\ 0 \end{pmatrix} dx = \frac{\mu_0\, l\, I}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+2b} \frac{1}{(x-b)} + \frac{1}{(x-5b)}\, dx. \tag{10}$$

Der mathematischen Formelsammlung entnimmt man: $\int \frac{1}{x-a} = \ln(x-a)$. Dies führt zu

$$\begin{aligned} \Phi_m(x_0) &= \frac{\mu_0\, l\, I}{2\pi} \left[\ln(x-b) + \ln(x-5b)\right]_{x_0}^{x_0+2b} && (11)\\ &= \frac{\mu_0\, l\, I}{2\pi} \left(\ln(x_0+b) - \ln(x_0-b) + \ln(x_0-3b) - \ln(x_0-5b)\right). && (12) \end{aligned}$$

Zusammenfassen der Logarithmen wie im Hinweis gegeben liefert dann die
Lösung:

$$\Phi_m(x_0) = \frac{\mu_0\, l\, I}{2\pi} \left(\ln \frac{x_0+b}{x_0-b} + \ln \frac{x_0-3b}{x_0-5b}\right). \quad (13)$$

e) **Lösungsweg I:** Nachdenken und Verständnis
Für $x_0 = 2b$ liegt die Schleife mittig zwischen den beiden Leitern. Leiter λ_1 und λ_1 verursachen im Bereich $0 < x < 5b$ betragsmäßig den selben Fluß aber mit entgegengesetzten Vorzeichen.
Lösung:

$$\Phi_m(x_0 = 2b) = 0. \quad (14)$$

Lösungsweg II: Berechnung mit Lösung aus Aufgabenteil d.

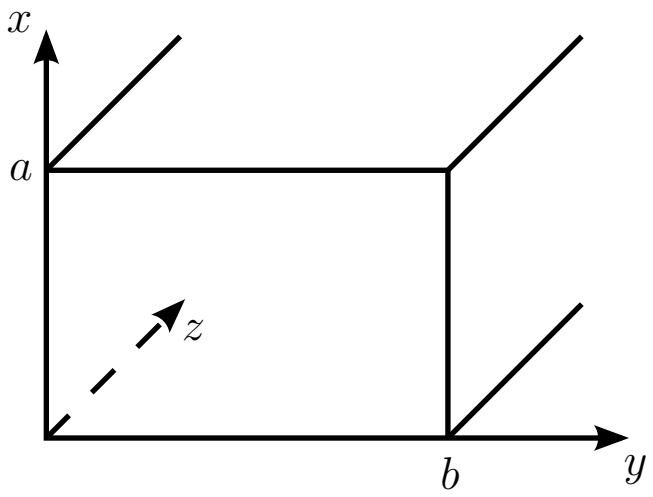
$x_0 = 2b$ einsetzen in Gleichung (13):

$$\begin{aligned} \Phi_m(x_0 = 2b) &= \frac{\mu_0\, l\, I}{2\pi} \left(\ln \frac{2b+b}{2b-b} + \ln \frac{2b-3b}{2b-5b}\right) && (15)\\ &= \frac{\mu_0\, l\, I}{2\pi} \left(\ln 3 + \ln \frac{1}{3}\right) && (16)\\ &= \frac{\mu_0\, l\, I}{2\pi} \left(\ln 3 + \ln 1 - \ln 3\right) && (17)\\ &= 0 && (18) \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (16 Punkte)

Gegeben sei ein Hohlleiter mit rechteckförmigen Querschnitt aus unendlich gut leitendem Material. Die Kantenlängen des Querschnitts seien a und b. Im Inneren des Hohlleiters befindet sich ein Vakuum und es breitet sich eine TE_{mn}-Welle aus. Für H_z gelte

$$H_z = H_z^0(x,y)\mathrm{e}^{j(\omega t - k_z z)}.$$



a) Geben Sie die allgemeinen Randbedingungen für einen ideal leitenden Hohlleiter bezüglich $\vec{E}$ und $\vec{B}$ an.

Geben Sie die Randbedingungen für das $\vec{E}$-Feld und das $\vec{H}$-Feld an.

Geben Sie die Randbedingung für das elektrische Feld der TE_{mn}-Welle an.

b) Die Funktionen $H_z^0 = A\sin k_x x \sin k_y y$ und $H_z^0 = B\cos k_x x \cos k_y y$ beschreiben jeweils ein mögliches $\vec{H}$-Feld im Leiterinneren. Welche der beiden Funktionen erfüllt die Randbedingungen und welche Werte sind für k_x und k_y erlaubt? Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch.

Hinweis:

$$E_x = \frac{-j\omega\mu}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y}$$
$$E_y = \frac{j\omega\mu}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

c) Bestimmen Sie für eine Frequenz ω_1 die Wellenzahl k_z mit dem größten möglichen Wert unter Berücksichtigung der Lösung aus Aufgabenteil b) und der Wellengleichung

$$\Delta\vec{H} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0.$$

Geben Sie alle möglichen Lösungen an.

d) Bestimmen Sie die Phasengeschwindigkeit $\frac{\omega}{k}$ und die Gruppengeschwindigkeit $\frac{d\omega}{dk}$ unter der Annahme das $b > a$.

