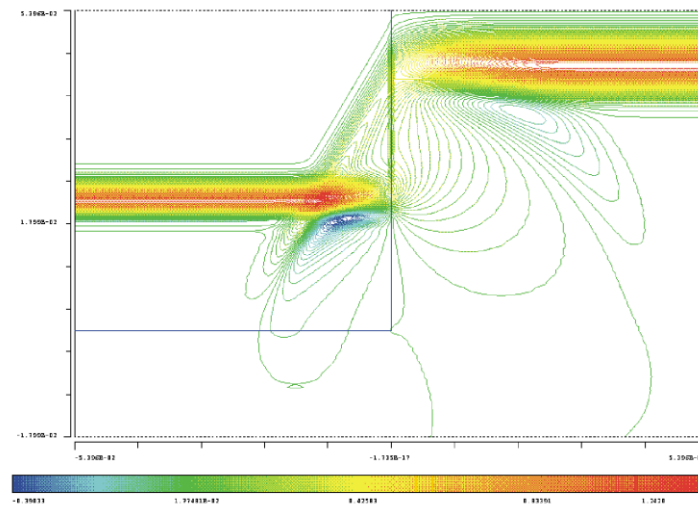


Felder und Wellen

Prof. Dr.-Ing. Gert F. Trommer

Oktober 2015



(Vorlesungsbegleitendes Manuskript)

- 1 Mathematische Grundlagen der Feldtheorie
 - 1.1 Skalar- und Vektorfelder
 - 1.2 Integrale: Linie, Fläche, Volumen
 - 1.3 Differentialoperationen: grad, div, rot, Laplace
 - 1.4 Integralsätze
 - 1.4.1 Linienintegral eines Gradientenfeldes
 - 1.4.2 Umlaufintegral eines Vektorfeldes
 - 1.4.3 Hüllflächenintegral eines Vektorfeldes
 - 1.5 Koordinatentransformationen
 - 1.5.1 Ortsvektoren
 - 1.5.2 Vektorfelder
 - 1.5.3 Linien-, Flächen- und Volumenelemente
 - 1.5.4 Differentialoperationen in krummlinigen Koordinatensystemen
- 2 Elektromagnetische Felder
 - 2.1 Materielle Grundlagen
 - 2.2 Feldbeschreibung durch die Maxwellschen Gleichungen
- 3 Elektrostatik
 - 3.1 Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen
 - 3.2 Satz von Hüllenfluss und Symmetrie
 - 3.3 Übergänge an Grenzflächen
 - 3.4 Potentialfunktion
 - 3.4.1 Eine Punktladung im Koordinatenursprung
 - 3.4.2 Viele Punktladungen
 - 3.4.3 Elektrischer Dipol
 - 3.4.4 Coulomb – Integral
 - 3.5 Elektrische Feldenergie
 - 3.5.1 Energiedichte
 - 3.5.2 Feldenergie einer geladenen Kugel
 - 3.5.3 Feldenergie von Anordnungen metallischer geladener Leiter
 - 3.6 Kapazität C
 - 3.6.1 Kapazität eines Plattenkondensators
 - 3.6.2 Kapazität eines Kugelkondensators
 - 3.6.3 Kapazität eines Zylinderkondensators

- 3.6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter
- 3.6.5 Zusammenhang gespeicherter Energie mit der Kapazität
- 3.7 Bestimmung der Kapazität bei Anwesenheit von Influenzladungen
 - 3.7.1 Lösung durch Anwendung der Laplace-Gleichung
 - 3.7.1.1 Herleitung von Laplace- und Poisson-Gleichung
 - 3.7.1.2 Eindeutigkeitssatz, Randwertprobleme
 - 3.7.1.3 Berechnungsmethode von Kapazitäten mit Influenzladungen
 - 3.7.1.4 Beispiel kugelsymmetrisches Problem
 - 3.7.1.5 Beispiel rotationssymmetrisches Problem
 - 3.7.1.6 Verifikation numerischer Lösungen der Laplace-Gleichung
 - 3.7.2 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen
 - 3.7.3 Lösung der Poisson-Gleichung
 - 3.7.4 Spiegelungsmethode
- 4 Stationäre elektrische Strömungsfelder
 - 4.1 Erhaltung der Ladung
 - 4.2 Ohmsches Gesetz
 - 4.3 Ohmsche Verlustleistung
 - 4.4 Ohmscher Widerstand
 - 4.5 Laplace-Gleichung für stationäre Strömungsfelder
 - 4.6 Stromdichte und Raumladungsdichte an Grenzflächen
- 5 Streng stationäre Magnetfelder
 - 5.1 Kräfte auf bewegte Ladungen und stromdurchflossene Leiter
 - 5.2 Zusammenhang zwischen $\vec{H}$ und $\vec{B}$ – Materialgleichungen
 - 5.3 Übergänge an Grenzflächen
 - 5.4 Ferromagnetika
 - 5.5 Durchflutungsgesetz und Symmetrie
 - 5.6 Berechnung von $\vec{H}$ in verschiedenen Spulenkonfigurationen
 - 5.7 Vektorpotential
 - 5.7.1 Definition, Coulomb-Eichung
 - 5.7.2 Differentialgleichung des magnetischen Vektorpotentials
 - 5.7.2.1 Poisson-Gleichung für das Vektorpotential
 - 5.7.2.2 Coulomb-Integral als Lösung der Poisson-Gleichung

5.7.2.3	Magnetischer Fluss und Vektorpotential
5.8	Biot-Savart-Gesetz und Anwendung auf einfache Leitergeometrie
5.9	Magnetischer Dipol
6	Induktionskoeffizient L
6.1	Induktionskoeffizient und magnetischer Fluss
6.2	Induktionskoeffizient und magnetische Feldenergie
7	Quasistationäre Felder
7.1	Induktionsgesetz für zeitlich sich ändernde Felder oder zeitlich variable Randkurven
7.2	Eigenschaften der Wirbelfelder
7.3	Rückwirkung des Induktionsstroms auf den magn. Fluss
7.4	Rückwirkung des Magnetfeldes auf elektrische Wechselfelder
7.5	Diffusionsgleichung für J
7.6	Skin-Effekt
8	Feldenergie und Energiestromdichte
8.1	Leistungsbilanz mittels Poynting Vektor
8.2	Beispiel einfallende Welle auf verlustbehaftetes Medium
8.2.1	Beispiel Energietransport im Koaxialleiter
9	Schnell veränderliche Felder
9.1	Verschiebungsstrom und dessen Magnetfeld
9.2	Wellengleichung für Nichtleiter
9.2.1	Lösungen für ebene Wellen
9.2.2	Reflexionen
9.2.3	Harmonische Wellen
9.2.3.1	Sinusförmige elektrische und magnetische Felder
9.2.3.2	Linear polarisierte Wellen
9.2.3.3	Zirkular polarisierte Wellen
9.3	Allgemeine Wellengleichung für leitfähige Medien
9.3.1	Harmonische ebene Wellen im verlustfreien Fall
9.3.2	Harmonische ebene Wellen im verlustbehafteten Fall
9.4	Wellengleichung mit komplexer Dielektrizitätskonstanten
9.4.1	Berücksichtigung der Stromdichte schwingender Ladungen

9.4.2	Eigenschaften der komplexen Dielektrizitätskonstanten
9.4.2.1	Dielektrische Medien
9.4.2.2	Leiter mit hoher Leitfähigkeit
9.4.2.3	Dünne Plasmen
9.5	Signalausbreitung
9.5.1	Phasengeschwindigkeit, Gruppengeschwindigkeit
9.5.2	Anwendungsbeispiel GPS Pseudorange Messung
9.6	Wellenleiter
9.6.1	Wellengleichung für geführte Wellen
9.6.2	Transversal- und Longitudinal-Komponenten
9.6.3	TM Wellen
9.6.3.1	Separation der Variablen
9.6.3.2	Randbedingungen für Rechteck-Hohlleiter
9.6.3.3	Feldverteilung der TM - Wellen
9.6.3.4	Leistungsdichte der TM Wellen
9.6.4	TE – Wellen
9.6.4.1	Randbedingungen für Rechteck-Hohlleiter
9.6.4.2	Feldverteilung der TE-Wellen
9.6.5	Gesamtfeldverteilung der TM- und TE- Wellen
9.6.6	Wellenzahl und Wellengeschwindigkeit
9.6.7	Cut-off-Frequenzen
9.7	Wellenerzeugung durch eine Antenne
9.7.1	Wellengleichung des elektrischen und magn. Vektorpotentials
9.7.1.1.1	Lorentz-Eichung
9.7.1.2	Wellengleichungen
9.7.1.3	Lösung der Wellengleichung: retardierte Potentiale
9.7.2	Der Hertzsche Dipol
9.7.2.1	Berechnung der Potentiale
9.7.2.2	Lösung für das elektrische und magnetische Feld
9.7.2.3	Nahfelder
9.7.2.4	Fernfelder
9.7.2.5	Poynting-Vektor und Energieabstrahlung im Fernfeld
9.7.3	Ausgedehnte Dipolantenne

1 Mathematische Grundlagen der Feldtheorie

Skalarfelder - Vektorfelder

Integrale in der Feldtheorie

Differentialoperatoren in der Feldtheorie

Gaußscher Satz / Stokesscher Satz

Koordinatensysteme -

- Kartesische Koordinaten
- Zylinderkoordinaten
- Kugelkoordinaten

1.1 Skalar- und Vektorfelder

Skalarfelder

Luftdruck

$p(x,y,z)$

Temperatur

$T(x,y,z)$

el. Potential

$\Phi(x,y,z)$

Raumladungsdichte

$\rho(x,y,z)$

„diskrete“ Beschreibung z.B.:

x [mm]	y [mm]	z [mm]	Φ [V]
1	0	0	0,1
0	1	0	0,2
0	0	1	0,2
1	1	0	0,4

„analytische“ Beschreibung z.B.:

$$\Phi(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$



$\Phi(\vec{r})$

Skalarfeld

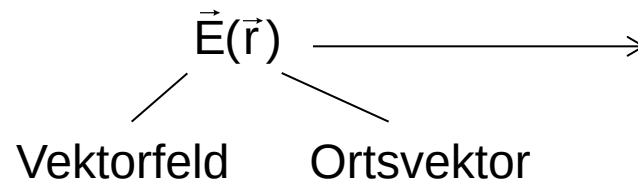
Ortsvektor

Vektorfelder

Luft/Wasserströmung

$$\vec{v}(x,y,z)$$

Vektorfelder der Elektrodynamik $\vec{E}, \vec{D}, \vec{P}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{M}, \vec{J}$



$$\text{z.B.: } \vec{E} = \begin{pmatrix} E_x(x,y,z) \\ E_y(x,y,z) \\ E_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

„diskrete“ Beschreibung z.B.:

„analytische“ Beschreibung z.B.
Plattenkondensator

x [mm]	y [mm]	z [mm]	E_x [V/m]	E_y [V/m]	E_z [V/m]
1	0	0	10	10	0
0	1	0	20	10	0
0	0	1	30	10	0
1	1	0			

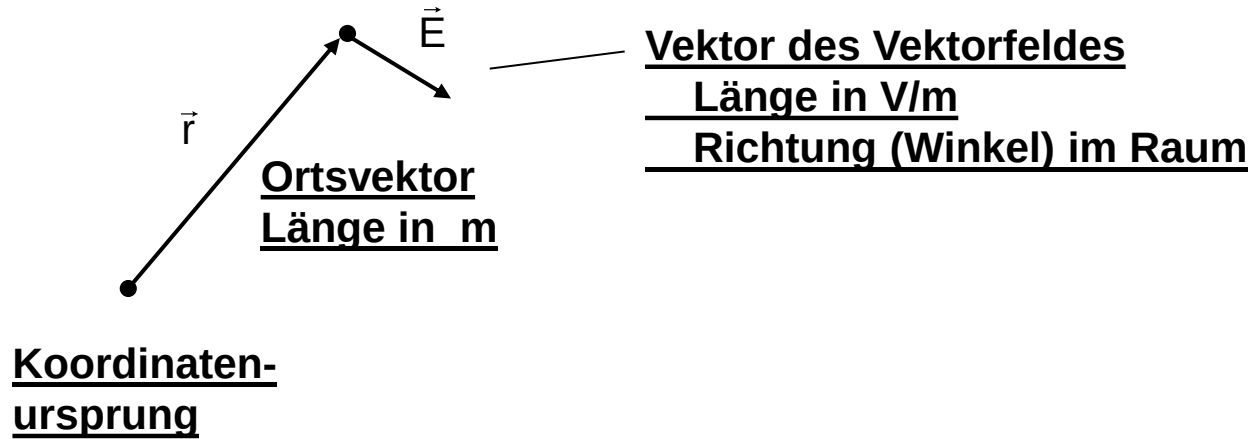
Komponenten des
Ortsvektors

Komponenten des
Vektorfeldes

$$E_x = 0; E_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0}; E_z = 0$$

Vektorfeld durch 6 Größen
gekennzeichnet:
3 Größen für den Ort
3 Größen für Stärke und Richtung

Ortsvektor und Vektorfeld



Kartesische Koordinaten :

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) = & E_x(x,y,z) \vec{e}_x \\ & + E_y(x,y,z) \vec{e}_y \\ & + E_z(x,y,z) \vec{e}_z\end{aligned}$$

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

Ortsvektor

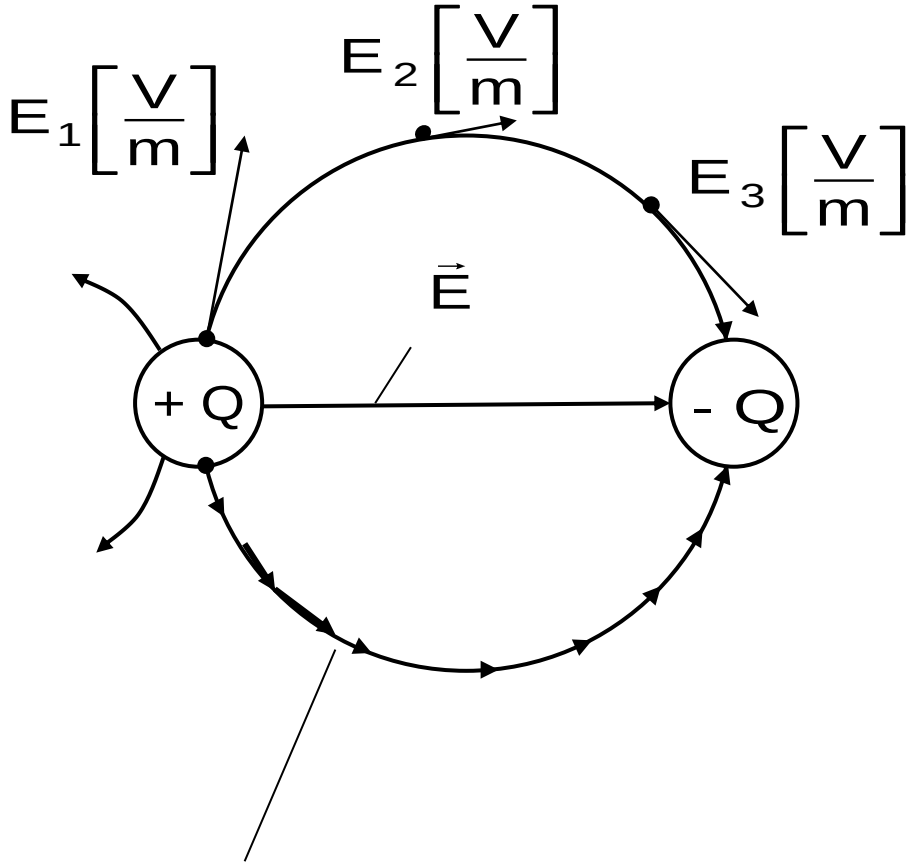
$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z$$

Vektorfeld

Kugelkoordinaten

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r, \vartheta, \varphi) \vec{e}_r + E_\vartheta(r, \vartheta, \varphi) \vec{e}_\vartheta + E_\varphi(r, \vartheta, \varphi) \vec{e}_\varphi$$

Gibt es krumme Vektoren ?



$\vec{E}$ ist nicht eine krumme Linie,
die bei $+Q$ beginnt und bei $-Q$ endet.

