Aufgabe 1 (16 Punkte)

Gegeben sei eine positive Punktladung $Q_1 > 0$ bei $(0, 0, z_0)^T$ und eine negative Punktladung $Q_2 = -Q_1$ auf der Gegenseite bei $(0, 0, -z_0)^T$ in kartesischen Koordinaten. Im gesamten Raum gilt $\varepsilon = \varepsilon_0$.

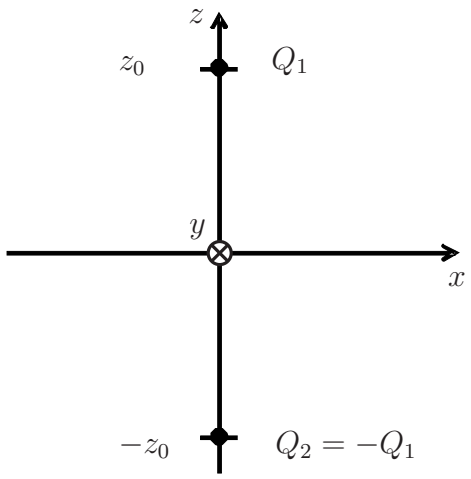


Abbildung 1: Versuchsanordnung für die Aufgabenteile (a) bis (d)

a) Skizzieren Sie in Abbildung 1 die resultierenden elektrischen Feldlinien in die x, z-Ebene.

b) Bestimmen Sie das Potential $\Phi(x, y, z)$ im gesamten Raum. Geben Sie das Potential in kartesischen Koordinaten an.

c) Berechnen Sie nun das elektrische Feld $\vec{E}(x, y, z)$ im gesamten Raum.
Geben Sie zudem $\vec{E}(x, y, z = 0)$ an.

Die folgenden Aufgabenteile sind ohne Kenntnis von $\Phi(x, y, z)$ lösbar.

d) Bestimmen Sie die Kraft $\vec{F}$ in Abhängigkeit von Q_1, welche die Ladung Q_2 auf die Ladung Q_1 ausübt.

In Abbildung 2 ist die Anordnung folgendermaßen verändert:
Die Ladungen sind nun beide positiv ($Q_2 = +Q_1$) geladen und besitzen eine Masse m. Die Metallkugel 2 ist an einer Schnur auf der Höhe $z = -z_0$ aufgehängt. Die Metallkugel 1 besitzt eine Bohrung, sodass sie entlang der Schnur bzw. der z-Achse reibungslos gleiten kann. Die Schwerebeschleunigung $\vec{g}$ wirkt in negative z-Richtung.

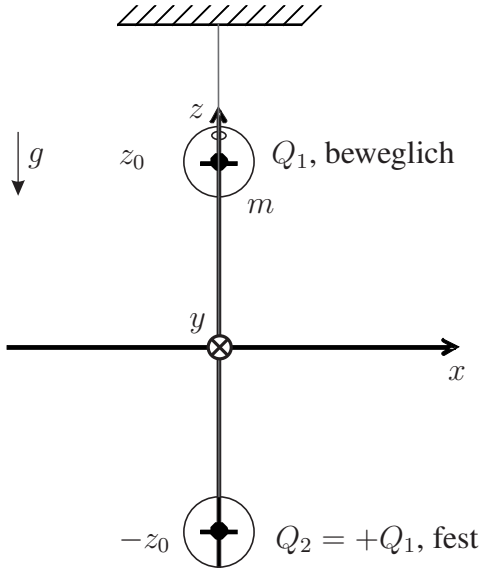


Abbildung 2: Versuchsanordnung für Aufgabenteile (e) und (f)

Hinweis: Die Kugeln sollen weiterhin als Punktladung modelliert werden und die Schnur beeinflusst das elektrische Feld $\vec{E}$ nicht.

e) Skizzieren Sie die elektrischen Feldlinien in die x, z-Ebene, wenn die positiven Ladungen, wie in Abbildung 2, bei $z = z_0$ bzw. $z = -z_0$ liegen.

f) Berechnen Sie wie die Ladung Q_1 gewählt werden muss, sodass die Kugel 1 bei $z = z_0$ die Ruhelage einnimmt.

Lösung 1 (16 Punkte)

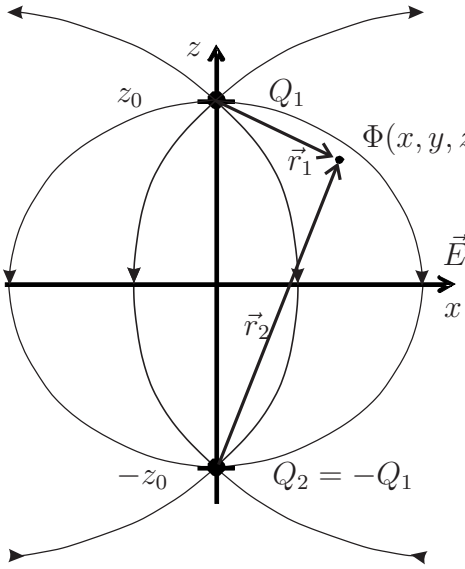


Abbildung 3: Versuchsanordnung für die Aufgabenteile (a) und (d)

a) Aufgrund der Symmetrie steht das elektrische Feld senkrecht auf der x-Achse (siehe Abb. 3).

b) Das Potential ergibt sich als Überlagerung des Coulombintegrals:

$$\Phi_{ges}(x,y,z) = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q_1}{|\vec{r}_1|} - \frac{Q_1}{|\vec{r}_2|}\right)$$

Und mit

$$|\vec{r}_1| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}$$
$$|\vec{r}_2| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}$$

ergibt sich die kartesische Darstellung

$$\Phi_{ges}(x,y,z) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}}\right)$$

c) E-Feld

$$\begin{aligned}
\vec{E}(x,y,z) &= -\,\text{grad}\Phi \\
&= -\left(\vec{e}_x\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial z}\right) \\
&= -\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon}\vec{e}_z\left(\frac{-(z-z_0)}{(x^2+y^2+(z-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{-(z+z_0)}{(x^2+y^2+(z+z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \\
&\quad -\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon}\vec{e}_y\left(\frac{-y}{(x^2+y^2+(z-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{-y}{(x^2+y^2+(z+z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \\
&\quad -\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon}\vec{e}_x\left(\frac{-x}{(x^2+y^2+(z-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{-x}{(x^2+y^2+(z+z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E}(x,y,z=0) &= -\vec{e}_z\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{z_0}{(x^2+y^2+(-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{-z_0}{(x^2+y^2+(z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \\
&= -\vec{e}_z\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{2z_0}{(x^2+y^2+z_0^2)^{\frac{3}{2}}}\right)
\end{aligned}$$

$\vec{E}$-Feld hat für $z = 0$ nur eine z-Komponente und ist senkrecht auf der x, y-Ebene.

d) Die Kraft F auf Q_1 ist folgendermaßen gegeben:

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1^2}{(2z_0)^2}\vec{e}_z.$$

Aufgrund der Symmetrie hat die Kraft nur eine z-Komponente und zeigt in $-z$-Richtung.

e) Aufgrund der gleichnamigen Ladungen und dem gleichen Abstand $|z_0|$ zur x, y-Ebene ist das $\vec{E}$-Feld nahezu parallel zur x, y-Ebene für $z \to 0$. Dies ist in Abb. 4 dargestellt.

f) Analog zu (d) lässt sich die Kraft F auf Q_1 bestimmen. Diese soll der Gewichtskraft der Kugel entgegnen.

$$\begin{aligned}
-mg\,\vec{e}_z &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1^2}{(2z_0)^2}\vec{e}_z \\
\Leftrightarrow Q_1 &= \pm 4z_0\sqrt{\pi\varepsilon_0 mg} \\
\Rightarrow Q_1 &= +4z_0\sqrt{\pi\varepsilon_0 mg}
\end{aligned}$$

