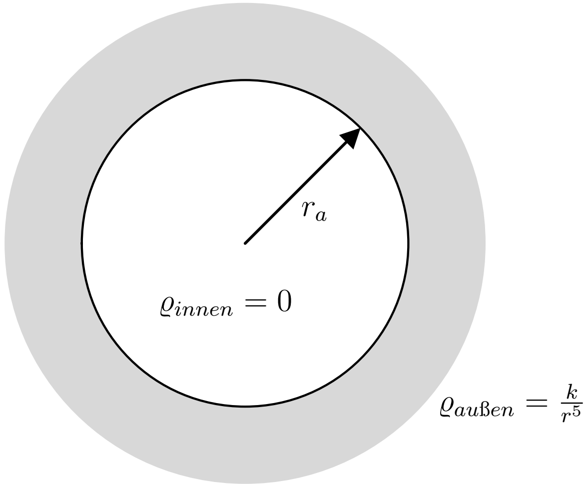
Aufgabe 1 (16 Punkte)

Gegeben sei die folgende kugelsymmetrische Ladungsverteilung:



$$\varrho = \begin{cases} \varrho_{innen} = 0 & r < r_a \\ \varrho_{außen} = \frac{k}{r^5} & r \geq r_a \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die elektrische Feldstärke im ganzen Raum.

b) Berechnen Sie das elektrostatische Potential im gesamten Raum unter der Bedingung $\phi(r) \to 0$ für $r \to \infty$ und skizzieren Sie das Potential in Abhängigkeit von r.

Das elektrostatische Potential soll nun im Bereich $r < r_a$ linear in radiale Richtung von $\phi(0) = 0$ bis $\phi(r_a) = \alpha$ ansteigen.

c) Berechnen Sie die benötigte Ladungsverteilung $\varrho_{innen}{}'$.

d) Welche Ladungsverteilung muss zusätzlich in die Anordnung mit eingebracht werden, damit der Verlauf des elektrostatischen Potentials im Bereich $r > r_a$ unverändert bleibt?

Loesung 1 (16 Punkte)

Musterlösung der Aufgabe 1

a) Kugelsymmetrie $\Rightarrow \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} E_r(r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\iint \vec{D}\, d\vec{f} = \iiint \varrho \, dv$$

$$\vec{D} = \varepsilon \, \vec{E}$$

I) $r < r_a$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon \, E_r \, r^2 \, \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \underbrace{\varrho}_{\varrho=0} \cdot r'^2 \, \sin\vartheta \, dr' \, d\vartheta \, d\varphi \\
4\pi \, r^2 \, \varepsilon \, E_r &= 0 \\
E_r &= 0 \qquad \text{für } \; r < r_a
\end{aligned}$$

II) $r \geq r_a$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon \, E_r \, r^2 \, \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{r_a}^{r} \varrho(r') \, r'^2 \sin\vartheta \, dr' \, d\vartheta \, d\varphi \\
4\pi \, r^2 \, \varepsilon \, E_r &= 2\pi \cdot 2 \cdot \int_{r_a}^{r} \frac{k}{r'^3} \cdot dr' \\
r^2 \, \varepsilon \, E_r &= \left[-\frac{k}{2} \, \frac{1}{r'^2} \right]_{r_a}^{r} \\
r^2 \, \varepsilon \, E_r &= \frac{k}{2} \, \frac{r^2 - r_a^2}{r^2 \, r_a^2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; E_r = \frac{k}{2\varepsilon} \, \frac{r^2 - r_a^2}{r^4 \, r_a^2}$$

$$E_r = \begin{cases} 0 & r < r_a \\ \dfrac{k}{2\varepsilon} \, \dfrac{r^2 - r_a^2}{r^4 \, r_a^2} & r \geq r_a \end{cases}$$

b) Möglichkeit 1:

$\vec{E} = -\text{grad } \phi \qquad$ da $\quad \vec{E} = \begin{pmatrix} E_r(r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \; E_r(r) = -\frac{\partial \phi}{\partial r}$$

I) $r < r_a$

$$E_r(r) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{\partial \phi_1}{\partial r} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \phi_1 = C_1$$

II) $r \geq r_a$

$$\begin{aligned} E_r(r) &= \frac{k}{2\varepsilon}\ \frac{r^2 - r_a^2}{r^4\ r_a^2} = -\frac{\partial \phi_2}{\partial r} \\ \phi_2 &= -\int \frac{k}{2\varepsilon}\ \frac{r^2 - r_a^2}{r^4\ r_a^2}\ dr \\ &= \frac{k}{2\varepsilon r_a^2} \cdot \int \frac{r_a^2 - r^2}{r^4}\ dr \\ &= \frac{k}{2\varepsilon r_a^2} \cdot \int \frac{r_a^2}{r^4} - \frac{1}{r^2}\ dr \\ &= \frac{k}{2\varepsilon r_a^2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\ \frac{r_a^2}{r^3} + \frac{1}{r} \right) + C_2 \\ &= \frac{k}{6\varepsilon} \cdot \frac{3r^2 - r_a^2}{r^3\ r_a^2} + C_2 \end{aligned}$$

Konstanten bestimmen:

$$\lim_{r\to\infty} \phi_2(r) = \lim_{r\to\infty} \left(\frac{k}{2\varepsilon r_a^2} \left(-\frac{1}{3}\ \frac{r_a^2}{r^3} + \frac{1}{r} \right) \right) + C_2 = C_2 \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow\ C_2 = 0$

$$\phi_1(r_a) = \phi_2(r_a) \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = \frac{1}{3}\ \frac{k}{\varepsilon\ r_a^3}$$

Möglichkeit 2:

I) $r \geq r_a$

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} d\vec{s} = \phi(r_1) - \phi(r_2) \qquad r_1 \to \infty$$

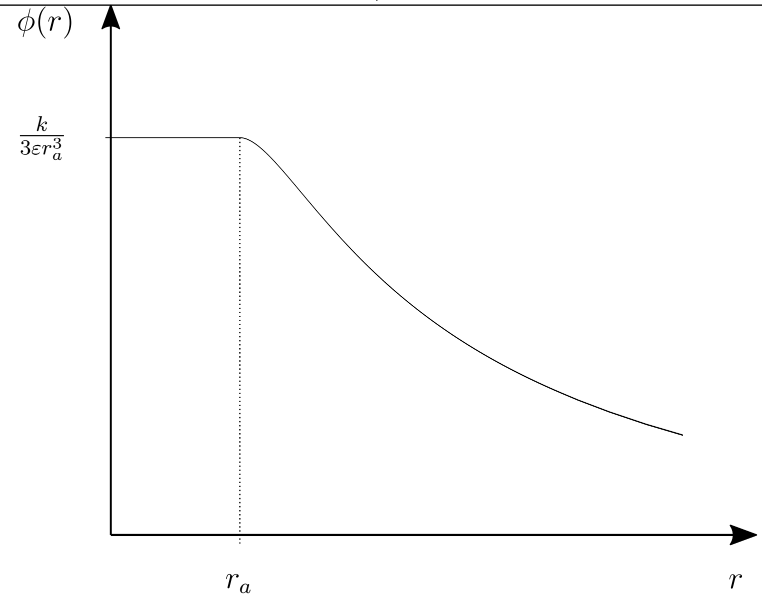
$$\begin{aligned} \phi(r) &= \int_r^\infty \frac{k}{2\varepsilon} \left(\frac{1}{r^2 r_a^2} - \frac{1}{r^4} \right)\ dr \\ &= \frac{k}{2\varepsilon} \left[-\frac{1}{r r_a^2} + \frac{1}{3r^3} \right]_r^\infty \\ &= \frac{k}{2\varepsilon} \left(\frac{1}{r r_a^2} - \frac{1}{3r^3} \right) = \frac{k}{6\varepsilon}\ \frac{3r^2 - r_a^2}{r^3\ r_a^2} \end{aligned}$$

