

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Gegeben ist folgende kugelsymmetrische Anordnung mit der Gesamtladung Q , sowie der Verlauf des elektrischen Potentials über dem Radius r .

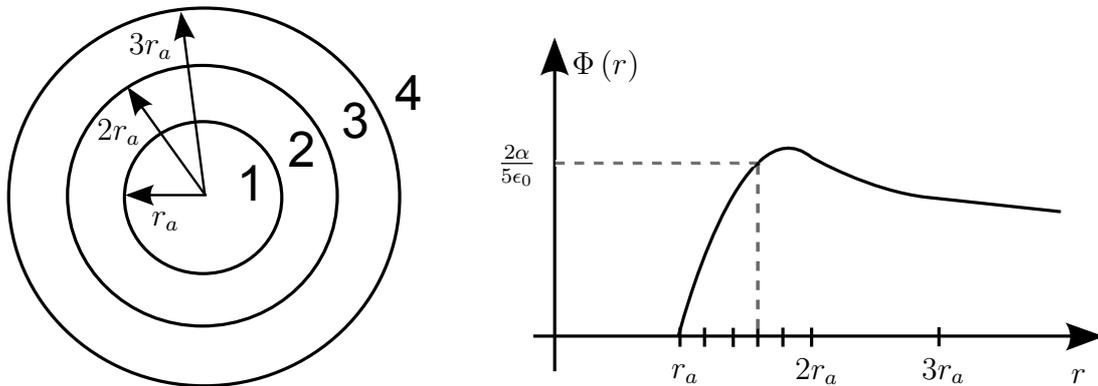


Abbildung 1: Versuchsanordnung für die Aufgabenteile a) bis c)

Bekannt sind ferner nachfolgende Größen:

- | | | | | | | | |
|-----|------------------------|---|-------------|---------------|-------------------|----------------|--|
| (1) | $0 \leq r < r_a$ | : | $\rho = 0$ | $\kappa = ??$ | $\epsilon_r = 1$ | $\vec{E} = ??$ | $\Phi_1 = ??$ |
| (2) | $r_a \leq r < 2r_a$ | : | $\rho = ??$ | $\kappa = 0$ | $\epsilon_r = 1$ | $\vec{E} = ??$ | $\Phi_2 = B \cdot (19rr_a - 5r^2 - 14r_a^2)$ |
| (3) | $2r_a \leq r < 3r_a$ | : | $\rho = 0$ | $\kappa = 0$ | $\epsilon_r = ??$ | $\vec{E} = ??$ | $\Phi_3 = C \cdot (6r_a - r)$ |
| (4) | $3r_a \leq r < \infty$ | : | $\rho = 0$ | $\kappa = 0$ | $\epsilon_r = 1$ | $\vec{E} = ??$ | $\Phi_4 = \frac{\alpha r_a}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$ |

- Bestimmen Sie die Konstanten B und C in Abhängigkeit von α und r_a .
- Die Kugel bestehe nun im Bereich (1) aus ideal leitfähigem Material, d.h. $\kappa = \infty$ für $r < r_a$. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke \vec{E} im gesamten Raum.
- Bestimmen Sie die Konstante α in Abhängigkeit der Gesamtladung Q .
Hinweis: Nehmen Sie an, dass sich die Gesamtladung Q in den Bereichen (1) und (2) befindet, zwischen (3) und (4) also keine Flächenladung existiert.

Betrachtet wird nun nachfolgende scheibenförmige Anordnung in der xy -Ebene mit Radius r_a und gleichmäßiger Verteilung der Gesamtladung Q . Es gelte weiterhin $\varepsilon = \varepsilon_0$ im ganzen Raum.

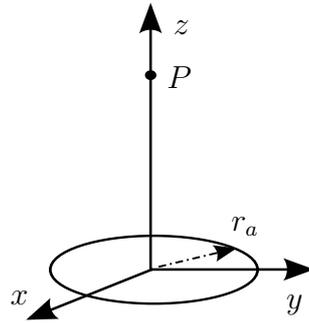


Abbildung 2: Versuchsanordnung für die Aufgabenteile d) bis e)

- d) Berechnen Sie das elektrische Feld \vec{E} im Punkt $P(0, 0, z)$ auf der z -Achse.
Hinweis: Das Coulomb-Integral für das elektrische Feld lautet

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \int \frac{\varrho(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'$$

Hinweis:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}^3} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

- e) Zeigen Sie, dass das \vec{E} -Feld aus d) für $z \gg r_a$ auf der z -Achse durch das einer Punktladung Q im Ursprung angenähert werden kann.

Hinweis: $\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) \approx \frac{1}{2} \frac{a^2}{x^2}$ für $x \gg a$.

Hinweis: Die Aufgabenteile d) & e) sind unabhängig von a) - c) lösbar.

Lösung 1 (16 Punkte)

a) Aus dem Potentialfeldverlauf $\Phi(r)$ lässt sich entnehmen:

$$\begin{aligned}\Phi_2(1.6r_a) &= B \cdot \left(19 \cdot \frac{8}{5} r_a \cdot r_a - 5 \cdot \left(\frac{8}{5} r_a \right)^2 - 14r_a^2 \right) \\ &\stackrel{!}{=} \frac{2}{5} \cdot \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow B &= \frac{\alpha}{9\varepsilon_0 r_a^2}\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Stetigkeit des Potentialfelds folgt:

$$\begin{aligned}\Phi_3(2r_a) &= \Phi_2(2r_a) \\ C \cdot (6r_a - 2r_a) &= B \cdot (19 \cdot 2r_a \cdot r_a - 5 \cdot (2r_a)^2 - 14r_a^2) \\ \Rightarrow C &= \frac{\alpha}{9\varepsilon_0 r_a}\end{aligned}$$

b) Kugelsymmetrie: $\vec{E} = E_r(r) \cdot \vec{e}_r \Rightarrow \vec{E} = -\text{grad}(\Phi) = -\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r} \cdot \vec{e}_r$

Für die einzelnen Bereiche ergibt sich

$$\begin{aligned}0 \leq r \leq r_a &: E_{r,1} = 0 \\ r_a < r \leq 2r_a &: E_{r,2} = \frac{-\alpha}{9\varepsilon_0 r_a^2} \cdot (19r_a - 10r) \\ 2r_a < r \leq 3r_a &: E_{r,3} = \frac{\alpha}{9\varepsilon_0 r_a} \\ 3r_a < r < \infty &: E_{r,4} = \frac{\alpha r_a}{\varepsilon_0 r^2}\end{aligned}$$

c) Ansatz

Kugelsymmetrie: $\vec{D} = D_r(r) \cdot \vec{e}_r$

An der Grenze $r = 3r_a$ zwischen den Bereichen (3) und (4) existiert keine Flächenladung. Die Grenzflächenbedingung $\sigma = D_{n2} - D_{n1}$ führt auf

$$D_{r,3} \Big|_{r=3r_a} = D_{r,4} \Big|_{r=3r_a}$$

Bereich (3)

Die gesamte Ladung Q der Anordnung liegt in den Bereichen (1) und (2). Für $r > 2r_a$ kann sie als äquivalente Punktladung bei $r = 0$ betrachtet werden. Für die Verschiebungsdichte gilt

$$\Rightarrow \vec{D}_3 = D_{r,3} \cdot \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \vec{e}_r$$