$\vec{E}$ ist ein Vektorfeld; an jeder Stelle im Raum,
gekennzeichnet durch den jeweiligen Ortsvektor $\vec{r}$,
gibt es einen elektrischen Feldvektor $\vec{E}_i(\vec{r}_i)$

der individuellen Länge $\vec{E}_i \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$ und Richtung $\vec{e}_i$:

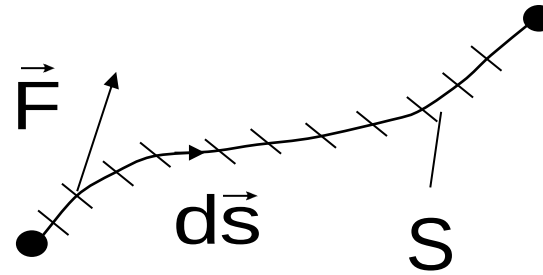
$$\vec{E}_i(\vec{r}_i) = \vec{E}_i \vec{e}_i$$

Die Krümmung der Feldlinien in der Zeichnung ist die Hintereinanderzeichnung
der Folge von Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ an den Orten $\vec{r}_i$

1.2 Integrale: Linie, Fläche, Volumen

z.B. Energie = Kraft • Weg

$$W = \int_s \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \underline{\text{Wegintegral}}$$



z.B. $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y = \text{const.}$

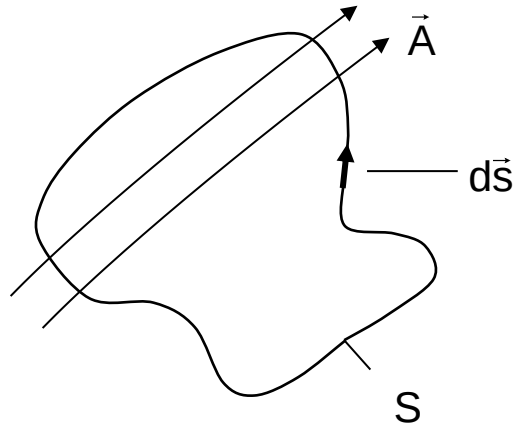
$$d\vec{s} = dx \vec{e}_x$$

$$\rightarrow \int_s \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_s (F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y) \cdot (dx \vec{e}_x)$$

$$\int_s F_x dx = F_x S$$

↑
für den Spezialfall $F = \text{const.}$

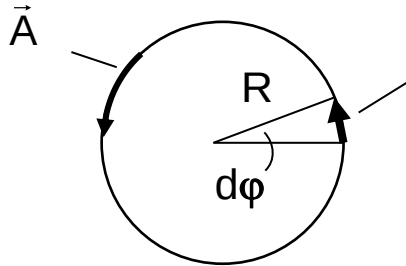
Umlaufintegral



$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Wegintegral über geschlossene Schleife

z.B. Kreis mit Radius R



$$d\vec{s} = R d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

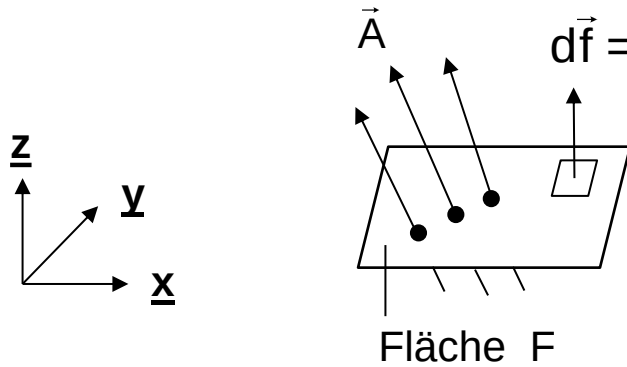
$\vec{A}$ sei kreisförmig und entlang des Kreises konstant :

$$\vec{A} = A_\varphi(R) \vec{e}_\varphi$$

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \oint \left(A_\varphi(R) \vec{e}_\varphi \right) \cdot \left(R d\varphi \vec{e}_\varphi \right)$$

$$= \int_0^{2\pi} A_\varphi(R) R d\varphi = A_\varphi(R) \int_0^{2\pi} R d\varphi = A_\varphi(R) 2\pi R$$

Flächenintegral



$$d\vec{f} = dx \, dy \, \vec{e}_z$$

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$$

Frage: welches ist die Summe der senkrechten Komponente von $\vec{A}$ durch F ?

$$\rightarrow \int_F \vec{A} \cdot d\vec{f} \quad \text{Flächenintegral}$$

$$= \iint_F (A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z) \cdot (dx \, dy \, \vec{e}_z)$$

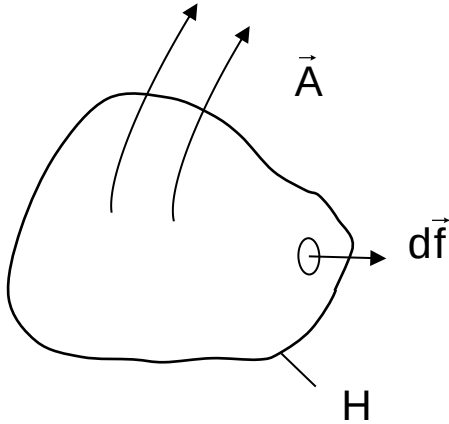
$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$$

$$\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$$

$$= \iint_F A_z \, dx \, dy = A_z \cdot F$$

für den Spezialfall $A = \text{const.}$

Hüllflächenintegral

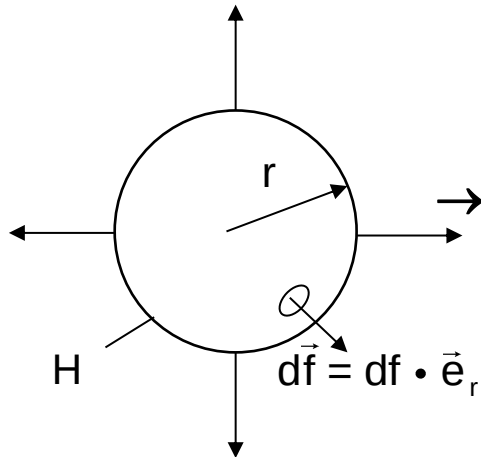


senkrecht auf H
zeigt nach außen

Integral über geschlossene Hüllfläche

$$\rightarrow \oint_H \vec{A} \cdot d\vec{f}$$

Beispiel Kugel: $\vec{A}$ radialsymmetrisch $\vec{A} = A_r(r) \vec{e}_r$



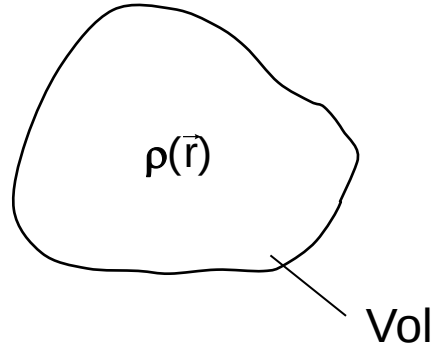
$$\oint_H (A_r(r) \vec{e}_r) \cdot (df \vec{e}_r)$$

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = 1$$

$$d\vec{f} = df \cdot \vec{e}_r = \oint_H (A_r(r) \vec{e}_r) \cdot (r^2 \sin \delta \, d\delta \, d\varphi \, \vec{e}_r) = A_r(r) \oint_H r^2 \sin \delta \, d\delta \, d\varphi = A_r(r) 4 \pi r^2$$

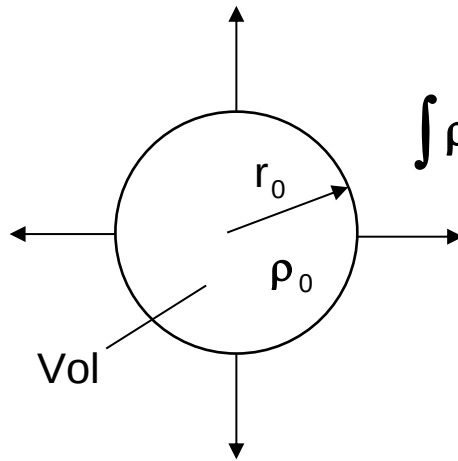
└ const. auf H

Volumenintegral



$$Q = \int \rho(x,y,z) dv = \iiint \rho(x,y,z) dx dy dz$$

Beispiel Kugel: ρ ist innerhalb der Kugel mit Radius r_0 konstant ρ_0



$$\int \rho(\vec{r}) dv = \iiint \rho_0 r^2 \sin \delta dr d\delta d\varphi = \rho_0 \iiint r^2 \sin \delta dr d\delta d\varphi = \rho_0 \frac{4}{3} r_0^3 \pi$$

1.3 Differentialoperationen: grad, div, rot, Laplace

Gradient

$$\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

$\Phi = \text{Skalarfeld} \rightarrow \text{grad } \Phi = \text{Vektorfeld}$

$$d\Phi = \text{grad } \Phi \cdot d\vec{r}$$

$\text{grad } \Phi$ gibt an, wie stark sich ein Skalarfeld räumlich ändert und zeigt in die Richtung der stärksten Änderung („bergauf“).

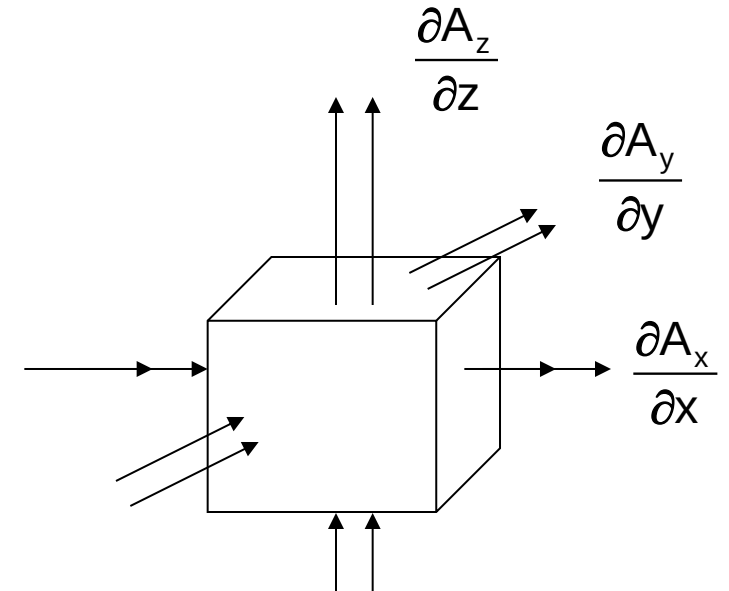
Divergenz

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \text{ lokal, differentiell}$$

$\vec{A} = \text{Vektorfeld} \rightarrow \text{div } \vec{A} = \text{Skalarfeld}$

$\text{div } \vec{A}$ gibt die Dichte von Quellen in einem Vektorfeld an.

$$\text{div } \vec{A} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} \oint \vec{A} \cdot d\vec{f} \quad \text{global bilanzierend, integral}$$



Rotation

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

$\vec{A} = \text{Vektorfeld} \rightarrow \text{rot } \vec{A} = \text{Vektorfeld}$

$\text{rot } \vec{A}$ gibt die Dichte von Wirbelursachen an
und zeigt in die Normalenrichtung der
Fläche mit dem stärksten Wirbel

$$\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{A} = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{1}{f} \oint \vec{A} \, d\vec{s}$$

Laplace

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

$\Phi = \text{Skalarfeld} \rightarrow \Delta \Phi = \text{Skalarfeld}$

Der Laplace Operator gibt die „Krümmung eines Skalarfeldes“ an.

$$\text{rot grad } \Phi = 0$$

Lässt sich ein Vektorfeld als Gradient einer Potentialfunktion Φ darstellen, so hat es keine Wirbel.

$$\text{div rot } \vec{A} = 0$$

Lässt sich ein Vektorfeld als Rotation eines Vektorfeldes $\vec{A}$ darstellen, so hat es keine Quellen.

Weiter gilt:

$$\text{div } (\Phi \vec{A}) = \vec{A} \cdot \text{grad } \Phi + \Phi \cdot \text{div } \vec{A}$$

$$\text{rot } (\Phi \vec{A}) = \Phi \text{ rot } \vec{A} + (\text{grad } \Phi) \times \vec{A}$$

Definition: Laplace Operator für Vektorfeld

$$\Delta \vec{A} = \text{grad } (\text{div } \vec{A}) - \text{rot}(\text{rot } \vec{A})$$

im kartesischen Koordinatensystem gilt:

$$\Delta \vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$$

Beweis

$$\boxed{\text{rot grad } \psi \equiv 0}$$

$$\text{Abkürzung } \text{grad } \psi = \vec{V} \rightarrow V_x = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad V_y = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad V_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$\text{rot } \vec{V} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)$$

$$= \vec{e}_x \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \right) = 0$$

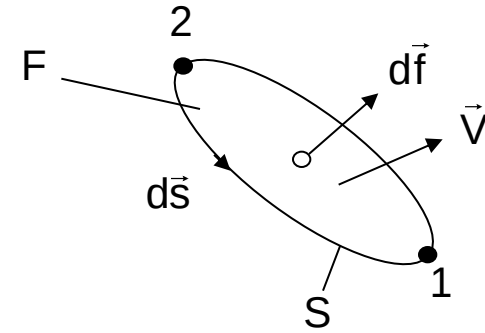
Beweis

$$\boxed{\text{rot grad } \psi \equiv 0}$$

Abkürzung $\text{grad } \psi = \vec{V}$

$$\begin{aligned} \int_F \text{rot } \vec{V} \cdot d\vec{f} &\stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_S \vec{V} \cdot d\vec{s} \\ &= \oint_S \text{grad } \psi \cdot d\vec{s} \\ &= \int_1^2 \text{grad } \psi \cdot d\vec{s} + \int_2^1 \text{grad } \psi \cdot d\vec{s} \\ &= \int_1^2 \text{grad } \psi \cdot d\vec{s} - \int_1^2 \text{grad } \psi \cdot d\vec{s} \\ &= \int_1^2 d\psi - \int_1^2 d\psi = 0 \end{aligned}$$

wegunabhängig



Beweis

$$\boxed{\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} \equiv 0}$$

Abkürzung $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{V}$

$$\rightarrow V_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad V_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad V_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} \right)$$

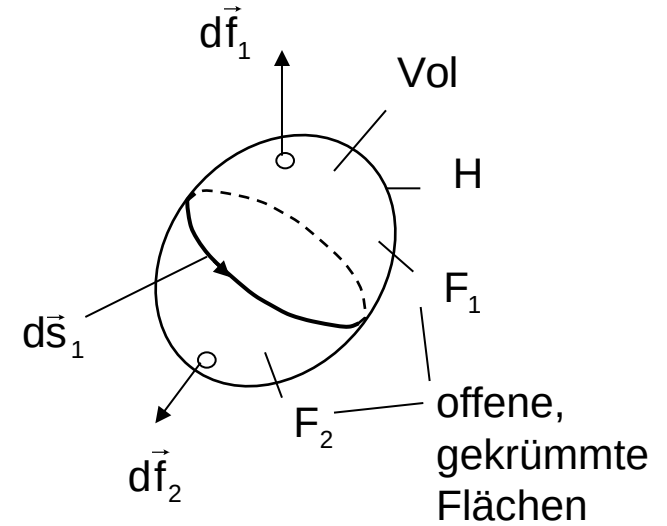
$$= 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Beweis

$$\boxed{\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} \equiv 0}$$

Abkürzung $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{V}$

$$\begin{aligned} \int_{\text{Vol}} \operatorname{div} \vec{V} \cdot d\vec{v} &\stackrel{\text{Gauß}}{=} \oint_H \vec{V} \cdot d\vec{f} \\ &= \int_{F_1} \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{f} + \int_{F_2} \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{f} \\ &\stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_{S_1} \vec{A} \cdot d\vec{s}_1 + \oint_{S_2} \vec{A} \cdot d\vec{s}_2 \\ &= \oint_{S_1} \vec{A} \cdot d\vec{s}_1 + \oint_{S_1} \vec{A} \cdot (-d\vec{s}_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$



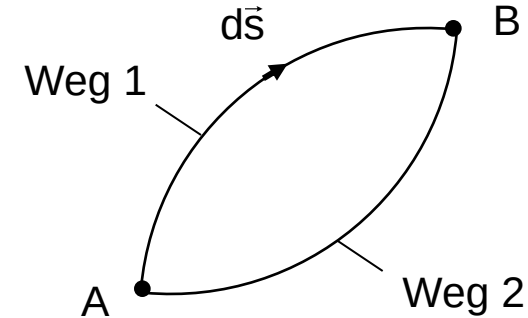
Umlaufrichtung der 2. Fläche umgekehrt

1.4 Integralsätze

1.4.1 Linienintegral eines Gradientenfeldes

$$\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\int_A^B (\text{grad } \Psi) \cdot d\vec{s} = \Psi(B) - \Psi(A)$$



Das Wegintegral über den Gradienten eines Skalarfeldes vom Punkt A zum Punkt B ist gleich der Differenz der Werte der Potentialfunktion an den Punkten B und A unabhängig vom integrierten Weg zwischen den Punkten.

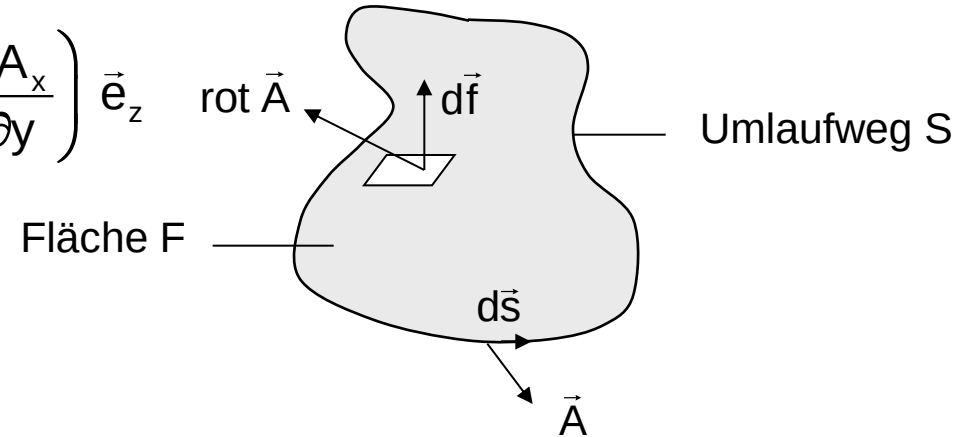
1.4.2 Umlaufintegral eines Vektorfeldes

Stokesscher Satz

rot $\vec{A}$ =

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

$$\boxed{\int_F \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{f} = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}}$$



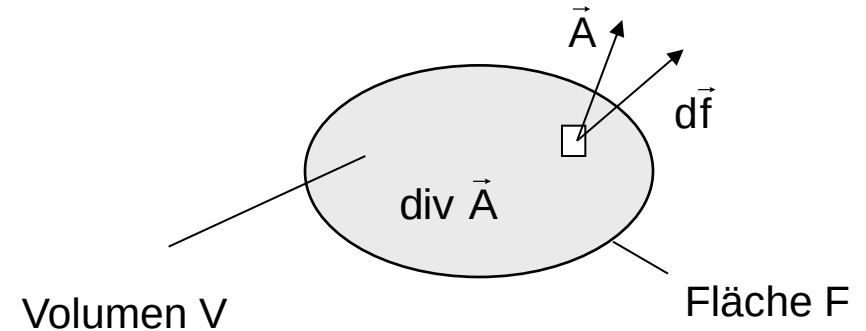
Das Flächenintegral über die Komponente von $\text{rot } \vec{A}$ in Richtung der Flächennormalen ist gleich dem Linienintegral längs des Randes der Fläche über die Komponente von $\vec{A}$ in Richtung der Linienelemente.