II) $r < r_a$

$$E_r = 0$$

$$\phi(r) = \int_r^{r_a} E_r\ dr + \phi(r_a) = \phi(r_a) = \frac{1}{3}\ \frac{k}{\varepsilon\ r_a^3}$$

$$\phi = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\ \dfrac{k}{\varepsilon\ r_a^3} & r < r_a \\ \dfrac{k}{6\varepsilon}\ \dfrac{3r^2 - r_a^2}{r^3\ r_a^2} & r \geq r_a \end{cases}$$



c)

$r < r_a$:

$$\Phi(r) = \frac{\alpha}{r_a} r$$

$$\vec{E} = -\text{grad}\Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}\vec{e}_r = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{\alpha}{r_a} r\vec{e}_r = -\frac{\alpha}{r_a}\vec{e}_r$$

$$\iint \vec{D}\, d\vec{f} = \iiint \varrho \, dv$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon \, E_r \, r^2 \, \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r'} \varrho(r) \, r^{\,2} \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$4\pi r^2 \varepsilon E = 4\pi \int_0^{r'} \varrho(r) \, r^{\,2} \, dr$$

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 \varepsilon E = \varrho(r) \, r^{\,2}$$

$$\varrho(r) = \frac{2\varepsilon E}{r} = -\frac{2\varepsilon\alpha}{r_a r}$$

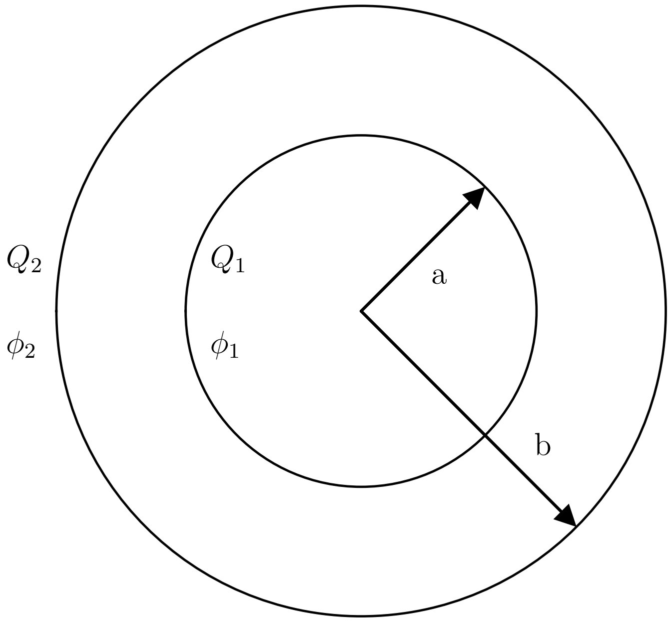
d) Bei $r = r_a$ muss eine Oberflächenladungsdichte hinzugefügt werden, welche die innere Ladung kompensiert.

$$\begin{aligned} Q_{OF} = -Q_{innen} &= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r_a} \varrho(r') \, r'^{\,2} \sin\vartheta \, dr' \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= -4\pi \int_0^{r_a} -\frac{2\varepsilon\alpha}{r_a r'} \, r'^{\,2} \, dr' \\ &= 4\pi \left[\frac{\varepsilon\alpha}{r_a} \, r'^{\,2}\right]_0^{r_a} \\ &= 4\pi\varepsilon\alpha \, r_a \end{aligned}$$

$$\sigma_{OF} = \frac{Q_{OF}}{A_{OF}} = \frac{4\pi\varepsilon\alpha \, r_a}{4\pi r_a^2} = \frac{\varepsilon\alpha}{r_a}$$

Aufgabe 2 (16 Punkte)

Gegeben ist eine dünne Kugelschale aus gut leitendem Metall (Leiter 1) mit dem Radius a. Sie ist umschlossen von einer dünnen Kugelschale aus dem gleichen Material (Leiter 2) mit dem Radius b. Es gilt $b > a$. Das Potential im Unendlichen ist 0.



$\lim_{r\to\infty} \Phi(r) = 0$

Mit Hilfe der Potentialkoeffizienten ist der Zusammenhang zwischen den Potentialen Φ_1 und Φ_2 und den Ladungen Q_1 und Q_2 wie folgt gegeben:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \begin{pmatrix} 1/a & 1/b \\ 1/b & 1/b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

a) An beiden Kugeln liegt zunächst die Spannung U aus einer identischen Spannungsquelle an ($\Phi_1 = \Phi_2 = U$). Welche Ladungen befinden sich auf den Elektroden in Abhängigkeit von U, nachdem alle Ausgleichsströme verschwunden sind?
Geben Sie eine physikalische Erklärung für dieses Ergebnis.

b) Berechnen Sie die Gesamtkapazität C der Anordnung. Welche Randbedingung wählen Sie dafür?

Für die Aufgabenteile c) - f) gelte nun für die Anordnung $\Phi_1 = U$ und $\Phi_2 = -U$.

c) Berechnen Sie, welche Ladungen Q_1 und Q_2 sich nun im elektrostatischen Fall ergeben.

d) Berechnen Sie die Gesamtenergie W_{el} der Anordnung.

e) Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf des elektrischen Feldes $\vec{E}$ der Anordnung für $r \geq 0$ in Abhängigkeit der Ladungen Q_1 und Q_2 sowie der Radien a und b. Geben Sie die radiale Proportionalität mit an.

f) Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf des Potentials Φ der Anordnung für $r \geq 0$ in Abhängigkeit der Spannung U sowie der Radien a und b. Geben Sie die radiale Proportionalität mit an.

Loesung 2 (16 Punkte)

a) Aus dem gegebenen Zusammenhang von Q und Φ durch die Potentialkoeffizienten können die Influenzkoeffizienten c_{ik} und somit die gewünschten Ladungen berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = 4\pi\varepsilon \begin{pmatrix} 1/a & 1/b \\ 1/b & 1/b \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}.$$

Allgemein gilt für die Inverse einer (2×2)-Matrix:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{AD - BC} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}.$$

Somit folgt

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \frac{4\pi\varepsilon}{b-a} \begin{pmatrix} ab & -ab \\ -ab & b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \frac{4\pi\varepsilon}{b-a} \begin{pmatrix} ab\Phi_1 - ab\Phi_2 \\ -ab\Phi_1 + b^2\Phi_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

und schließlich mit $\Phi_1 = \Phi_2 = U$

$$\begin{aligned} Q_1 &= 0 \\ Q_2 &= 4\pi\varepsilon b U \end{aligned}$$

Begründungsmöglichkeit 1: Da sich beide Kugelschalen auf dem gleichen Potential befinden, ist ein Ladungsaustausch zwischen den Kugelschalen möglich. Aufgrund der Coulomb-Kräfte, d. h. da sich Ladungen mit gleichem Vorzeichen abstoßen, werden alle Ladungen von der inneren Kugel auf die äußere abfließen. Das Feld der Ladungen auf der äußeren Kugel hat dabei aus Symmetriegründen keinen Einfluss auf die Ladungen im Inneren.