Bereich (4)

Materialgleichung $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \Rightarrow D_r = \varepsilon \cdot E_r$

$$\Rightarrow D_{r,4} = \varepsilon_0 \cdot E_{r,4} = \alpha \cdot \frac{r_a}{r^2}$$

Damit folgt für die gesuchte Konstante

$$\begin{aligned} D_{r,3}(r = 3r_a) &= D_{r,4}(r = 3r_a) \\ \alpha \cdot \frac{r_a}{(3r_a)^2} &= \frac{Q}{4\pi(3r_a)^2} \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{Q}{4\pi r_a} \end{aligned}$$

d) \vec{E} -Feld

Die konstante Ladungsverteilung $\sigma = Q/\pi r_a^2$ hat die Form einer dünnen Scheibe. Das Coulomb-Integral wird zum Flächenintegral:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon} \cdot \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} df'$$

Symmetriebedingt besteht das \vec{E} -Feld auf der z -Achse aus der z -Komponente in $+z$ -Richtung:

$$\vec{E}(0, 0, z) = E_z \cdot \vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad d\vec{f} = \vec{e}_z \cdot R \cdot dR d\varphi$$

Für Punkte $\vec{r} = (0, 0, z)^T$ auf der z -Achse im Bezug auf Ladung in $\vec{r}' = (R', \varphi', 0)^T$ gelten

$$(\vec{r} - \vec{r}') = -R' \cdot \vec{e}_R - \varphi' \cdot \vec{e}_\varphi + z \cdot \vec{e}_z \quad \text{und} \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + R'^2}$$

Damit ergibt sich für das zu berechnende Coulomb-Integral

$$\begin{aligned} E_z(0, 0, z) &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{r_a} \int_0^{2\pi} \frac{(R' \vec{e}_R + \varphi' \vec{e}_\varphi + z \vec{e}_z) \cdot (R' \vec{e}_z \cdot d\varphi dR')}{(z^2 + R'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{z\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi \cdot \int_0^{r_a} \frac{R'}{(z^2 + R'^2)^{3/2}} dR' \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Substitution $u = z^2 + R'^2$ folgt schließlich

$$\begin{aligned} E_z(0, 0, z) &= \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \int_{z^2}^{r_a^2+z^2} \frac{\sqrt{u-z^2}}{u^{3/2}} \cdot \frac{du}{2\sqrt{u-z^2}} \\ &= \frac{z\sigma}{4\epsilon_0} \left[\frac{-2}{\sqrt{u}} \right]_{u=z^2}^{r_a^2+z^2} \\ \Rightarrow E_z &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{r_a^2 + z^2}} \right) \end{aligned}$$

e) Mit der im Hinweis genannten Taylor-Entwicklung und der Flächenladungsdichte $\sigma = Q/A$ lässt sich zeigen:

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{r_a^2 + z^2}} \right) \\ &\approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \frac{r_a^2}{z^2} \\ \Rightarrow E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma\pi r_a^2}{z^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon z^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (16 Punkte)

Gegeben sei ein Leiterstück mit der Querschnittsfläche A (siehe Abb. 3). Durch das Leiterstück fließt ein Strom I . Hierbei sei das Leiterstück in x - und y -Richtung homogen. Die Leitfähigkeit κ ist durch die stetige Funktion

$$\kappa(z) = \begin{cases} \kappa_1, & z < 0 \\ \kappa_2(z), & z \in [0, L] \\ \kappa_3, & z > L \end{cases} \quad (1)$$

definiert. Dabei sei $\kappa_2(z)$ linear. Weiterhin gilt $\varepsilon = \varepsilon_0$.

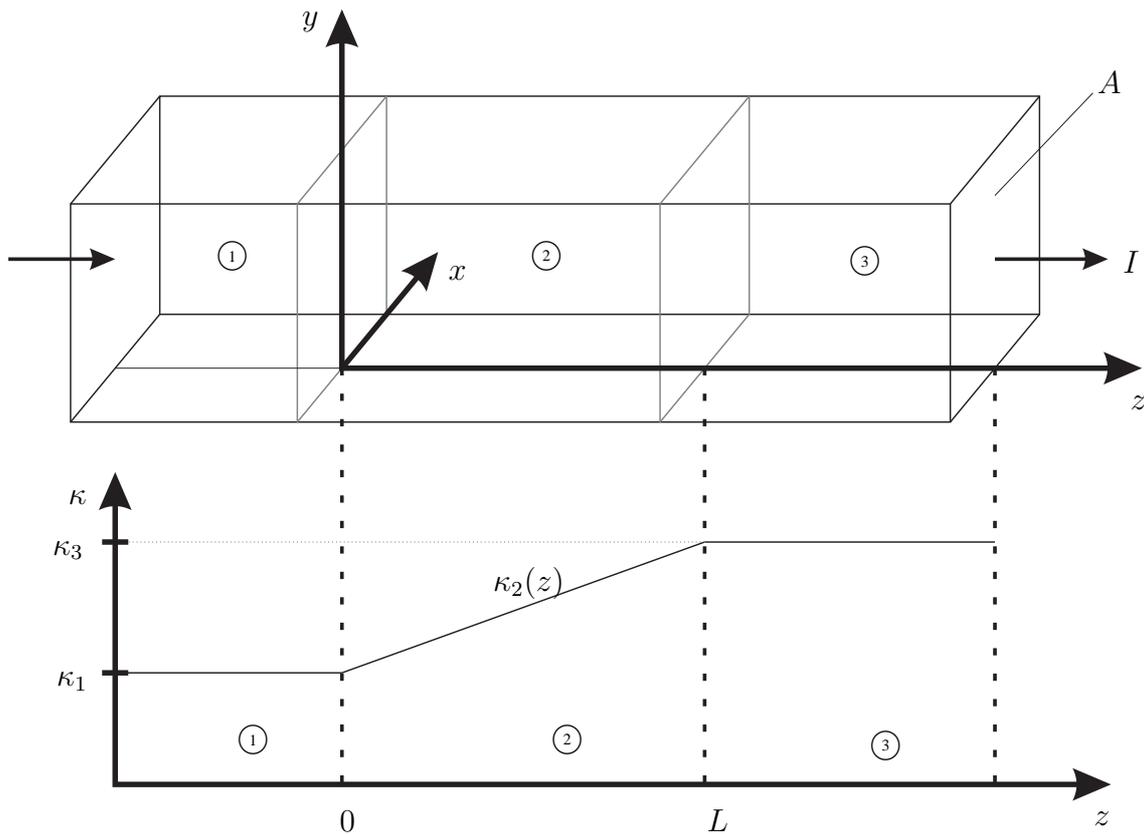


Abbildung 3: Leiterstück mit Fläche A und unterschiedlichen Leitfähigkeiten κ .

- Geben Sie die Leitfähigkeit $\kappa_2(z)$ für den Bereich ② an.
- Bestimmen Sie das elektrische Feld \vec{E} in Abhängigkeit des Stroms I im Inneren des Leiters.
- Bestimmen Sie die Raumladungsdichte ρ im Inneren des Leiters. Nutzen Sie hierfür die Gl. (2):

$$\frac{\kappa}{\varepsilon} \rho + \frac{\varepsilon}{\kappa} \vec{J} \cdot \text{grad} \left(\frac{\kappa}{\varepsilon} \right) = 0 \quad (2)$$

Bestimmen Sie zusätzlich die Raumladungsdichte ρ mit einem alternativen Ansatz.