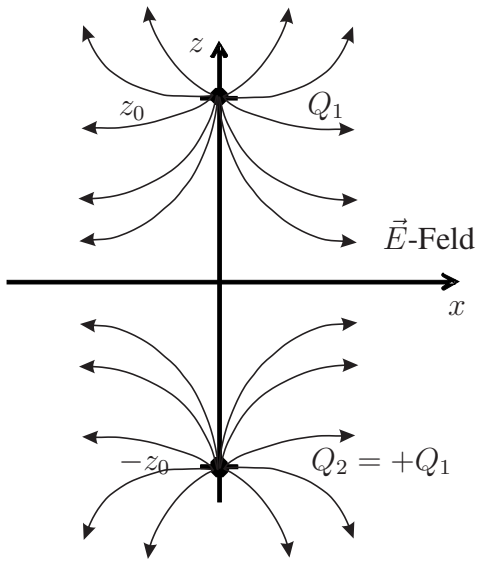
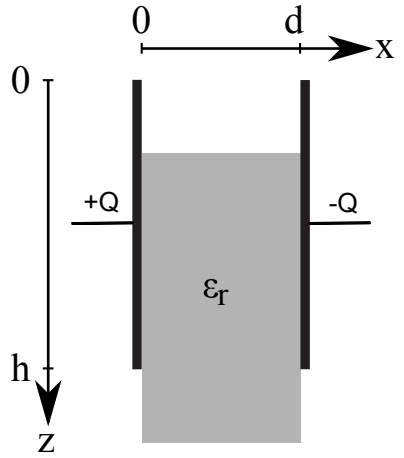


Abbildung 4: Versuchsanordnung für die Aufgabenteile (e) und (f)

Aufgabe 2 (16 Punkte)

Gegeben sei ein Plattenkondensator im Vakuum mit rechteckigen Platten der Höhe h und Breite a. Der Plattenabstand sei d. Der Kondensator mit der Gesamtladung Q ist von der Spannungsquelle getrennt. Im Inneren des Kondensators befindet sich ein in z-Richtung verschiebbares Dielektrikum der Länge h mit der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon_r > 1$. Falls die Position der oberen Kante des Dielektrikums $z_D = 0$ ist, füllt das Dielektrikum den Kondensator vollständig aus.



a) Leiten Sie die Formel für die Kapazität des Plattenkondensators für den Fall $z_D = 0$ ausgehend von der Formel

$$C = \frac{\oint \vec{D} d\vec{f}}{-\int \vec{E} d\vec{s}}$$

her.

b) Geben Sie die Kapazität des Kondensators in Abhängigkeit der Position $z_D \in [0, h]$ der oberen Kante des Dielektrikums an.

c) Berechnen Sie die im Kondensator gespeicherte Energie für $z_D \in [0, h]$.

d) Auf das Dielektrikum wirke nun die Gewichtskraft $\vec{F}_G = mg\vec{e}_z$ in z-Richtung.

- Wie weit wird das Dielektrikum durch diese Kraft aus dem Kondensator gezogen?
- Welche maximale Masse m darf das Dielektrikum haben, damit es höchstens zur Hälfte aus dem Kondensator gezogen wird?

Hinweis: Vernachlässigen Sie Massenträgheits- und Reibungseffekte. Betrachten Sie das System nur im stationären Zustand.

e) Gegeben sei nun ein Plattenkondensator mit zwei miteinander verbundenen Dielektrika mit den Dielektrizitätskonstanten ε_{r1} und ε_{r2}, wobei $\varepsilon_{r2} > \varepsilon_{r1}$. Die Anordnung ist in Abbildung 5 dargestellt. Der Kondensator mit der Gesamtladung Q ist von der Spannungsquelle getrennt.

- Zeichnen Sie die elektrischen Feldlinien innerhalb der Dielektrika ein. Berücksichtigen Sie dabei ebenfalls Randeffekte.

- Welche Kraft wirkt auf die Ladungen der Dipole der Dielektrika? In welche Richtung zeigt diese Kraft?
- Zeichnen Sie die auf die Ladungen der Dipole in den Dielektrika wirkenden Kräfte exemplarisch in den Bereichen mit Randeffekten in Dielektrika 1 und 2 ein. Zeichnen Sie ebenfalls die daraus resultierende Gesamtkraft ein.
- Warum wirkt resultierend eine nach oben gerichtete Kraft auf die miteinander verbundenen Dielektrika?

Hinweis: Diese Teilaufgabe ist von den vorherigen Teilaufgaben unabhängig.

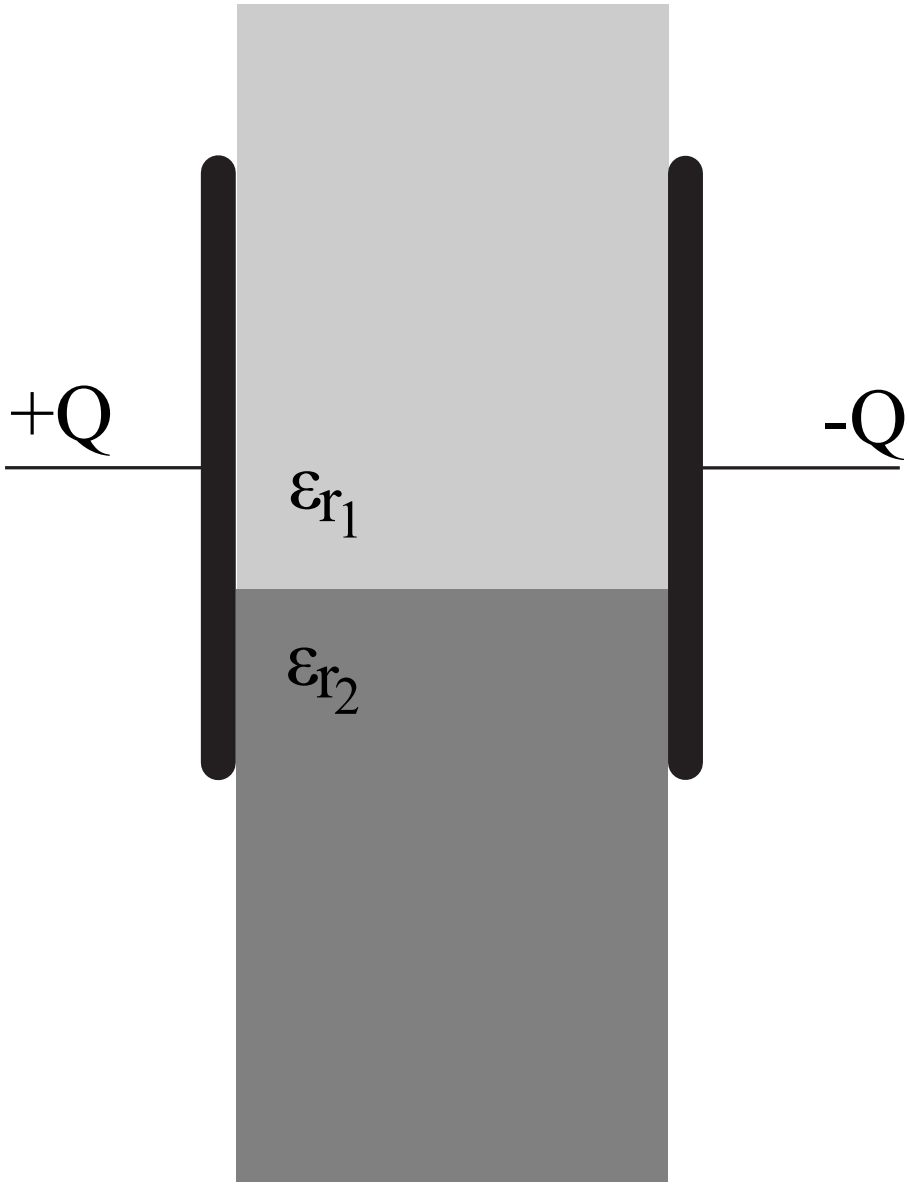


Abbildung 5: Plattenkondensator mit zwei Dielektrika in Aufgabe 2e.

