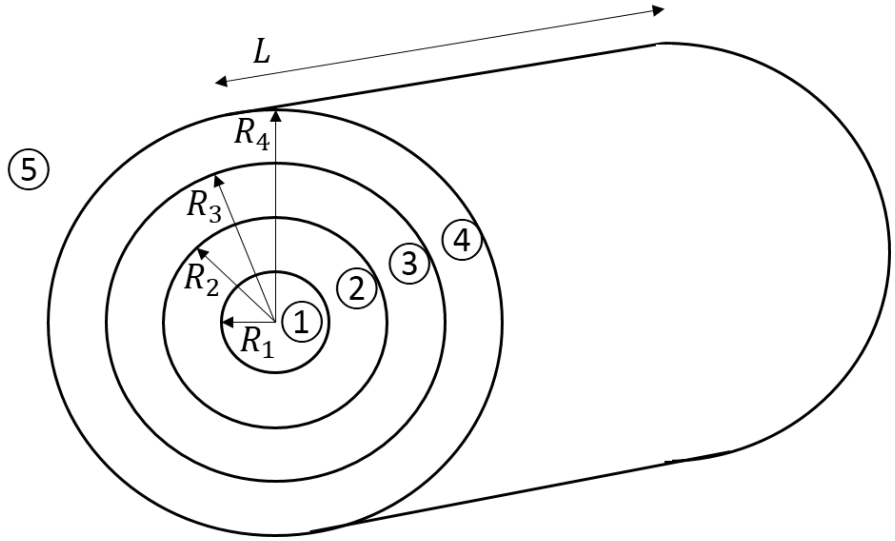
Aufgabe 1 (16 Punkte)

Gegeben ist folgender Zylinder mit Länge L und Gesamtladung Q_{ges}.
Es gelte überall im Raum $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, Randeffekte können vernachlässigt werden.



(1)	$0 \leq R < R_1$:	$\varepsilon_r = 2$	$\kappa = 0$	$\varrho = ???$	$\vec{E} = \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0} R^2 \, \vec{e}_R$
(2)	$R_1 \leq R < R_2$:	$\varepsilon_r = 3$	$\kappa = 0$	$\varrho = \varrho_0$	$\vec{E} = ???$
(3)	$R_2 \leq R < R_3$:	$\varepsilon_r = 1$	$\kappa = \infty$	$\varrho = ???$	$\vec{E} = ???$
(4)	$R_3 \leq R \leq R_4$:	$\varepsilon_r = 1$	$\kappa = 0$	$\varrho = 0$	$\vec{E} = ???$
(5)	$R_4 < R < \infty$:	$\varepsilon_r = 1$	$\kappa = 0$	$\varrho = 0$	$\vec{E} = 0$

a) Berechnen Sie die unbekannten Größen in den Bereichen (1), (2) und (3).

b) Berechnen Sie das elektrische Potential Φ in den Bereichen (2), (3) und (4).
Hinweis: Es gelte $\Phi(\infty) = 0$.

Die Anordnung aus a) wird nun aus großer Entfernung betrachtet. Der Zylinder ist in der xy-Ebene so ausgerichtet, dass seine Enden bei $P_1(x_1, y_1) = (-\frac{L}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6})$ und $P_2(x_2, y_2) = (+\frac{L}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6})$ liegen.
Für $R_4 < R < \infty$ gelten $\varepsilon_r = 1$, $\kappa = 0$, $\varrho = 0$ und $\vec{E} \neq 0$.

c) Es gelte weiterhin $\Phi(\infty) = 0$. Berechnen Sie das elektrische Potential Φ im Koordinatenursprung unter Verwendung des Coulombintegrals in kartesischen Koordinaten.
Hinweis: Betrachten Sie den Zylinder als Linienleiter mit Länge L und Gesamtladung Q_{ges}.

Die Anordnung aus c) wird nun innerhalb der xy-Ebene so verschoben, dass die Enden des Linienleiters durch $P_3(x_3, y_3) = (-\frac{L}{2}, 0)$ und $P_4(x_4, y_4) = (+\frac{L}{2}, 0)$ gegeben sind.

d) Ein Elektron startet bei $P_5(x_5, y_5) = (0, 2\sqrt{3}L)$ aus der Ruhelage und bewegt sich entlang der y-Achse. Berechnen Sie den Betrag seiner Geschwindigkeit bei $P_6(x_6, y_6) = (0, \sqrt{2}L)$.

Hinweis: Die Aufgabenteile c) & d) können unabhängig von a) & b) gelöst werden.

Lösung 1 (16 Punkte)

a) Raumladungsdichte und $\vec{E}$-Feld:

$0 \leq R < R_1$:

Materialgleichung: $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \Rightarrow D_R = 2 \cdot \varepsilon_0 \cdot E_R$

Satz von Gauss (differentielle Form):

$$\begin{aligned} \varrho = \text{div}\vec{D} &= \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R}\Big(R \cdot D_R\Big) \\ &= \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R}\Big(R \cdot 2\varrho_0 R^2\Big) \\ \Rightarrow \varrho(R) &= 6\varrho_0 R \end{aligned}$$

$R_1 \leq R < R_2$:

Zylindersymmetrie:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_R(R) \cdot \vec{e}_R \\ \Rightarrow d\vec{f} &= \vec{e}_R \cdot R\, d\varphi\, dz \\ \Rightarrow dv &= R\; dR\, d\varphi\, dz \end{aligned}$$