- Berechnen Sie nun die Gesamtladung Q .
- Geben Sie die Oberflächenladungsdichten σ für $z = 0$ und $z = L$ an.

Lösung 2 (16 Punkte)

a) Mit $\kappa_2(z) = az + b$ und den Randbedingungen $\kappa_2(0) = \kappa_1$ und $\kappa_2(L) = \kappa_3$ ergibt sich $\kappa_2(z) = \frac{\kappa_3 - \kappa_1}{L}z + \kappa_1$.

b) Mit $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\kappa}$ und $\vec{J} = \frac{I}{A}\vec{e}_z$ ist $\vec{E} = \frac{I}{\kappa A}\vec{e}_z$. Für den Bereich $z < 0$ ergibt sich:

$$\vec{E} = \frac{I}{\kappa_1 A}\vec{e}_z$$

Für den Bereich $z > L$ ergibt sich:

$$\vec{E} = \frac{I}{\kappa_3 A}\vec{e}_z$$

Für den Bereich $0 < z < L$ ergibt sich:

$$\vec{E} = \frac{I}{\kappa_2(z)A}\vec{e}_z = \frac{I}{\left(\frac{\kappa_3 - \kappa_1}{L}z + \kappa_1\right)A}\vec{e}_z$$

c) Da κ für $z < 0$ und $z > L$ konstant ist, ist $\text{grad}\left(\frac{\kappa}{\epsilon}\right) = 0$ und $\rho = 0$ in diesen Bereichen.

Für $0 < z < L$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_2(z)}{\epsilon_0}\rho(z) + \frac{\epsilon_0}{\kappa_2(z)}\frac{I}{A}\vec{e}_z\frac{1}{\epsilon_0}\frac{d\kappa_2(z)}{dz}\vec{e}_z &= 0 \\ \frac{\kappa_2(z)}{\epsilon_0}\rho(z) + \frac{I}{\kappa_2(z)A}\frac{\kappa_3 - \kappa_1}{L} &= 0 \end{aligned}$$

Durch Umstellen der Gleichung nach $\rho(z)$ erhält man:

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \frac{-\epsilon_0 I}{A} \frac{1}{\kappa_2(z)^2} \frac{\kappa_3 - \kappa_1}{L} \\ &= \frac{-\epsilon_0 I}{A} \frac{1}{\left(\frac{\kappa_3 - \kappa_1}{L}z + \kappa_1\right)^2} \frac{\kappa_3 - \kappa_1}{L} \end{aligned}$$

Alternative Berechnungsmethode über $\text{div}\vec{D} = \rho$:

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \epsilon_0 \text{div}\vec{E}(z) \\ &= \epsilon_0 \frac{dE_z(z)}{dz} \\ &= \epsilon_0 \frac{I}{A} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\kappa_2(z)} \right) \end{aligned}$$

Mit $\kappa_2(z) = \frac{\kappa_3 - \kappa_1}{L}z + \kappa_1$ aus a):

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \epsilon_0 \frac{I}{A} \left(-\frac{1}{\kappa_2(z)^2} \frac{\kappa_3 - \kappa_1}{L} \right) \\ &= \frac{-\epsilon_0 I}{A} \frac{1}{\left(\frac{\kappa_3 - \kappa_1}{L}z + \kappa_1\right)^2} \frac{\kappa_3 - \kappa_1}{L} \end{aligned}$$

d) Die Ladung Q berechnet sich aus dem Integral der Raumladungsdichte über das Volumen:

$$\begin{aligned}
 Q &= A \int_{z=0}^L \rho(z) dz \\
 &= A \int_{z=0}^L \frac{-\epsilon_0 I}{A} \frac{1}{\left(\frac{\kappa_3 - \kappa_1}{L} z + \kappa_1\right)^2} \frac{\kappa_3 - \kappa_1}{L} dz \\
 &= -\epsilon_0 I \frac{\kappa_3 - \kappa_1}{L} \int_{z=0}^L \frac{1}{\left(\frac{\kappa_3 - \kappa_1}{L} z + \kappa_1\right)^2} dz \\
 &= -\epsilon_0 I \frac{\kappa_3 - \kappa_1}{L} \left[-\frac{L}{\kappa_3 - \kappa_1} \frac{1}{\left(\frac{\kappa_3 - \kappa_1}{L} z + \kappa_1\right)} \right]_0^L \\
 &= \epsilon_0 I \left[\frac{1}{\kappa_3} - \frac{1}{\kappa_1} \right]
 \end{aligned}$$

e) Es gibt keine Oberflächenladungsdichten bei $z = 0$ und $z = L$, weil das D-Feld stetig ist.
Rechnerische Begründung:

$$\begin{aligned}
 \sigma(0) &= D_{n2} - D_{n1} \\
 &= \epsilon_0 \frac{I}{\left(\frac{\kappa_3 - \kappa_1}{L} 0 + \kappa_1\right) A} - \epsilon_0 \frac{I}{\kappa_1 A} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma(L) &= D_{n2} - D_{n1} \\
 &= \epsilon_0 \frac{I}{\kappa_3 A} - \epsilon_0 \frac{I}{\left(\frac{\kappa_3 - \kappa_1}{L} L + \kappa_1\right) A} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (16 Punkte)

Hinweis: Die Teilaufgaben sind jeweils unabhängig voneinander.

Gegeben sei eine halbkreisförmige Leiterschleife mit dem Radius R , die in der xy -Ebene liegt und vom Strom I durchflossen wird. Es liegt ein homogenes, konstantes Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$ an.

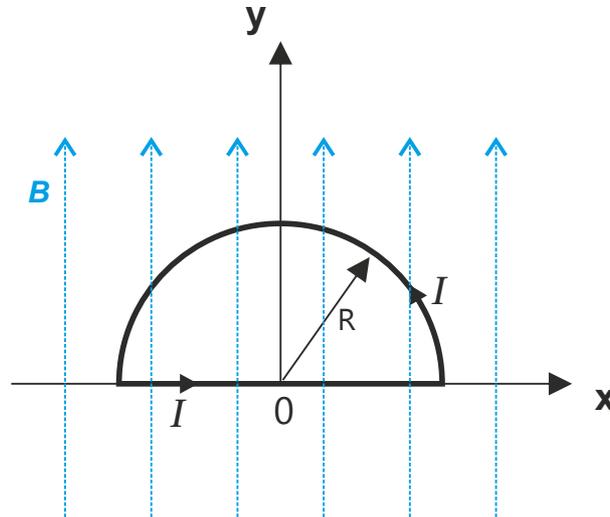


Abbildung 4: Halbkreisförmige stromdurchflossene Leiterschleife

- a) Berechnen Sie die Kräfte \vec{F}_1 , welche auf das gerade Teilstück, und \vec{F}_2 , welche auf das halbkreisförmige Teilstück der stromdurchflossenen Leiterschleife wirken. Wie groß ist die resultierende Gesamtkraft auf die Leiterschleife?