Begründungsmöglichkeit 2: Wenn auf der inneren Kugel noch Ladungen vorhanden wären, gäbe es ein Feld zwischen innerer und äußerer Kugel. Dann wäre aber $\Phi_{el}(b) - \Phi_{el}(a) = -\int\limits_a^b \vec{E}\, d\vec{s} \neq 0$, was $\Phi_{el}(a) = \Phi_{el}(b)$ widersprechen würde.

b) Randbedingung: $Q = -Q_1 = Q_2$

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\Phi_2 - \Phi_1} \\ \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \begin{pmatrix} 1/a & 1/b \\ 1/b & 1/b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Q \\ Q \end{pmatrix} \\ \Phi_1 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \\ \Phi_2 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{b}\right) = 0 \\ C &= \frac{Q}{0 - \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \\ &= \frac{4\pi\epsilon}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \end{aligned}$$

c) Aus Gleichung (1) folgt direkt durch Einsetzen von $\Phi_1 = U$ und $\Phi_2 = -U$:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 8\pi\varepsilon \frac{ab}{b-a} U \\ Q_2 &= -4\pi\varepsilon \frac{(a+b)\,b}{b-a} U. \end{aligned}$$

d) Keine Berechnung über $W_{el} = \frac{1}{2}CU^2$, da die Ladungen unterschiedlich groß sind.

1. Möglichkeit:

Berechnung mit Hilfe der Influenzkoeffizienten:

$$W_{el} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}.$$

Durch Einsetzen der berechneten Koeffizienten aus Gleichung (1), erhält man

$$\begin{aligned} W_{el} &= \frac{2\pi\varepsilon}{b-a} \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ab & -ab \\ -ab & b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2\pi\varepsilon}{b-a} \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ab\Phi_1 - ab\Phi_2 \\ -ab\Phi_1 + b^2\Phi_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2\pi\varepsilon}{b-a} \left(ab\Phi_1^2 - 2ab\Phi_1\Phi_2 + b^2\Phi_2^2 \right), \end{aligned}$$

sowie mit $\Phi_1 = U$ und $\Phi_2 = -U$ schließlich

$$W_{el} = 2\pi\varepsilon \frac{(3a+b)\,b}{b-a} U^2.$$

2. Möglichkeit:

Berechnung mit Hilfe der Potentialkoeffizienten:

$$\begin{aligned} \mathrm{FS:}\quad \mathrm{W_e} &= \frac{1}{2} \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N}} \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{N}} p_{\mathrm{ik}} Q_{\mathrm{i}} Q_{\mathrm{k}} \\ &= \frac{1}{2} \left(p_{11} Q_1 Q_1 + p_{21} Q_2 Q_1 + p_{12} Q_1 Q_2 + p_{22} Q_2 Q_2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{a} Q_1 Q_1 + \frac{1}{b} Q_2 Q_1 + \frac{1}{b} Q_1 Q_2 + \frac{1}{b} Q_2 Q_2 \right) \\ \text{mit } Q_1 &= 4\pi\varepsilon \frac{2ab}{b-a} U; \quad Q_2 = -4\pi\varepsilon \frac{(a+b)\,b}{b-a} U \\ &= \frac{2\pi\varepsilon}{(b-a)^2} \left(-3ab^2 + 2ab^2 + b^2 \right) U^2 \\ &= \frac{2\pi\varepsilon}{(b-a)^2} (3a+b)\,(b-a) b U^2 \\ &= 2\pi\varepsilon \frac{(3a+b)\,b}{b-a} U^2 \end{aligned}$$

e) Der Verlauf des elektrischen Feldes sieht wie folgt aus:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_1}{r^2} & a \leq r < b \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_1 + Q_2}{r^2} & b \leq r \end{cases}$$

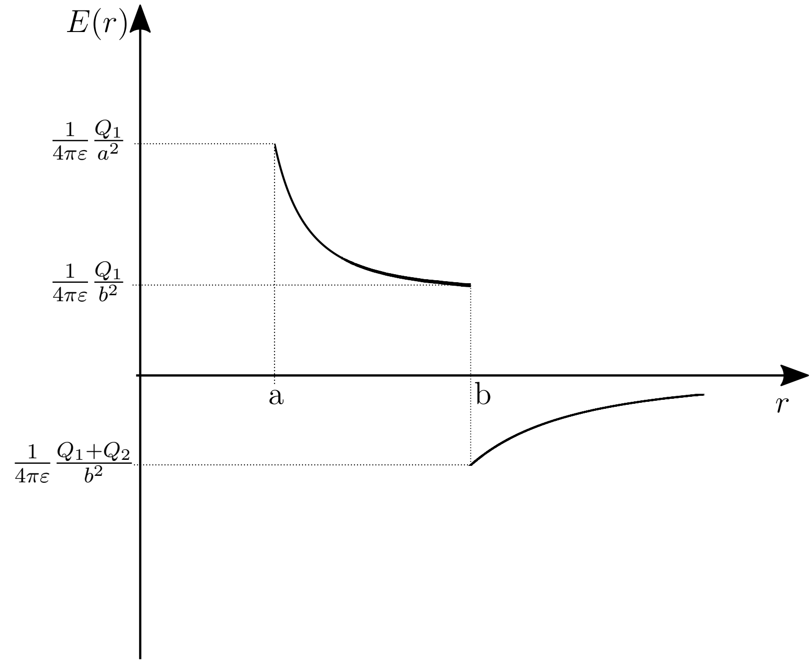
Für die Ladungen Q_1 und Q_2 gilt:

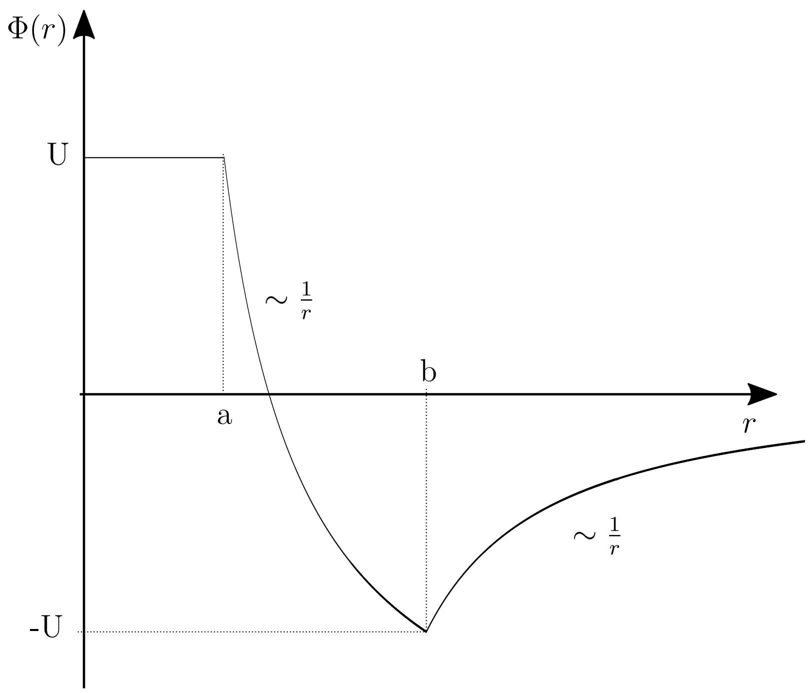
$$Q_1 > 0$$
$$Q_2 < 0$$
$$|Q_1| < |Q_2|$$

f) Der Verlauf des Potentials sieht wie folgt aus:

Für das Potential $\Phi_(r)$ gilt:

$$\Phi(a) = U$$
$$\Phi(b) = -U$$


$E(r)$
$\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1}{a^2}$
$\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1}{b^2}$
a
b
r
$\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1+Q_2}{b^2}$