Lösung 2 (16 Punkte)

a)

$$\begin{aligned} C &= \frac{\oint \vec{D} d\vec{f}}{-\int \vec{E} d\vec{s}} \\ &= \frac{\oint \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} d\vec{f}}{-\int \vec{E} d\vec{s}} \\ &= \frac{\int_h^0 \int_a^0 \varepsilon_0 \varepsilon_r E \vec{e}_x \vec{e}_x dy dz}{-\int_d^0 E \vec{e}_x \vec{e}_x dx} \\ &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r E a h}{E d} \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{a h}{d} \end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg über die Flächenladungsdichte: Maxwell-Gleichung in integraler Form und Grenzflächenbetrachtung $\sigma = D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$ werden benötigt.

$$\begin{aligned} C &= \frac{\oint \vec{D} d\vec{f}}{-\int \vec{E} d\vec{s}} \\ &= \frac{\int \rho dv}{-\int \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} d\vec{s}} \\ &= \frac{\iint \sigma dy dz}{\frac{\sigma \cdot d}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} \\ &= \frac{\sigma a h}{\frac{\sigma \cdot d}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{a h}{d} \end{aligned}$$

b) Die Kapazität des Kondensators in Abhängigkeit von der Position des Dielektrikums kann durch eine Parallelschaltung von zwei Kondensatoren berechnet werden:

$$\begin{aligned} C(z_d) &= \varepsilon_0 \frac{a \cdot z_D}{d} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{a \cdot (h - z_D)}{d} \\ &= \varepsilon_0 \frac{a}{d} \left(z_D + \varepsilon_r h - \varepsilon_r z_D \right) \\ &= \varepsilon_0 \frac{a}{d} \left(\varepsilon_r h - z_D (\varepsilon_r - 1) \right) \end{aligned}$$

c) Die im Kondensator gespeicherte Energie (elektrische Feldenergie und Gesamtenergie aller Dipole durch Polarisation) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} W_{el} &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \\ &= \frac{Q^2 d}{2 \varepsilon_0 a \left(\varepsilon_r h - z_D (\varepsilon_r - 1) \right)} \end{aligned}$$

d) An der Position, an der das Dielektrikum zum Stillstand kommt, muss ein Kräftegleichgewicht herrschen, das heißt $\vec{F}_G + \vec{F}_{el} = \vec{0}$. $\vec{F}_{el}$ kann aus der im Kondensator gespeicherten Energie berechnet werden:

$$\vec{F}_{el} = -\text{grad}W_{el} = -\frac{\partial W_{el}}{\partial z_D}\vec{e}_z.$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} mg &= \frac{\partial}{\partial z_D}\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 a\left(\varepsilon_r h - z_D(\varepsilon_r - 1)\right)} \\ &= \frac{(\varepsilon_r - 1)Q^2 d}{2\varepsilon_0 a\left(\varepsilon_r h - z_D(\varepsilon_r - 1)\right)^2} \end{aligned}$$

Umformen ergibt

$$\varepsilon_r h - z_D(\varepsilon_r - 1) = \pm\sqrt{\frac{(\varepsilon_r - 1)Q^2 d}{2\varepsilon_0 amg}}$$

und somit gilt für z_D

$$z_D = \frac{1}{\varepsilon_r - 1}\left(\varepsilon_r h \pm \sqrt{\frac{(\varepsilon_r - 1)Q^2 d}{2\varepsilon_0 amg}}\right).$$

Da $\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1} > 1$ ist, macht nur die Lösung

$$z_D = \frac{1}{\varepsilon_r - 1}\left(\varepsilon_r h - \sqrt{\frac{(\varepsilon_r - 1)Q^2 d}{2\varepsilon_0 amg}}\right).$$

Sinn. Andernfalls würde die obere Kante des Dielektrikums mit Sicherheit außerhalb des Kondensators liegen.

Damit das Dielektrikum an einer Stelle $z_D \in (0, h/2]$ zum Stillstand kommt, muss für die maximale Masse m des Dielektrikums folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\begin{aligned} z_D &\leq \frac{h}{2} \\ \frac{1}{\varepsilon_r - 1}\left(\varepsilon_r h - \sqrt{\frac{(\varepsilon_r - 1)Q^2 d}{2\varepsilon_0 amg}}\right) &\leq \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2}(\varepsilon_r + 1) &\leq \sqrt{\frac{(\varepsilon_r - 1)Q^2 d}{2\varepsilon_0 amg}} \\ \frac{h^2}{4}(\varepsilon_r + 1)^2 &\leq \frac{(\varepsilon_r - 1)Q^2 d}{2\varepsilon_0 amg} \\ m &\leq \frac{2(\varepsilon_r - 1)Q^2 d}{\varepsilon_0 agh^2(\varepsilon_r + 1)^2}. \end{aligned}$$

e)
- Auf die Ladungen der Dipole wirkt die elektrische Kraft $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$. Diese zeigt in Richtung der elektrischen Feldlinien für die positive Ladung und entgegen der Richtung der Feldlinien für die negative Ladung des jeweiligen Dipols.
- Da die Polarisationsladungsdichte in Dielektrikum 2 größer ist als die in Dielektrikum 1 (größeres ε_r) wirkt resultierend eine nach oben gerichtete Kraft auf die Dielektrika.

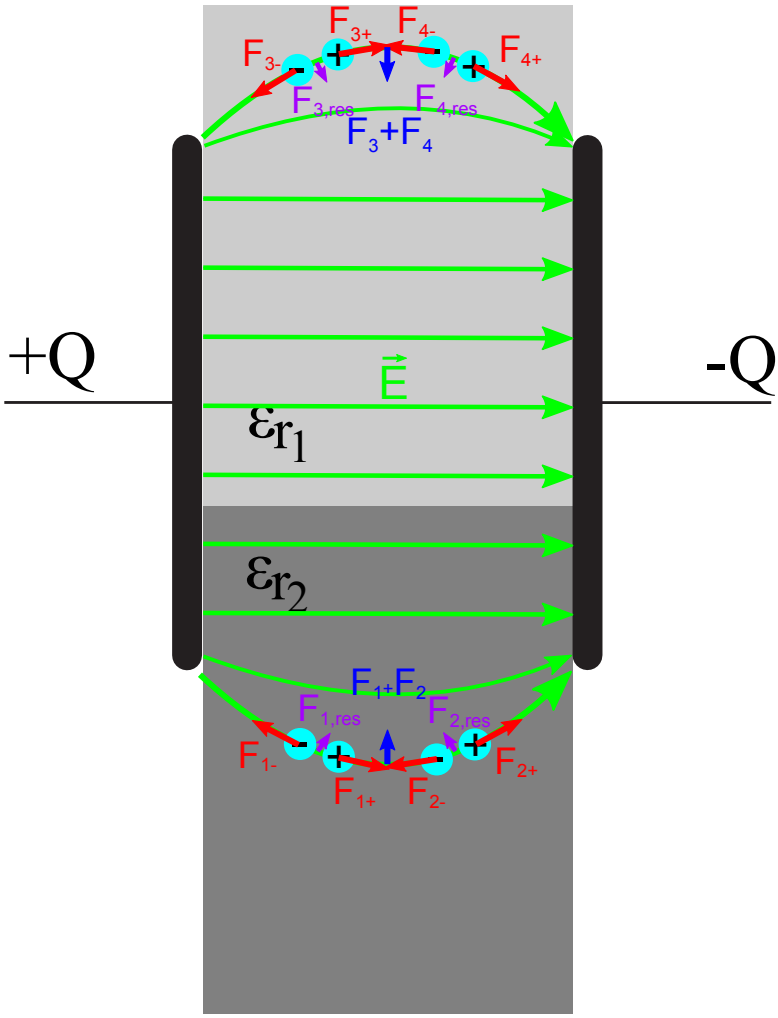


Abbildung 6: Darstellung der auf die Ladungen der Dipole wirkenden Kräfte. Durch die Ausrichtung der Dipole entlang der Feldlinien resultiert für Dielektrikum 2 eine nach oben gerichtete und für Dielektrikum 1 eine nach unten gerichtete Kraft. Innerhalb des Kondensators hebt sich die Kraft auf die positiven und negativen Ladungen der Dipole auf, daher sind nur die Randbereiche für die resultierende Gesamtkraft entscheidend.