Im Folgenden sei die Leiterschleife offen und dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die x -Achse. Zum Zeitpunkt $t = 0$ liegt die Leiterschleife in der xy -Ebene. Das Magnetfeld ist nun nicht mehr konstant, sondern ändert sich mit der Zeit t .

Es gilt $\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x + B_0 \sin(\omega t) \vec{e}_y$.

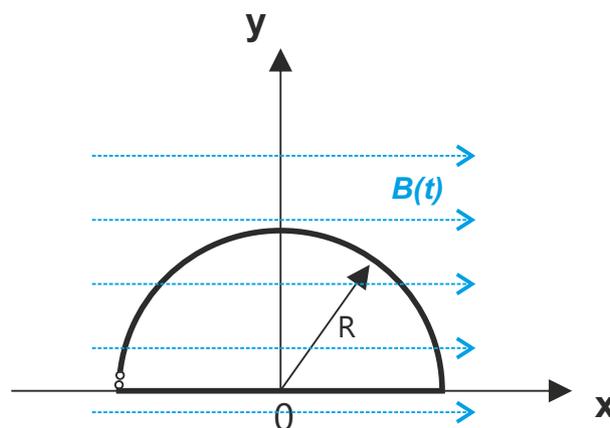
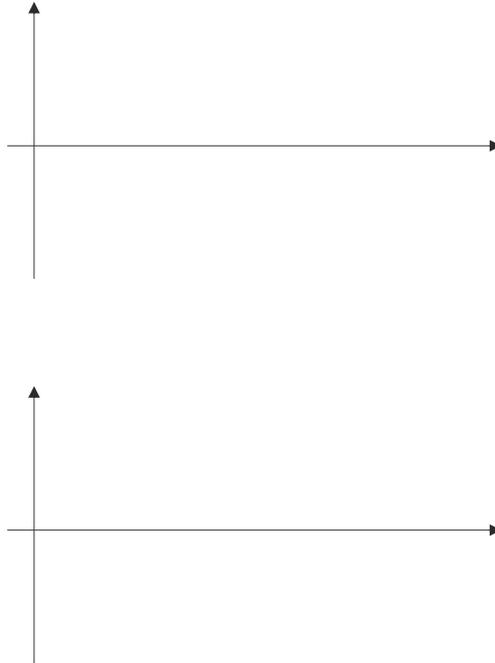


Abbildung 5: Halbkreisförmige Leiterschleife in veränderlichem Magnetfeld

- b) Berechnen Sie die in der Leiterschleife induzierte Spannung U_{ind} in Abhängigkeit der Zeit t .
Skizzieren Sie den magnetischen Fluss und die induzierte Spannung über einer Periodendauer T der Drehung der Leiterschleife.

Lösungen zu Aufabenteil b) bitte hier einzeichnen:



Nun liegt die halbkreisförmige Leiterschleife in der xy -Ebene und wird vom Strom I durchflossen. Ein äußeres Magnetfeld liegt nicht an.

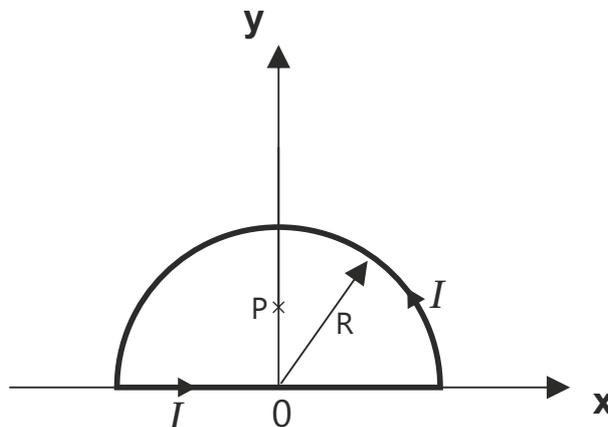


Abbildung 6: Halbkreisförmige stromdurchflossene Leiterschleife

- c) Berechnen Sie die, durch den Strom I erzeugte, magnetische Feldstärke am Punkt $P(0, \frac{R}{2}, 0)$ unter Verwendung des Gesetzes von Biot-Savart für Linienleiter. Zerlegen Sie hierbei das zu lösende Integral in geeignete Abschnitte. Geben Sie jeweils die Komponenten $d\vec{s}'$, \vec{r}' und \vec{r}'' an. Vereinfachen Sie soweit, bis nur noch möglichst einfache skalare Terme integriert werden müssen. Brechen Sie an dieser Stelle ab, führen Sie die Integration **nicht** durch.

Lösung 3 (16 Punkte)

a) Aus Formelsammlung:

$$\vec{F} = I (\vec{l} \times \vec{B}).$$

Für die gerade Strecke ergibt sich $\vec{l} = 2R\vec{e}_x$ und $\vec{B} = B_0\vec{e}_y$. Somit ergibt sich

$$\vec{F}_1 = 2IRB_0\vec{e}_z.$$

Für den halbkreisförmigen Teil der Leiterschleife ergibt sich für ein infinitesimales Streckenelement $d\vec{l} = \vec{e}_\varphi \cdot R d\varphi$. In kartesischen Koordinaten ergibt sich $d\vec{l} = R(-\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y) d\varphi$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} d\vec{F}_2 &= I \cdot R \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \\ &= -IRB_0 \sin\varphi \cdot \vec{e}_z d\varphi \end{aligned}$$

Über die gesamte Halbkreisstrecke integrieren ergibt \vec{F}_2 .

$$\vec{F}_2 = \int_0^\pi d\vec{F}_2 = -IRB_0 [-\cos\varphi]_0^\pi \vec{e}_z = -2IB_0R\vec{e}_z.$$

Die resultierende Gesamtkraft auf die Leiterschleife ist $\vec{F}_{ges} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$.

b) Die in \vec{e}_x gerichtete Komponente von \vec{B} hat keinen Einfluss und kann somit vernachlässigt werden. Die Fläche der Leiterschleife, die vom Magnetfeld durchflutet wird, ändert sich in Abhängigkeit der Zeit t :

$$A(t) = A_0 \cdot \sin(\omega t) = \frac{\pi}{2} R^2 \sin(\omega t)$$

Für dem magnetischen Fluss ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \iint_A \vec{B} dA \\ &= \frac{\pi}{2} R^2 B_0 \sin^2(\omega t) \end{aligned}$$

Die induzierte Spannung ergibt sich zu

$$\begin{aligned} U_{ind}(t) &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\pi R^2 B_0 \omega \sin(\omega t) \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Dies lässt sich weiter vereinfachen, Formelsammlung: $\sin(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2} (\sin(x - y) + \sin(x + y))$.

$$U_{ind}(t) = -\frac{\pi}{2} R^2 B_0 \omega \sin(2\omega t)$$

Der magnetische Fluss und die induzierte Spannung können somit einfach skizziert werden.