1.4.3 Hüllflächenintegral eines Vektorfeldes

Gaußscher Satz

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\boxed{\int_V \operatorname{div} \vec{A} \cdot dv = \oint_F \vec{A} \cdot d\vec{f}}$$

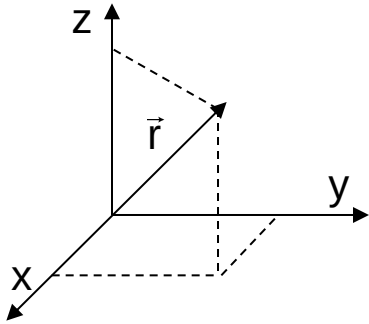


Das Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes ist gleich dem Flächenintegral des Vektorfeldes über die geschlossene Oberfläche des Volumens.

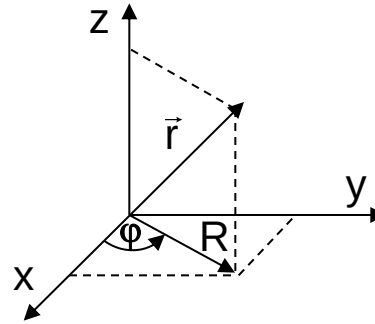
1.5 Koordinatentransformationen

1.5.1 Ortsvektoren

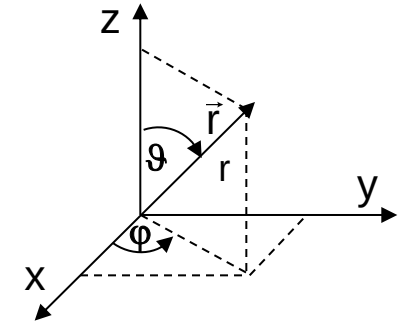
Kartesische Koordinaten



Zylinderkoordinaten



Kugelkoordinaten



x	$=$	$R \cdot \cos \varphi$	$=$	$r \sin \vartheta \cos \varphi$
y	$=$	$R \cdot \sin \varphi$	$=$	$r \sin \vartheta \sin \varphi$
z	$=$	z	$=$	$r \cos \vartheta$

$\sqrt{x^2 + y^2}$	$=$	R	$=$	$r \sin \vartheta$
--------------------	-----	-----	-----	--------------------

$\arctan \frac{y}{x}$	$=$	φ	$=$	φ
-----------------------	-----	-----------	-----	-----------

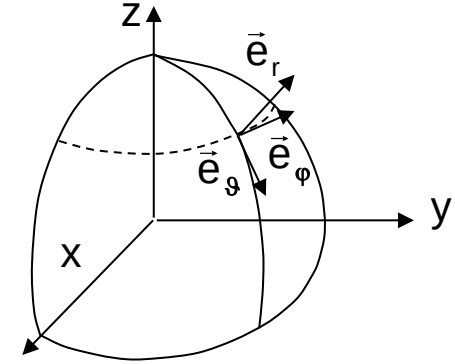
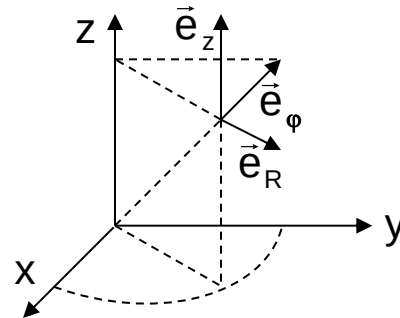
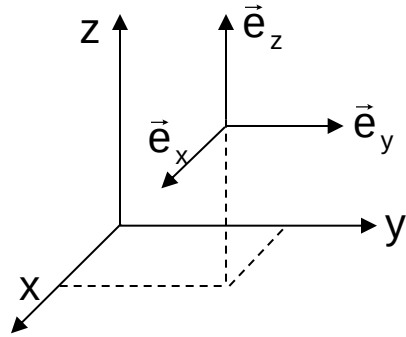
z	$=$	z	$=$	$r \cos \vartheta$
-----	-----	-----	-----	--------------------

$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$=$	$\sqrt{R^2 + z^2}$	$=$	r
--------------------------	-----	--------------------	-----	-----

$\arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$	$=$	$\arctan \frac{R}{z}$	$=$	ϑ
--------------------------------------	-----	-----------------------	-----	-------------

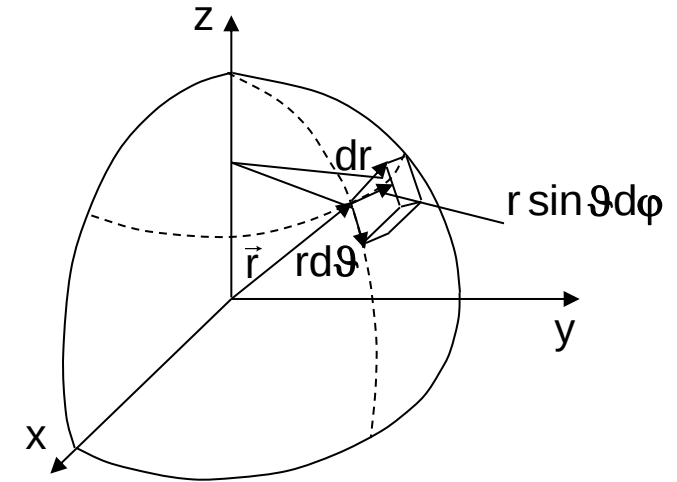
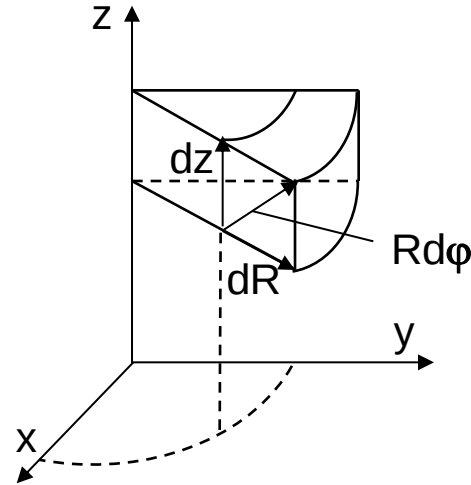
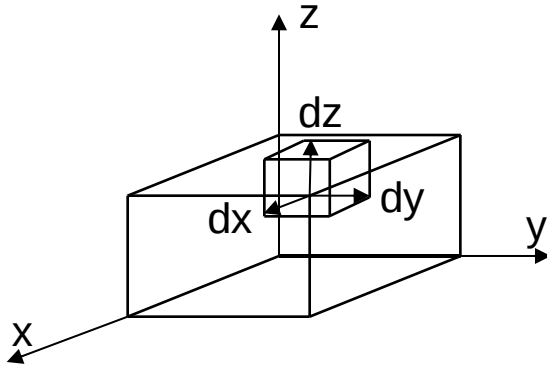
$\arctan \frac{y}{x}$	$=$	φ	$=$	φ
-----------------------	-----	-----------	-----	-----------

1.5.2 Vektorfelder



$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$	$= A_R \vec{e}_R + A_\phi \vec{e}_\phi + A_z \vec{e}_z$	$= A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\phi \vec{e}_\phi$
A_x	$= A_R \cos \phi - A_\phi \sin \phi$	$= A_r \sin \vartheta \cos \phi + A_\theta \cos \vartheta \cos \phi - A_\phi \sin \phi$
A_y	$= A_R \sin \phi + A_\phi \cos \phi$	$= A_r \sin \vartheta \sin \phi + A_\theta \cos \vartheta \sin \phi + A_\phi \cos \phi$
A_z	$= A_z$	$= A_r \cos \vartheta - A_\theta \sin \vartheta$
$A_x \cos \phi + A_y \sin \phi$	$= A_R$	$= A_r \sin \vartheta + A_\theta \cos \vartheta$
$-A_x \sin \phi + A_y \cos \phi$	$= A_\phi$	$= A_\phi$
A_z	$= A_z$	$= A_r \cos \vartheta - A_\theta \sin \vartheta$
$A_x \sin \vartheta \cos \phi + A_y \sin \vartheta \sin \phi + A_z \cos \vartheta$	$= A_R \sin \vartheta + A_z \cos \vartheta$	$= A_r$
$A_x \cos \vartheta \cos \phi + A_y \cos \vartheta \sin \phi - A_z \sin \vartheta$	$= A_R \cos \vartheta - A_z \sin \vartheta$	$= A_\theta$
$-A_x \sin \phi + A_y \cos \phi$	$= A_\phi$	$= A_\phi$

1.5.3 Linien-, Flächen- und Volumenelemente



$$d\vec{s} = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz \quad = \quad \vec{e}_R \cdot dR + \vec{e}_\phi \cdot R d\phi + \vec{e}_z \cdot dz \quad = \quad \vec{e}_r \cdot dr + \vec{e}_\theta \cdot r d\theta + \vec{e}_\phi \cdot r \sin \theta d\phi$$

$$d\vec{f} = \vec{e}_x \cdot dy dz + \vec{e}_y \cdot dx dz + \vec{e}_z \cdot dx dy$$

$$= \vec{e}_R \cdot R \cdot d\phi dz + \vec{e}_\phi \cdot dR dz + \vec{e}_z \cdot R \cdot dR d\phi$$

$$= \vec{e}_r \cdot r^2 \cdot \sin \theta d\theta d\phi + \vec{e}_\theta \cdot r \cdot \sin \theta dr d\phi + \vec{e}_\phi \cdot r \cdot dr d\theta$$

$$dv = dx dy dz$$

$$= R dR d\phi dz$$

$$= r^2 \cdot \sin \theta \cdot dr d\theta d\phi$$

1.5.4 Differentialoperationen in krummlinigen Koordinatensystemen

$$\begin{aligned} \text{grad } \psi &= \vec{e}_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \vec{e}_R \frac{\partial \psi}{\partial R} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \vec{e}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R A_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\vartheta \sin \vartheta) \\ & & &+ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} &= \vec{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \\ &+ \vec{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \\ &+ \vec{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$	$\begin{aligned} &= \vec{e}_R \left(\frac{1}{R} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \\ &+ \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R} \right) + \\ &+ \vec{e}_z \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R A_\varphi) - \frac{1}{R} \frac{\partial A_R}{\partial \varphi} \right) \end{aligned}$	$\begin{aligned} &= \vec{e}_r \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\varphi \sin \vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right] + \\ &+ \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] + \\ &+ \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right] \end{aligned}$
---	---	--

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) \\ & & &+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \end{aligned}$$

2 Elektromagnetische Felder

2.1 Materielle Grundlagen

Ladungen Q :

geladene Teilchen im Vakuum
Leitungselektronen
freie Überschussladungen
Influenzladungen

gebundene Ladungen Q_p :

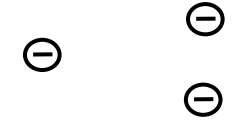
durch polarisierte oder polarisierbare
Teilchen entstandene Ladungen

freie Raumladungsdichte:

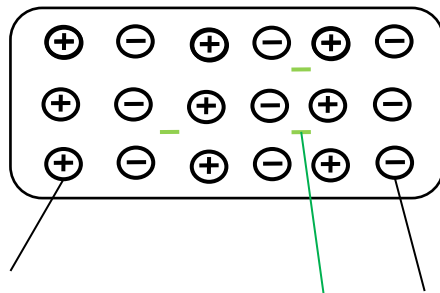
$$\rho = \frac{dQ}{dv}$$

(geladene Teilchen im Vakuum)

Elektronen
in Bildröhre
im Weltall



Leitungselektronen



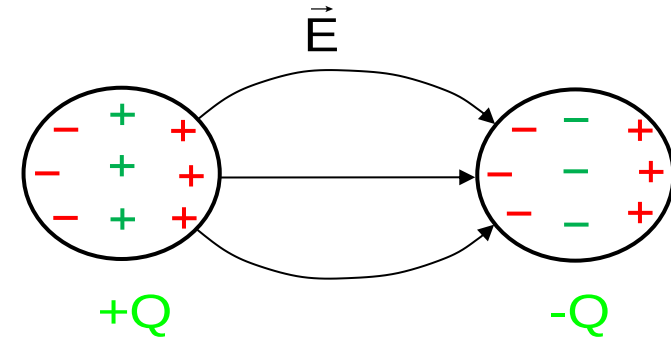
feste Cu-Ionen im Kristallgitter

quasineutrales
leitfähiges
Metall

frei bewegliche
Elektronen

Überschuss-
ladungen

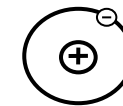
Influenz - Ladungen



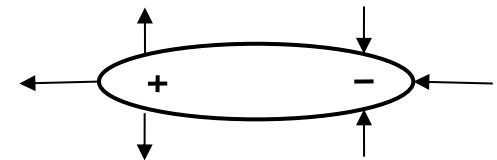
Überschussladungen

el. Feld
Ladungstrennung
Influenzladungen

gebundene Ladungen



Atom
(neutral)



Molekül
unsymm. Ladungs-
verteilung
(neutral)

Ladungsdichten

$$\rho = \frac{d^3Q}{dx \, dy \, dz} \left(\triangleq \frac{Q}{V} \right)$$

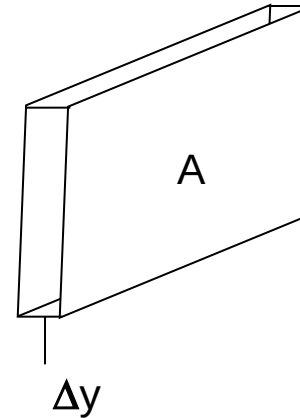
└ Raumladungsdichte

$$\sigma \stackrel{\text{Def}}{=} \rho \cdot dy = \frac{d^2Q}{dx \, dz} \left(\triangleq \frac{Q}{A} \right)$$

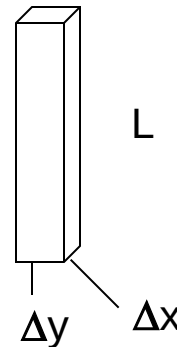
└ Flächenladungsdichte

$$\lambda \stackrel{\text{Def}}{=} \sigma \cdot dx = \frac{dQ}{dz} = \left(\triangleq \frac{Q}{L} \right)$$

└ Linienladungsdichte



$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \rho \, \Delta y \rightarrow \sigma \neq 0$$



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sigma \, \Delta x \rightarrow \lambda \neq 0$$

Zusammenhang Stromdichte / Strom

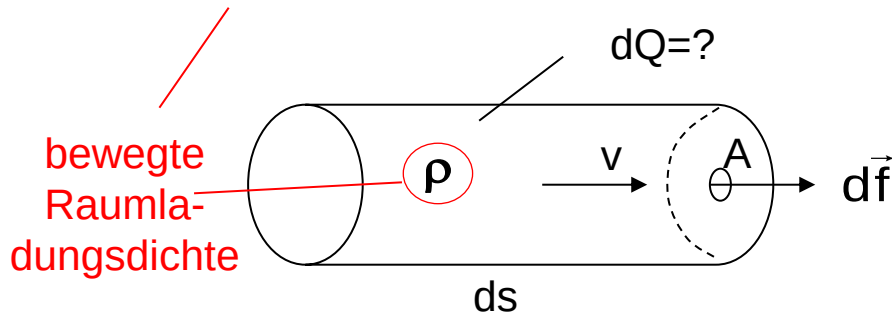
$\leftrightarrow$

Strom von freien Ladungen dQ/dt durch Fläche A

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

$\leftrightarrow$

$$I = dQ/dt$$



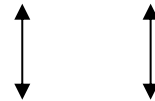
$$\vec{J} = J \vec{e}_z = \text{const.}$$

$$d\vec{f} = df \cdot \vec{e}_z$$

$$\rightarrow dQ = \rho \cdot A \cdot ds$$

$$= \rho \cdot A \cdot v \cdot dt$$

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = \rho \cdot v \cdot A}$$



$$\boxed{I = J \cdot A}$$

$\rightarrow$

$$\boxed{\vec{J} = \rho \vec{v}}$$

Def. Länge ds :

$$ds = v \cdot dt$$

ds ist so lange gewählt, wie sich Ladungsträger der Geschwindigkeit v im Zeitintervall dt fortbewegen

$$\rightarrow I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{f}$$

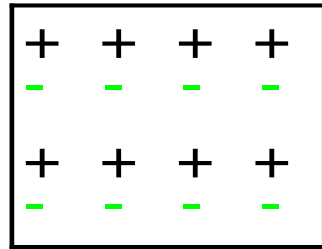
$$= J \cdot A$$

Def.: Stromrichtung

= Flussrichtung pos. Ladungsträger

= - Flussrichtung neg. Ladungsträger

Stromdichte $\vec{J} = \rho \vec{v}$



Metall : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cu-Ionen } \rho_+ : \text{fest im Kristallgitter} \\ \text{unbeweglich} \\ \text{Elektronen } \rho_- : \text{frei beweglich} \end{array} \right.$

neutral: $\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$

$$\rho_- = -\rho_+$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{geladen: } \rho = \rho_+ + \rho_- + \rho_{\text{Zusatz}} \\ \quad \quad \quad = \rho_{\text{Zusatz}} \end{array} \right)$$

Stromdichte: $\vec{J} = \rho \cdot \vec{v}$

$$\rho = \rho_+ + \rho_- = 0 \longrightarrow \rho = 0 \longrightarrow \vec{J} = 0 \text{ ???????}$$

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \rho_- \cdot \vec{v}_- + \rho_+ \vec{v}_+ \quad \vec{v}_+ = 0 ! \\ &= \rho_- \cdot \vec{v}_- \end{aligned}$$

2.2 Felddescription durch die Maxwell'schen Gleichungen

Wirkung $\leftarrow$ Ursache

$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	elektrisches Quellenfeld, erzeugt durch alle $\rho = \rho_+ + \rho_-$
$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	elektrisches Wirbelfeld, erzeugt durch $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \underbrace{(\rho_+ \vec{v}_+ + \rho_- \vec{v}_-)}_{\vec{J}} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	magn. Wirbelfeld, erzeugt durch Ströme und $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	Quellenfreiheit des magnetischen Feldes
$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$	Kraftgleichung, messbare Wirkung von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ auf Ladungen

Physikalisch reale, messbare Größen sind: ρ , q , $\vec{v}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{F}$.