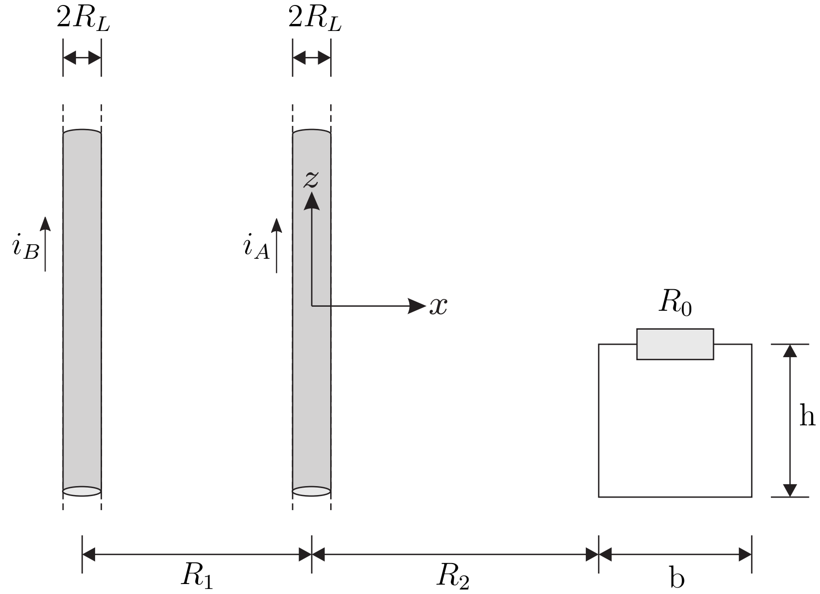

$\Phi(r)$
U
$\sim \frac{1}{r}$
b
a
r
$\sim \frac{1}{r}$
-U

Aufgabe 3 (16 Punkte)

Gegeben sind zwei in z-Richtung unendlich ausgedehnte, homogene Leiter. Der Leiter A befindet sich auf der z-Achse. Der Leiter B befindet sich parallel dazu im Abstand R_1 in der xz-Ebene wie in der Abbildung eingezeichnet. Der Radius beider Leiter ist R_L.

Im ganzen Raum gilt $\varepsilon = \varepsilon_0$ und $\mu = \mu_0$.

Im Abstand R_2 zum Leiter A befindet sich eine quadratische Spule mit einer Windung aus unendlich dünnem Draht mit dem ohmschen Widerstand R_0, der Höhe h und der Breite b.



Zunächst fließt nur im Leiter A ein Strom:
$i_B = 0; \quad i_A = I_0 \sin(\omega t)$

a) Berechnen Sie die magnetische Feldstärke im ganzen Raum.

Nun fließt in beiden Leitern ein Strom:
$i_B = -I_0 \sin(\omega t); \quad i_A = I_0 \sin(\omega t)$

b) Berechnen Sie den magnetischen Fluß $\Phi(t)$ in der kleinen Leiterschleife.

c) Wie groß ist der Strom in der Spule? Nehmen Sie an, dass der Stromfluss in der Spule keinen weiteren Einfluss auf das System hat. Was müssten Sie ohne diese Annahme beachten?

Durch Leiter B fließt nun kein Strom mehr und durch Leiter A fließt Gleichstrom:
$i_B = 0; \quad i_A = I_0$

d) Die Höhe h und die Breite b sind nun frei veränderlich. Bestimmen Sie entweder die Höhe $h(t)$ oder die Breite $b(t)$ als eine Funktion der Zeit, sodass der Stromfluss in der Spule der Lösung von Teilaufgabe c) entspricht. Beachten Sie, dass die Höhe h und die Breite b nicht negativ werden können.
(Hinweis: falls Sie Teilaufgabe c) nicht lösen konnten, gehen Sie von $i_S = I_S \sin(\omega t)$ aus)

Loesung 3 (16 Punkte)

a) Da der Leiter homogen ist, ist die Stromdichte konstant:

$$\vec{j}_A = j_A \vec{e}_z = \frac{i_A}{\pi R_L^2} \vec{e}_z$$

Berechnung des Magnetfeldes mit dem Durchflutungsgesetz:

$$\oint \vec{H}\, d\vec{s} = \int \vec{j}\, d\vec{f}$$

Im inneren Bereich ($R < R_L$) gilt:

$$\begin{aligned} 2\pi R H_\varphi &= j_A \pi R^2 \\ \Rightarrow H_\varphi(R) &= j_A \frac{R}{2} \\ &= I_0 \frac{R}{2\pi R_L^2} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Im äußeren Bereich ($R \geq R_L$) gilt:

$$\begin{aligned} 2\pi R H_\varphi &= i_A \\ \Rightarrow H_\varphi(R) &= i_A \frac{1}{2\pi R} \\ &= I_0 \frac{1}{2\pi R} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

b) Um den magnetischen Fluss zu berechnen muss das Magnetfeld nur im äußeren, rechten Bereich der xz Ebene bekannt sein. Das gesamte Magnetfeld ergibt sich durch Überlagerung der Felder von Leiter 1 und 2. Das Feld von Leiter 1 kann leicht aus dem von Leiter 2 durch Verschiebung um den Abstand R_1 berechnet werden.

Für $x > 0$ gilt in der xz-Ebene $R = x$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} H_\varphi = &I_0 \frac{1}{2\pi x} \sin(\omega t) \\ &- I_0 \frac{1}{2\pi (x + R_1)} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

und weiter

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \int \vec{B}\, d\vec{f} \\
&= \mu_0\, h\, I_0 \frac{1}{2\pi} \sin(\omega t) \int\limits_{R_2}^{R_2+b} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+R_1}\right) dx \\
&= \mu_0\, h\, I_0 \frac{1}{2\pi} \sin(\omega t) \left[\ln(x) - \ln(x+R_1)\right]_{R_2}^{R_2+b} \\
&= \mu_0\, h\, I_0 \frac{1}{2\pi} \sin(\omega t) \left(\ln(R_2+b) - \ln(R_2+b+R_1) - \ln(R_2) + \ln(R_2+R_1)\right) \\
&= \mu_0\, h\, I_0 \frac{1}{2\pi} \sin(\omega t) \ln \frac{(R_2+b)(R_2+R_1)}{(R_2+b+R_1)R_2}
\end{aligned}
$$

c) Die induzierte Spannung und der Strom sind:

$$
\begin{aligned}
U_{ind} &= -\frac{d\Phi}{dt} \\
I_{ind} &= -\frac{1}{R_0}\frac{d\Phi}{dt} \\
&= -\frac{\omega}{R_0} \cos(\omega t) \mu_0\, h\, I_0 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(R_2+b)(R_2+R_1)}{(R_2+b+R_1)R_2}
\end{aligned}
$$

Der Stromfluss in der Spule wirkt dem äußeren Feld entgegen und ändert somit den Stromfluss in den Leitern 1 und 2.

d)

$$
\begin{aligned}
\vec{H}_\varphi(R) &= \frac{I_0}{2\pi R}\vec{e}_\varphi \\
\Phi &= \int \vec{B}\, d\vec{f} \\
&= \mu_0\, h \frac{I_0}{2\pi} \int\limits_{R_2}^{R_2+b} \frac{1}{x}\, dx \\
&= \mu_0\, h \frac{I_0}{2\pi} \left[\ln(x)\right]_{R_2}^{R_2+b} \\
&= \mu_0\, h \frac{I_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2+b}{R_2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
-\frac{\omega}{R_0} \cos(\omega t) \mu_0\, h\, I_0 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(R_2+b)(R_2+R_1)}{(R_2+b+R_1)R_2} = -\frac{1}{R_0}\frac{d}{dt} \mu_0\, h \frac{I_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2+b}{R_2}\right)
$$