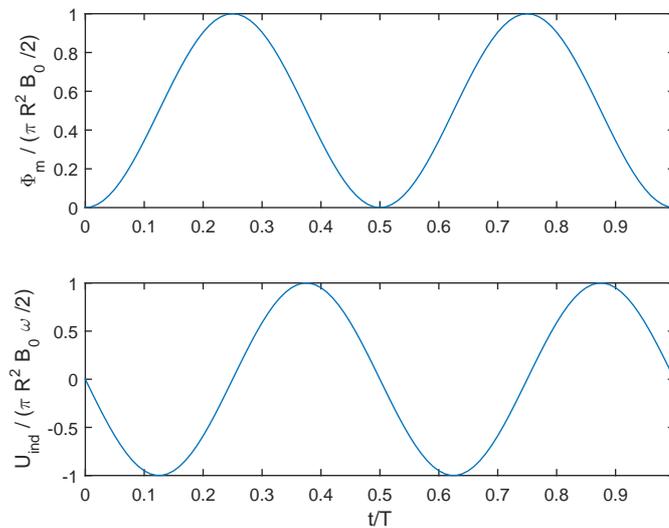


Abbildung 7: Magnetischer Fluss und induzierte Spannung

c) Gesetz von Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Das zu lösende Integral muss in geeignete Teilabschnitte aufgeteilt werden. Zuerst wird die gerade Strecke der Leiterschleife betrachtet. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} d\vec{s}' &= dx\vec{e}_x \\ \vec{r} &= \frac{R}{2}\vec{e}_y \\ \vec{r}' &= x\vec{e}_x \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für diesen Teilabschnitt \vec{H}_1

$$\begin{aligned}\vec{H}_1(\vec{r}) &= \frac{I}{4\pi} \int_{-R}^R \frac{\begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -x \\ \frac{R}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}{(x^2 + \frac{R^2}{4})^{3/2}} \\ &= \frac{I}{4\pi} \int_{-R}^R \frac{\frac{R}{2}}{(x^2 + \frac{R^2}{4})^{3/2}} dx \vec{e}_z\end{aligned}$$

Für den halbkreisförmigen Teilabschnitt der Leiterschleife ergibt sich mit $\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\vec{e}_x + \cos(\varphi)\vec{e}_y$

$$\begin{aligned}d\vec{s}' &= R d\varphi \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -R \sin(\varphi) \\ R \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \\ \vec{r} &= \frac{R}{2} \vec{e}_y \\ \vec{r}' &= \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \\ R \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

in kartesischen Koordinaten. Somit ergibt sich für diesen Teilabschnitt \vec{H}_2

$$\begin{aligned}\vec{H}_2(\vec{r}) &= \frac{I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\begin{pmatrix} -R \sin(\varphi) \\ R \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R \cos(\varphi) \\ \frac{R}{2} - R \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}}{(R^2 \cos^2(\varphi) + R^2(\frac{1}{2} - \sin(\varphi))^2)^{3/2}} d\varphi \\ &= \frac{I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R^2 \cdot (1 - \frac{1}{2} \cdot \sin(\varphi)) \end{pmatrix}}{R^3 (\cos^2(\varphi) + \frac{1}{4} - \sin(\varphi) + \sin^2(\varphi))^{3/2}} d\varphi \\ &= \frac{I}{4\pi R} \int_0^\pi \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot \sin(\varphi)}{(\frac{5}{4} - \sin(\varphi))^{3/2}} d\varphi \vec{e}_z\end{aligned}$$

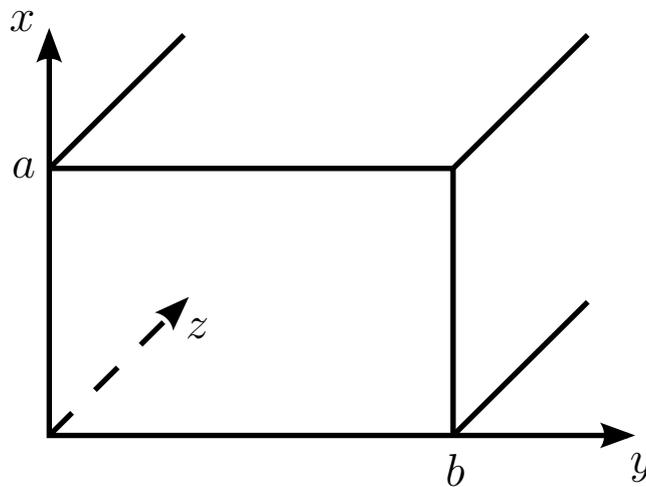
Die gesamte magnetische Feldstärke ergibt sich somit zu

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_1(\vec{r}) + \vec{H}_2(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \cdot \left(\int_{-R}^R \frac{\frac{R}{2}}{(x^2 + \frac{R^2}{4})^{3/2}} dx + \frac{1}{R} \int_0^\pi \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot \sin(\varphi)}{(\frac{5}{4} - \sin(\varphi))^{3/2}} d\varphi \right) \vec{e}_z$$

Hinweis: Das Integral von \vec{H}_1 ist mittels der Integraltabellen in der Formelsammlung recht leicht zu lösen. Das Integral von \vec{H}_2 kann beispielsweise numerisch bestimmt werden.

Aufgabe 4 (16 Punkte)

Gegeben sei ein Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt aus unendlich gut leitendem Material. Die Kantenlängen des Querschnitts seien a und b . Im Innern des Hohlleiters befinde sich eine TE_{mn} -Welle mit den Wellenzahlen $k_x(m)$ und $k_y(n)$.



Hinweis:

$$E_x = -\frac{1}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \left(j k_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + j \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)$$

$$E_y = -\frac{1}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \left(j k_z \frac{\partial E_z}{\partial y} - j \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

$$H_x = -\frac{1}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \left(j k_z \frac{\partial H_z}{\partial x} - j \omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)$$

$$H_y = -\frac{1}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \left(j k_z \frac{\partial H_z}{\partial y} + j \omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)$$

- a) Welche Randbedingungen für H_z müssen an den Hohlleiterwänden gelten?
 b) Welche der beiden angegebenen Funktionen für $H_z(x, y, z, t)$ entspricht den Randbedingungen? Begründen Sie durch Rechnung!

$$(1) \quad H_z(x, y, z, t) = H_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$(2) \quad H_z(x, y, z, t) = H_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

Bestimmen Sie die Wellenzahlen k_x und k_y in Abhängigkeit von m und n .

- c) Berechnen Sie die Feldkomponenten $E_x(x, y, z, t)$, $E_y(x, y, z, t)$, $H_x(x, y, z, t)$ und $H_y(x, y, z, t)$ der TE_{10} -Welle.

d) Um welche Wellentypen TM_{mn} oder TE_{mn} handelt es sich bei den Abbildungen 8 und 9 jeweils? Geben Sie die Modenzahlen m bezüglich x -Richtung und n bezüglich y -Richtung der jeweiligen Abbildung an. Begründen Sie.

Hinweis: Die durchgezogenen Linien zeigen das elektrische Feld, die gestrichelten das magnetische Feld.