Aufgabe 3 (16 Punkte)

Gegeben sei ein unendlich langer zylinderförmiger Koaxialleiter in z-Richtung. Im Koaxialleiter gibt es Bereiche mit unterschiedlichen Stromdichten $\vec{J}$:

Bereich 1 :	$r < a$:	$\vec{J} = 0,$
Bereich 2 :	$a \leq r < b$:	$\vec{J} = J_0 \frac{r}{a} \vec{e}_z \sin(\omega t),$
Bereich 3 :	$b \leq r < c$:	$\vec{J} = J_0 \frac{r^2}{b^2} \vec{e}_z \cos(\omega t),$
Bereich 4 :	$r \geq c$:	$\vec{J} = 0.$

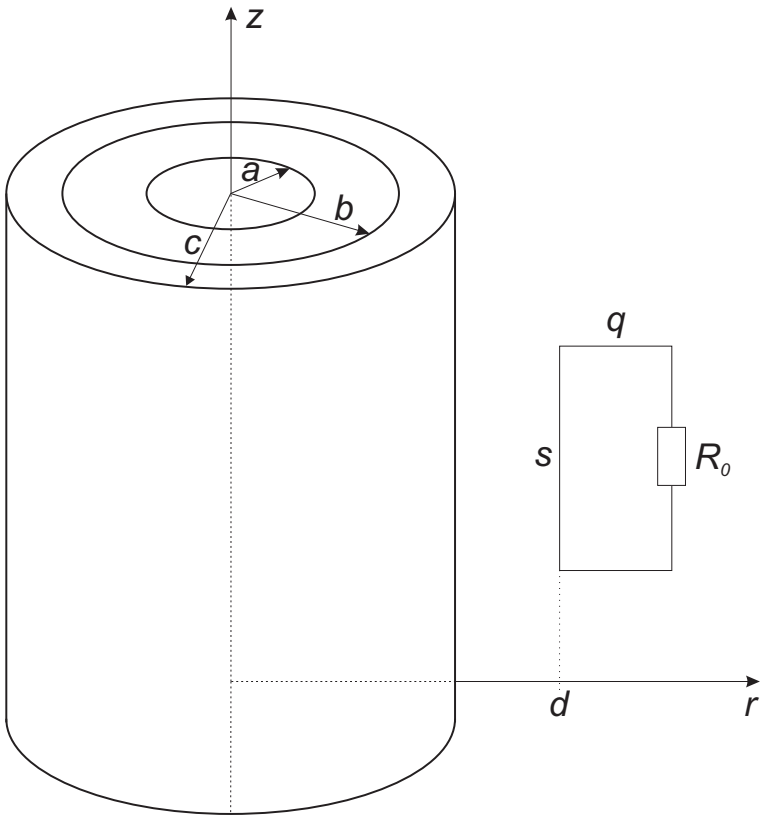
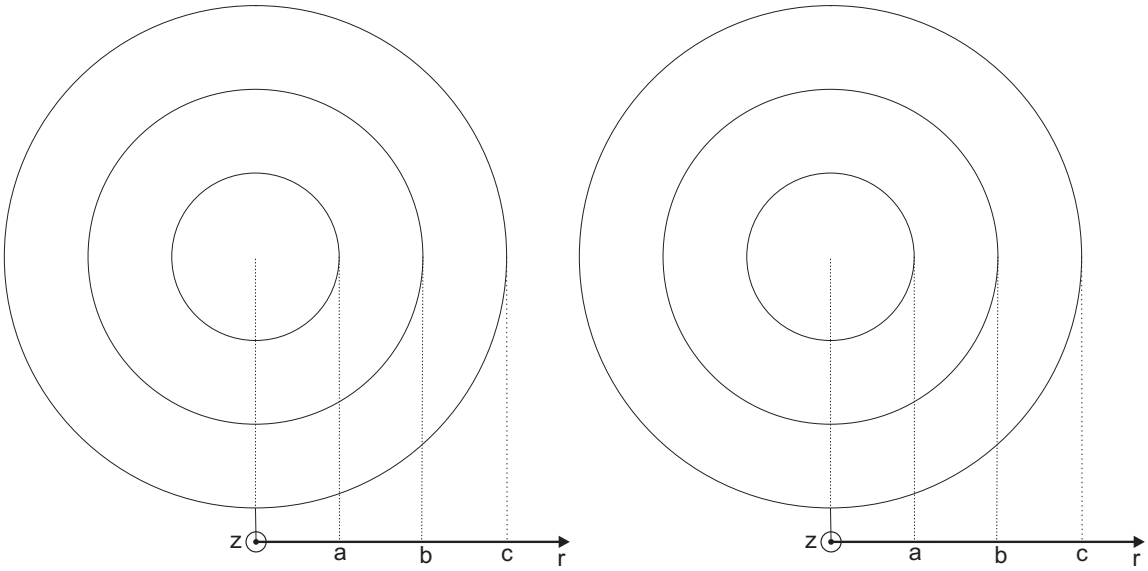


Abbildung 7: Geometrie des Koaxialleiters und der Leiterschleife

a) Berechnen Sie die Teilströme I_1, I_2, I_3 und I_4 für alle vier Bereiche sowie den Gesamtstrom I des Koaxialleiters.

b) Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{H}$ im gesamten Raum als Funktion des Radius r.

c) Zeichnen Sie den Verlauf der magnetischen Feldlinien im Inneren des Leiters zum Zeitpunkt $t_1 = 0s$ in die linke vorgefertigte Vorlage (a) und zum Zeitpunkt $t_2 = \frac{3}{4f}$ in die rechte vorgefertigte Vorlage (b) in Abbildung 8 ein.



(a) $t_1 = 0s$ (b) $t_2 = \frac{3}{4f}$

Abbildung 8: Vorlage für die Zeichnung der magnetischen Feldlinien

d) Berechnen Sie den durch das Magnetfeld induzierten Strom in der rechteckigen Leiterschleife. Die rechteckige Leiterschleife mit den Seitenlängen s und q sowie dem Widerstand R_0 befindet sich in der Entfernung $d\,(d > c)$ von der z-Achse. Vernachlässigen Sie dabei das Magnetfeld, das durch den induzierten Strom erzeugt wird.