Alle später neu dazukommenden Größen sind nur Abkürzungen per Definition für makroskopisch gemittelte Eigenschaften dieser ersteren fundamentalen Größen.

Berücksichtigung gemittelter, makroskopischer Materialeffekte:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \longleftarrow \text{Polarisation durch Ladungsverschiebung in Festkörpern}$$

$$= \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \quad \text{für } \vec{P} = \chi_{\text{el}} \epsilon_0 \vec{E} \quad \text{mit } \epsilon_r = (1 + \chi_{\text{el}})$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad \longleftarrow \text{Magnetisierung durch atomare Ringströme}$$

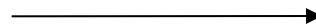
$$= \mu_r \mu_0 \vec{H} \quad \text{für } \vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \text{mit } \mu_r = (1 + \chi_m)$$

$$\text{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{frei}}$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{J}_{\text{frei}} + \mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$



$$\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{frei}}$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_{\text{frei}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

3 Elektrostatik

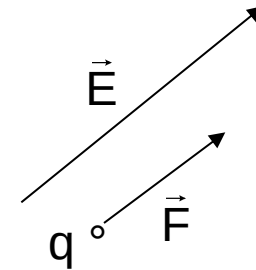
3.1 Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen

elektrische Feldstärke $\vec{E}$:

definiert über Kraft $\vec{F}$ auf Probeladung q :

Kraftgesetz: $\boxed{\vec{F} = q \vec{E}}$

$$\dim \vec{E} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{s}} = \frac{\text{J}}{\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}} = \frac{\text{V} \cdot \text{A} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$$



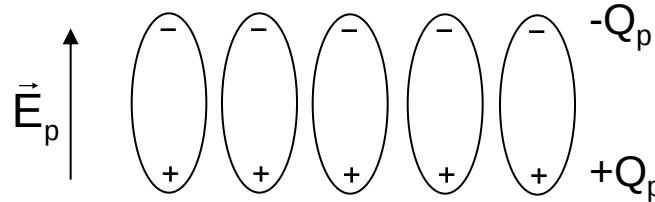
elektrische Feldstärke $\vec{E}$:

erzeugt durch alle Ladungen Q bzw. Raumladungsdichten ρ_{ges} im Raum

$$\text{Maxwell: } \boxed{\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_{\text{ges}}}{\epsilon_0}} \quad \epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

Materialeffekte: elektrische Polarisation $\vec{P}$:

makroskopisch
gemittelt über
mikroskopische
Effekte



in Molekülen gebundene,
separierte Ladungen,
quasineutral

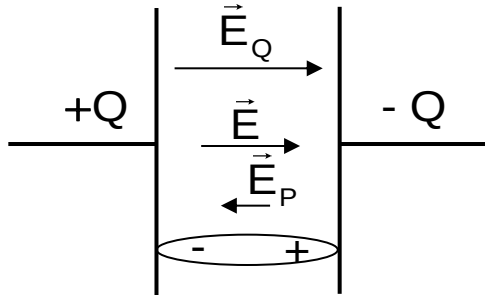
elektrisches Polarisationsfeld $\vec{E}_p$,

hervorgerufen durch Ladungstrennung innerhalb der Moleküle

Definition der elektrischen Polarisation:

$$\vec{P} = - \epsilon_0 \vec{E}_p$$

$$\dim \vec{P} = \frac{A \cdot s \cdot m}{m^3} = \frac{A \cdot s}{m^2}$$



Die Überlagerung

- des durch freie Ladungen Q erzeugten Feldes $\vec{E}_Q$
- und des durch Ladungstrennung in Molekülen erzeugten Polarisationsfeldes $\vec{E}_P$ (bzw. $\vec{P}$) liefert ein effektives Gesamtfeld $\vec{E}$

$$\vec{E} = \vec{E}_Q + \vec{E}_P$$

Ersetzen von $\vec{E}_P$ durch $-\vec{P}/\epsilon_0$ und Multiplikation der Gl. mit ϵ_0 liefert

$$\epsilon_0 \vec{E}_Q = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Mit der Definition der elektrischen Verschiebungsdichte $\vec{D}$

$$\vec{D} \stackrel{\text{Def}}{=} \epsilon_0 \vec{E}_Q$$

ergibt sich die bekannte Materialgleichung

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}} \quad \dim \vec{D} = \frac{A_s}{m^2}$$

Materialgleichung:

$$\vec{E} = \vec{E}_Q + \vec{E}_P$$

wenn das Polarisationsfeld E_P linear proportional zum elektrischen Gesamtfeld E ist:

$$\vec{E}_P = -\chi_{el} \vec{E} \text{ (Richtung entgegengesetzt zu } \vec{E}) \quad \chi_{el} : \text{ elektrische Suszeptibilität}$$

dann gilt:

$$\vec{E} = \vec{E}_Q - \chi_{el} \vec{E}$$

$$\rightarrow \vec{E}_Q = \underbrace{(1 + \chi_{el})}_{\epsilon_r} \vec{E}$$

ϵ_r : relative
Dielektrizitätszahl
des Materials

und es ergibt sich:

$$\boxed{\vec{E}_Q = \epsilon_r \vec{E}}$$

Mit der alten Definition für die Verschiebungsdichte D

$$\vec{D} \stackrel{\text{Def}}{=} \epsilon_0 \vec{E}_Q$$

bekommen wir die bekannte Schreibweise

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}}$$

$$\boxed{\operatorname{div} (\epsilon_0 \vec{E}) = \rho_{\text{ges}}}$$

Allgemein gültige Maxwell-Gleichung unter Berücksichtigung aller,
d.h. der freien wie der in dielektrischen Molekülen gebundenen Ladungen.

$$\left. \begin{array}{l} \rho_{\text{ges}} = \rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{gebunden}} \\ \vec{E} = \vec{E}_Q + \vec{E}_P \end{array} \right\} \text{Superpositions-Prinzip}$$

$$\rightarrow \boxed{\operatorname{div} (\epsilon_0 \vec{E}_Q) = \rho}$$

Es genügt also die Kenntnis der Verteilung
der freien Ladungen zur Berechnung des el. Feldes

$$\rightarrow \operatorname{div} (\epsilon_0 \vec{E}_P) = \rho_P \quad \text{Problem: } \rho_P \text{ unbekannt}$$

Aber im Fall linearer Materialgleichungen gilt:

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \quad \leftrightarrow \quad \epsilon_0 \vec{E}_Q = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = \frac{\vec{E}_Q}{\epsilon_r}}$$

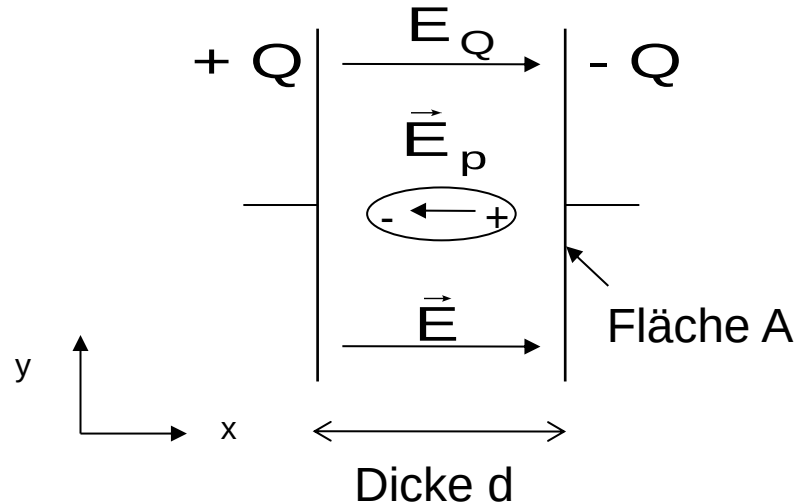
Traditionelle Schreibweise:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_r \epsilon_0}}$$

Berechnung der relativen Dielektrizitätskonstanten

Im Inneren des Kondensators sind Moleküle mit polarisierbaren Elektronenorbitalen mit der Dichte von N Molekülen pro Volumeneinheit statistisch verteilt.



Jedes dieser Moleküle erzeugt einen kleinen Beitrag zum Gesamtpolarisationsfeld $\vec{E}_p$ aller Moleküle.

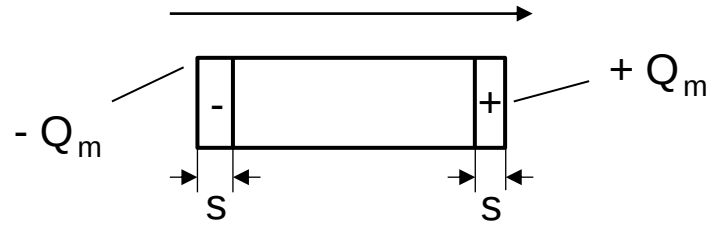
Das elektrische Feld erzeugt in jedem der Moleküle eine kleine Ladungstrennung weg vom neutralen Gleichgewicht um die Distanz s .

$$\vec{E} = 0$$



neutrales Molekül

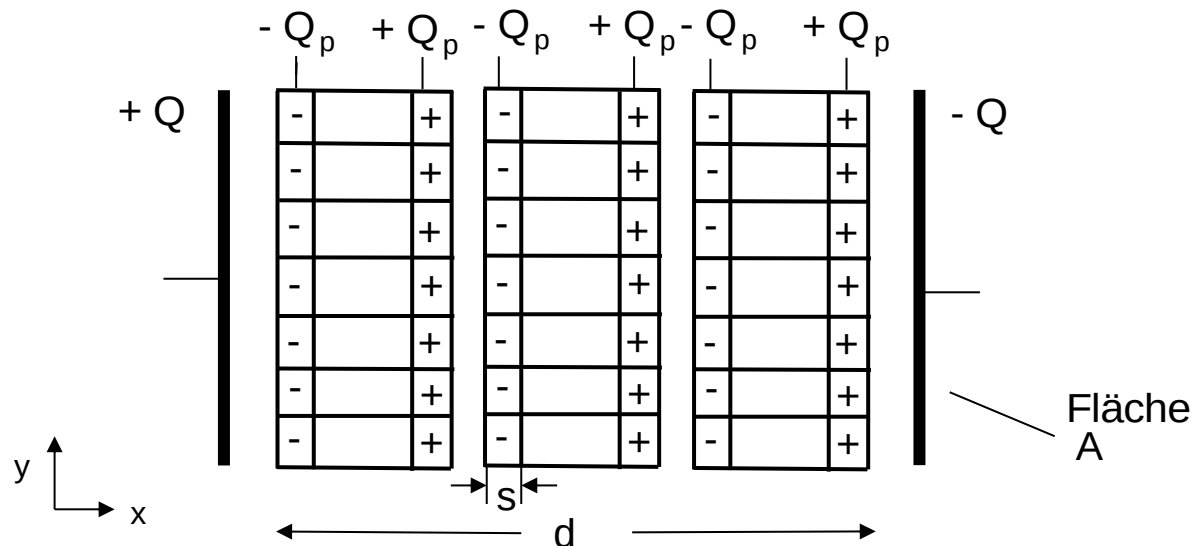
$$\vec{E} \neq 0$$



Der Ladungsüberschuß am Molekül $+Q_m$ und $-Q_m$ ist gegeben durch die Raumladungsdichte der Elektronen ρ_- , die mittlere Querschnittsfläche des Moleküls A_m und die Länge s der Ladungstrennung

$$-Q_m = \rho_- \cdot A_m \cdot s$$

Zur einfacheren Berechnung des gemittelten Gesamtfeldes $\vec{E}_p$ wird als Idealisierung angenommen, dass die Moleküle in zu den Kondensatorplatten parallel ausgerichteten Schichten angeordnet sind.



Die gesamte Polarisationsladung Q_p ist die Summe der molekularen Teilladungen Q_m über die gesamte Querschnittsfläche A

$$Q_p = \sum Q_m = \rho A s = N q_e A s$$

Das elektrische Polarisationsfeld $\vec{E}_p$ ergibt sich aus der gemittelten Ladungstrennung $+Q_p$ und $-Q_p$ aller Elementarladungen q_e der Elektronen

$$\vec{E}_p = -\frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q_p}{A} \cdot \vec{e}_x$$

Die Auslenkung s der Ladungen ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht des an q_e angreifenden $\vec{E}$ -Feldes und der innermolekularen Rückstellkraft, welche in erster Näherung linear mit einer Rückstellkonstante r (analog der mech. Federkonstante) beschrieben werden kann

$$\vec{F} = q_e \vec{E} = r \vec{s} \quad \rightarrow \quad |\vec{s}| = \frac{q_e E}{r}$$

Damit ergibt sich für $\vec{E}_p$

$$\vec{E}_p = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q_p}{A} \vec{e}_x = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{N q_e A s}{A} \vec{e}_x = -\frac{1}{\epsilon_0} N q_e \frac{q_e \vec{E}}{r}$$

$$\rightarrow \vec{E}_p = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{N q_e^2}{r} \vec{E}$$

Das Gesamtfeld $\vec{E}$ setzt sich also aus der Überlagerung des durch die Ladungen auf den Elektroden des Kondensators hervorgerufenen $\vec{E}_Q$ sowie dem über alle Moleküle gemittelten $\vec{E}_p$ zusammen

$$\vec{E} = \vec{E}_Q - \frac{N q_e^2}{\epsilon_0 r} \vec{E}$$

Daraus ergibt sich

$$\vec{E}_Q = \underbrace{\left(1 + \frac{N q_e^2}{\epsilon_0 r}\right)}_{\epsilon_r} \vec{E}$$

und schließlich mit der Definition von $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_Q$

$$\vec{D} = \left(1 + \frac{N q_e^2}{\epsilon_0 r}\right) \epsilon_0 \vec{E} \quad \rightarrow \quad \boxed{\epsilon_r = \left(1 + \frac{N q_e^2}{\epsilon_0 r}\right)}$$

Die relative Dielektrizitätskonstante hängt also von der Dichte N der Moleküle sowie von deren Rückstellkonstante r ab.