Satz von Gauss (integrale Form):

$$\oint \vec{D}\, d\vec{f} = \int \varrho\, dv$$

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} D_R \cdot\; R\, d\varphi\, dz = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} 6\varrho_0 R' \cdot\; R'\, dR' d\varphi\, dz + \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R} \varrho_0 \cdot\; R'\, dR' d\varphi\, dz$$

$$\begin{aligned} 2\pi L R \cdot D_R &= 2\pi L \varrho_0 \cdot \left(6 \cdot \left[\frac{R'^3}{3}\right]_0^{R_1} + \left[\frac{R'^2}{2}\right]_{R_1}^{R}\right) \\ D_R &= \varrho_0 \cdot \left(2\frac{R_1^3}{R} + \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}\frac{R_1^2}{R}\right) \\ \Rightarrow E_R &= \frac{1}{\varepsilon} \cdot D_R = \frac{1}{3\varepsilon_0} \cdot \varrho_0 \cdot \left(\frac{4R_1^3 - R_1^2}{2R} + \frac{1}{2}R\right) \end{aligned}$$

$R_2 \leq R \leq R_3$:

idealer Leiter ($\kappa = \infty$): $\Rightarrow \vec{E} = 0 \quad \varrho = \text{div}(\varepsilon\vec{E}) = 0$

b) Elektrisches Potential:

Skalarpotential (Elektrostatik): $\Phi_{el}(\vec{r}_2) - \Phi_{el}(\vec{r}_1) = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E}\, d\vec{s}$

Zylindersymmetrie: $\vec{E} = E_R(R) \cdot \vec{e}_R \;\Rightarrow d\vec{s} = \vec{e}_R\, dR$

Es gilt $\Phi(\infty) = 0$, d.h. die Rechnung erfolgt von Außen nach Innen. Benötigt wird also zunächst das Potential in Bereich (5).

$R_4 \leq R < \infty$:

$$\begin{aligned} \Phi(R) - \underbrace{\Phi(\infty)}_{=0} &= -\int_{\infty}^{R} 0 \; dR' \\ \Rightarrow \Phi(R) &= 0 \end{aligned}$$

$R_3 \leq R < R_4$:

Das $\vec{E}$-Feld in Bereich (4) wird mit dem Satz von Gauß berechnet. Die Gesamtladung des Zylinders beträgt Q_{ges}, daraus folgt:

$$\begin{aligned} 2\pi LR \cdot D_R &= Q_{ges} \\ \Rightarrow E_R &= \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_{ges}}{2\pi LR} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(R) - \underbrace{\Phi(R_4)}_{=0} &= -\int_{R_4}^{R} \left(\frac{Q_{ges}}{2\pi\varepsilon_0 L} \cdot \frac{1}{R'} \right) dR' \\ &= -\frac{Q_{ges}}{2\pi\varepsilon_0 L} \cdot \left[\ln(R') \right]_{R_4}^{R} \\ \Rightarrow \Phi(R) &= -\frac{Q_{ges}}{2\pi\varepsilon_0 L} \cdot \ln\left(\frac{R}{R_4} \right) \end{aligned}$$

$R_2 \leq R < R_3$:

$$\begin{aligned} \Phi(R) - \Phi(R_3) &= -\int_{R_3}^{R} 0 \; dR' \\ \Rightarrow \Phi(R) &= \Phi(R_3) = -\frac{Q_{ges}}{2\pi\varepsilon_0 L} \cdot \ln\left(\frac{R_3}{R_4} \right) \end{aligned}$$

$R_1 \leq R < R_2$:

$$\begin{aligned} \Phi(R) - \Phi(R_2) &= -\int_{R_2}^{R} \frac{\varrho_0}{3\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{4R_1^3 - R_1^2}{2R} + \frac{1}{2}R \right) dR' \\ \Phi(R) &= \Phi(R_2) - \frac{\varrho_0}{3\varepsilon_0} \left[\left(2R_1^3 - \frac{1}{2}R_1^2 \right) \cdot \ln(R') + \frac{1}{4}R'^2 \right]_{R_2}^{R} \\ \Rightarrow \Phi(R) &= \frac{\varrho_0}{3\varepsilon_0} \left[\left(2R_1^3 - \frac{1}{2}R_1^2 \right) \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R} \right) + \frac{1}{4}\left(R_2^2 - R^2 \right) \right] - \frac{Q_{ges}}{2\pi\varepsilon_0 L} \cdot \ln\left(\frac{R_3}{R_4} \right) \end{aligned}$$

c) Elektrisches Potential:

Die Ladungsverteilung hat die Form eines unendlich dünnen Zylinders mit der konstanten Ladungsdichte $\lambda = Q_{ges}/L$, das Volumenintegral wird zum Linienintegral:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \cdot \int \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \, d\vec{s}'$$

Das elektrische Potential wird im Ursprung berechnet, d.h. $\vec{r} = \vec{0}$.
Der Leiter verläuft im Abstand $d = y_1 = y_2$ parallel zur x-Achse, d.h. $\vec{r}' = x \cdot \vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \vec{e}_y$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\vec{r} - \vec{r}'\| &= \sqrt{x^2 + \frac{1}{12}} \\ d\vec{s}' &= \vec{e}_x \cdot dx \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für das zu lösende Integral:
(Hinweis: $\int \frac{da}{\sqrt{a^2+b^2}} = \ln(a + \sqrt{a^2 + b^2})$, siehe z.B. Bronstein)

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 + \frac{1}{12}}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\ln\left(x' + \sqrt{x'^2 + \frac{1}{12}} \right) \right]_{-L/2}^{L/2} \\ \Rightarrow \Phi(0) &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{(+\frac{1}{2}L)^2 + \frac{1}{12}} + \frac{1}{2}L}{\sqrt{(-\frac{1}{2}L)^2 + \frac{1}{12}} - \frac{1}{2}L} \right) \end{aligned}$$

d) Energieerhaltungssatz:

Für kinetische Energie W_{kin} und elektrische Energie W_{el} gilt allgemein:

$$\begin{aligned} 0 &= W_{kin} + W_{el} \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + q\Delta\Phi \end{aligned}$$

Elektrische Energie:

Zur Bestimmung des Potentials können die Überlegungen aus c) verwendet werden. Für einen allgemeinen Punkt auf der y-Achse, d.h. $y \neq -\frac{\sqrt{3}}{6}$, gilt demnach

$$\Phi(y) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{(+\frac{1}{2}L)^2 + y^2} + \frac{1}{2}L}{\sqrt{(-\frac{1}{2}L)^2 + y^2} - \frac{1}{2}L} \right)$$

Daraus ergibt sich an den Punkten P_5 und P_6

$$\begin{aligned}\Phi(y_5) &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{\sqrt{(+\frac{1}{2}L)^2+(2\sqrt{3}L)^2}+\frac{1}{2}L}{\sqrt{(-\frac{1}{2}L)^2+(2\sqrt{3}L)^2}-\frac{1}{2}L}\right)\\ \Phi(y_6) &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{\sqrt{(+\frac{1}{2}L)^2+(\sqrt{2}L)^2}+\frac{1}{2}L}{\sqrt{(-\frac{1}{2}L)^2+(\sqrt{2}L)^2}-\frac{1}{2}L}\right)\end{aligned}$$

Für die elektrische Energie folgt

$$\begin{aligned}W_{el} &= q\Delta\Phi\\ &= -|e|\cdot(\Phi(y_6)-\Phi(y_5))\\ &= -|e|\cdot\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln(2)-\ln(\frac{4}{3})\right)\\ \Rightarrow W_{el} &= -\frac{|e|\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{3}{2}\right)<0\end{aligned}$$

wobei $q=-|e|$ der Ladung des Elektrons entspricht.

Geschwindigkeitsbetrag:

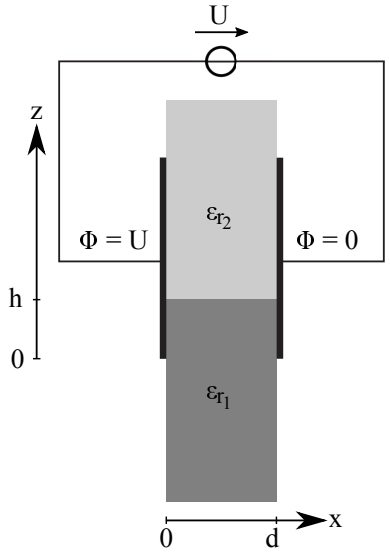
Die Geschwindigkeit ergibt sich gemäß Energieerhaltungssatz zu

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{\frac{-2W_{el}}{m}}\\ &= \sqrt{\frac{|e|}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{m}\cdot\ln\left(\frac{3}{2}\right)}\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (16 Punkte)

Gegeben sei ein Plattenkondensator mit quadratischen Platten der Kantenlänge a und dem Plattenabstand d ($d \ll a^2$). Die Spannung U ist angelegt.

Zunächst sei der Kondensator mit zwei nichtleitenden Dielektrika vollständig gefüllt. Diese werden so fixiert, dass die Grenze der beiden Bereiche bei $z = h$ liegt.



a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ innerhalb des Kondensators in Abhängigkeit von der Spannung U und bestimmen Sie die Flächenladungsdichte auf der linken Platte ($x = 0$).

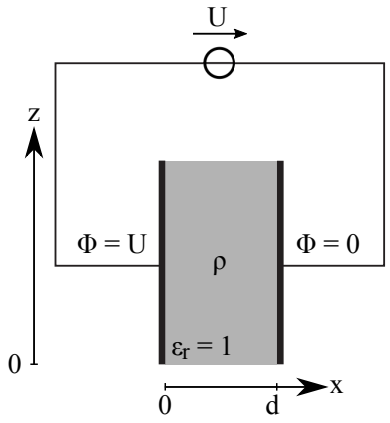
b) Berechnen Sie die Kapazität C in Abhängigkeit von h.

c) Wie muss h gewählt werden, damit beide Bereiche dieselbe Energie aufweisen?

d) Bestimmen sie den Betrag der Kraft in z-Richtung, die durch die unterschiedlichen ϵ_{r_i} hervorgerufen wird.

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von a) bis d).

Nun sei der Kondensator mit einer gleichverteilter Raumladungsdichte ρ und $\epsilon_r = 1$ gefüllt.



e) Bestimmen Sie das Potential mittels Poissongleichung. Bestimmen Sie dabei nach Möglichkeit alle freien Parameter des Lösungsansatzes der Differentialgleichung anhand der gegebenen Randbedingungen.

f) Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ und die Flächenladungsdichten auf beiden Platten.