Anmerkung: Sollten Sie Aufgabenteil a) nicht gelöst haben, dann nehmen Sie Folgendes an:

Bereich 1: $I_1(t) = 0$
Bereich 2: $I_2(t) = A\sin(\omega t) + B$
Bereich 3: $I_3(t) = C\cos(\omega t) + D$
Bereich 4: $I_4(t) = 0$

Lösung 3 (16 Punkte)

a) $\vec{H}$-Feld: Durchflutungsgesetz

$$\int \vec{J}\, d\vec{f} = I$$

Bereich 1 und Bereich 4:

$$I_1 = I_4 = 0.$$

Strom im Innenleiter bzw. Bereich 2:

$$\begin{aligned} I_2 &= 2\pi \int_a^b J_0 \frac{r'}{a} r'\, dr' \sin(\omega t) \\ &= \frac{2\pi J_0}{a} \left[\frac{1}{3} r^3\right]_a^b \sin(\omega t) \\ &= \frac{2\pi J_0}{3} \left(\frac{b^3}{a} - a^2\right) \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Strom im Außenleiter bzw. Bereich 3:

$$\begin{aligned} I_3 &= 2\pi \int_b^c J_0 \frac{r'^2}{b^2} r'\, dr' \cos(\omega t) \\ &= \frac{2\pi J_0}{b^2} \left[\frac{1}{4} r'^4\right]_b^c \cos(\omega t) \\ &= \frac{\pi J_0}{2} \left(\frac{c^4}{b^2} - b^2\right) \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Gesamtstrom im Leiter:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

b) $\vec{H}$-Feld: Durchflutungsgesetz

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \int \vec{J}\, d\vec{f} = I$$

Zylinderkoordinaten und Symmetrie liefern:

$$\vec{H} = H_\varphi \vec{e}_\varphi$$

$0 \leq r < a$:

$$\begin{aligned} \int \vec{J}\, d\vec{f} &= 0 \\ \Rightarrow H_\varphi &= 0 \end{aligned}$$

$a \leq r \leq b$:

$$\begin{aligned} 2\pi r H_\varphi(r) &= \underbrace{I_1}_{0} + 2\pi \int_a^r J_0 \frac{r'}{a} r' \, dr' \sin(\omega t) \\ &= \frac{2\pi J_0}{a} \int_a^r r'^2 \, dr' \sin(\omega t) \\ &= \frac{2\pi J_0}{a} \left[\frac{1}{3} r'^3 \right]_a^r \sin(\omega t) \\ \Rightarrow H_\varphi(r) &= \frac{J_0}{3} \left(\frac{r^2}{a} - \frac{a^2}{r} \right) \sin(\omega t). \end{aligned}$$

$b \leq r \leq c$:

$$\begin{aligned} 2\pi r H_\varphi(r) &= \underbrace{I_1}_{0} + I_2 + 2\pi \int_b^r J_0 \frac{r'^2}{b^2} r' \, dr' \cos(\omega t) \\ &= I_2 + \frac{2\pi J_0}{b^2} \int_b^r r'^3 \, dr' \cos(\omega t) \\ &= I_2 + \frac{2\pi J_0}{b^2} \left[\frac{1}{4} r'^4 \right]_b^r \cos(\omega t) \\ &= I_2 + \frac{\pi J_0}{2} \left(\frac{r^4}{b^2} - b^2 \right) \cos(\omega t) \\ \Rightarrow H_\varphi(r) &= \frac{I_2}{2\pi r} + \frac{J_0}{4} \left(\frac{r^3}{b^2} - \frac{b^2}{r} \right) \cos(\omega t) \end{aligned}$$

$c < r < \infty$:

$$\begin{aligned} 2\pi r H_\varphi(r) &= \underbrace{I_1}_{0} + I_2 + I_3 + \underbrace{I_4}_{0} \\ H_\varphi(r) &= \frac{I_2 + I_3}{2\pi r} \end{aligned}$$

c) Zeichnung der magnetischen Feldlinien im Inneren des Leiters:

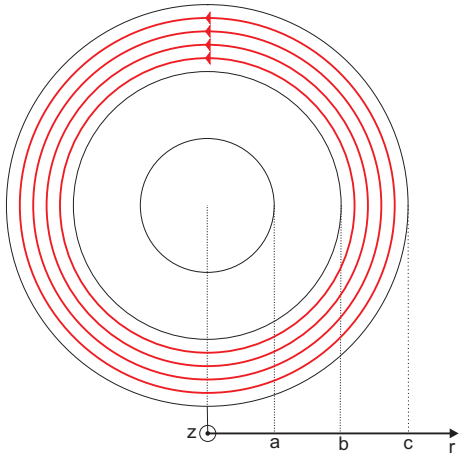


Abbildung 9: Verlauf der magnetischen Feldlinien zum Zeitpunkt $t_1 = 0s$

Zeichnung der magnetischen Feldlinien im Inneren des Leiters:

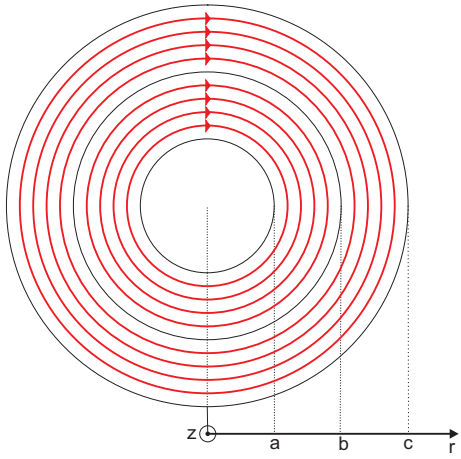


Abbildung 10: Verlauf der magnetischen Feldlinien zum Zeitpunkt $t_2 = \frac{3}{4f}$

d)

$$\Phi = \int \vec{B}\, d\vec{f}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \mu \int_0^s \int_d^{d+a} H_\varphi(r')\, dr' dz \\ &= \frac{\mu\, s(I_2 + I_3)}{2\pi} \ln\left(\frac{d+q}{d}\right) \end{aligned}$$

Induktionsgesetz:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{s} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = U_{ind}$$

$$U_{ind} = -\mu\, s \ln\left(\frac{d+q}{d}\right)\left(\underbrace{\omega\frac{J_0}{3}\left(\frac{b^3}{a}-a^2\right)\cos(\omega t)}_{\partial I_2/\partial t}\underbrace{-\omega\frac{J_0}{4}\left(\frac{c^4}{b^2}-b^2\right)\sin(\omega t)}_{\partial I_3/\partial t}\right)$$

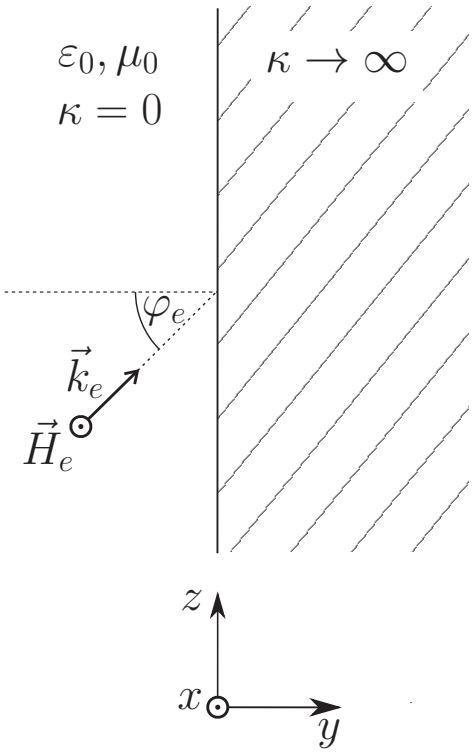
Alternativer Rechenweg:

$$U_{ind} = -\frac{\mu\, s}{2\pi}\ln\left(\frac{d+q}{d}\right)\left(\underbrace{A\omega\cos(\omega t)}_{\partial I_2/\partial t}\underbrace{-C\omega\sin(\omega t)}_{\partial I_3/\partial t}\right)$$

Für den induzierten Strom gilt:

$$I_{ind} = \frac{U_{ind}}{R_0}$$

Aufgabe 4 (16 Punkte)



Eine homogene, transversale ebene elektromagnetische Welle mit der magnetischen Feldstärke

$$\vec{H}_e = H_e e^{j\left(\omega t - \vec{k}_e \vec{r}\right)} \vec{e}_x \qquad \text{mit} \qquad \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

kommt aus dem Vakuum und trifft bei $y = 0$ unter dem Einfallswinkel φ_e auf einen idealen Leiter, der den Halbraum $y > 0$ ausfüllt (siehe Skizze).

a) Geben Sie zunächst für die einfallende Welle die Komponenten des Wellenzahlvektors $\vec{k}_e$ an. Berechnen Sie zudem die elektrische Feldstärke $\vec{E}_e$ in Abhängigkeit von H_e unter Verwendung der allgemein gültigen Maxwellgleichungen.