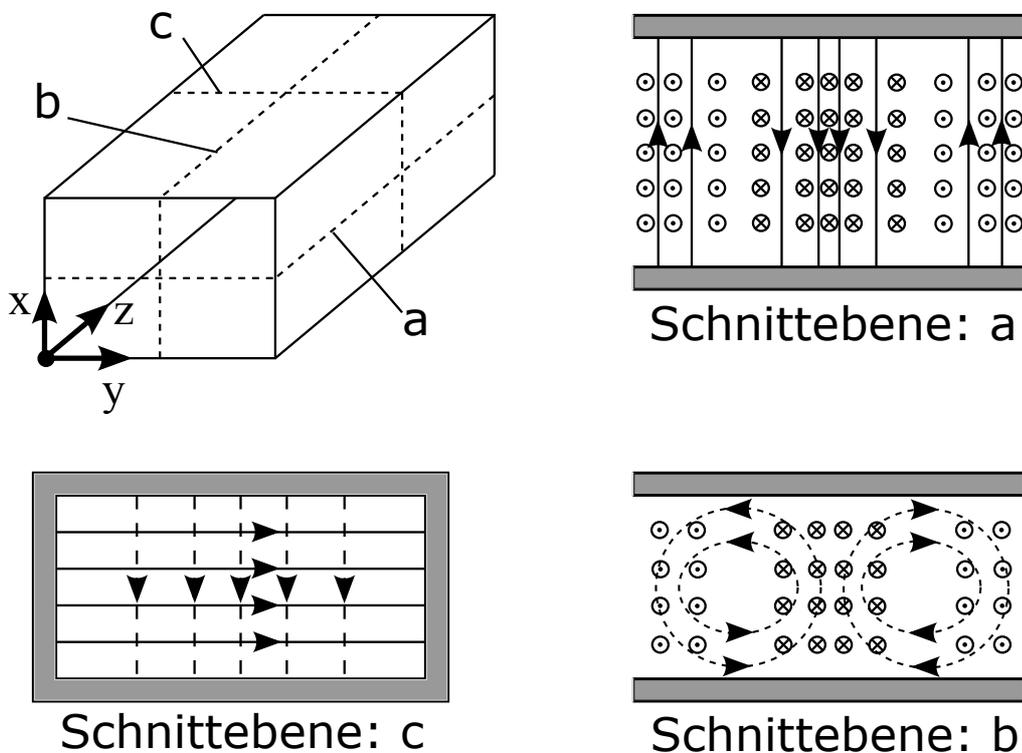


Abbildung 8

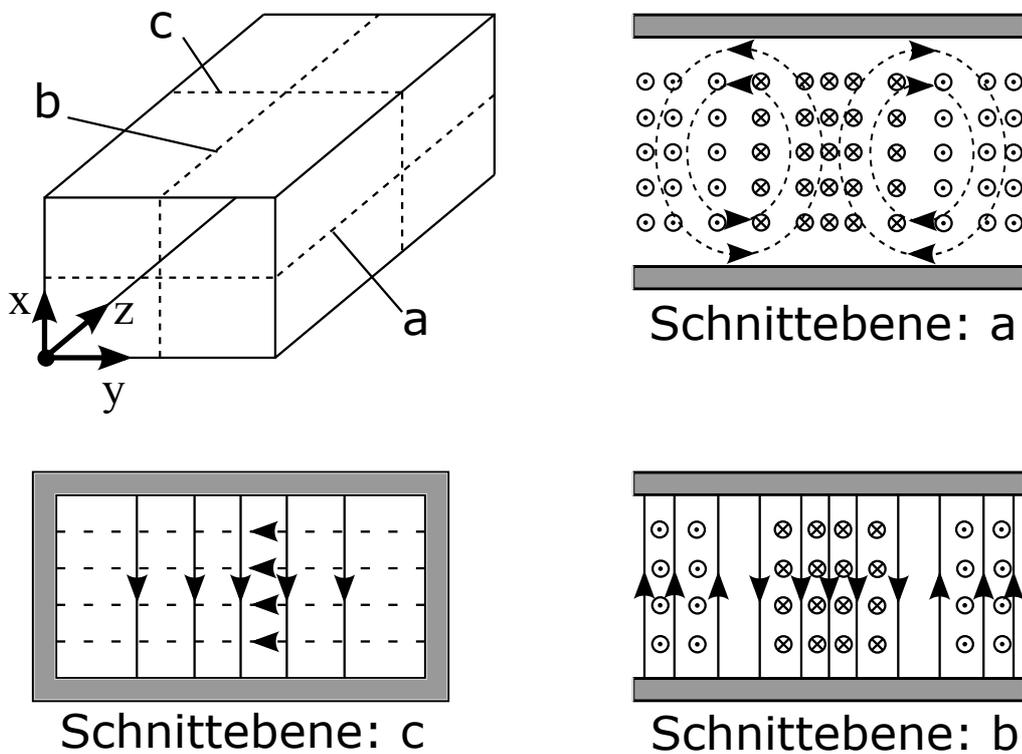


Abbildung 9

Lösung 4 (16 Punkte)

a) An den Hohlleiterwänden kann kein tangenciales E-Feld existieren.

$$\begin{aligned} E_x(x, 0, z, t) &= 0, & E_y(0, y, z, t) &= 0 \\ E_x(x, b, z, t) &= 0, & E_y(a, y, z, t) &= 0 \end{aligned}$$

Unter Annahme einer TE-Welle ($E_z = 0$) und dem Hinweis können die Randbedingungen für H_z bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=0} &= 0, & \left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0 \\ \left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=b} &= 0, & \left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=a} &= 0 \end{aligned}$$

b) Es kann gezeigt werden, dass $H_z(x, y, z, t) = H_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y) e^{j(\omega t - k_z z)}$ die Randbedingungen erfüllt:

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=0} = -H_0 k_x \underbrace{\sin(k_x \cdot 0)}_{=0} \cos(k_y y) e^{j(\omega t - k_z z)} = 0$$

Die Randbedingung

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=a} = -H_0 k_x \underbrace{\sin(k_x \cdot a)}_{=0} \cos(k_y y) e^{j(\omega t - k_z z)} = 0$$

wird erfüllt falls gilt:

$$k_x \cdot a = m \cdot \pi \quad \rightarrow \quad k_x = \frac{m\pi}{a}.$$

Die restlichen Randbedingungen können auf die gleiche Weise überprüft werden:

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=0} = -H_0 \cos(k_x x) k_y \underbrace{\sin(k_y \cdot 0)}_{=0} e^{j(\omega t - k_z z)} = 0$$

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=b} = -H_0 \cos(k_x x) k_y \underbrace{\sin(k_y \cdot b)}_{=0} e^{j(\omega t - k_z z)} = 0$$

wenn:

$$k_y \cdot b = n \cdot \pi \quad \rightarrow \quad k_y = \frac{n\pi}{b}.$$

c) Die H_z -Komponente der TE_{10} -Welle ist

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{j(\omega t - k_z z)}.$$

Mit $E_z = 0$ und den Hinweisen können die fehlenden Feldkomponenten berechnet werden.

$$\begin{aligned}
 E_x &= -\frac{j\omega\mu}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \\
 E_y &= \frac{j\omega\mu}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{j\omega\mu}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} H_0 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{j(\omega t - k_z z)} \\
 H_x &= -\frac{jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} H_0 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{j(\omega t - k_z z)} \\
 H_y &= -\frac{jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0
 \end{aligned}$$