3.2 Satz von Hüllenfluss und Symmetrie

Erzeugung der elektrischen Verschiebungsdichte $\vec{D}$ durch Raumladungsdichte ρ

$$\boxed{\text{div } \vec{D} = \rho} \xrightarrow{\text{Maxwell}} \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho(x,y,z)$$

partielle DGI

Berechnungsmethode von $\vec{D}$ im Falle einfacher Symmetrien:

$$\int_{\text{Vol}} \text{div } \vec{D} \cdot dv = \int_{\text{Vol}} \rho dv$$

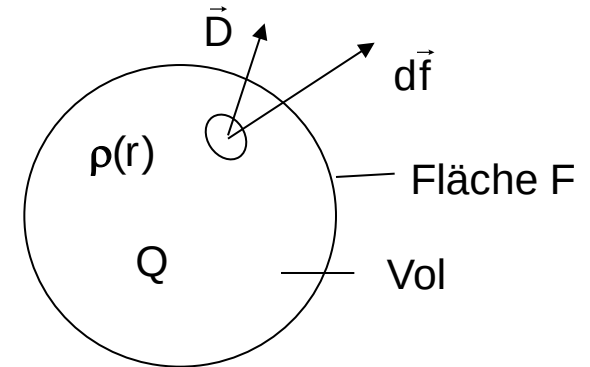
Gauß'scher Satz

mathematisch
äquivalente
Darstellung

$$\boxed{\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{f} = \int_{\text{Vol}} \rho dv}$$

„Satz vom Hüllenfluss“

Gesamtladung Q im Volumen „Vol“

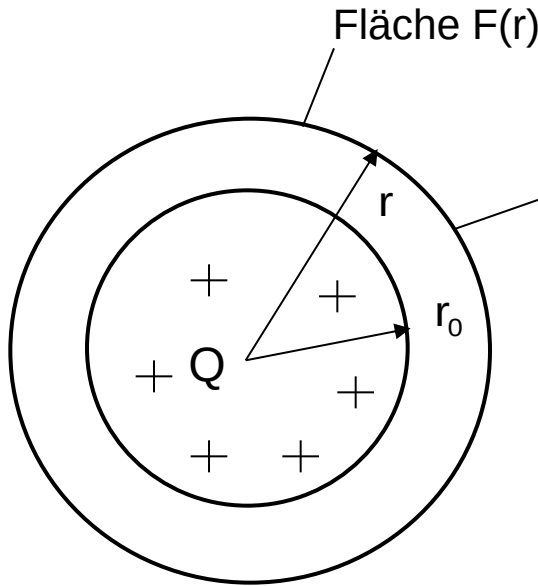


- 1) Wahl eines geeigneten Koordinatensystems
- 2) Wahl einer geschlossenen Integrationsfläche

Kugelsymmetrische Ladungsverteilung: Kugelkoordinaten

Symmetrie von Kugel und Ladungsverteilung

→ $\vec{D} = D_r(r)\vec{e}_r$ konstant auf Hüllfläche



Volumen
 $Vol(r)$

$$\rho_0 = \frac{Q \cdot 3}{4\pi r_0^3}$$

Gesamtladung
 Q innerhalb
Kugel mit
Radius r_0

Kugelsymmetrie:

$$\rho(r, \vartheta, \varphi) = \rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & r \leq r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases}$$

Außenfeld für $r > r_0$

$$\oint_{F(r)} \vec{D} \cdot d\vec{f} = \int_{Vol(r)} \rho \, dv \rightarrow D_r \cdot 4\pi r^2 = Q$$

$$D_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad D_\vartheta = 0 \quad D_\varphi = 0$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_r \epsilon_0} \rightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2}$$

$$\vec{F}_q = q \cdot \vec{E} \rightarrow F_{qr} = \frac{qQ}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2}$$

Folgerung der Kraftgleichung
aus den Maxwell - Gleichungen

Feld innerhalb der Kugel

$$\rho(r) = \rho_0 = \text{const} \quad r < r_0$$

$$\oint_{F(r)} \vec{D} \cdot d\vec{f} = \int_{\text{Vol}(r)} \rho \, dv$$

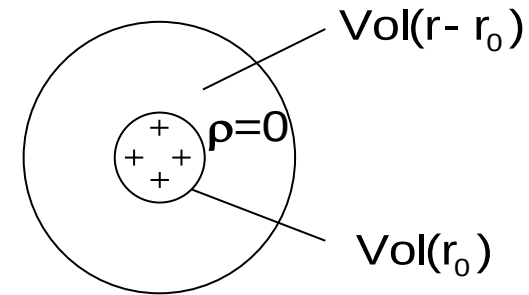
$$D_r \, \vec{e}_r \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{e}_r \, r^2 \underbrace{\sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}_{4\pi} = \rho_0 \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \underbrace{\sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}_{4\pi} dr$$

$$D_r \cdot \underbrace{4\pi r^2}_{\text{Kugelfläche}} = \rho_0 \cdot \underbrace{\frac{4}{3} \pi r^3}_{\text{Kugelvolumen}}$$

$$\boxed{D_r(r) = \frac{\rho_0}{3} r}$$

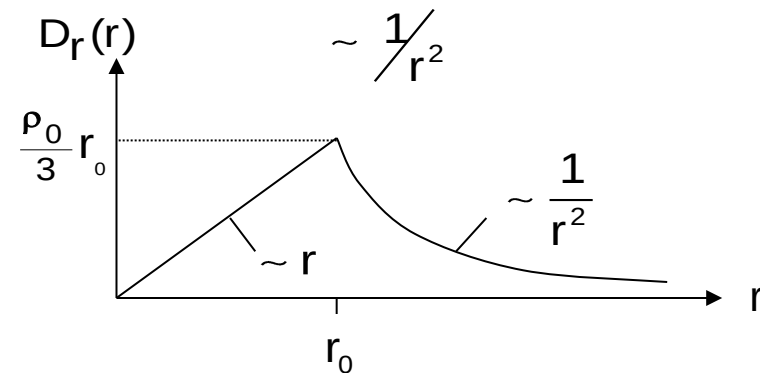
Feld außerhalb der Kugel

$$\begin{aligned}
 & \int_{\text{Vol}} \rho(r) \, dv \\
 &= \int_{\text{Vol}(r_0)} \rho(r) \, dv + \int_{\text{Vol}(r-r_0)} \rho(r) \, dv \\
 &= \rho_0 \int_{\text{Vol}(r_0)} dv + 0 \int_{\text{Vol}(r-r_0)} dv \\
 &= \rho_0 \frac{4\pi}{3} r_0^3 \\
 &= Q
 \end{aligned}$$



$$\underbrace{D_r \cdot 4\pi r^2}_{\text{variabel}} = \underbrace{\rho_0 \cdot \frac{4}{3} \pi r_0^3}_{\text{fest}}$$

$$\boxed{D_r(r) = \frac{\rho_0}{3} \frac{r_0^3}{r^2}}$$

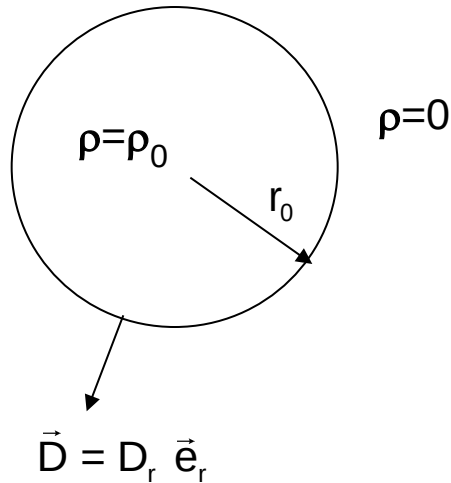


Umkehrung: Berechnung von $\rho(r)$ aus gegebenem $D_r(r)$

$$\vec{D} = D_r \vec{e}_r$$

$$= \frac{\rho_0}{3} \cdot r \vec{e}_r$$

nur r - Komponente



innen
 $r < r_0$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot D_r) \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\rho_0}{3} \cdot r \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\rho_0}{3} \cdot \frac{\partial r^3}{\partial r} \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\rho_0}{3} \cdot 3 \cdot r^2 \\ &= \rho_0 \end{aligned}$$

Divergenz in Kugel-
koordinaten

$$\rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho}$$

(qed)

$$\vec{D} = D_r \vec{e}_r$$

$$= \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r$$

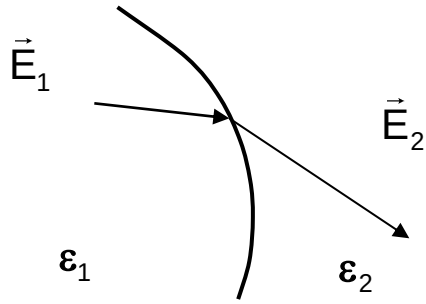
außen
 $r > r_0$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{Q}{4\pi r^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{D} = 0}$$

(qed) 50

3.3 Übergänge an Grenzflächen



Berechnung der Tangentialkomponenten:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \boxed{\int_F \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{f} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_F \vec{B} \cdot d\vec{f}}$$

„Maxwell“

Isolatoren
opt. Linsen

Grenzübergang $\Delta h \rightarrow 0$ $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}_2 = -\frac{d}{dt} \int_{\Delta h \rightarrow 0} \vec{B} \cdot d\vec{f} = 0$

Aufteilung in Tangential- und Normalkomponenten:

$$\vec{E}_i = E_{ti} \vec{e}_t + E_{ni} \vec{e}_n \quad i = 1, 2$$

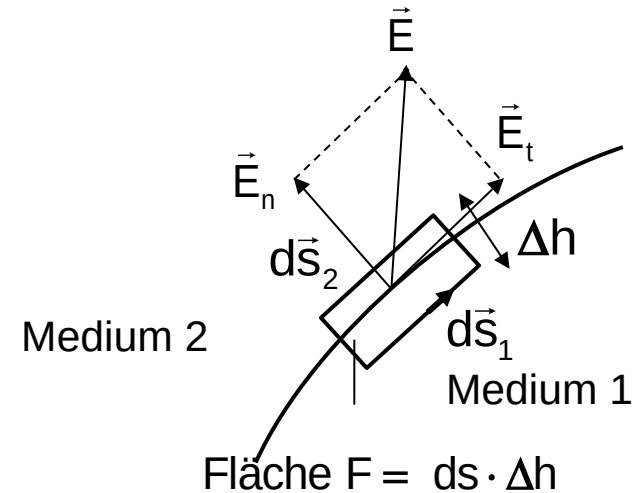
$$d\vec{s}_1 = ds \cdot \vec{e}_t \quad \text{Wegelemente } d\vec{s}_i:$$

$$d\vec{s}_2 = ds \cdot (-\vec{e}_t)$$

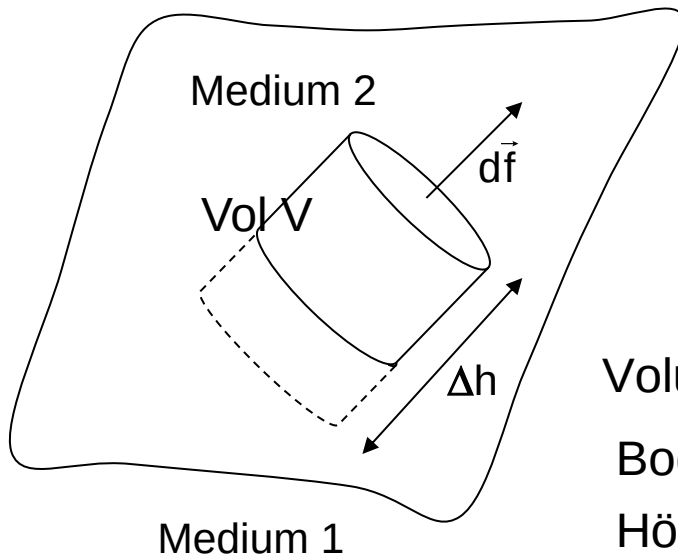
$$\rightarrow \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 = (E_{t1} \vec{e}_t + E_{n1} \vec{e}_n) \cdot ds \vec{e}_t = E_{t1} ds$$

$$\rightarrow \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}_2 = -E_{t2} \cdot ds$$

$$\rightarrow E_{t1} \cdot ds - E_{t2} \cdot ds = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{E_{t1} = E_{t2}}$$



Die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke ist an Grenzflächen stetig.



Berechnung der Normalkomponenten:

„Maxwell“
 $\text{div } \vec{D} = \rho \rightarrow \boxed{\int \text{div } \vec{D} \, dv = \oint \vec{D} \cdot d\vec{f} = \int \rho \, dv}$

Volumen $V = df \cdot \Delta h$ wird durch Grenzfläche durchdrungen
 Boden- und Deckflächen $d\vec{f}$ senkrecht auf Grenzfläche
 Höhe Δh mit Grenzübergang $\Delta h \rightarrow 0$

Aufteilung in Tangential- und Normalkomponenten:

$$\vec{D}_i = D_{ti} \vec{e}_t + D_{ni} \vec{e}_n \quad i = 1, 2$$

Oberflächenelemente $d\vec{f}$:

oben: $d\vec{f} = df \cdot \vec{e}_n$

unten: $d\vec{f} = df (-\vec{e}_n)$

Rand: $\Delta h \rightarrow 0 \rightarrow F_{\text{Rand}} = 0$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{f} = D_{n2} df - D_{n1} df + 0 = \int_{\text{Vol}} \rho \, \Delta h \, df = \int \sigma \cdot df$$

$$\rightarrow \boxed{D_{n2} - D_{n1} = \sigma}$$

freie Oberflächenladungsdichte

Die Normalkomponente der el. Verschiebungsdichte macht an der Grenzfläche einen Sprung gleich der freien Grenzflächenladungsdichte. Sie ist stetig, wenn $\sigma = 0$.

Vorausgesetzt

$$\vec{D} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}$$

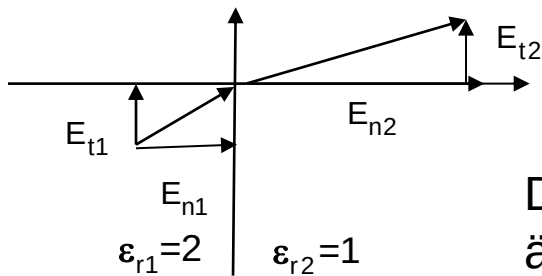
$$D_{n2} = D_{n1} + \sigma$$

$$\epsilon_0 \epsilon_{r2} E_{n2} = \epsilon_0 \epsilon_{r1} E_{n1} + \sigma$$

$$E_{n2} = \frac{\sigma/\epsilon_0}{\epsilon_{r2}} + \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} E_{n1}$$

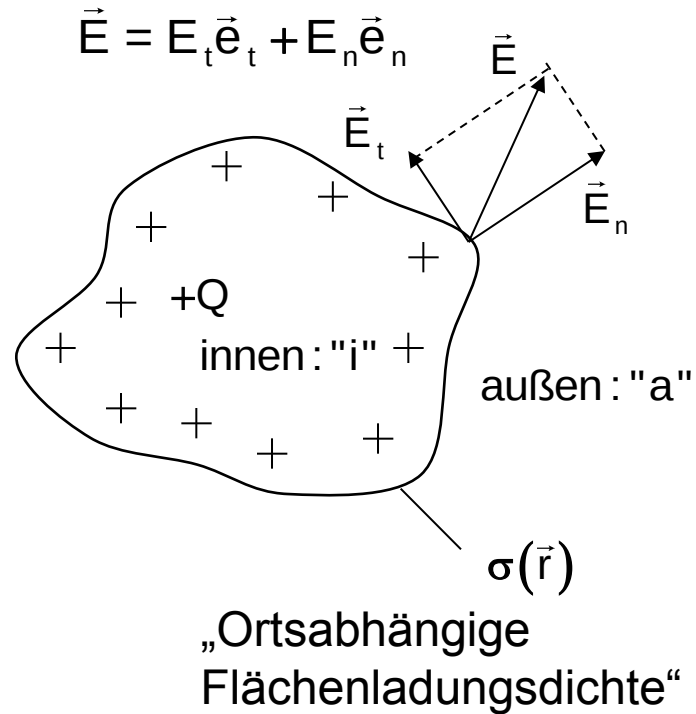
$$E_{t2} = E_{t1}$$

wenn $\sigma = 0$ folgt: $E_{n2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} E_{n1}$



Die Richtung von E und dessen Feldstärke ändern sich an Sprüngen der Dielektrizitätskonstanten

Felder an Leiteroberflächen



$$\vec{E}_i = 0$$

$$\text{da } \vec{J} = \kappa \vec{E}_i \text{ und } \vec{J} = 0$$

„Stetigkeit der Tangentialkomponenten“

$$E_{ti} = E_{ta}$$

$$\vec{E}_i = 0 \rightarrow E_{ti} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{E_{ta} = 0}$$

„Stetigkeit der Normalkomponenten“

$$D_{na} - D_{ni} = \sigma$$

$$\epsilon_{ra} \epsilon_0 E_{na} - \epsilon_{ri} \epsilon_0 E_{ni} = \sigma$$

$$E_{na} = \frac{\sigma}{\epsilon_{ra} \epsilon_0}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{E}_a = \frac{\sigma}{\epsilon_{ra} \epsilon_0} \vec{e}_n}$$

Außenfeld steht
immer senkrecht
auf Metalloberfläche!!

3.4 Potentialfunktion

Def. $\vec{E} = - \text{grad } \Phi$ Definition der Potentialfunktion; Dimension ist „Volt“

$$\begin{aligned} E_x &= - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ E_y &= - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ E_z &= - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{aligned}$$

Das mathematische Skalarfeld $\Phi(\vec{r})$, auch Potentialfunktion genannt, beschreibt vollständig das reale physikalische elektrische Feld $\vec{E}$.
Das Potential Φ selbst bewirkt keine meßbaren Kräfte;
es ist nicht eindeutig bestimmt.

Der Nullpunkt (Erdung) ist wählbar durch eine beliebige Konstante C, ohne das durch das Potential beschriebene elektrische Feld zu verändern.