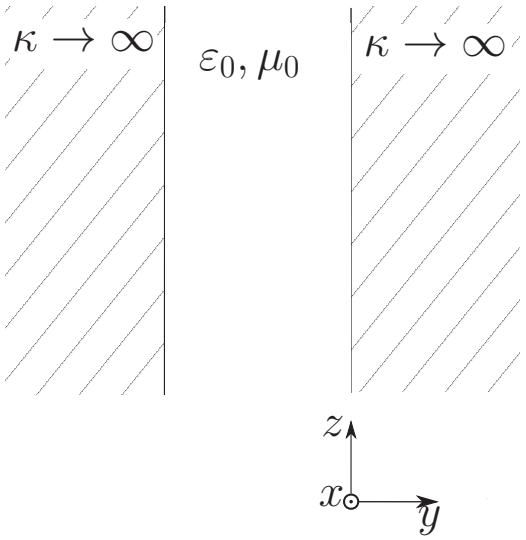
   Zeichnen Sie das $\vec{E}_e$-Feld der einfallenden Welle in die Skizze der Aufgabenstellung ein.

b) Geben Sie für die reflektierte Welle die Felder $\vec{E}_r$ und $\vec{H}_r$ an. Bestimmen Sie alle Größen in Abhängigkeit der Parameter der einfallenden Welle.

   Hinweis: Verwenden Sie für das magnetische Feld der reflektierten Welle den Ansatz:

$$\vec{H}_r = H_r e^{j\left(\omega t - \vec{k}_r \vec{r}\right)} \vec{e}_x$$

Nun wird parallel zum bereits vorhandenen Leiter eine weitere ideal leitende Platte bei $y = -d$ eingebracht. Zwischen beiden Leitern breitet sich eine elektromagnetische Welle aus.



Die resultierenden Felder der Welle sind:

$$\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - k_z z)} \left(\sin(k_y y)\, \vec{e}_z - j \frac{k_z}{k_y} \cos(k_y y)\, \vec{e}_y \right)$$
$$\vec{H} = j H_0 e^{j(\omega t - k_z z)} \cos(k_y y)\, \vec{e}_x$$

c) In welche Richtung breitet sich die elektromagnetische Welle aus und handelt es sich um eine TE- oder TM-Welle. Begründen Sie.

d) Welche Randbedingungen müssen die Felder der Welle erfüllen und warum? Berechnen Sie aus den aufgestellten Randbedingungen alle möglichen Lösungen für k_y.

e) Bestimmen Sie die kleinstmögliche ausbreitungsfähige Frequenz im Wellenleiter.

Lösung 4 (16 Punkte)

a) Der Wellenzahlvektor der einfallenden Welle lautet:

$$\vec{k}_e = k_0 \sin(\varphi_e)\,\vec{e}_z + k_0 \cos(\varphi_e)\,\vec{e}_y \qquad \text{mit} \qquad k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}. \tag{1}$$

Für die elektrische Feldstärke gilt:

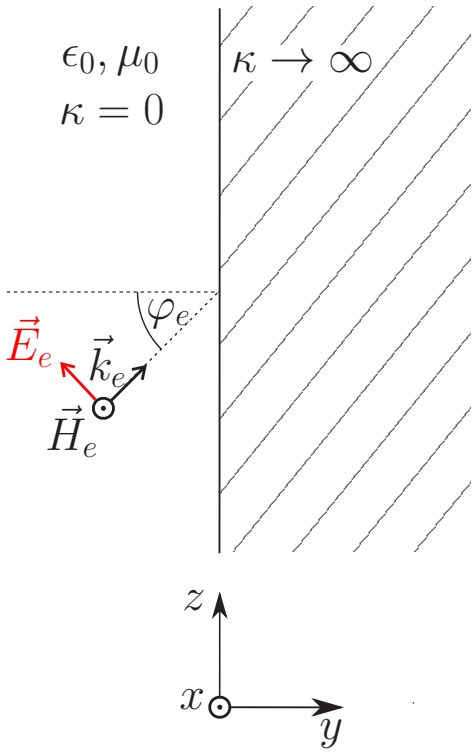
$$\vec{E}_e = \frac{1}{j\omega\epsilon_0}\text{rot}\vec{H}_e \tag{2}$$

mit

$$\begin{aligned}\text{rot}\vec{H}_e &= -\frac{\partial H_{e,x}}{\partial y}\vec{e}_z + \frac{\partial H_{e,x}}{\partial z}\vec{e}_y \\ &= jk_0\cos(\varphi_e)\,H_e e^{j\left(\omega t - \vec{k}_e\vec{r}\right)}\vec{e}_z - jk_0\sin(\varphi_e)\,H_e e^{j\left(\omega t - \vec{k}_e\vec{r}\right)}\vec{e}_y \\ &= jk_0 H_e e^{j\left(\omega t - \vec{k}_e\vec{r}\right)}\left(\cos(\varphi_e)\,\vec{e}_z - \sin(\varphi_e)\,\vec{e}_y\right)\end{aligned} \tag{3}$$

ergibt sich

$$\vec{E}_e = H_e\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}e^{j\left(\omega t - \vec{k}_e\vec{r}\right)}\left(\cos(\varphi_e)\,\vec{e}_z - \sin(\varphi_e)\,\vec{e}_y\right) \tag{4}$$



Die rot markierten Elemente müssen hinzugefügt werden.

b) Der Wellenzahlvektor der reflektierten Welle lautet:

$$\vec{k}_r = k_0 \sin(\varphi_r)\,\vec{e}_z - k_0 \cos(\varphi_r)\,\vec{e}_y \tag{5}$$

Der Ansatz für die reflektierte Welle:

$$\vec{H}_r = H_r e^{j\left(\omega t - \vec{k}_r \vec{r}\right)} \vec{e}_x \tag{6}$$

Für die elektrische Feldstärke gilt:

$$\vec{E}_r = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \text{rot} \vec{H}_r \tag{7}$$

mit

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{H}_r &= -\frac{\partial H_{r,x}}{\partial y}\vec{e}_z + \frac{\partial H_{r,x}}{\partial z}\vec{e}_y \\ &= -jk_0 \cos\left(\varphi_r\right) H_r e^{j\left(\omega t - \vec{k}_r \vec{r}\right)} \vec{e}_z - jk_0 \sin\left(\varphi_r\right) H_r e^{j\left(\omega t - \vec{k}_r \vec{r}\right)} \vec{e}_y \\ &= -jk_0 H_r e^{j\left(\omega t - \vec{k}_r \vec{r}\right)} \left(\cos\left(\varphi_r\right) \vec{e}_z + \sin\left(\varphi_r\right) \vec{e}_y\right) \end{aligned} \tag{8}$$

Daraus ergibt sich das elektrische Feld der reflektierten Welle:

$$\vec{E}_r = -H_r \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} e^{j\left(\omega t - \vec{k}_r \vec{r}\right)} \left(\cos\left(\varphi_r\right) \vec{e}_z + \sin\left(\varphi_r\right) \vec{e}_y\right) \tag{9}$$

Mit der Stetigkeitsbedingung der Tangentialkomponenten gilt:

$$\begin{aligned} \vec{E}_e\left(y = 0, t = 0\right) + \vec{E}_r\left(y = 0, t = 0\right) &= 0 \\ H_e \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} e^{-j\sin(\varphi_e)z} \cos\left(\varphi_e\right) - H_r \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} e^{-j\sin(\varphi_r)z} \cos\left(\varphi_r\right) &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Damit muss gelten $\varphi_e = \varphi_r$ und $H_r = H_e$. Somit ist

$$\vec{H}_r = H_e e^{j\left(\omega t - \vec{k}_r \vec{r}\right)} \vec{e}_x \tag{11}$$

Für die elektrische Feldstärke gilt:

$$\vec{E}_r = -H_e \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} e^{j\left(\omega t - \vec{k}_r \vec{r}\right)} \left(\cos\left(\varphi_e\right) \vec{e}_z + \sin\left(\varphi_e\right) \vec{e}_y\right) \tag{12}$$

c) Die Welle breitet sich in +z-Richtung aus, weil im Exponenten der komplexen e-Funktion der Term $(\omega t - k_z z)$ auftaucht.