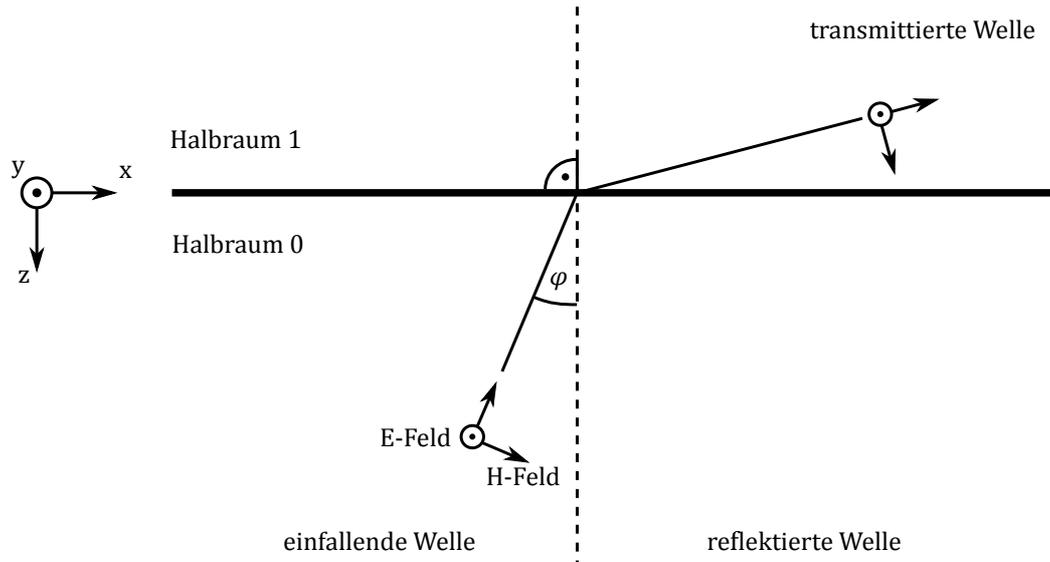
d) **Abbildung 11:** In z -Richtung existiert nur ein H-Feld \Rightarrow TE-Welle

$$\left. \begin{array}{l} E_x = 0 \\ E_y \neq 0 \\ H_x \neq 0 \\ H_y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{k_x \neq 0}_{E_y \text{ weist in der Schnittebene } c \text{ für alle } x \text{ in die gleiche Richtung} \Rightarrow m=1} \quad \text{und} \quad \underbrace{k_y = 0}_{\Rightarrow n=0}$$

Abbildung 12: In z -Richtung existiert nur ein H-Feld \Rightarrow TE-Welle

$$\left. \begin{array}{l} E_x \neq 0 \\ E_y = 0 \\ H_x = 0 \\ H_y \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{k_x = 0}_{\Rightarrow m=0} \quad \text{und} \quad \underbrace{k_y \neq 0}_{E_x \text{ weist in der Schnittebene } c \text{ für alle } y \text{ in die gleiche Richtung} \Rightarrow n=1}$$

Aufgabe 5 (16 Punkte)



In einem Winkel φ trifft eine ebene, harmonische Welle mit der Kreisfrequenz ω auf eine Grenzfläche bei $z = 0$. Das totale E-Feld \vec{E}_0 setzt sich im unteren Halbraum 0 aus hinlaufender und reflektierter Welle zusammen. Dabei gelten im unteren Halbraum 0 die Materialkonstanten ε_0 und μ_0 . Im oberen Halbraum 1 gelten ε_1 und μ_1 . Außerdem existieren das totale E-Feld \vec{E}_1 und das H-Feld \vec{H}_1 im oberen Halbraum 1. Der Reflexionskoeffizient ist R und der Transmissionskoeffizient T . Die beiden Koeffizienten R und T beziehen sich auf die Amplitude und nicht auf die Leistung der Wellen. Des Weiteren sind folgende Zusammenhänge gegeben:

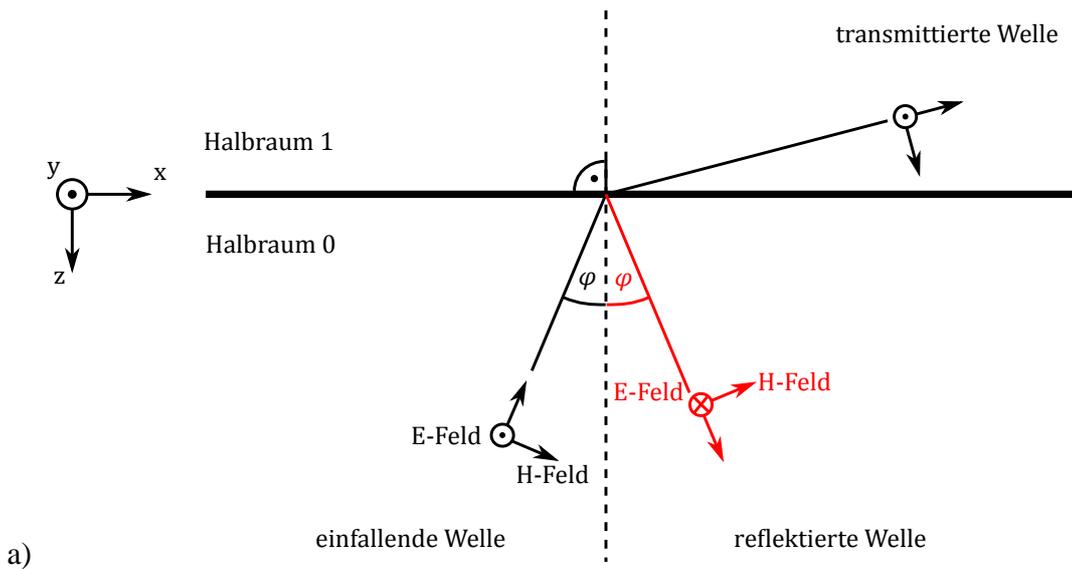
$$\begin{aligned}\vec{H}_1 &= \frac{k_{1,z}}{\omega\mu_1} E_0 \cdot T \cdot e^{jk_{1,z}z} \cdot e^{-jk_{1,x}x} \cdot e^{j\omega t} \vec{e}_x + \frac{k_{1,x}}{\omega\mu_1} E_0 \cdot T \cdot e^{jk_{0,z}z} \cdot e^{-jk_{1,x}x} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_z, \\ \vec{E}_0 &= E_0 \cdot (e^{jk_{0,z}z} + R \cdot e^{-jk_{0,z}z}) \cdot e^{-jk_{0,x}x} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_y, \\ \vec{E}_1 &= E_0 \cdot T \cdot e^{jk_{1,z}z} \cdot e^{-jk_{1,x}x} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_y,\end{aligned}\quad (3)$$

mit

$$\begin{aligned}k_0 &= \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}, & k_{0,x} &= k_0 \sin(\varphi), & k_{0,z} &= k_0 \cos(\varphi), \\ \mu_1 &= 3\mu_0, & \varepsilon_1 &= 4\varepsilon_0.\end{aligned}\quad (4)$$

- Vervollständigen Sie in der Skizze der Aufgabenstellung die reflektierte Welle mit allen relevanten Größen. Berücksichtigen Sie insbesondere die Orientierung von E- und H-Feld.
- Berechnen Sie das totale Feld \vec{H}_0 im unteren Halbraum mit Hilfe der allgemeingültigen Maxwellgleichungen.
- Bestimmen Sie die z -Komponente des komplexen Poynting-Vektors des Gesamtfeldes im unteren Halbraum. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis für $-1 \leq R \leq 0$ in Worten.
Hinweis zu Aufgabenteil c): $\sin(\varphi) = \frac{1}{2j}(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})$
- Bestimmen Sie, unter Berücksichtigung der Grenzflächenbedingung bei $z = 0$ und der Erfüllung der Wellengleichung im gesamten Raum, die Wellenzahlen $k_{1,x}$ und $k_{1,z}$ in Abhängigkeit der Kreisfrequenz ω , dem Einfallswinkel φ sowie den Materialkonstanten.
- Bestimmen Sie den Reflexionskoeffizienten R und den Transmissionskoeffizienten T . Vereinfachen Sie Ihre Lösung soweit möglich.