Lösung 2 (16 Punkte)

a) Aufgrund von $d \ll a^2$ lässt sich es auf ein eindimensionales Problem zurückführen.

$$\Phi(x=0) - \Phi(x=d) = U = -\int_d^0 E_x dx = E_x d$$

Innerhalb des Kondensators gilt also:

$$\vec{E} = \frac{U}{d}\vec{e}_x$$

Die Flächenladungsdichte σ lässt sich aus $D_{n2} - D_{n1} = \sigma$ berechnen. Auf der linken Platte gilt $D_{n1} = 0$.

$$\sigma(x) = \begin{cases} \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} \frac{U}{d} & 0 \leq z \leq h \\ \varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} \frac{U}{d} & h < z \leq a \end{cases}$$

b) Die Kapazität lässt sich über

$$C(h) = \frac{Q}{U} = \frac{\oint \vec{D}\, d\vec{f}}{U} = \frac{\varepsilon_0}{d}(\varepsilon_{r_1} a \cdot h + \varepsilon_{r_2} a \cdot (a-h))$$

finden.

c) Die Energie im Kondensator ist in diesem Fall durch $W = \frac{1}{2}CU^2$ bzw. $W = \frac{1}{2}\int \varepsilon \vec{E}^2\, dv$ gegeben.

Mit $W_1(h) = W_2(h)$ folgt, dass die Teilkapazitäten $C_1(h)$ und $C_2(h)$ gleich sein müssen:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_0}{d}(\varepsilon_{r_1} a \cdot h) &= \frac{\varepsilon_0}{d}(\varepsilon_{r_2} a \cdot (a-h)) \\ \Rightarrow h &= \frac{\varepsilon_{r_2} a}{\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2}}. \end{aligned}$$

d) Die Gesamtenergie ist mit

$$\begin{aligned} W(h) &= \frac{1}{2}C(h)U^2 \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_0}{d}(\varepsilon_{r_1} a \cdot h + \varepsilon_{r_2} a \cdot (a-h))U^2 \end{aligned}$$

gegeben. Aus $|\vec{F}| = \left|\frac{\delta W}{\delta h}\right|$ folgt

$$|\vec{F}| = \left|\frac{\varepsilon_0 a U^2}{2d}(\varepsilon_{r_1} - \varepsilon_{r_2})\right|.$$

e) Es handelt sich weiterhin um eindimensionales Problem, sodass $\Delta\Phi = \frac{\delta^2 \Phi(x)}{\delta x^2}$ gilt.

$$\frac{\delta^2\Phi(x)}{\delta x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\Rightarrow \frac{\delta\Phi(x)}{\delta x} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}x + c_1$$
$$\Rightarrow \Phi(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2 + c_1 x + c_2$$

Aus der ersten Randbedingungen $\Phi(x=0) = U$ folgt unmittelbar $c_2 = U$.
Mit der zweiten Randbedingung $\Phi(x=d) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}d^2 + c_1 d + U = 0$ lässt sich c_1 zu

$$c_1 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}d - \frac{U}{d}$$

ermitteln.

$$\Phi(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2 + (\frac{\rho}{2\varepsilon_0}d - \frac{U}{d})x + U$$

f)

$$\vec{E} = -\text{grad}\Phi = -\vec{e}_x\frac{\delta\Phi(x)}{\delta x} = \vec{e}_x\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}x - \frac{\rho}{2\varepsilon_0}d + \frac{U}{d}\right)$$

Die Flächenladungsdichte σ lässt sich aus $D_{n_2} - D_{n_1} = \sigma$ berechnen.
Linke Platte:

$$\sigma_1 = D_n(x=0) = \varepsilon_0\left(-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}d + \frac{U}{d}\right)$$

Rechte Platte:

$$\sigma_2 = -D_n(x=d) = \varepsilon_0\left(-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}d - \frac{U}{d}\right)$$

Aufgabe 3 (16 Punkte)

Gegeben sei eine Toroidspule mit N Windungen und rechteckigem Querschnitt, innerem Radius a, äußerem Radius b und der Höhe h. Die Spule ist an eine Stromquelle angeschlossen, die den sinusförmigen Wechselstrom I_a liefert.

Ein Querschnitt der Spule ist in Abbildung 1 dargestellt. Beachten Sie, dass in Abbildung 1 nur eine Hälfte der ringförmigen Spule dargestellt ist.

In allen Aufgabenteilen gilt die Annahme, dass inhomogene Felder außerhalb von Spulen zu vernachlässigen sind.

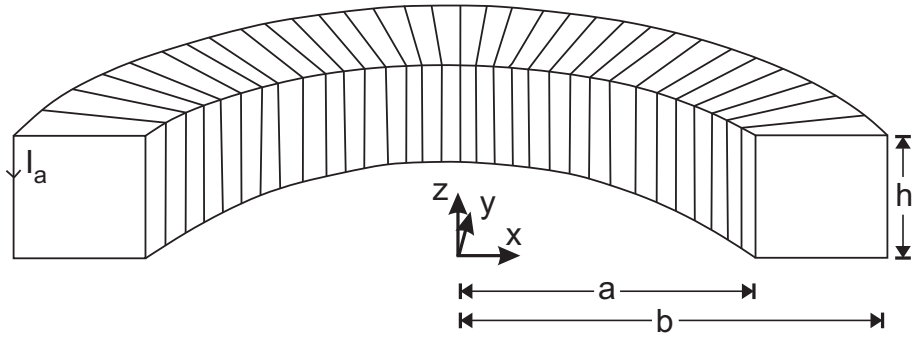


Abbildung 1: Toroidspule mit rechteckigem Querschnitt

a) Berechnen Sie die magnetische Flussdichte $\vec{B}_a$ innerhalb der Spule, d.h. für alle $r \in (a, b)$.
Skizzieren Sie $\vec{B}_a$ in Abbildung 1.

b) Berechnen Sie den selbstinduzierten magnetischen Fluss Φ_{aa} der Spule.
Berechnen Sie den Selbstinduktionskoeffizienten L_{aa}.