Es handelt sich um eine TM-Welle, weil das H-Feld keine longitudinale Komponente aufweist.

d) Randbedingungen:

$$\begin{aligned} E_z\left(y = 0\right) &= 0 \\ E_z\left(y = -d\right) &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Die Randbedingungen lassen sich aus der Stetigkeitsbedingung der Tangetialkomponenten des elektrischen Feldes am Rand ableiten. Da im idealen Leiter wegen der unendlichen Leitfähigeit kein E-Feld vorhanden sein kann gilt im Leiter: $E_{t,2} = 0$. Aus der Stetigkeitsbedingung: $E_{t,1} = E_{t,2}$ lässt sich die Randbedingung $E_{t,1} = 0$ ableiten.

Berechnung von k_y:

$$\begin{aligned} E_z\left(y=0\right) &= 0 \\ E_0 e^{j(\omega t - k_z z)} &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

gilt immer.

$$\begin{aligned} E_z\left(y=-d\right) &= 0 \\ \underbrace{E_0 e^{j(\omega t - k_z z)}}_{\neq 0} \sin\left(-dk_y\right) &= 0 \\ \Rightarrow \sin\left(-dk_y\right) &= 0 \\ \Rightarrow -dk_y &= m\pi \\ \Rightarrow k_y &= -\frac{m\pi}{d} \\ \text{Da } k_y > 0 \text{ gilt: } \Rightarrow k_y &= \frac{m\pi}{d} \text{ mit } m = 1, 2, 3, ... \end{aligned} \tag{15}$$

e) Gesucht kleinste Frequenz für die die Wellenzahl k_z reell ist. Zunächst Berechnung von k_z über die Wellengleichung:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ E_z \cdot \left(-k_y^2 - k_z^2 + \varepsilon\mu\omega^2\right) &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow k_z^2 &= \varepsilon\mu\omega^2 - k_y^2 \\ \Rightarrow k_z &= \sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 - \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2} \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varepsilon\mu\omega^2 &\geq \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2 \\ \Rightarrow \omega &\geq \frac{m\pi}{d\sqrt{\varepsilon\mu}} \\ \Rightarrow f &\geq \frac{m\pi}{2\pi d\sqrt{\varepsilon\mu}} \end{aligned} \tag{18}$$

Kleinste Frequenz für m = 1:

$$\Rightarrow f = \frac{1}{2d\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{19}$$

Aufgabe 5 (16 Punkte)

Gegeben ist das magnetische Vektorpotential eines Hertz'schen Dipols wie folgt:

$$\vec{A} = \frac{\mu l \hat{I}}{4\pi r} \cdot e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \cdot (\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta)$$

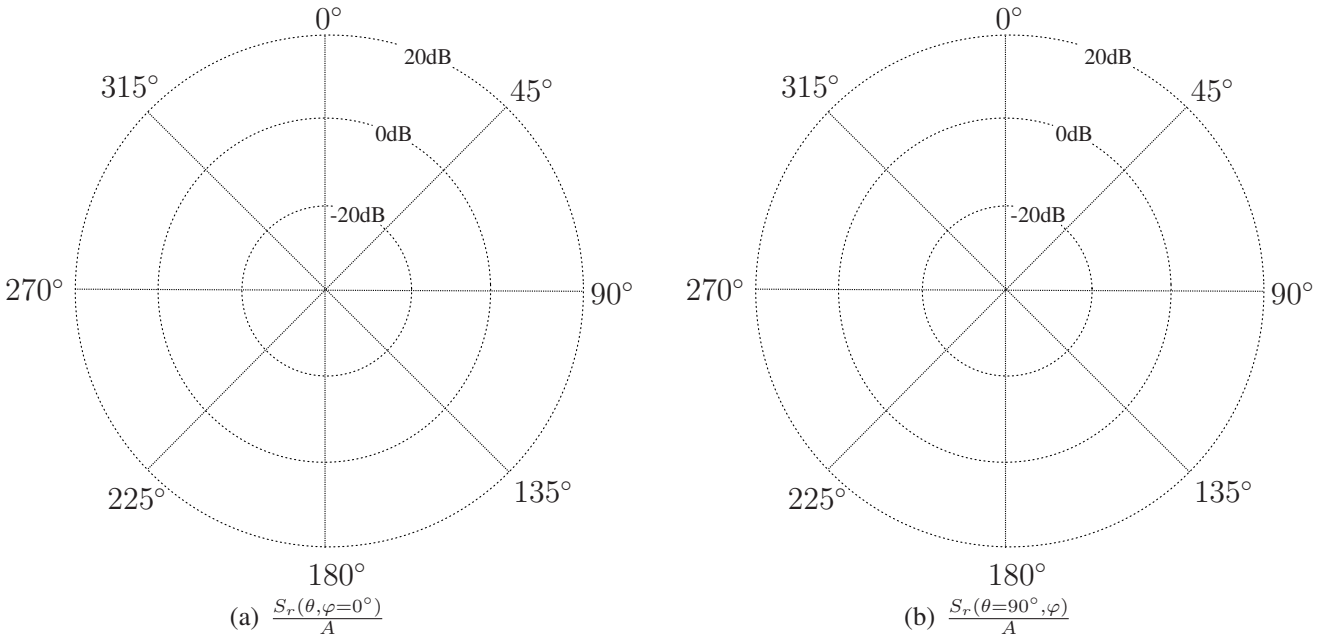
a) Berechnen Sie das elektrische Potential Φ_{el}. Berücksichtigen Sie die vorliegende harmonische Zeitabhängigkeit.
Hinweis: Es gelte die Lorentz-Eichung $\text{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$.

b) Berechnen Sie aus dem Vektorpotential $\vec{A}$ und dem elektrischen Potential Φ_{el} das elektrische Feld $\vec{E}$ des Dipols.
Hinweis: Es gelte $\vec{E} = -\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad}\,\Phi_{el}\right)$.

c) Berechnen Sie aus dem Vektorpotential $\vec{A}$ das magnetische Feld $\vec{H}$.

d) Betrachtet werde nun das Fernfeld des beschriebenen Dipols. Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Feld $\vec{H}$.

e) Für den Poyntingvektor des Fernfeldes gilt für einen konstanten Radius r:
$\vec{S} = S_r\vec{e}_r$ mit $S_r = A \cdot (\sin(\theta))^2$
Zeichnen Sie die Richtcharakteristika $\frac{S_r(\theta,\varphi=0°)}{A}$ und $\frac{S_r(\theta=90°,\varphi)}{A}$ qualitativ in die vorbereiteten Diagramme in Abbildungen 11 ein.