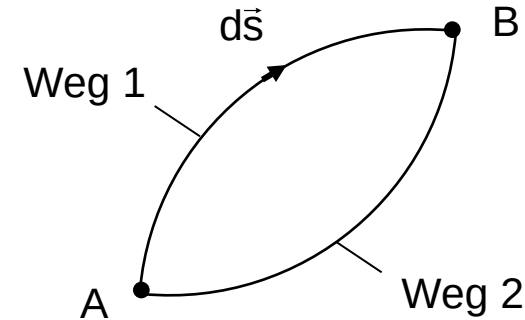
$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= - \text{grad } \Phi_0(\vec{r}) \\ \vec{E}_2 &= - \text{grad } (\Phi_0(\vec{r}) + C) \quad \rightarrow \quad \vec{E}_1 = \vec{E}_2 \\ &= - \text{grad } \Phi_0(\vec{r}) - \underbrace{\text{grad } C}_0 \end{aligned}$$

Die Einführung der mathematischen Hilfsgröße des Potentials erlaubt eine

einfache Berechnung des Wegintegrals $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Integralsatz der Mathematik:

Das Wegintegral über den Gradienten eines Skalarfeldes vom Punkt A zum Punkt B ist gleich der Differenz der Werte der Potentialfunktion an den Punkten B und A unabhängig vom integrierten Weg zwischen den Punkten.



$$\Psi(B) - \Psi(A) = \int_A^B (\text{grad } \Psi) \cdot d\vec{s}$$

Damit wird

$$-\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = +\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \text{grad } \Phi \cdot d\vec{s} = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1)$$

$$-\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1)$$

wichtig ist nur die Potentialdifferenz an den Orten 1 und 2, nicht der Verlauf der Potentialfunktion zwischen ihnen; „wegunabhängig“

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = - \text{grad } \Phi(\vec{r})}$$

Differentielle Darstellung

$$\begin{aligned} -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= +\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \text{grad } \Phi \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_z \right) \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

$$\text{es war } d\vec{s} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \right) \\ &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\Phi = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1) \end{aligned}$$

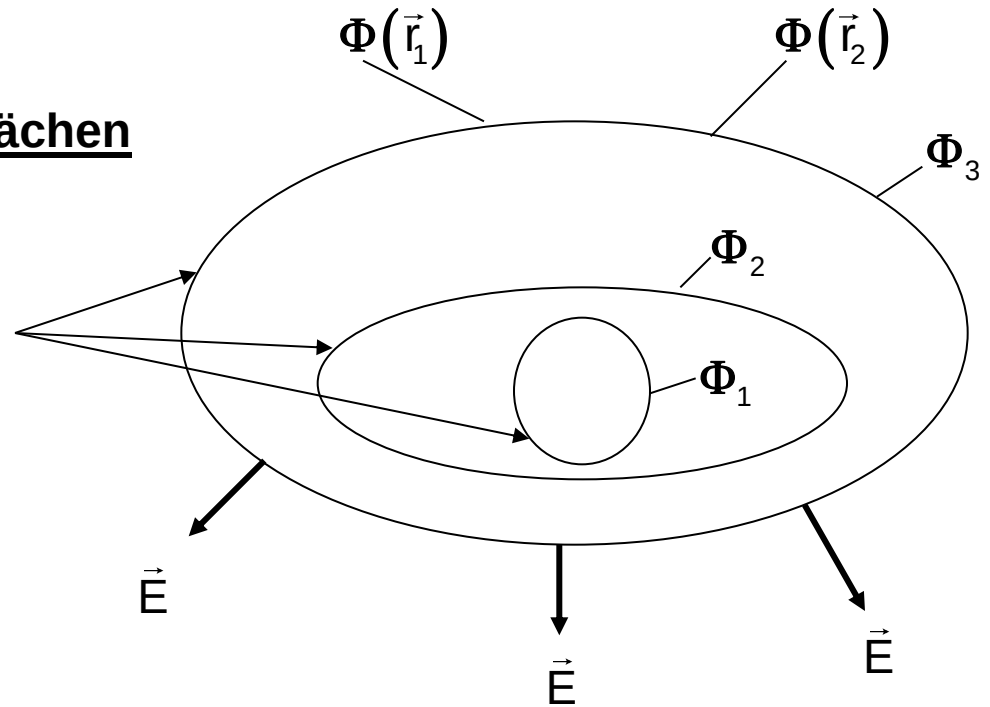
$$\boxed{-\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1)}$$

Integrale Darstellung

Äquipotentialflächen

$$\Phi(\vec{r}) = \text{const.}$$

Definition von
Äquipotentialflächen



$$\Phi(\vec{r}_2) = \Phi(\vec{r}_1) = \Phi_3$$

$$\Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1) = 0 \rightarrow -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\Rightarrow d\vec{s} \perp \vec{E}$$

Äquipotentialflächen stehen senkrecht auf den Feldvektoren des elektrischen Feldes

Arbeit im elektrischen Feld

Aufgabe :

welche Energie ist nötig, eine Probeladung Q' vom Ort 1 zum Ort 2 zu bewegen?

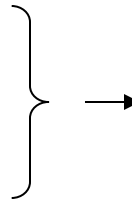
$$\vec{F} = Q' \cdot \vec{E} \quad \rightarrow \quad \Delta W_e = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \, d\vec{s} = Q' \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \, d\vec{s} = Q' (\Phi(\vec{r}_1) - \Phi(\vec{r}_2))$$

ΔW_e hängt nur von $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ ab, nicht aber von der Wahl des Weges dazwischen.

Es wird keine Energie auf Wegen entlang von Äquipotentialflächen verbraucht.

$\Rightarrow Q' \cdot \Phi(\vec{r})$ nennt man die potentielle Energie einer Ladung Q' am Ort $\vec{r}$

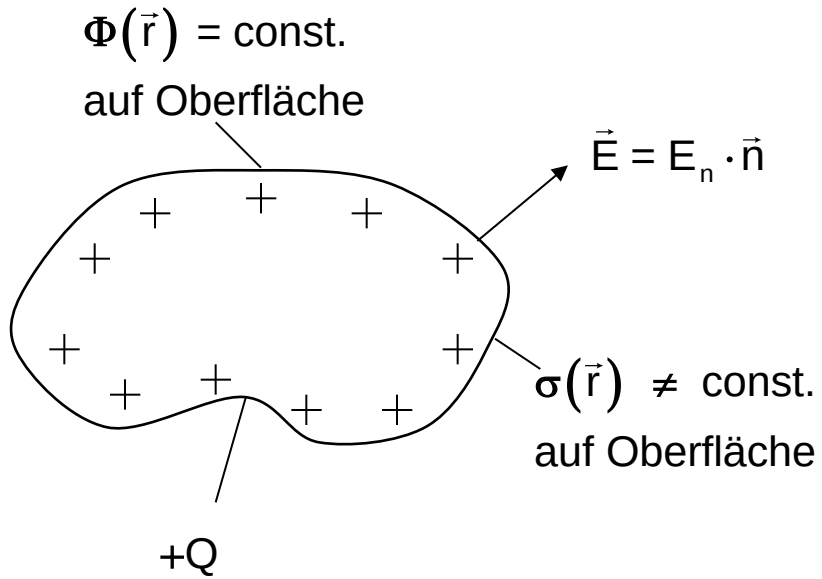
physikalische Bedeutung aber
hat nur die Potentialdifferenz
zwischen zwei Orten 1 und 2



Nullpunkt für Φ willkürlich

$$\text{grad}(\Phi + C) = \text{grad} \Phi$$

Potentiale an Leiteroberflächen



An Oberfläche gilt:

$\vec{E}_t = 0$ es gibt keine Tangentialkomponenten

→ $\boxed{\Phi = \text{const.}}$

Oberfläche ist Äquipotentialfläche

→ $\boxed{\vec{E} = E_n \vec{n}}$

Feld steht senkrecht auf Oberfläche

3.4.1 Eine Punktladung bei $\vec{r} = 0$

Berechnung von $\Phi(\vec{r})$ aus bekanntem $\vec{E}(\vec{r})$:

$$\begin{aligned}\Phi(r) - \Phi(\infty) &= -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_{\infty}^r (E_r \vec{e}_r) \cdot (dr \vec{e}_r) = -\int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r'^2} dr' \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \left[-1 \cdot \frac{1}{r'} \right]_{\infty}^r \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}\end{aligned}$$

willkürliche, aber praktische Festlegung:

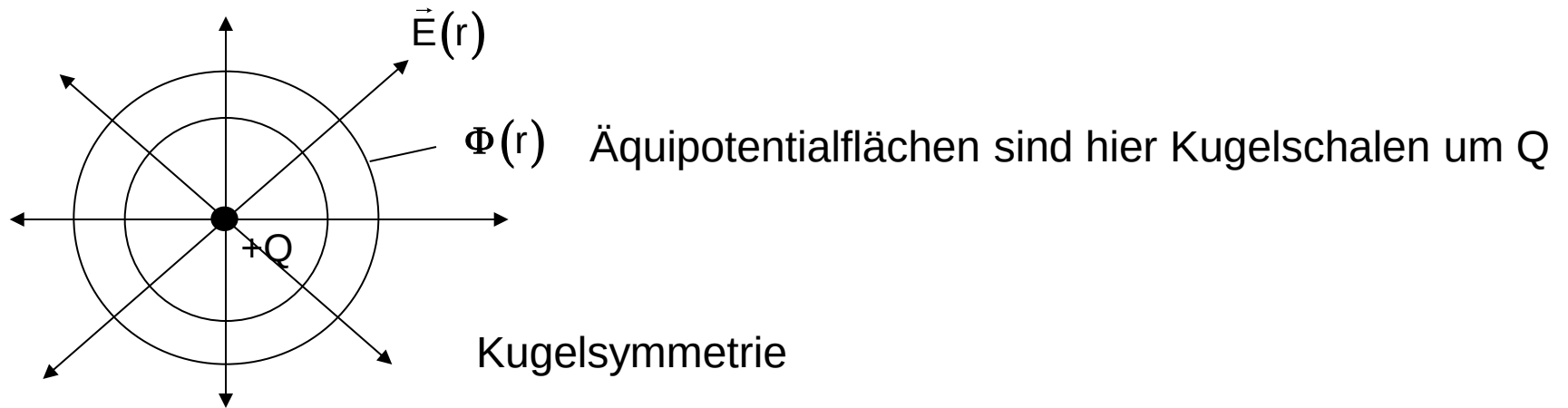
$$\Phi(\infty) = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}}$$

Coulombpotential einer Punktladung

$Q' \cdot \Phi(r)$: potentielle Energie einer Probeladung Q' im Feld der erzeugenden Ladung Q (Arbeit, an den Ort $\vec{r}$ aus dem Unendlichen zu kommen)

Umkehrung: Berechnung von $\vec{E}(\vec{r})$ aus bekanntem $\Phi(\vec{r})$:



$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad \text{Kugelkoordinaten}$$

$$\vec{E} = - \text{grad } \Phi$$

$$= - \vec{e}_r \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} - \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r)}{\partial \vartheta} - \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi(r)}{\partial \varphi}$$

$$= + \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

Welche Energie ist nötig, die Probeladung Q' von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ bei einer Punktladung zu bringen?

$$\vec{F} = Q' \cdot \vec{E} \rightarrow \Delta W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = Q' \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\Delta W = Q' \cdot (\Phi(\vec{r}_1) - \Phi(\vec{r}_2))$$

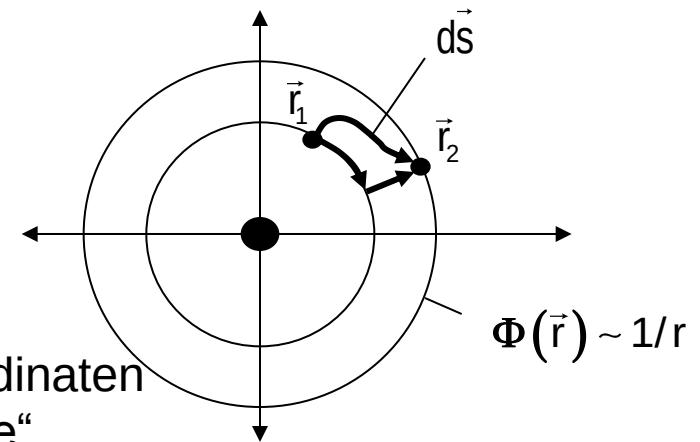
Potentialdifferenz

es genügt die Kenntnis nur von $\Phi(\vec{r}_1)$ und $\Phi(\vec{r}_2)$

Beweis:

$$\begin{aligned} & \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (E_r(r) \vec{e}_r) \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (E_r(r) \vec{e}_r) \cdot (\vec{e}_r dr + \cancel{\vec{e}_\theta r d\theta} + \cancel{\vec{e}_\phi r \sin \theta d\phi}) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &= \Phi(r_1) - \Phi(r_2) \end{aligned}$$

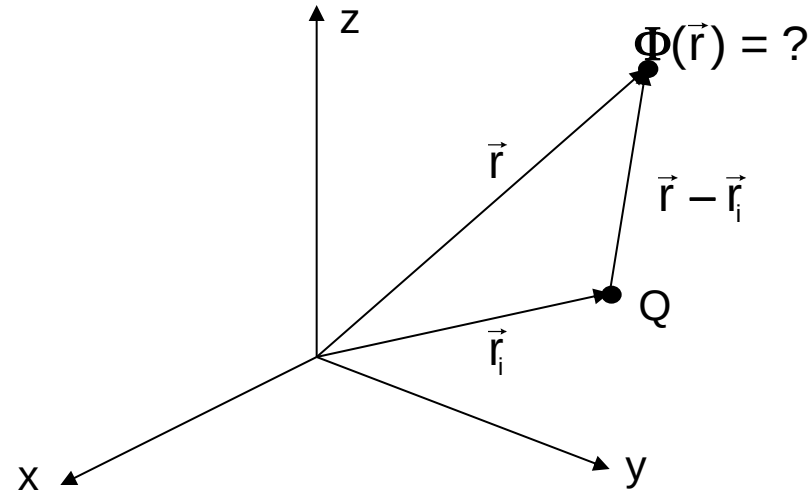
Kugelkoordinaten
„Symmetrie“



3.4.2 Viele Punktladungen

Potentialfunktion einer verschobenen Punktladung bei $\vec{r}_i$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$



Potentialfunktion von N Punktladungen

allgemein
gilt:

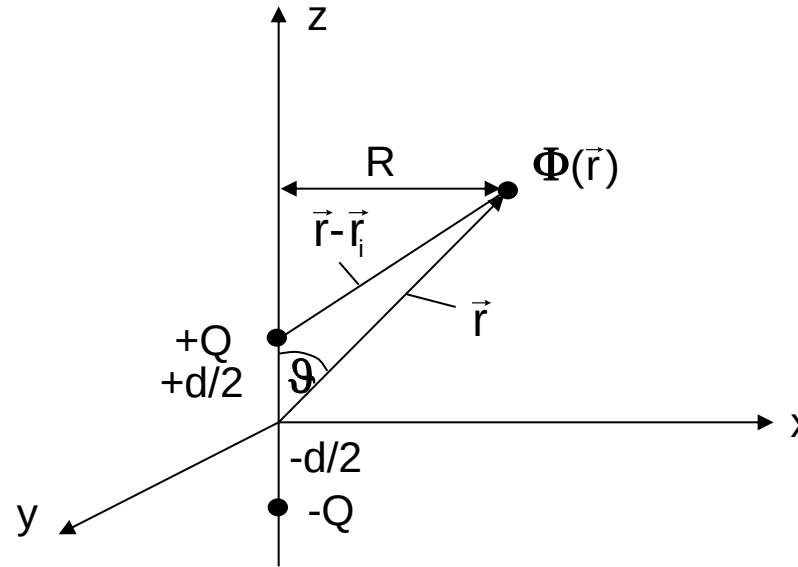
$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Beachte: Vorzeichen der Q_i

3.4.3 Elektrischer Dipol

Der el. Dipol besteht aus zwei entgegengesetzt geladenen Punktladungen (+Q, -Q) im Abstand d mit

$$Q_{\text{ges}} = +Q - Q = 0.$$



$$|\vec{r} - \vec{r}_i| = \sqrt{\left(z \pm \frac{d}{2}\right)^2 + R^2}$$

Lösung für
Dipol

$$\Phi(R, \varphi, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(z + \frac{d}{2}\right)^2 + R^2}} \right)$$

zylindersymmetrisch

$$\neq f(\varphi)$$

el. Dipol aus großer Entfernung gesehen

$$\frac{1}{\sqrt{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + R^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(z^2 - z \cdot d + \frac{d^2}{4}\right) + R^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2 - z \cdot d}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{zd}{r^2}}}$$

$\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2} + \dots \right)$	Nebenrechnung
---	---------------

$$\frac{1}{\sqrt{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + R^2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{z \cdot d}{2r^2} \right)$$
$$\frac{1}{\sqrt{\left(z + \frac{d}{2}\right)^2 + R^2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{z \cdot d}{2r^2} \right)$$

Übergang auf Kugelkoordinaten $\Phi(r, \vartheta, \varphi)$.