Nun befinde sich die Spule aus Abbildung 1 in einer größeren Toroidspule mit M Windungen und einem ebenfalls rechteckigen Querschnitt. Die äußere Spule besitzt den inneren Radius c, den äußeren Radius d und die Höhe $2h$. Die gesamte Anordnug ist in Abbildung 2 dargestellt.

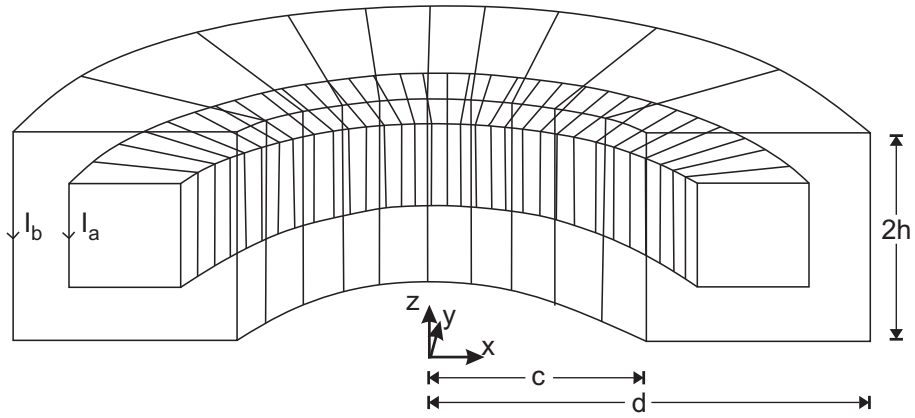


Abbildung 2: Toroidspule in größerer Toroidspule

c) Ändert sich der Selbstinduktionskoeffizient L_{aa} durch das Einbringen in eine äußere Spule? Begründen Sie!

Berechnen Sie die Induktionskoeffizienten L_{ab}, L_{ba} und L_{bb}.

d) Nun werden die Kontakte der inneren Spule kurzgeschlossen ($U_a = 0$). Der ohmsche Widerstand der inneren Spule R_a ist zu vernachlässigen (Hinweis: Dies ist analog zu einer supraleitenden Spule). Der Widerstand der äußeren Spule betrage $R_b \neq 0$.

Welche Spannung U_b muss an der äußeren Spule angelegt werden, damit dort der Strom $I_b = I_0 \cos(\omega_0 t)$ fließt?

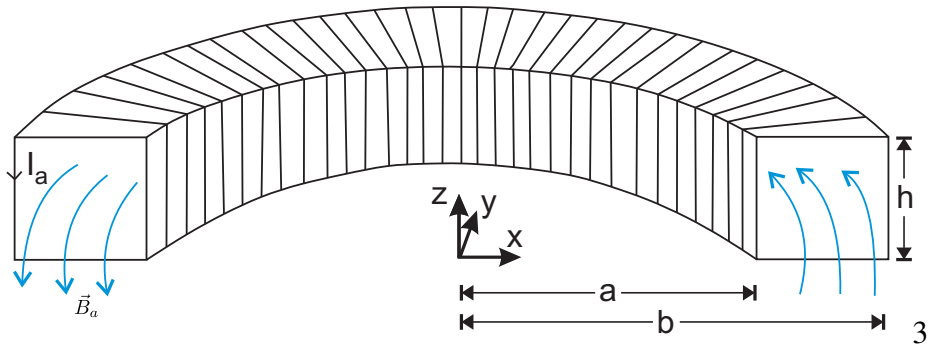
Lösung 3 (16 Punkte)

a) Mit dem Durchflutungsgesetz $\oint \vec{H} d\vec{s} = \int \vec{J} d\vec{f}$ ergibt sich

$$\vec{H}_a \cdot 2\pi r = N I_a \vec{e}_\varphi$$

Somit ergibt sich für die magnetische Flussdichte für $r \in (a, b)$

$$\vec{B}_a = \mu_0 \frac{N I_a}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$



3

b) Durch Integration über den rechteckigen Querschnitt der Spule (infinitessimales Flächenelement $df_a = hdr$) kann der magnetische Fluss berechnet werden.

$$\begin{aligned}
\Phi_{aa} &= \iint_{F_a} \vec{B}_a d\vec{f}_a \\
&= \int_a^b \mu_0 \frac{N I_a}{2\pi r} h dr \\
&= \mu_0 \frac{N I_a h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}
\end{aligned}$$

Der Selbstinduktionskoeffizient L_{aa} ist somit

$$L_{aa} = \frac{N}{I_a} \Phi_{aa} = \mu_0 \frac{N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

c) Der Selbstinduktionskoeffizient L_{aa} beschreibt, wie Änderungen des Stroms I_a in der Spule mit einem genau dadurch verursachten magnetischen Fluss Φ_{aa} durch den Querschnitt der Spule gekoppelt sind. Dies ist also eine Eigenschaft der Spule selbst.

Externe magnetische Felder beeinflussen bzw. stören diesen Zusammenhang nicht. Sie werden nach dem Superpositionsprinzip einfach überlagert. Deshalb ist L_{aa} unabhängig vom Magnetfeld, das durch die äußere Spule erzeugt wird, und ändert sich beim Einbringen in eine äußere Spule nicht.