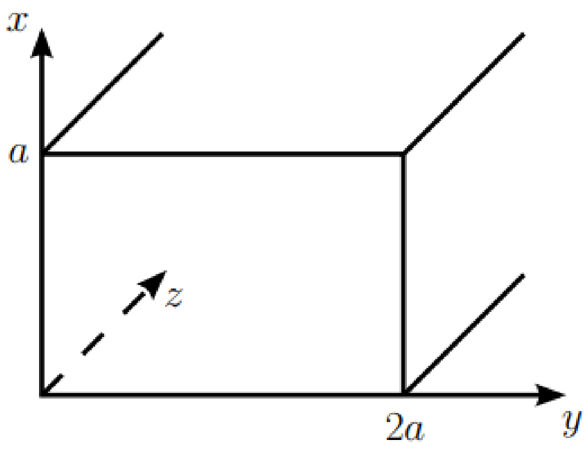
Erste Möglichkeit: h(t) variabel und b konstant bzw. unverändert:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} h(t) &= \omega \cos(\omega t) h \frac{\ln \frac{(R_2+b)(R_2+R_1)}{(R_2+b+R_1)R_2}}{\ln \frac{(R_2+b)}{R_2}} \\
h(t) &= \sin(\omega t) h \frac{\ln \frac{(R_2+b)(R_2+R_1)}{(R_2+b+R_1)R_2}}{\ln \frac{(R_2+b)}{R_2}} + C \quad C_{min} = h \frac{\ln \frac{(R_2+b)(R_2+R_1)}{(R_2+b+R_1)R_2}}{\ln \frac{(R_2+b)}{R_2}}
\end{aligned}
$$

Zweite Möglichkeit: h konstant bzw. unverändert und b(t) variabel:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{(R_2+b(t))}{R_2}\right) &= \omega\cos(\omega t)\ln\frac{(R_2+b)(R_2+R_1)}{(R_2+b+R_1)R_2} \\
\ln\left(\frac{(R_2+b(t))}{R_2}\right) &= \int \omega\cos(\omega t)\ln\frac{(R_2+b)(R_2+R_1)}{(R_2+b+R_1)R_2}\ dt \\
\ln\left(\frac{(R_2+b(t))}{R_2}\right) &= \sin(\omega t)\ln\frac{(R_2+b)(R_2+R_1)}{(R_2+b+R_1)R_2} \\
\frac{(R_2+b(t))}{R_2} &= e^{\sin(\omega t)\ln\frac{(R_2+b)(R_2+R_1)}{(R_2+b+R_1)R_2}} \\
b(t) &= R_2(e^{\sin(\omega t)\ln\frac{(R_2+b)(R_2+R_1)}{(R_2+b+R_1)R_2}}-1)+C \quad C_{min} = R_2\left(1-e^{-\ln\frac{(R_2+b)(R_2+R_1)}{(R_2+b+R_1)R_2}}\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (16 Punkte) Gegeben sei ein Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt aus unendlich gut leitendem Material. Die Kantenlängen des Querschnitts seien a und $2a$, siehe Abbildung. Im Innern des Hohlleiters befinde sich ein Vakuum und es breite sich eine elektromagnetische Welle mit den Wellenzahlen $k_x(m)$ und $k_y(n)$ in positive z-Richtung aus.



Gegeben sei folgende Randbedingung für das elektrische Feld an den Hohlleiterwänden.

$$E_z(0, y, z) = 0, \qquad\qquad E_z \neq 0.$$

a) Handelt es sich bei der sich ausbreitenden Welle um eine $TE_{m,n}$-Welle oder eine $TM_{m,n}$-Welle? Ergänzen Sie die fehlenden Randbedingungen. Welche Begründung liegt für diese Randbedingungen zugrunde? Begründen Sie anschaulich.

b) Berechnen Sie das elektrische Feld E_z durch Separation der Variablen aus der skalaren Wellengleichung. Welche Randbedingungen ergeben sich für die Wellenzahlen k_x und k_y?

c) Leiten Sie für alle Komponenten des magnetischen Feldes der Welle einen Ausdruck in Abhängigkeit von E_z aus den Maxwellgleichungen her. Ein Einsetzen des in b) berechneten Terms für E_z ist nicht erforderlich.

d) Leiten Sie aus der Wellengleichung einen Ausdruck für die Wellenzahl k_z der Welle in Abhängigkeit der Modenordnungen m und n her.

e) Bestimmen Sie die Kantenlänge a des Hohlleiters in Abhängigkeit der Cut-off-Frequenz der Grundmode.

Loesung 4 (16 Punkte)

a) Bei der vorliegenden Welle handelt es sich um eine $TM_{m,n}$-Welle, da für eine eine $TE_{m,n}$-Welle keine longitudinale Komponente für das elektrische Feld existiert und daher fr diese Komponente auch keine Randbedingung erforderlich ist. Die Randbedingungen für die $TM_{m,n}$-Welle lauten:

$$E_z(0, y, z) = 0,$$
$$E_z(a, y, z) = 0,$$
$$E_z(x, 0, z) = 0,$$
$$E_z(x, 2a, z) = 0.$$

Weitere mögliche Antworten: Auch für die x- und y-Komponente des elektrischen Feldes sind die Randbedingungen zu erfüllen, jedoch sind diese nicht wesentlich zur Berechnung der Moden im Hohlleiter.

$$E_x(x, 0, z) = 0,$$
$$E_x(x, 2a, z) = 0,$$
$$E_y(0, y, z) = 0,$$
$$E_y(a, y, z) = 0.$$

Den Randbedingungen liegt zugrunde, dass an den gut leitenden Rändern des Wellenleiters keine tangentialen Komponenten der elektrischen Feldstärke auftreten können. Dies wird an dem Zusammenhang $\vec{J} \propto \kappa\vec{E}$ deutlich: Durch die Annahme der beliebig guten (d.h. idealen) Leitfähigkeit κ in der metallischen Berandung des Hohlleiters und aufgrund der Stetigkeitsbedingung muss $E_{tangential} = 0$ gelten.

b) Die allgemeine Wellengleichung für harmonische Anregung (und homogene Medien) autet

$$\Delta\vec{E} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$
$$\Leftrightarrow \Delta\vec{E} + k^2\vec{E} = 0,$$

mit $k^2 = \omega^2\mu\epsilon$ und $\Delta\vec{E} = \Delta E_x\vec{e_x} + \Delta E_y\vec{e_y} + \Delta E_z\vec{e_z}$.

Die Wellengleichung ist nach den Vektorkomponenten separierbar, d.h. es kann die skalare Wellengleichung für die Longitudinalkomponente aufgestellt werden.

$$\Delta E_z + k^2 E_z = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \omega^2\mu\epsilon E_z = 0$$

Im Hohlleiter breiten sich nur feste Feldverteilungen in der x-y-Ebene (Moden) in positive z-Richtung aus. Unter der Annahme, dass die Feldverteilungen in x- und y-Richtung während der Ausbreitung unabhängig voneinander sind, wird folgender Ansatz gewählt:

$$E_z = E_0 P(x)Q(y)\exp(j(\omega t - k_z z))$$

Einsetzen des Ansatzes in die Wellengleichung ergibt

$$P(x)Q(y)\frac{\partial^2 e^{j(\omega t - k_z z)}}{\partial z^2} + Q(y)e^{j(\omega t - k_z z)}\frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} + P(x)e^{j(\omega t - k_z z)}\frac{\partial^2 Q(y)}{\partial y^2} + \omega^2\mu\epsilon P(x)Q(y)e^{j(\omega t - k_z z)} = 0$$

Division durch E_z führt auf

$$(-jk_z)^2 + \frac{1}{P(x)}\frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Q(y)}\frac{\partial^2 Q(y)}{\partial y^2} + \omega^2\mu\epsilon = 0.$$

Dies ist äquivalent zu:

$$\frac{1}{P(x)}\frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Q(y)}\frac{\partial^2 Q(y)}{\partial y^2} = k_z^2 - \omega^2\mu\epsilon.$$

Die rechte Seite der Gleichung ist konstant und unabhängig von x und y. Folglich muss Selbiges auch für die linke Seite der Gleichung gelten. Es ergeben sich damit zwei separierte, partielle Differentialgleichungen.