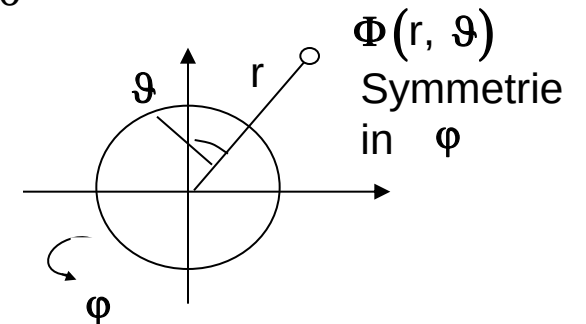
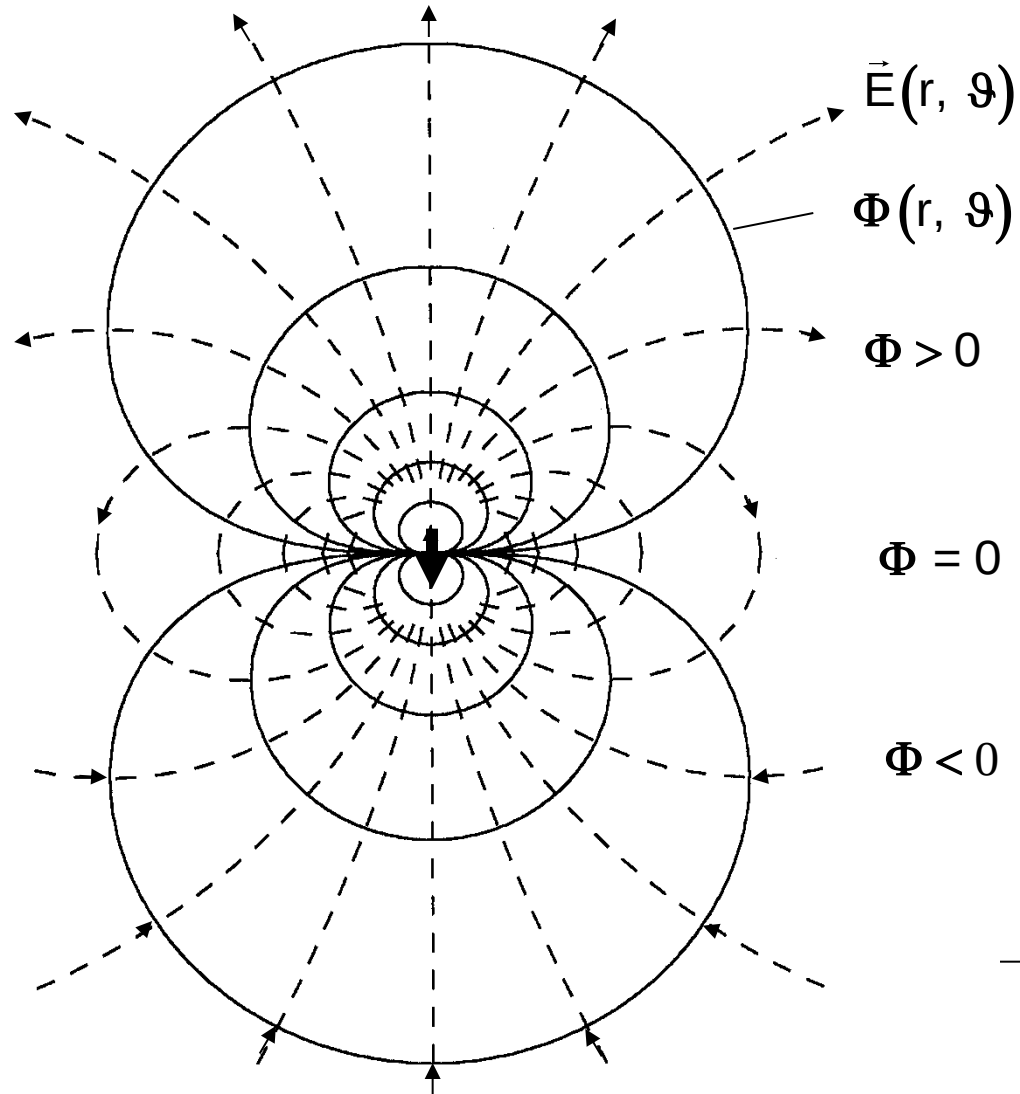
$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \left(1 + \frac{z \cdot d}{2r^2} - 1 + \frac{z \cdot d}{2r^2} \right) = \frac{Q \cdot z \cdot d}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 \cdot r^3}$$

Wegen Symmetrie
um φ gilt $\Phi(r, \vartheta)$

mit $z = r \cdot \cos \vartheta$ folgt:

$$\rightarrow \boxed{\Phi(r, \vartheta) = \frac{Q \cdot d \cdot \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E} \sim 1/r^3 \\ \Phi \sim 1/r^2 \end{array} \right\} \text{für } \vartheta = 0$$



$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{Q d}{4 \pi \epsilon_r \epsilon_0} \frac{\cos \vartheta}{r^2}$$

Kugelkoordinaten

$$\vec{E} = - \text{grad } \Phi$$

$$= - \vec{e}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} - \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$$

$$= - \vec{e}_r \left[\frac{Q d}{4 \pi \epsilon_r \epsilon_0} \cos \vartheta \left(- \frac{2}{r^3} \right) \right]$$

$$- \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \left[\frac{Q d}{4 \pi \epsilon_r \epsilon_0} \frac{1}{r^2} (-\sin \vartheta) \right]$$

$$- \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{Q d}{4 \pi \epsilon_r \epsilon_0} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\cos \vartheta}{r} \right) \right]$$

$$\rightarrow \vec{E}(r, \vartheta) = \frac{Q d}{4 \pi \epsilon_r \epsilon_0} 2 \frac{\cos \vartheta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{Q d}{4 \pi \epsilon_r \epsilon_0} \frac{\sin \vartheta}{r^3} \vec{e}_\vartheta + 0 \cdot \vec{e}_\varphi$$

3.4.4 Coulomb - Integral

$$\Phi_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

eine Punktladung Q_i
an Stelle $\vec{r}_i$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

Gesamtwirkung aller N
Punktladungen Q_i

Übergang auf Kontinuum: viele Punktladungen fein verteilt

→ Ladung ΔQ_i im kleinen Volumenelement Δv_i an Stelle $\vec{r}_i$

$$\Delta Q_i = \rho(\vec{r}_i)\Delta v_i$$

$$\rightarrow \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{\rho(\vec{r}_i)\Delta v_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

$$\rightarrow \boxed{\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \int_{\text{vol}} \frac{\rho(\vec{r}')d v'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

Coulomb - Integral

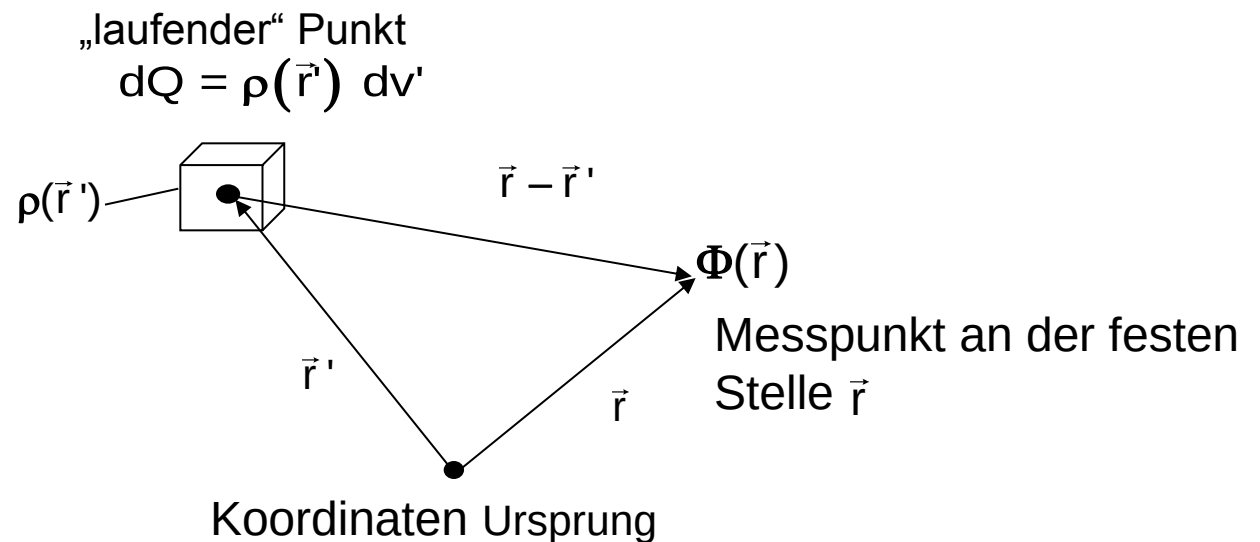
$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv'$$

Methode zur Berechnung
von Φ bei gegebener
Raumladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$

Coulomb - Integral

Summation über
alle $\rho(\vec{r}') dv'$

→ Integration
über den
gesamten
Raum mit laufender
Koordinate $\vec{r}'$



$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad \text{und} \quad \vec{E}(\vec{r}) = - \text{grad}_{(\vec{r})} \Phi(\vec{r}) \longleftarrow \begin{array}{l} \text{numerische Differentiation} \\ \text{schwierig} \end{array}$$

Abhilfe: direkte analytische Differentiation

$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) &= - \text{grad}_{(\vec{r})} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right] \\ &= - \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \left[\text{grad}_{(\vec{r})} \left(\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] dv' \\ &= - \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \left[\left(\text{grad}_{(\vec{r})} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \rho(\vec{r}') + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cancel{\text{grad}_{(\vec{r})} (\rho(\vec{r}'))} \right] dv' \\ &= - \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \left[- \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}') \right] dv' \end{aligned}$$

unabhängige Variablen $\vec{r}$ und $\vec{r}'$
 $\rightarrow$ Vertauschung der Operationen
auf $\vec{r}$ und $\vec{r}'$ erlaubt

Nebenrechnung

$$\text{grad } \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = ?$$

$$\vec{r}-\vec{r}' = (x-x') \vec{e}_x + (y-y') \vec{e}_y + (z-z') \vec{e}_z$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

$$= \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{\cdot}} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{\cdot}}$$

$$= \vec{e}_x \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}^3} 2(x-x') + \vec{e}_y \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{\cdot}^3} 2(y-y') + \vec{e}_z \dots$$

$$= -\vec{e}_x \frac{(x-x')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}^3} - \vec{e}_y \frac{(y-y')}{\sqrt{\cdot}^3} - \vec{e}_z \frac{(z-z')}{\sqrt{\cdot}^3}$$

$$= -\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

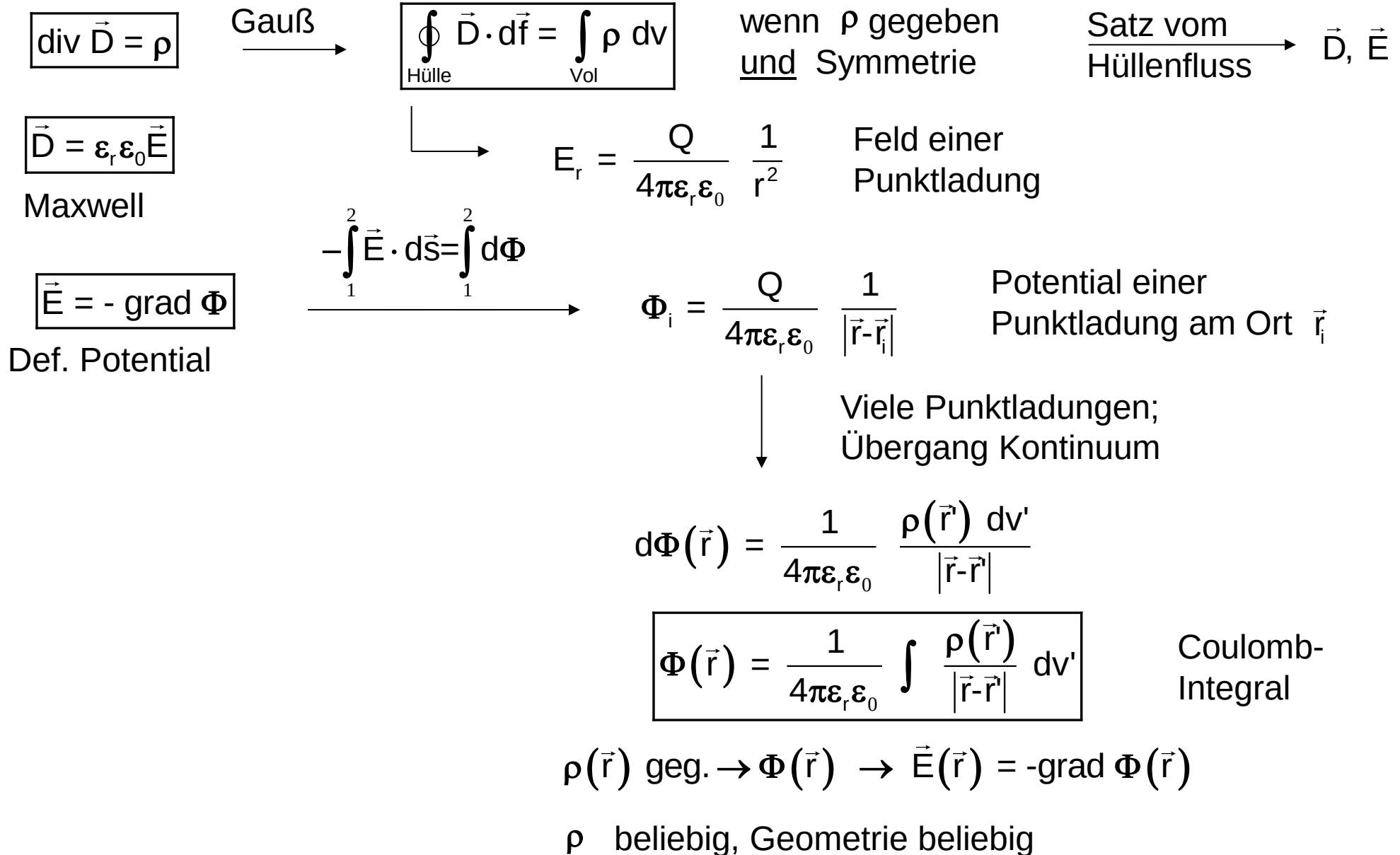
q.e.d.

$$\rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{E}(x,y,z) = & \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\rho(x',y',z') (x - x') dx' dy' dz'}{\left((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right)^{3/2}} \vec{e}_x \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\rho(x',y',z') (y - y') dx' dy' dz'}{\left((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right)^{3/2}} \vec{e}_y \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\rho(x',y',z') (z - z') dx' dy' dz'}{\left((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right)^{3/2}} \vec{e}_z \end{aligned}$$

Keine numerische Differentiation mehr nötig.
Numerische Integration ist problemlos

Zusammenfassung



3.5 Elektrische Feldenergie

3.5.1 Energiedichte

Das elektrische Feld im Raum trägt an seinem jeweiligen Ort eine gespeicherte Energiedichte, welche proportional zum Quadrat der Feldstärke ist.

$$\begin{aligned} w_e &= \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \\ W_e &= \int_V w_e \, dv \end{aligned}$$

Energiedichte des elektrischen Feldes

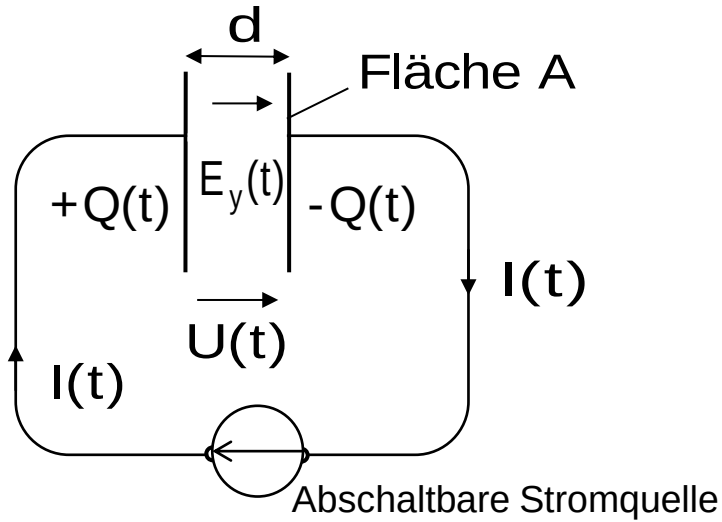
gesamte elektrische Feldenergie im Volumen V

$$\text{Einheit } (w_e) = \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{As}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Joule}}{\text{m}^3}$$

wenn $\vec{D} = \epsilon_e \epsilon_0 \vec{E}$ gilt, dann folgt:

$$w_e = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{2} E^2$$

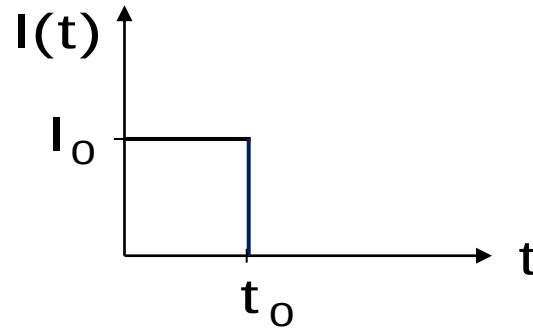
Veranschaulichung der Energiedichte des elektrischen Feldes



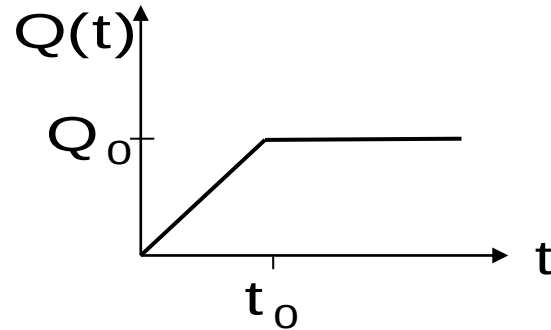
Kondensator ohne Dielektrikum
wird allmählich aufgeladen:

$$E_y(t) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q(t)}{A}$$

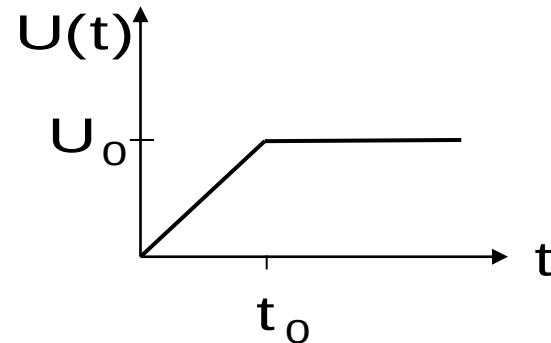
$$\rightarrow U(t) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{A} Q(t)$$



$$I(t) = \begin{cases} I_0 & 0 < t < t_0 \\ 0 & t \geq t_0 \end{cases}$$



$$Q(t) = \begin{cases} I_0 t & 0 < t < t_0 \\ Q_0 = I_0 t_0 & t \geq t_0 \end{cases}$$



$$U(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{A} I_0 t & 0 < t < t_0 \\ \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{A} I_0 t_0 & t \geq t_0 \end{cases}$$