Die Selbstinduktivität der äußeren Spule wird analog zur inneren Spule berechnet:

$$L_{bb} = \frac{M}{I_b}\Phi_{bb} = \mu_0 \frac{M^2 2h}{2\pi} \ln \frac{d}{c}$$

Bei der Berechnung der Gegeninduktivitäten muss der Querschnitt der inneren Spule berücksichtigt werden. Es ergibt sich für den magnetischen Fluss

$$\begin{aligned} \Phi_{ab} &= \int_a^b \mu_0 \frac{NI_a}{2\pi r} h dr \\ &= \mu_0 \frac{NI_a h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Phi_{ba} &= \int_a^b \mu_0 \frac{MI_b}{2\pi r} h dr \\ &= \mu_0 \frac{MI_b h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Somit sind die Indiktionskoeffizienten gegeben durch

$$L_{ab} = L_{ba} = \mu_0 \frac{NMh}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

d) Die magnetischen Flüsse in den Spulen überlagern sich (Superpositionsprinzip):

$$\begin{aligned} \Phi_a &= \Phi_{aa} + \Phi_{ba} \\ &= \frac{L_{aa}}{N} I_a + \frac{L_{ba}}{N} I_b \\ \Phi_b &= \Phi_{ab} + \Phi_{bb} \\ &= \frac{L_{ab}}{M} I_a + \frac{L_{bb}}{M} I_b \end{aligned}$$

Die Spannungen U_a und U_b setzen sich aus den induzierten Spannungen $U_{ind,ik} = -N_k \frac{d\Phi_{m,ik}}{dt}$ und der über den ohmschen Widerstand der Spule abfallenden Spannung zusammen:

$$\begin{aligned} U_a &= U_{ind,aa} + U_{ind,ba} \\ &= -L_{aa}\dot{I}_a - L_{ab}\dot{I}_b \\ U_b &= U_{ind,ab} + U_{ind,bb} + R_b I_b \\ &= -L_{ab}\dot{I}_a - L_{bb}\dot{I}_b + R_b I_b \end{aligned}$$

Wie in der Aufgabenstellung gegeben ist $U_a = 0$. Somit kann die erste Gleichung aufgelöst

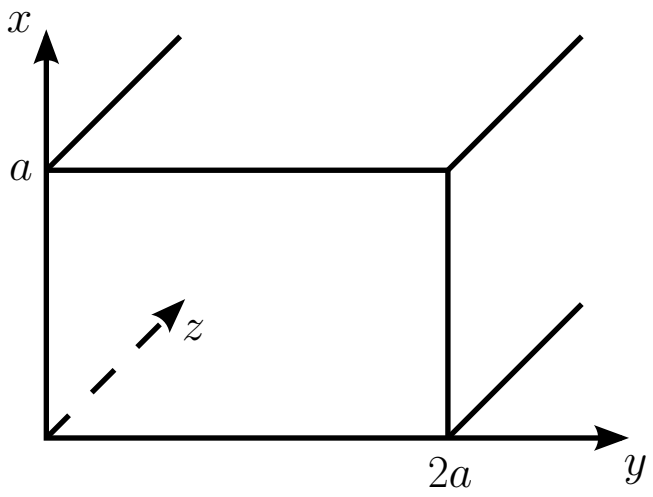
$$\dot{I}_a = -\frac{L_{ab}}{L_{aa}} \dot{I}_b$$

und in die zweite Gleichung eingesetzt werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} U_b &= \left(\frac{L_{ab}^2}{L_{aa}} - L_{bb} \right) \dot{I}_b + R_b I_b \\ &= -\frac{\mu_0 h M^2}{2\pi} \left(\ln \frac{b}{a} - 2 \ln \frac{d}{c} \right) \omega_0 I_0 \sin(\omega_0 t) + R_b I_0 \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (16 Punkte)

Gegeben sei ein Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt aus unendlich gut leitendem Material. Die Kantenlängen des Querschnitts seien a und $2a$.



Im Inneren des Hohlleiters breite sich eine Welle mit den angegebenen Feldkomponenten in positiver z-Richtung aus.

$$E_x = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \mathrm{e}^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$E_y = 0$$

$$E_z = 0$$

a) Berechnen Sie alle Komponenten des H-Felds der Welle mit Hilfe der Maxwellgleichungen.

b) Bestimmen Sie die Wellenzahl k_z dieser Welle mit Hilfe der Wellengleichung.

c) Berechnen Sie die Gruppengeschwindigkeit $\frac{d\omega}{dk}$ der Welle.

d) Um welchen Mode TM_{mn} oder TE_{mn} handelt es sich? Geben Sie die Modenzahlen m bezüglich x-Richtung und n bezüglich y-Richtung an.

e) Bestimmen Sie die niedrigste, ausbreitungsfähige Frequenz im Hohlleiter.

Lösung 4 (16 Punkte)

a) **Bestimmung des H-Felds**

Das H-Feld der Welle wird über die Maxwell-Gleichung rot $\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ bestimmt. Für harmonische Vorgänge und lineare, isotrope Medien gilt:

$$\text{rot}\,\vec{E} = -j\,\omega\,\mu\,\vec{H} \tag{1}$$

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega\,\mu}\,\text{rot}\,\vec{E} \tag{2}$$

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega\,\mu}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \frac{j}{\omega\,\mu}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \frac{j}{\omega\,\mu}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

Einsetzen des E-Felds aus der Aufgabenstellung ergibt:

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega\,\mu}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\vec{e}_y + \frac{j}{\omega\,\mu}\left(-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z \tag{3}$$

$$= \frac{j}{\omega\,\mu}\left(-j\,k_z\,E_0\,\sin\left(\frac{\pi}{a}\,x\right)\,\sin\left(\frac{\pi}{a}\,y\right)\,e^{\,j(\omega t - k_z z)}\right)\vec{e}_y \tag{4}$$

$$+ \frac{j}{\omega\,\mu}\left(-\frac{\pi}{a}\,E_0\,\sin\left(\frac{\pi}{a}\,x\right)\,\cos\left(\frac{\pi}{a}\,y\right)\,e^{\,j(\omega t - k_z z)}\right)\vec{e}_z \tag{5}$$

$$H_x = 0 \tag{6}$$

$$H_y = \frac{k_z}{\omega\,\mu}\,E_0\,\sin\left(\frac{\pi}{a}\,x\right)\,\sin\left(\frac{\pi}{a}\,y\right)\,e^{\,j(\omega t - k_z z)}$$

$$H_z = -j\,\frac{\pi}{\omega\,\mu\,a}\,E_0\,\sin\left(\frac{\pi}{a}\,x\right)\,\cos\left(\frac{\pi}{a}\,y\right)\,e^{\,j(\omega t - k_z z)}$$

b) **Bestimmung von** k_z

Die Wellengleichung für E_x ist

$$\Delta\,E_x - \mu\,\varepsilon\,\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0. \tag{7}$$

Einsetzen von E_x aus der Aufgabenstellung ergibt:

$$-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\,E_x - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2\,E_x - k_z^2\,E_x + \omega^2\,\mu\,\varepsilon\,E_x = 0 \tag{8}$$

$$-2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k_z^2 + \omega^2\,\mu\,\varepsilon = 0 \tag{9}$$

$$k_z = \sqrt{\omega^2\,\mu\,\varepsilon - 2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \tag{10}$$

c) **Gruppengeschwindigkeit bestimmen**

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \frac{1}{\frac{\partial k_z}{\partial \omega}} \,. \tag{11}$$

Ausgehend von k_z aus Aufgabenteil b) kann die Ableitung im Nenner bestimmt werden.

$$\frac{\partial k_z}{\partial \omega} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 \,\mu\, \varepsilon - 2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}}\, \omega\, \mu\, \epsilon \tag{12}$$

$$= \frac{\omega}{c_0^2\, k_z} \tag{13}$$

Durch Bildung des Kehrwerts kann v_g angegeben werden.

$$v_g = \frac{c_0^2\, k_z}{\omega} \tag{14}$$

d) **Bestimmung des Wellenmode**

Es handelt sich um eine TE-Welle, weil $E_z = 0$.

$$k_x = \frac{\pi}{a} m = \frac{\pi}{a} \tag{15}$$

$$\Rightarrow m = 1 \tag{16}$$

$$k_y = \frac{\pi}{2a} n = \frac{\pi}{a} \tag{17}$$

$$\Rightarrow n = 2 \tag{18}$$

Der Wellenmode lautet TE_{12}.

e) **Bestimmung der Cut-Off Frequenz**

Es gilt:

$$k_z = \sqrt{\omega^2 \mu\epsilon - k_x^2 - k_y^2} \tag{19}$$

$$= \sqrt{\omega^2 \mu\epsilon - \left(\frac{\pi}{a} m\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2a} n\right)^2} \tag{20}$$

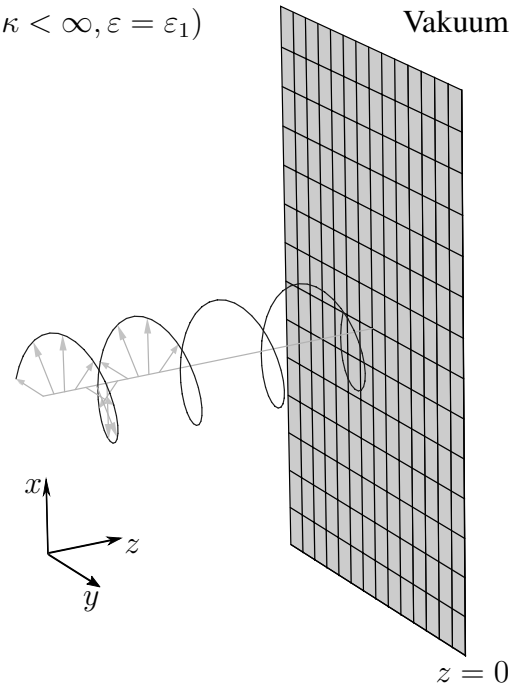
$$\Rightarrow \omega^2 \mu\epsilon = \left(\frac{\pi}{a} m\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2a} n\right)^2 \tag{21}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a} m\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2a} n\right)^2} \tag{22}$$

Kleinste Frequenz für m=0 und n=1.

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\pi}{2a} = \frac{1}{4a\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{23}$$

Aufgabe 5 (16 Punkte)



Eine zirkular-polarisierte, elektromagenetische Welle breitet sich innerhalb eines Leiters in positive z-Richtung aus und trifft an der Stelle $z = 0$ auf Vakuum. Ein Teil der Welle wird an der Grenzfläche reflektiert, der übrige Teil wird in das Vakuum transmittiert. Für die Leitfähigkeit κ des Leiter gilt $0 < \kappa < \infty$. Darüberhinaus sind $\varepsilon = \varepsilon_1$ und k im Leiter komplex. Im gesamten Raum gilt $\mu = \mu_0$. Das $\vec{H}$-Feld im Leiter wird durch folgenden Ansatz beschrieben:

$$\vec{H} = H_0(e^{j(\omega t - kz)}\vec{e}_x + je^{j(\omega t - kz)}\vec{e}_y).$$

a) Berechnen Sie das zur Grenzfläche hinlaufende $\vec{E}$-Feld mittels der allgemeinen MAXWELL-Gleichung und stellen Sie mittels des Wellenwiderstandes $\Gamma_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ die Beziehung zwischen dem $\vec{E}$-Feld und $\vec{H}$-Feld her. Hinweis: Es gilt $\vec{J} = 0$ und $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - j\frac{\kappa}{\omega}$.

b) Bestimmen Sie k im Leiter mit Hilfe der Wellengleichung für harmonische Vorgänge.

c) Stellen Sie die Grenzbedingungen an der Grenzfläche bei $z = 0$ für alle Felder auf und berechnen Sie alle im Leiter und Vakuum exisiertenden $\vec{E}$-Felder.

d) Zusätzlich zur zirkular-polarisierten, elektromagenetischen Welle breitet sich im Leiter eine zweite elektromagnetische Welle aus. Durch Überlagerung beider Wellen soll das resultierende $\vec{E}$-Feld in x-Richtung linear polarisiert sein. Berechnen Sie das zur Superposition benötigte $\vec{E}$-Feld der zweiten elektromagnetischen Welle.