$$\frac{1}{P(x)}\frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} = const. = -k_x^2 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} + k_x^2 P(x) = 0$$
$$\frac{1}{Q(y)}\frac{\partial^2 Q(y)}{\partial y^2} = const. = -k_y^2 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 Q(y)}{\partial x^2} + k_y^2 Q(y) = 0.$$

Für die Wellengleichung insgesamt ergibt sich damit:

$$-k_z^2 - k_x^2 - k_y^2 + \omega^2\mu\epsilon = 0.$$

Der Lösungsansatz für die separierten, partiellen Differentialgleichungen ist eine Funktion, deren zweite Ableitung die Funktion selbst ist, z.B.

$$P(x) = \sin(k_x x),$$
$$Q(y) = \sin(k_y y).$$

Daraus folgt:

$$E_z = E_0 \sin(k_x x)\sin(k_y y)\exp(j(\omega t - k_z z))$$

Durch Einsetzen der Randbedingungen aus Aufgabe a) ergeben sich folgende Bedingungen für die Wellenzahlen k_x und k_y.

$$E_z(a,y,z) = 0 \Leftrightarrow \sin(k_x a) = 0 \Leftrightarrow ak_x = m\pi, m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k_x = \frac{m\pi}{a}$$
$$E_z(x,2a,z) = 0 \Leftrightarrow \sin(k_y 2a) = 0 \Leftrightarrow 2ak_y = n\pi, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k_y = \frac{n\pi}{2a}$$

Die vollständige Lösung für die Longitudinalkomponente des elektrischen Feldes lautet:

$$E_z = E_0 \sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{2a}y)\exp(j(\omega t - k_z z))$$

c) Die relevanten Maxwellgleichungen lauten:

$$rot(\vec{H}) = \epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \qquad rot(\vec{E}) = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

Mit Hilfe der Formelsammlung werden die Maxwellgleichungen komponentenweise in kartesischen Koordinaten ausgedrückt, wobei $H_z = 0$ gilt.

$$(1) \quad jk_z H_y = j\omega\epsilon E_x \qquad (4) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} + jk_z E_y = -j\omega\mu H_x$$
$$(2) \quad -jk_z H_x = j\omega\epsilon E_y \qquad (5) \quad -jk_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y$$
$$(3) \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\epsilon E_z \qquad (6) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

Auflösen von (1) nach H_y und (2) nach H_x ergibt

$$(1) \quad H_y = \frac{\omega\epsilon}{k_z} E_x \qquad\qquad (2) \quad H_x = -\frac{\omega\epsilon}{k_z} E_y.$$

Auflösen von (4) nach E_y und (5) nach E_x resultiert in

$$(4) \quad E_y = -j\omega\mu H_x - \frac{\partial E_z}{\partial y} \qquad\qquad (5) \quad E_x = \frac{j}{k_z}\frac{\partial E_z}{\partial x}\frac{\omega\mu}{k_z} H_y.$$

Durch Einsetzen von (4) in (1) und (5) in (2) sowie Auflösen erhält man

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} \\ H_y &= -\frac{j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}. \end{aligned}$$

d) Die Wellengleichung lautet

$$\begin{aligned} \Delta E_z + k^2 E_z &= 0, \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \omega^2\mu\epsilon E_z &= 0. \end{aligned}$$

Einsetzen von E_z aus b) ergibt:

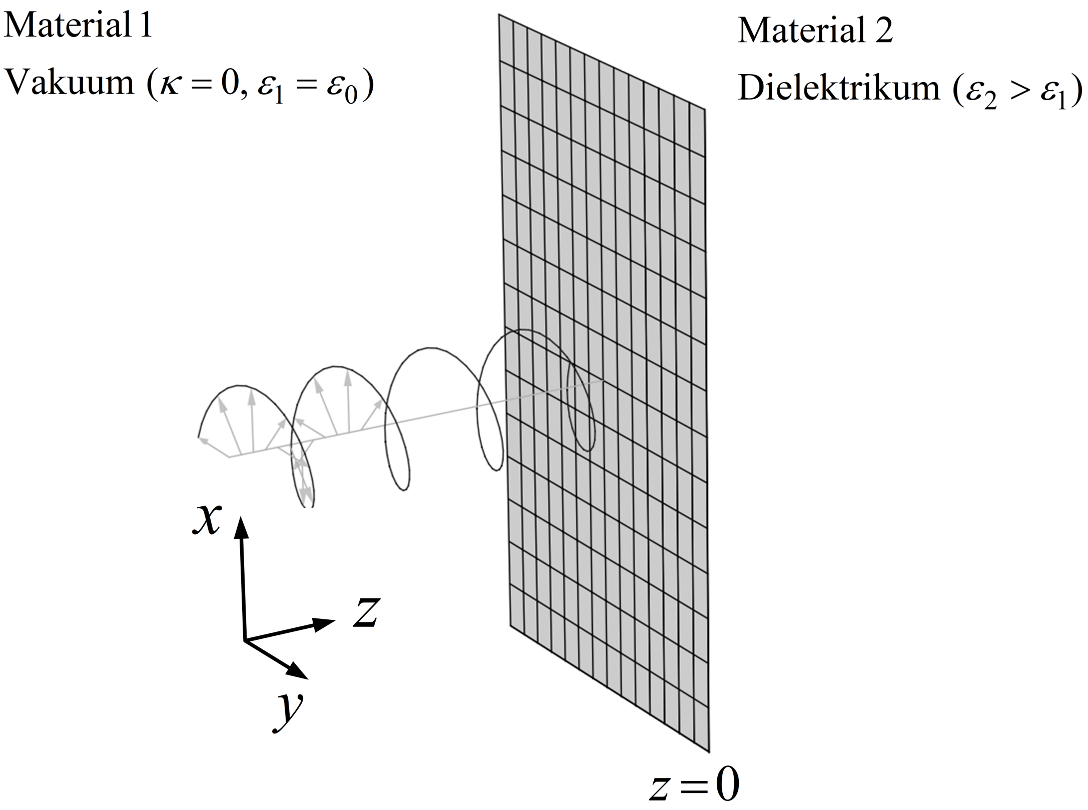
$$\begin{aligned} \left(-k_z^2 - k_x^2 - k_y^2 + \omega^2\mu\epsilon\right) E_z &= 0 \\ \Leftrightarrow -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 E_z - \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 E_z - k_z^2 E_z + \omega^2\mu\epsilon E_z &= 0 \\ \Leftrightarrow -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 - k_z^2 + \omega^2\mu\epsilon &= 0 \\ \Leftrightarrow k_z = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2}&. \end{aligned}$$

e) Die Grundmode ist die Mode mit der kleinsten cut-off-Frequenz, für TM-Wellen gilt in diesem Fall: $m = 1$ und $n = 1$.

Mit $k_z = 0$ und $\omega_c = 2\pi f_c$ ergibt sich

$$\begin{aligned} -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 + \omega_c^2\mu\epsilon &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{\pi^2}{a^2} - \frac{\pi^2}{4a^2} + 4\pi^2 f_c^2\mu\epsilon &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\pi^2 f_c^2\mu\epsilon &= \frac{5\pi^2}{4a^2} \\ \Leftrightarrow a &= \sqrt{\frac{5}{16\mu\epsilon f_c^2}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (16 Punkte) Im Vakuum breite sich eine zirkular polarisierte, ebene, harmonische Welle in positive z-Richtung aus. Bei $z = 0$ treffe die Welle senkrecht auf die Grenzfläche zu einem Dielektrikum mit $\epsilon_{r2} = 2\epsilon_{r1}$. Im gesamten Raum gilt $\mu = \mu_0$.