Lösung 5 (16 Punkte)



a) Die rot markierten Elemente müssen hinzugefügt werden.

b) Ansatz: $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Mit $\vec{E}_0 = E_{0,y} \vec{e}_y$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= \vec{e}_x \left(-\frac{\partial E_{0,y}}{\partial z} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial E_{0,y}}{\partial x} \right) \\ &= -jk_{0,z} E_0 (e^{jk_{0,z}z} - R \cdot e^{-jk_{0,z}z}) \cdot e^{-jk_{0,x}x} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_x \dots \\ &\quad -jk_{0,x} E_0 (e^{jk_{0,z}z} + R \cdot e^{-jk_{0,z}z}) \cdot e^{-jk_{0,x}x} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (1)$$

Die zeitliche Ableitung des \vec{B} -Feldes ergibt:

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega \vec{B}_0 \cdot e^{j\omega t} \quad (2)$$

Für das H-Feld \vec{H}_0 folgt daraus:

$$\begin{aligned} \vec{H}_0 &= \frac{k_{0,z}}{\omega\mu_0} E_0 (e^{jk_{0,z}z} - R \cdot e^{-jk_{0,z}z}) \cdot e^{-jk_{0,x}x} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_x \dots \\ &\quad + \frac{k_{0,x}}{\omega\mu_0} E_0 (e^{jk_{0,z}z} + R \cdot e^{-jk_{0,z}z}) \cdot e^{-jk_{0,x}x} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (3)$$

c) Aus der Formelsammlung erhält man die Formel für den komplexen Poyntingvektor:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*. \quad (4)$$

Durch Ausmultiplizieren des Vektorproduktes ergibt sich für die z -Komponente:

$$S_z = \frac{1}{2} (E_x \cdot H_y^* - E_y \cdot H_x^*). \quad (5)$$

Da die x -Komponente des E-Feldes E_x und die y -Komponente des H-Feldes H_y jedoch Null sind, ist die Betrachtung von H_x^* an dieser Stelle ausreichend. Es ergibt sich also:

$$H_{0,x}^* = \frac{k_{0,z}}{\omega\mu_0} E_0 (e^{-jk_{0,z}z} - R \cdot e^{+jk_{0,z}z}) \cdot e^{+jk_{0,x}x} \cdot e^{-j\omega t}. \quad (6)$$

Für die y -Komponente des E-Feldes ergibt sich:

$$E_y = E_0 (e^{jk_{0,z}z} + R \cdot e^{-jk_{0,z}z}) \cdot e^{-jk_{0,x}x} \cdot e^{j\omega t} \quad (7)$$

Einsetzen der Gleichungen liefert für die z -Komponente des Poynting-Vektors:

$$\begin{aligned} S_z &= -\frac{k_{0,z}}{2\omega\mu_0} E_0^2 (e^{-jk_{0,z}z} - R \cdot e^{+jk_{0,z}z}) \cdot (e^{jk_{0,z}z} + R \cdot e^{-jk_{0,z}z}) \\ &= -\frac{k_{0,z}}{2\omega\mu_0} E_0^2 (1 + R \cdot e^{-2jk_{0,z}z} - R e^{2jk_{0,z}z} - R^2) \\ &= -\frac{k_{0,z}}{2\omega\mu_0} E_0^2 [1 - R^2 - 2Rj \sin(2k_{0,z}z)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Interpretation des Ergebnisses:

Da die z -Komponente des Poynting-Vektors S_z für $R = 0$ rein reell und minimal wird, ist sie als Wirkleistung in Richtung der negativen z -Achse zu betrachten.

Aus $R = -1$ resultiert eine rein imaginäre z -Komponente des Poynting-Vektors S_z . Die Komponente hängt damit sinusförmig von z ab, was einer totalen Reflexion entspricht. Daher ist in diesem Fall in z -Richtung nur Blindleistung vorhanden.

Gilt $-1 < R < 0$ ist die negative z -Komponente des Poynting-Vektors eine Kombination aus Wirk- und Blindleistung.

- d) Als Ansatz für die Wellenzahl $k_{1,x}$ ist die Grenzflächenbedingung bei $z = 0$ zu verwenden:

$$E_{t1} = E_{t2}. \quad (9)$$

Daraus folgt entsprechend:

$$E_0 (1 + R) \cdot e^{-jk_{0,x}x} = E_0 T \cdot e^{-jk_{1,x}x}. \quad (10)$$

Dies gilt für alle x wenn

$$k_{0,x} = k_{1,x} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \sin(\varphi) \quad (11)$$

gilt.

Um $k_{1,z}$ zu berechnen, wird des E-Feld $E_{1,y}$ in die Wellengleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} 0 &= (-jk_{1,x})^2 + (jk_{1,z})^2 + \omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 \\ &= k_{1,x}^2 + k_{1,z}^2 - \omega^2 \varepsilon_1 \mu_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Durch Umformen und Einsetzen von $k_{1,x}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} k_{1,z} &= \sqrt{\omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 - k_{1,x}^2} \\ &= \omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_0 \mu_0 \sin^2(\varphi)} \\ &= \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 [12 - \sin^2(\varphi)]}. \end{aligned} \quad (13)$$

e) Die Grenzflächenbedingung $E_{t1} = E_{t2}$ bei $z = 0$ liefert:

$$\begin{aligned} E_0 (1 + R) \cdot e^{-jk_{0,x}x} &= E_0 T \cdot e^{-jk_{1,x}x} \\ (1 + R) &= T. \end{aligned} \quad (14)$$

Aus der Grenzflächenbedingung $H_{t1} = H_{t2}$ ebenfalls an der Stelle $z = 0$ und $k_{1,x} = k_{0,x}$ aus d) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{\omega\mu_0} k_{0,z} (1 - R) \cdot e^{-jk_{0,x}x} &= \frac{E_0}{\omega\mu_1} k_{1,z} T \cdot e^{-jk_{0,x}x} \\ \frac{k_{0,z}}{\mu_0} (1 - R) &= \frac{k_{1,z}}{\mu_1} T. \end{aligned} \quad (15)$$

Durch Einsetzen erhält man für den Reflexionskoeffizienten R :

$$R = \frac{k_{0,z}\mu_1 - k_{1,z}\mu_0}{k_{0,z}\mu_1 + k_{1,z}\mu_0} = \frac{3k_{0,z} - k_{1,z}}{3k_{0,z} + k_{1,z}} \quad (16)$$

und für den Transmissionskoeffizienten T :

$$T = \frac{2k_{0,z}\mu_1}{k_{0,z}\mu_1 + k_{1,z}\mu_0} = \frac{6k_{0,z}}{3k_{0,z} + k_{1,z}}. \quad (17)$$