Lösung 5 (16 Punkte)

a)

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \dot{\vec{D}} \tag{1}$$

$$\vec{e}_x\left(-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}\right) = j\omega\varepsilon\vec{E} \tag{2}$$

$$(-jk)\left[\vec{e}_x\left(-jH_0e^{j(\omega t-kz)}\right) + \vec{e}_y\left(H_0e^{j(\omega t-kz)}\right)\right] = j\omega\varepsilon\vec{E} \tag{3}$$

$$-\frac{k}{\omega\varepsilon}H_0e^{j(\omega t-kz)}(-j\vec{e}_x + \vec{e}_y) = \vec{E} \tag{4}$$

$$-\frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{\omega\varepsilon}H_0e^{j(\omega t-kz)}(-j\vec{e}_x + \vec{e}_y) = \vec{E} \tag{5}$$

$$-\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H_0e^{j(\omega t-kz)}(-j\vec{e}_x + \vec{e}_y) = \vec{E} \tag{6}$$

$$-\underbrace{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 - j\frac{\kappa}{\omega}}}}_{=\Gamma_1}H_0e^{j(\omega t-kz)}(-j\vec{e}_x + \vec{e}_y) = \vec{E} \tag{7}$$

b) Aus der Formelsammlung bekannt ist die Wellengleichung für harmonische Vorgänge im Leiter:

$$\Delta\vec{E} - j\omega\kappa\mu\vec{E} + \omega^2\varepsilon\mu\vec{E} = 0 \tag{8}$$

Zu berechnen ist $\Delta\vec{E}$. $\vec{E}$ ist unabhängig von x und y.

$$\Delta\vec{E} = \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}(\underbrace{-jk\vec{E}}_{=\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}}) = -k^2\vec{E} \tag{9}$$

Einsetzen in die Wellengleichung ergibt:

$$-k^2\vec{E} - j\omega\kappa\mu\vec{E} + \omega^2\varepsilon\mu\vec{E} = 0 \tag{10}$$

$$\Rightarrow k^2 = -j\omega\kappa\mu + \omega^2\varepsilon\mu \tag{11}$$

$$k = \sqrt{-j\omega\kappa\mu + \omega^2\varepsilon\mu} \tag{12}$$

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu(1 - j\frac{\kappa}{\varepsilon\omega})} \tag{13}$$

c) Die Tagentialkomponenten der Summe aller $\vec{E}$- und $\vec{H}$-Felder an der Grenzfläche $z = 0$ müssen identisch sein:

$$E_e + E_r = E_t \tag{14}$$

$$H_e + H_r = H_t \tag{15}$$

c)

$$E_e + E_r = E_t \tag{16}$$
$$\frac{E_e}{-\Gamma_1} + \frac{E_r}{\Gamma_1} = \frac{E_t}{-\Gamma_0} \tag{17}$$

Elimination von E_t:

$$E_e \left(1 - \frac{\Gamma_0}{\Gamma_1}\right) + E_r \left(1 + \frac{\Gamma_0}{\Gamma_1}\right) = 0 \qquad | \cdot \Gamma_1 \tag{18}$$
$$E_e \left(\Gamma_1 - \Gamma_0\right) + E_r \left(\Gamma_1 + \Gamma_0\right) = 0 \tag{19}$$
$$\tag{20}$$

Aufgelöst nach E_r:

$$E_r = \frac{\Gamma_0 - \Gamma_1}{\Gamma_0 + \Gamma_1} E_e \tag{21}$$
$$\Rightarrow \vec{E}_r = -\frac{\Gamma_0 - \Gamma_1}{\Gamma_0 + \Gamma_1} \Gamma_1 H_0 e^{j(\omega t - kz)} (-j\vec{e}_x + \vec{e}_y) \tag{22}$$

und daraus Bestimmung von E_t:

$$E_t = \frac{2\Gamma_0}{\Gamma_0 + \Gamma_1} E_e \tag{23}$$
$$\Rightarrow \vec{E}_t = -\frac{2\Gamma_0}{\Gamma_0 + \Gamma_1} \Gamma_1 H_0 e^{j(\omega t - kz)} (-j\vec{e}_x + \vec{e}_y) \tag{24}$$

d)

$$\vec{E}_{\text{ges}} = \vec{E} + \vec{E}_{\text{sup}} \tag{25}$$
$$\vec{E}_{\text{ges}} \stackrel{!}{=} -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 - j\frac{\kappa}{\omega}}} H_0 e^{j(\omega t - kz)} (-j\vec{e}_x) \tag{26}$$
$$\Leftrightarrow \vec{E}_{\text{ges}} = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 - j\frac{\kappa}{\omega}}} H_0 e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2} - kz)} \vec{e}_x \tag{27}$$
$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{sup}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 - j\frac{\kappa}{\omega}}} H_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y \tag{28}$$