Das elektrische Feld im Vakuum wird durch folgenden Ansatz beschrieben:

$$\vec{E}_0 = E_0 \left(e^{j(\omega t - k_1 z)} \vec{e}_x + j e^{j(\omega t - k_1 z)} \vec{e}_y \right)$$

a) Berechnen Sie das zur Grenzfläche hinlaufende magnetische Feld mittels der allgemeinen Maxwellgleichungen und drücken Sie es durch das gegebene elektrische Feld aus.

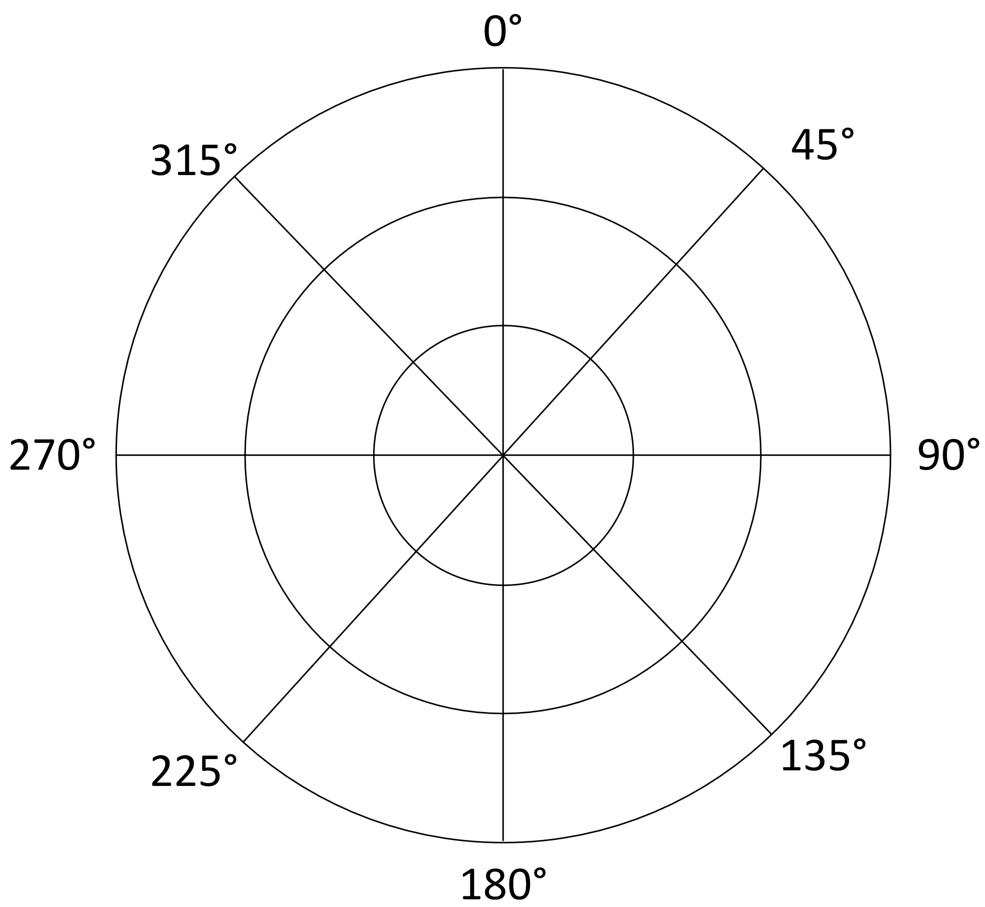
b) Stellen Sie die Grenzbedingungen an der Grenzfläche bei z = 0 für alle Felder auf und berechnen Sie die elektrischen Felder der reflektierten und transmittierten Welle. Erklären Sie den fundamentalen Unterschied des Wellenwiderstands Γ_2 im Vergleich zu jenem im Vakuum.

c) Die einfallende, zirkular polarisierte Welle wird mit einer zweiten Welle überlagert. Welche Polarisation hat die superponierte Welle, wenn das elektrische Feld der zweiten Welle die unten angegebene Form hat? Zeigen Sie, dass die Superposition der Wellen die Energieerhaltung erfüllt.

$$\vec{E}_{sup} = E_0 e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2} - k_1 z)} \vec{e}_y$$

Die auf die Grenzfläche treffende elektromagnetische Welle werde von einer linearen Dipolantenne erzeugt. Für den Poynting-Vektor des Fernfeldes gelte für einen konstanten Radius r: $\vec{S} = S_r \vec{e}_r$, mit $S_r \sim (\sin(\theta))^2$.

d) Skizzieren Sie qualitativ die Richtcharakteristik $S_r(\theta)$ der Dipolantenne in der vorbereiteten Abbildung. Unter welchen Umständen ist die Annahme einer ebenen Wellenfront (bzw. ebenen Welle) an der Grenzfläche auch bei dieser Richtcharakteristik gerechtfertigt? Begründen Sie Ihre Antwort anschaulich. Eine Rechnung ist nicht erforderlich.


0°
45°
90°
135°
180°
225°
270°
315°

Loesung 5 (16 Punkte)

a) Die Maxwellgleichung wird zunächst in kartesischen Koordinaten geschrieben. Anschließend wird mit den Angaben aus der Aufgabenstellung (E_z=0, ebene Welle, d.h. $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}$=0) vereinfacht.

$$\begin{aligned} rot\vec{E}_0 &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ &= \vec{e}_x(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}) + \vec{e}_y(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}) + \vec{e}_z(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}) \\ &= -\vec{e}_x\frac{\partial E_y}{\partial z} + \vec{e}_y\frac{\partial E_x}{\partial z} \end{aligned}$$

Einsetzen des harmonischen Ansatzes für das elektrische und magnetische Feld führt mit $k = k_1$ zu:

$$\begin{aligned} -\vec{e}_x\frac{\partial E_y}{\partial z} + \vec{e}_y\frac{\partial E_x}{\partial z} &= -j\omega\mu\vec{H}_0 \\ \Leftrightarrow -\vec{e}_x\frac{\partial jE_0e^{j(\omega t-kz)}}{\partial z} + \vec{e}_y\frac{\partial E_0e^{j(\omega t-kz)}}{\partial z} &= -j\omega\mu\vec{H}_0 \\ \Leftrightarrow -\vec{e}_x\frac{\partial jE_0e^{j(\omega t-kz)}}{\partial z} + \vec{e}_y\frac{\partial E_0e^{j(\omega t-kz)}}{\partial z} &= -j\omega\mu\vec{H}_0 \\ \Leftrightarrow jk\left(jE_0e^{j(\omega t-kz)}\vec{e}_x - E_0e^{j(\omega t-kz)}\vec{e}_y\right) &= -j\omega\mu\vec{H}_0 \\ \Leftrightarrow jk\left(j\vec{e}_x - \vec{e}_y\right)E_0e^{j(\omega t-kz)} &= -j\omega\mu\vec{H}_0 \\ \Leftrightarrow \frac{k}{\omega\mu}\left(-j\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)E_0e^{j(\omega t-kz)} &= \vec{H}_0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\left(-j\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)E_0e^{j(\omega t-kz)} &= \vec{H}_0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\Gamma_1}\left(-j\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)E_0e^{j(\omega t-kz)} &= \vec{H}_0 \end{aligned}$$

b) An der Grenzfläche müssen die Tagentialkomponenten elektrischen und magnetischen Felder stetig sein. Um die Stetigkeitsbedingung des magnetischen Feldes durch elektrische Feldgrößen auszudrücken, müssen die Vorzeichen des Wellenwiderstands korrekt gewählt werden.

$$\begin{aligned} E_t &= E_0 + E_r, \\ H_t = H_0 + H_r \Leftrightarrow -\frac{E_t}{\Gamma_2} &= -\frac{E_0}{\Gamma_1} + \frac{E_r}{\Gamma_1}. \end{aligned}$$