(a) $\frac{S_r(\theta,\varphi=0°)}{A}$ (b) $\frac{S_r(\theta=90°,\varphi)}{A}$

Abbildung 11: Richtcharakteristika der Dipolantenne

Lösung 5 (16 Punkte)

a) Elektrisches Potential

Lorentz-Eichung: $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -c^2 \cdot \mathrm{div}\vec{A}$
Harmonische Vorgänge: $\Phi = -\frac{j}{\omega} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t}$

$\rightarrow \quad \Phi_{el} = \frac{j}{\omega} c^2 \cdot \mathrm{div}\vec{A}$

Das Vektorpotential $\vec{A}$ in Kugelkoordinaten hat keine φ-Komponente und hängt nicht von φ ab. Damit vereinfacht sich die Berechnung von $\mathrm{div}\vec{A}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_\theta \sin\theta\right) \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{\mu l \hat{I}}{4\pi r} \cdot e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \cdot \cos\theta\right) - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\mu l \hat{I}}{4\pi r} \cdot e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \cdot (\sin\theta)^2\right) \\
&= \frac{\mu l \hat{I}}{4\pi}\cos\theta \cdot \left[\frac{1}{r^2} \cdot \left(1 - \frac{rj\omega}{c}\right) - \frac{1}{r^2\sin\theta} \cdot 2\sin\theta\right] \cdot e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \\
&= -\frac{\mu l \hat{I}}{4\pi}\cos\theta \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{j\omega}{rc}\right) \cdot e^{j\omega(t-\frac{r}{c})}
\end{aligned}$$

Für das gesuchte elektrische Potential folgt

$$\begin{aligned}
\Phi_{el} &= \frac{j}{\omega} c^2 \cdot \mathrm{div}\vec{A} \\
&= \frac{j}{\omega} c^2 \cdot \left[-\frac{\mu l \hat{I}}{4\pi}\cos\theta \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{j\omega}{rc}\right) \cdot e^{j\omega(t-\frac{r}{c})}\right] \\
\Rightarrow \Phi_{el} &= \frac{\mu l \hat{I}}{4\pi}\cos\theta \cdot \left(\frac{c}{r} - \frac{jc^2}{\omega r^2}\right) \cdot e^{j\omega(t-\frac{r}{c})}
\end{aligned}$$

b) Elektrisches Feld

Aus dem Hinweis $\vec{E} = -(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \mathrm{grad}\,\Phi_{el})$ folgt für die einzelnen Komponenten des $\vec{E}$-Felds

$$\begin{aligned}
E_\theta &= -\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) \\
&= \frac{\mu l \hat{I}}{4\pi r} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{j\omega(t-\frac{r}{c})}\right)\sin\theta - e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \cdot \left(\frac{c}{r} - \frac{jc^2}{\omega r^2}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\right)\right] \\
\Rightarrow E_\theta &= \frac{\mu l \hat{I}}{4\pi}\sin\theta \cdot \left(\frac{j\omega}{r} + \frac{c}{r^2} - \frac{jc^2}{\omega r^3}\right) \cdot e^{j\omega(t-\frac{r}{c})}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E_r &= -\left(\frac{\partial A_r}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) \\
&= -\frac{\mu l \hat{I}}{4\pi}\cos\theta \cdot \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{j\omega(t-\frac{r}{c})}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\left(\frac{c}{r} - \frac{jc^2}{\omega r^2}\right)e^{j\omega(t-\frac{r}{c})}\right)\right] \\
\Rightarrow E_r &= \frac{\mu l \hat{I}}{2\pi}\cos\theta \cdot \left(\frac{c}{r^2} - \frac{jc^2}{\omega r^3}\right) \cdot e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \\
E_\varphi &= -\left(\frac{\partial A_\phi}{\partial t} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right) \\
\Rightarrow E_\varphi &= 0
\end{aligned}
$$

c) Magnetisches Feld

Rotation: $A_\varphi = 0$ und $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{rot}\,\vec{A} = \vec{e}_\varphi \cdot \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]$

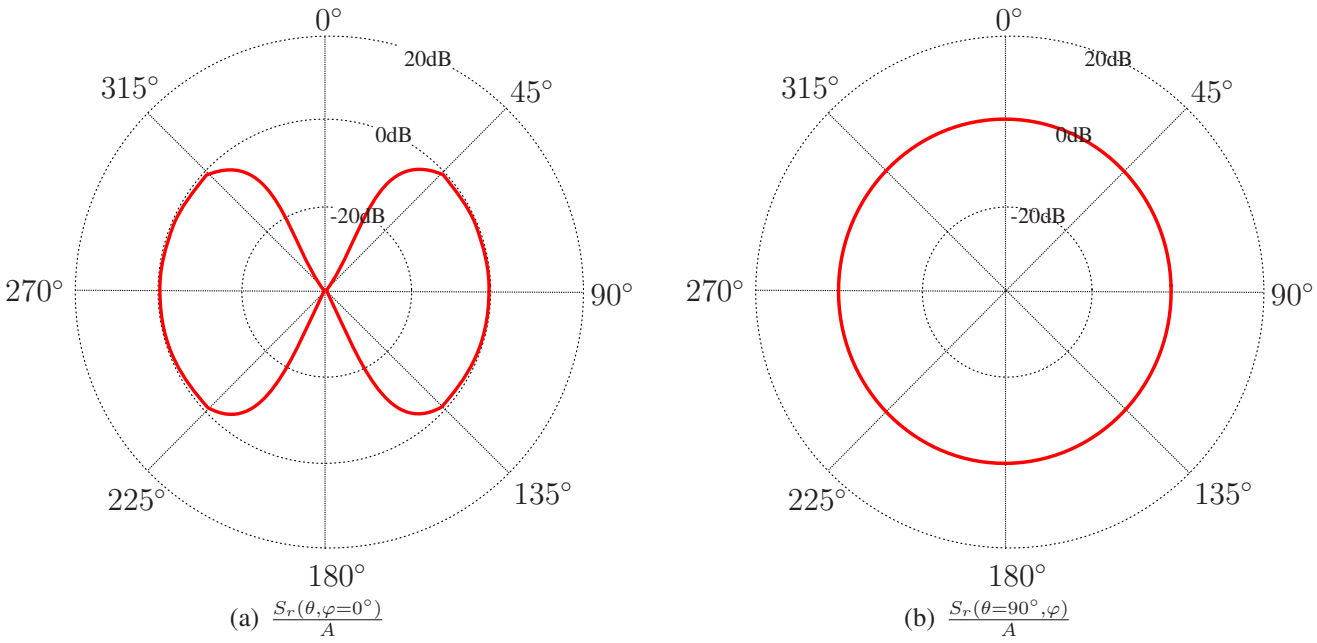
Damit gilt $\vec{H} = H_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$ mit

$$
\begin{aligned}
H_\varphi &= \frac{1}{\mu r}\left[\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right] \\
&= \frac{-1}{\mu r} \cdot \frac{\mu l \hat{I}}{4\pi}\left[\sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(e^{j\omega(t-\frac{r}{c})}\right) + \frac{1}{r} \cdot e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\right)\right] \\
\Rightarrow H_\varphi &= \frac{l\hat{I}}{4\pi}\sin\theta \cdot \left(\frac{j\omega}{rc} + \frac{1}{r^2}\right) \cdot e^{j\omega(t-\frac{r}{c})}
\end{aligned}
$$

d) Mit der Näherung für das Fernfeld bleibt der dominierende Term $1/r$ übrig:

$$
\begin{aligned}
E_\theta &\approx \frac{\mu l \hat{I}}{4\pi} \cdot \sin\theta \cdot \frac{j\omega}{r} \cdot e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \\
E_r &\approx 0 \\
H_\varphi &\approx \frac{l\hat{I}}{4\pi} \cdot \sin\theta \cdot \frac{j\omega}{rc} \cdot e^{j\omega(t-\frac{r}{c})}
\end{aligned}
$$

e) Die Richtcharakteristika der Dipolantenne:



(a) $\frac{S_r(\theta,\varphi=0°)}{A}$ (b) $\frac{S_r(\theta=90°,\varphi)}{A}$

Abbildung 12: Richtcharakteristika der Dipolantenne