Lösung 4 (16 Punkte)

a) **Randbedingungen**

Die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ und die Normalkomponente von $\vec{B}$ verschwinden:

$$\vec{E} \times \vec{n} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{B} \cdot \vec{n} = 0, \tag{19}$$

wobei $\vec{n}$ der Normalenvektor auf die Fläche sei. Außerdem folgt aus der Annahme eines Vakuums im Inneren des Hohlleiters, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit entspricht $\bar{c} = c$.

$$E_y(0, y, z) = E_y(a, y, z) = E_x(x, 0, z) = E_x(x, b, z) = 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial H_z(0, y)}{\partial x} = \frac{\partial H_z(a, y)}{\partial x} = \frac{\partial H_z(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial H_z(x, b)}{\partial y} = 0. \tag{21}$$

Für die TE_{mn}-Welle gilt: $E_z = 0$.

b) **Bestimmung von k_x und k_y**

Der richtige Ansatz ist $H_z^0 = B \cos k_x x \cos k_y y$. Die Differentiation in x-Richtung ergibt mit der Randbedingung aus Aufgabenteil a):

$$\frac{\partial H_z^0(0, y)}{\partial x} = -Bk_x \sin k_x 0 \cos k_y y \qquad = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial H_z^0(a, y)}{\partial x} = -Bk_x \sin k_x a \cos k_y y \qquad = 0 \Rightarrow \sin k_x a = 0 \tag{23}$$

$$\Rightarrow k_x = \frac{n\pi}{a} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{24}$$

In y-Richtung ergibt sich:

$$\frac{\partial H_z^0(x, 0)}{\partial y} = -Bk_y \cos k_x x \sin k_y 0 \qquad = 0, \tag{25}$$

$$\frac{\partial H_z^0(x, b)}{\partial y} = -Bk_y \cos k_x x \sin k_y b \qquad = 0 \Rightarrow \sin k_y b = 0 \tag{26}$$

$$\Rightarrow k_y = \frac{m\pi}{b} \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{27}$$

unter der Bedingung das nicht gleichzeitig $m = 0$ und $n = 0$ gilt, da sonst die Bedingung $\mathrm{div}\vec{H} \neq 0$ verletzt wird.

c) **Berechnung der Wellenzahl k_z**

Die Gleichung für H_z lautet:

$$H_z = B \cos \frac{m\pi}{b} y \cos \frac{n\pi}{a} x \mathrm{e}^{j(\omega t - k_z z)}. \tag{28}$$

Aus der in der Aufgabenstellung gegebenen Wellengleichung ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} 0 &= -\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - k_z^2 + \omega^2 \mu\epsilon, \\ \Rightarrow k_z^2 &= \omega^2 \mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2. \end{aligned} \tag{29}$$

Die größtmögliche Lösung für k_z ergibt sich in Abhängigkeit von a und b unter folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} &m = 0,\, n = 1, \\ &m = 1,\, n = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Die Bedingungen sind geknüft an die Forderung aus Aufgabenteil b) das immer eine Komponente n oder m ungleich Null sein muss!

Für $m = 0$ und $n = 1$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} k_z^2 &= \omega_1^2 \mu\epsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \\ \Rightarrow k_z &= \sqrt{\omega_1^2 \mu\epsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}. \end{aligned} \tag{31}$$

Für $m = 1$ und $n = 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} k_z^2 &= \omega_1^2 \mu\epsilon - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \\ \Rightarrow k_z &= \sqrt{\omega_1^2 \mu\epsilon - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}. \end{aligned} \tag{32}$$

Je nachdem ob a größer ist als b oder umgekehrt ergibt sich das entsprechende Ergebnis!

d) **Phasen- und Gruppengeschwindigkeit bestimmen**

Da $b > a$ folgt aus den Lösungen von Aufgabenteil c) für k_z:

$$k_z\,(b) > k_z\,(a) \Rightarrow \max\,(k_z) = k_z(b) = \sqrt{\omega_1^2 \mu\epsilon - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}. \tag{33}$$

Für die Phasengeschwindigkeit $\frac{\omega}{k_z}$ ergibt sich damit:

$$\frac{\omega}{k_z} = c = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \mu\epsilon - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}} \tag{34}$$

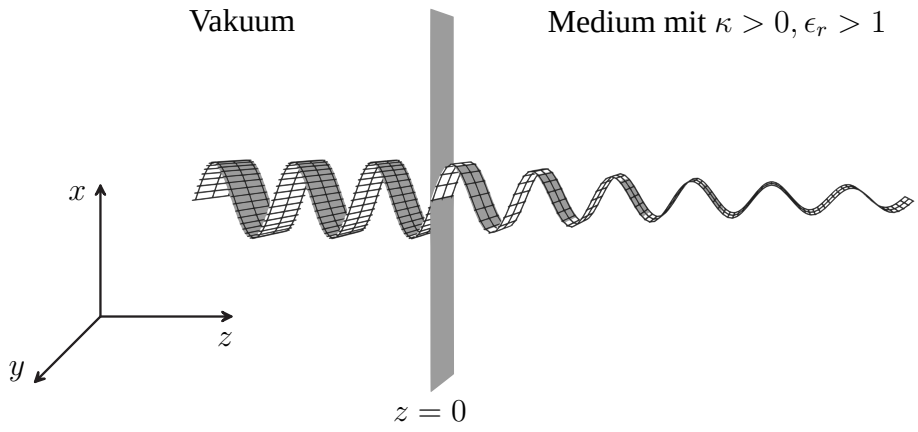
und für die Gruppengeschwindigkeit $\frac{d\omega}{dk}$ resultiert:

$$v_g = \frac{c_0^2}{c} = \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\sqrt{\omega^2 \mu\epsilon - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}}{\omega} \tag{35}$$

oder

$$v_g = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)^{-1}. \tag{36}$$

Aufgabe 5 (16 Punkte)



Eine elektromagenetische, ebene Welle breitet sich im Vakuum in z-Richtung aus und trifft an der Stelle $z = 0$ auf ein leitfähiges Medium mit $\kappa > 0$ und $\epsilon_r > 1$. Das Feld im leitfähigen Medium wird durch folgenden Ansatz beschrieben:

$$\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x$$
$$\vec{H} = H_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y$$

Hinweis: Alle folgenden Aufgabenteile beziehen sich auf das leitfähige Medium.

a) Bestimmen Sie k im Medium mit Hilfe der Wellengleichung für harmonische Vorgänge

$$\Delta \vec{E} - j\,\omega\,\mu\,\kappa\,\vec{E} + \omega^2\,\mu\,\varepsilon\,\vec{E} = 0$$

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Maxwellgleichungen H_0 als Funktion von E_0.

c) Wie groß ist der Betrag der Phasenverschiebung zwischen $\vec{H}$- und $\vec{E}$-Feld im Medium?

d) Das Material leitet sehr gut ($\kappa \gg \omega\varepsilon$).
Berechnen Sie die Näherung für k und zerlegen Sie k in seinen Real- und Imaginärteil. Geben Sie den Ausdruck für das $\vec{E}$-Feld an.
Hinweis: $\sqrt{-j} = \dfrac{1-j}{\sqrt{2}}$

e) Nach welcher Distanz im Medium hat die Strahlungsleistung der Welle um -3dB abgenommen?

Lösung 5 (16 Punkte)

a)

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - j\omega\mu\kappa\vec{E} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{E} = 0$$

Angegebenes $\vec{E}$-Feld eingesetzt:

$$\Rightarrow \quad k^2 = -j\omega\mu\kappa + \omega^2\mu\varepsilon$$

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\,\sqrt{1 - \frac{j\kappa}{\omega\varepsilon}}$$

b) Berechnung von H_0:

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\,\vec{B}}{\partial\,t}$$

$$\text{rot}\,\vec{E} = \frac{\partial\,E_x}{\partial z}\vec{e}_y = -jkE_0 e^{j(\omega t - kz)}\vec{e}_y$$

$$-\frac{\partial\,\vec{B}}{\partial\,t} = -j\omega\mu H_0 e^{j(\omega t - kz)}\vec{e}_y$$

$$\Rightarrow H_0 = \frac{k}{\omega\mu}E_0 \tag{37}$$

c) Die Phasendrehung wird nach Gleichung 37 durch die komplexe Wellenzahl verursacht. Es ist also die Phase von k zu berechnen.

$$\angle k = \arctan\frac{\text{Im}\{k\}}{\text{Re}\{k\}}$$

Da sich k schwer zerlegen lässt, kann man nach den Rechenregeln für komplexe Zahlen auch die Phase von k^2 berechnen:

$$\angle k = \frac{1}{2}\angle k^2 = \frac{1}{2}\arctan\frac{-\omega\mu\kappa}{\omega^2\mu\varepsilon} = -\frac{1}{2}\arctan\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}$$

d)

$$k \;\simeq\; \omega\,\sqrt{\mu\varepsilon}\,\sqrt{\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}}\,\sqrt{-j}$$

$$\simeq \sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}}\,(1-j)$$

$$\Rightarrow\; \vec{E} = E_0 e^{j\omega t} e^{-j\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}}z} e^{-\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}}z}\vec{e}_x$$

e) Da nach der Strahlungsleistungsdichte gefragt ist, muss der Pointingvektor betrachtet werden. Es gilt:

$$S \sim E^2$$

Daher muss gelten:

$$\frac{\left\|\vec{E}(z)\right\|^2}{\left\|E^2(z=0)\right\|^2} = -3\text{dB} \approx 0,5$$

$$\Rightarrow e^{-\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}}z} \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}}z} = e^{-\sqrt{2\omega\mu\kappa}z} = 0,5 \quad \Rightarrow -\sqrt{2\omega\mu\kappa}z = \ln(0,5)$$

$$\Rightarrow z = -\frac{\ln(0,5)}{\sqrt{2\omega\mu\kappa}} = \frac{\ln(2)}{\sqrt{2\omega\mu\kappa}}$$