Elimination von E_t:

$$\begin{aligned} -\frac{E_0 + E_r}{\Gamma_2} &= -\frac{E_0}{\Gamma_1} + \frac{E_r}{\Gamma_1} \\ \Leftrightarrow E_0(\frac{1}{\Gamma_1} - \frac{1}{\Gamma_2}) &= E_r(\frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2}) \\ \Leftrightarrow E_r &= E_0\frac{\frac{1}{\Gamma_1} - \frac{1}{\Gamma_2}}{\frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2}} \\ \Leftrightarrow E_r &= E_0\frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\Gamma_2 + \Gamma_1} \end{aligned}$$

Elimination von E_r:

$$-\frac{E_0}{\Gamma_1}+\frac{E_t}{\Gamma_1}-\frac{E_0}{\Gamma_1}=-\frac{E_t}{\Gamma_2}$$
$$-E_0\frac{2}{\Gamma_1}=E_r(-\frac{1}{\Gamma_1}-\frac{1}{\Gamma_2})$$
$$\Leftrightarrow E_t=E_0\frac{\frac{2}{\Gamma_1}}{\frac{1}{\Gamma_1}+\frac{1}{\Gamma_2}}$$
$$\Leftrightarrow E_t=E_0\frac{2\Gamma_2}{\Gamma_1+\Gamma_2}=(1+R)\,E_0$$

Mit dem elektrischen Feld aus der Aufgabenstellung folgt:

$$\vec{E}_r=\frac{\Gamma_2-\Gamma_1}{\Gamma_2+\Gamma_1}E_0\left(e^{j(\omega t-k_1z)}\vec{e}_x+je^{j(\omega t-k_1z)}\vec{e}_y\right)$$
$$\vec{E}_t=\frac{2\Gamma_2}{\Gamma_2+\Gamma_1}E_0\left(e^{j(\omega t-k_1z)}\vec{e}_x+je^{j(\omega t-k_1z)}\vec{e}_y\right)$$

Im Vergleich zum Vakuum ist der Wellenwiderstand im Dielektrikum eine komplexe Größe, weil das Medium verlustbehaftet ist. Am Grenzübergang kann es daher im Allgemeinen bei der Reflexion oder Transmission nicht nur zu einer Amplitudenänderung, sondern auch zu einer Änderung der Phase kommen.

c) Für die zweite Welle ergibt sich:

$$\vec{E}_{sup}=E_0e^{j(\omega t-\frac{\pi}{2}-k_1z)}\vec{e}_y=-jE_0e^{j(\omega t-k_1z)}\vec{e}_y$$

Für die Feldgrössen gilt das Superpositionsprinzip. Die Überlagerung der beiden Felder ergibt, dass die resultierende Welle linear in x-Richtung polarisiert ist:

$$\vec{E}_{ges}=\vec{E}+\vec{E}_{sup}=-jE_0e^{j(\omega t-k_1z)}\vec{e}_y+E_0\left(e^{j(\omega t-k_1z)}\vec{e}_x+je^{j(\omega t-k_1z)}\vec{e}_y\right)=E_0e^{j(\omega t-k_1z)}\vec{e}_x$$

Da das Superpositionsprinzip nicht für Leistungen gilt, können nicht einfach die Poynting-Vektoren addiert werden, $\vec{S}_{ges}\neq\vec{S}_0+\vec{S}_{sup}$. Stattdessen müssen Kreuzterme berücksichtigt werden, welche die destruktive Interferent repräsentieren.

$$\vec{S}_{ges}=\frac{1}{2}\left[\vec{E}_{ges}\times\vec{H}^*_{ges}\right]=\frac{1}{2}\left[(\vec{E}_0+\vec{E}_{sup})\times(\vec{H}_0+\vec{H}_{sup})^*\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[(\vec{E}_0\times\vec{H}^*_0+\vec{E}_{sup}\times\vec{H}^*_0+\vec{E}_0\times\vec{H}^*_{sup}+\vec{E}_{sup}\times\vec{H}^*_{sup}\right]$$
$$=\vec{S}_0+\vec{S}_{sup}+\frac{1}{2}\left[\vec{E}_{sup}\times\vec{H}^*_0+\vec{E}_0\times\vec{H}^*_{sup}\right]$$

Für die Berechnung der Poynting-Vektoren gelten folgende Punkte:

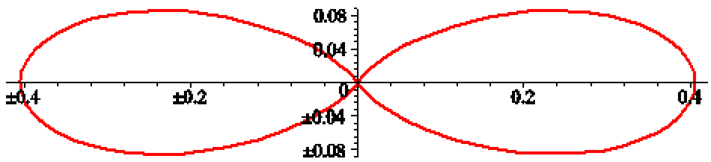
- Produkte der Exponentialterme ergeben aufgrund gegensätzlichen Vorzeichens jeweils 1
- die Vorzeichen des Wellenwiderstandes werden so gewählt, dass ein mathematisches Rechtssystem entsteht
- imaginäre Faktoren wechseln durch die komplexe Konjugation das Vorzeichen
- $\vec{E}_0$ und $\vec{E}_{sup}$ sind in der Aufgabenstellung gegeben, $\vec{E}_{ges}$ wurde in A5a) berechnet, $\vec{H}_0$ wurde in A5c) bereits berechnet und $\vec{H}_{sup}$ sowie $\vec{H}_{ges}$ können mit Hilfe der Maxwellgleichungen oder anhand des mathematischen Rechtssystems leicht ermittelt werden.

$$\vec{S}_0 = \frac{1}{2}(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*) = \frac{E_0^2}{2\Gamma_1}\left[(\vec{e}_x + j\vec{e}_y) \times (j\vec{e}_x + \vec{e}_y)\right]$$
$$= \frac{E_0^2}{2\Gamma_1}\left[j\vec{e}_x \times \vec{e}_x + \vec{e}_x \times \vec{e}_y - \vec{e}_y \times \vec{e}_x + j\vec{e}_y \times \vec{e}_y\right]$$
$$= \frac{E_0^2}{2\Gamma_1}\left[2\vec{e}_x \times \vec{e}_y\right] = \frac{E_0^2}{\Gamma_1}\vec{e}_z$$
$$\vec{S}_{sup} = \frac{1}{2}(\vec{E}_{sup} \times \vec{H}_{sup}^*) = \frac{E_0^2}{2\Gamma_1}\left[-j\vec{e}_y \times -j\vec{e}_x\right] = \frac{E_0^2}{2\Gamma_1}\left[-\vec{e}_y \times \vec{e}_x\right] = \frac{E_0^2}{2\Gamma_1}\vec{e}_z$$
$$\vec{S}_{ges} = \frac{1}{2}(\vec{E}_{ges} \times \vec{H}_{ges}^*) = \frac{E_0^2}{2\Gamma_1}\left[\vec{e}_x \times \vec{e}_y\right] = \frac{E_0^2}{2\Gamma_1}\vec{e}_z$$

Für die Kreuzterme ergibt sich analog:

$$\frac{1}{2}\left[\vec{E}_{sup} \times \vec{H}_0^*\right] = -\frac{E_0^2}{2\Gamma_1}\vec{e}_z$$
$$\frac{1}{2}\left[\vec{E}_0 \times \vec{H}_{sup}^*\right] = -\frac{E_0^2}{2\Gamma_1}\vec{e}_z$$

Das Addieren aller Einzelterme liefert das gleiche Ergebnis wie die direkte Berechnung von $\vec{S}_{ges}$. Streng genommen ist Energieerhaltung damit nicht gezeigt, da nur ein Zustand betrachtet wurde. Ein anderes Vorgehen ist bei der Superposition von Wellen jedoch nicht möglich.



d) In großer Entfernung zur Antenne ist die lokale Krümmung der Wellenfront sehr gering und die Welle kann lokal als ebene Welle approximiert werden, was die Rechnungen wesentlich vereinfacht.