Aufgenommene elektrische Leistung:

$$P(t) = U(t) I(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{A} I_0 t I_0 & 0 < t < t_0 \\ 0 & t \geq t_0 \end{cases}$$

Aufgenommene elektrische Energie nach Aufladung $t \geq t_0$

$$W_{UI} = \int_0^{t_0} P(t) dt = \int_0^{t_0} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{A} I_0^2 t dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{A} I_0^2 t_0^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{A} Q_0^2$$

$$E_{y0} = E_y(t_0) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q_0}{A} \rightarrow Q_0 = \epsilon_0 A E_{y0} \rightarrow \boxed{W_{UI} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{y0}^2 A d}$$

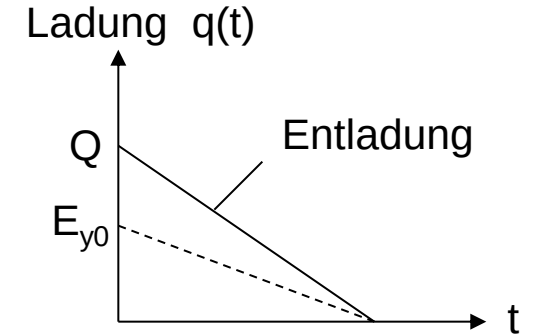
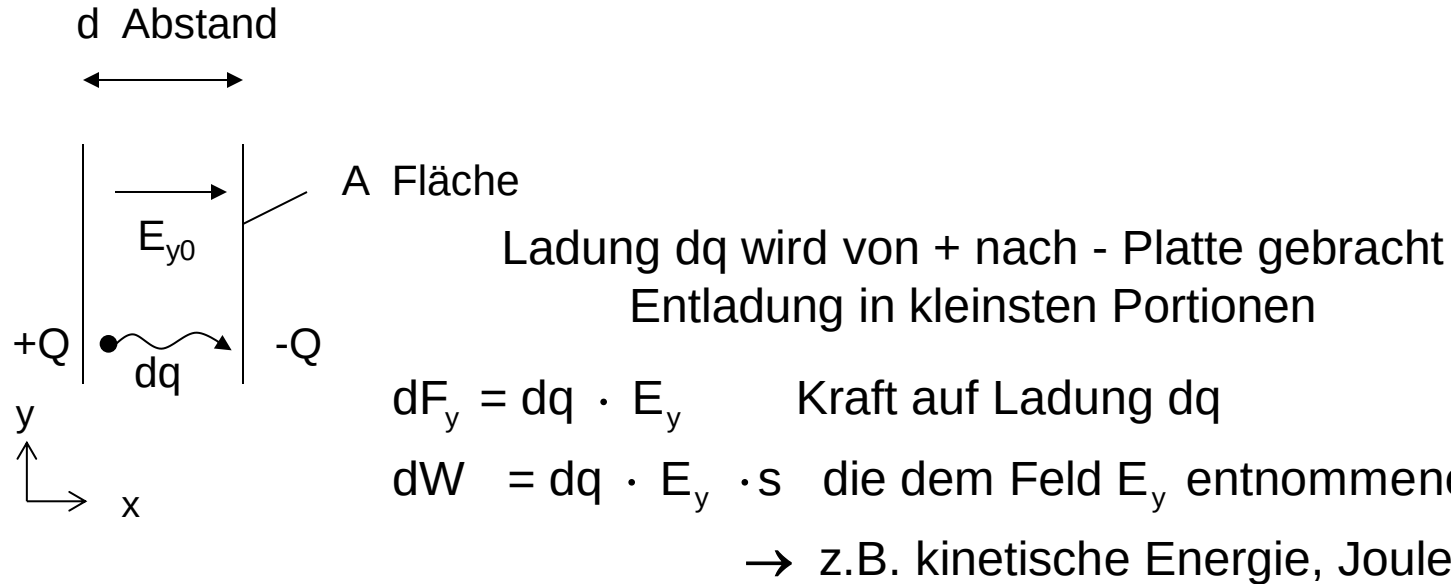
Aufgebaute elektrische Feldenergie nach Aufladung: $W_e = \int w_e dv$

E_y räumlich konstant im Kondensator mit Volumen $A d \rightarrow \boxed{W_e = w_e A d}$

$$\text{Energiesatz: } W_e \stackrel{!}{=} W_{UI} \rightarrow w_e A d \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{y0}^2 A d$$

$$\rightarrow \boxed{w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{y0}^2} \quad \text{elektrische Feldenergiedichte}$$

Allmähliche Selbstentladung des Kondensators



Freigesetzte Energie zur vollständigen Entladung; innen kein Dielektrikum → $\epsilon_r = 1$

$$\begin{aligned}
 W &= \int_0^Q dW = \int_0^Q E_y(q) \cdot s \cdot dq \\
 &= \int_0^Q \frac{q}{\epsilon_0 A} d \cdot dq = \frac{d}{\epsilon_0 A} \frac{1}{2} q^2 \Big|_0^Q \\
 &= \frac{d}{\epsilon_0 A} \frac{1}{2} (\epsilon_0 A E_{y0})^2
 \end{aligned}$$

es war: $D_{y0}(Q) = \sigma = Q/A$

→ $E_{y0}(Q) = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$

→ $E_y(q) = \frac{q}{\epsilon_0 A}$

→ $W = d A \cdot \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{y0}^2 \leftrightarrow w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{y0}^2$

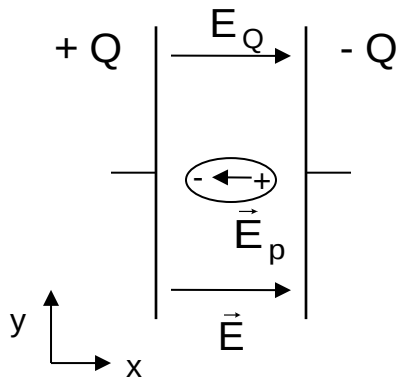
Freigesetzte Energie
= (Feldenergiedichte) · (Volumen)

Einfluss eines Dielektrikums

Die gespeicherte Feldenergiedichte des elektrischen Feldes ist $w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$

Warum ist die gesamte Energiedichte $w_{e \text{ ges}} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_Q E > w_e$?

Antwort: Es besteht ein zusätzlich gespeicherter Energieanteil in den Molekülen hervorgerufen von der elektrostatischen Rückstellkraft der getrennten Ladungen



Kraftgleichgewicht im Molekül: $\vec{F} = q_e \vec{E} = r \vec{s}$

Hier ist r die elektrostatische Rückstell-Konstante proportional zur Auslenkung der Ladungen im Molekül

Auslenkung Elektronen durch $\vec{E}$: $\vec{s} = q_e \vec{E} / r$

Gespeicherte Energie pro Molekül:
$$W_{pm} = \int_0^s \vec{F} \cdot d\vec{s}' = \int_0^s r \vec{s}' \cdot d\vec{s}' = \frac{1}{2} r s^2$$
$$= \frac{1}{2} r (q_e E / r)^2$$

Gespeicherte Energie pro Molekül: $W_{\text{pm}} = \frac{1}{2} \frac{q_e^2}{r} E^2$

Bei N Molekülen pro Volumeneinheit ist die gespeicherte Energiedichte w_p

$$w_p = N \cdot W_{\text{pm}} = N \frac{1}{2} \frac{q_e^2}{r} E^2$$

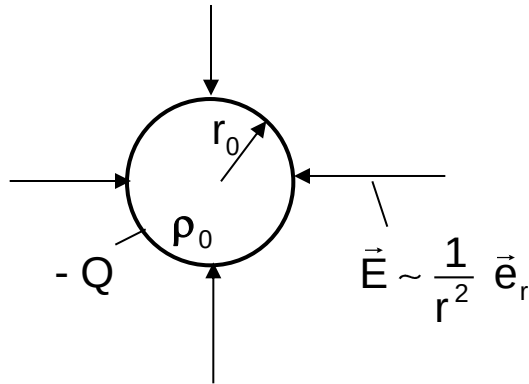
Die gesamte Energiedichte $w_{e \text{ ges}}$ ist die Summe der reinen Feldenergiedichte w_e und der in den Molekülen gespeicherten elektrostatischen Energiedichte w_p

$$w_{e \text{ ges}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{N q_e^2}{r} E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \underbrace{\left(1 + \frac{N q_e^2}{\epsilon_0 r} \right)}_{\epsilon_r} E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2$$

$$\rightarrow \boxed{w_{e \text{ ges}} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}}$$

Hier versteckt sich in $\vec{D}$ bzw. ϵ_r die zusätzlich in den Molekülen gespeicherte Energie der elektrostatischen Rückstellkraft

3.5.2 Feldenergie einer geladenen Kugel



Gesamtfeldenergie
 = Feldenergie innen $(r \leq r_0)$
 + Feldenergie außen $(r > r_0)$

$$W_e = \int_{r \leq r_0} w_{ei} dv + \int_{r > r_0} w_{ea} dv$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{f} = \int \rho_0 dv$$

Maxwell

$$\rightarrow D_r \cdot 4\pi r^2 = \rho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = Q \frac{r^3}{r_0^3} \quad \text{mit} \quad \rho_0 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}$$

$$\rightarrow \text{innen} \quad E_{ri} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{r}{r_0^3}$$

$$\rightarrow \text{außen} \quad E_{ra} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2}$$

Berechnung der Feldenergie im Inneren

$$W_{ei} = \int_{r \leq r_0} w_{ei} dv = \int_{r \leq r_0} \frac{1}{2} \epsilon E_{ri}^2 dv$$

$$E_{ri} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{r}{r_0^3}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow W_{ei} &= \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} \epsilon \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon)^2} \frac{r^2}{r_0^6} r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr \\ &= \frac{1}{2} \epsilon \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon)^2} 2 \cdot 2\pi \int_0^{r_0} \frac{r^4}{r_0^6} dr \end{aligned}$$

$$W_{ei} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{5} \frac{r^5}{r_0^6} \bigg|_0^{r_0} \rightarrow \boxed{W_{ei} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{5} \frac{1}{r_0}}$$

Berechnung der Feldenergie im Äußeren

$$W_{\text{ea}} = \int_{r>r_0} \frac{1}{2} \epsilon E_{\text{ra}}^2 dv$$

$$E_{\text{ra}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2}$$

$$\rightarrow W_{\text{ea}} = \int_{r_0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \epsilon \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon)^2} \frac{1}{r^4} r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon)^2} 2 \cdot 2\pi \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon} \left(-\frac{1}{r} \right)_{r_0}^{\infty} \rightarrow \boxed{W_{\text{ea}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r_0}}$$

$$\boxed{W_{\text{ges}} = W_{\text{ei}} + W_{\text{ea}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r_0} \left(\frac{1}{5} + 1 \right)}$$

unabhängig Vorzeichen Q
proportional $\frac{1}{r_0}$

es war:

Relativitätstheorie:

$$W_{\text{eges}} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r_0}$$

$$W_{\text{eges}} = m_{\text{el}} c^2$$

$$\rightarrow m_{\text{el}} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r_0} \frac{1}{c^2}$$

Massenbeitrag des elektrischen Feldes

Überlegung:

- Elektron hat Masse $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- welchem Radius r_0 entspricht diese Masse?

$$r_0 = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{m_e c^2}$$

$$q_e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$$

$$\epsilon = 8.8 \cdot 10^{-12} \text{ A} \cdot \text{s}/(\text{V} \cdot \text{m})$$

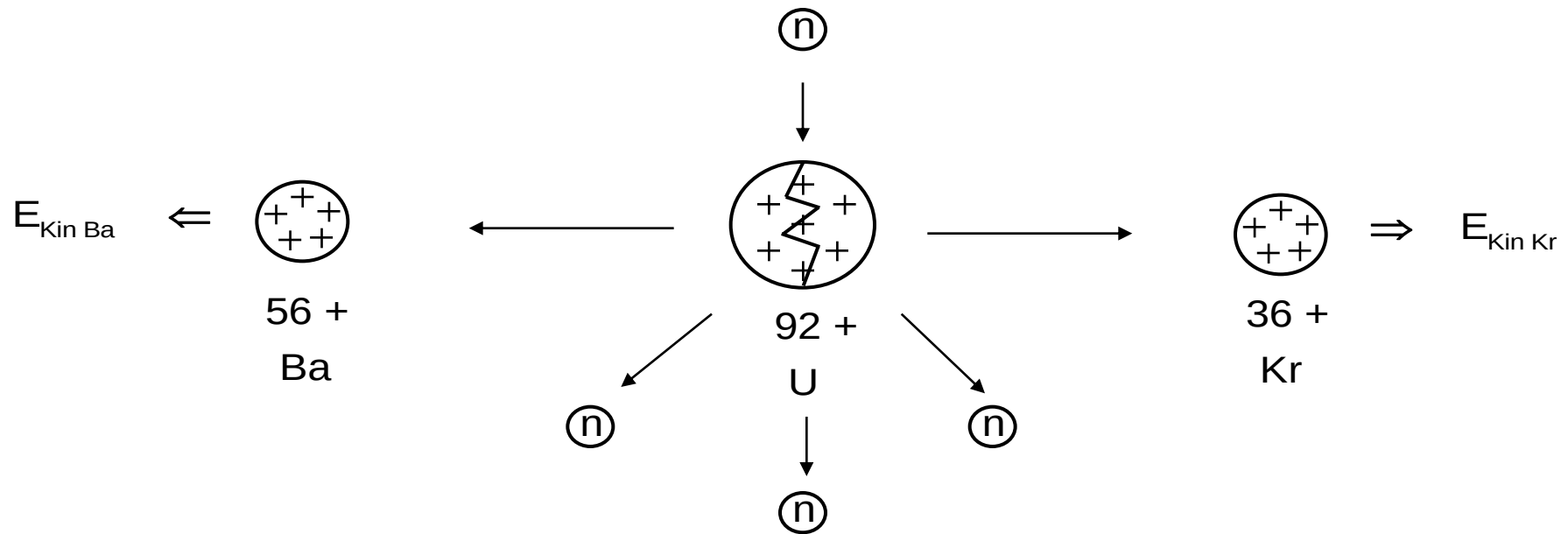
$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$\rightarrow r_0 = 1.7 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

WIDERSPRUCH ZU
STREU-EXPERIMENTEN

Hier versagt die klassische Physik

Beispiel Uranspaltung



freigesetzte Energie:

$$1 \text{ kg} \rightarrow E_{\text{Kin}} = 25 \cdot 10^6 \text{ kWh}$$

20000 t TNT

$$1 \text{ Atomkern} \rightarrow E_{\text{Kin}} = 3.2 \cdot 10^{-11} \text{ Joule}$$

$$W_e = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r_0}$$

$$\left. \begin{array}{ll} Q_U = 92 q_e & r_U \approx 10^{-14} \text{ m} \\ Q_{Ba} = 56 q_e & r_{Ba} \approx 0.85 \cdot 10^{-14} \text{ m} \\ Q_{Kr} = 36 q_e & r_{Kr} \approx 0.73 \cdot 10^{-14} \text{ m} \end{array} \right\} \approx r_U$$

$$W_{eU} = W_{eBa} + W_{eKr} + E_{Kin}$$

$$\rightarrow E_{Kin} = \frac{3}{5} \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r_U} (92^2 - 56^2 - 36^2)$$

$$\rightarrow E_{Kin} \approx 5.6 \cdot 10^{-11} \text{ Joule 'Maxwell'}$$

$$E_{Kin \text{ exp}} = 3.2 \cdot 10^{-11} \text{ Joule "Experiment"}$$

Elektrisches Feld im Urankern ist
wesentliche Quelle für 'Kernenergie'

3.5.3 Feldenergie von Anordnungen metallischer geladener Leiter

$$W_e = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} \, dv$$

$$= -\frac{1}{2} \int \text{grad } \Phi \cdot \vec{D} \, dv$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \int \text{div}(\Phi \vec{D}) \, dv - \int \Phi \text{div } \vec{D} \, dv \right\} \quad \left(\text{div}(\Phi \vec{D}) = \Phi \text{div } \vec{D} + \vec{D} \cdot \text{grad } \Phi \right) \text{Mathe}$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \oint_F \Phi \vec{D} \cdot d\vec{f} - \int \Phi \rho \, dv \right\} \quad \left(\text{div } \vec{D} = \rho \right) \text{Maxwell}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int \Phi \rho \, dv$$

Feldenergie im gesamten Raum,
dargestellt durch Potential und Raumladungsdichte

Integral über Raum nur dort nötig, wo Raumladung vorhanden

es war:

$$W_e = \frac{1}{2} \int \Phi \cdot \rho \, dv$$

Feldenergie im gesamten Raum
berechnet überall dort, wo $\rho \neq 0$

Spezialfall metallische Leiter

→ $\rho_{\text{innen}} = 0$, aber Flächenladungsdichte auf Metall-Oberfläche

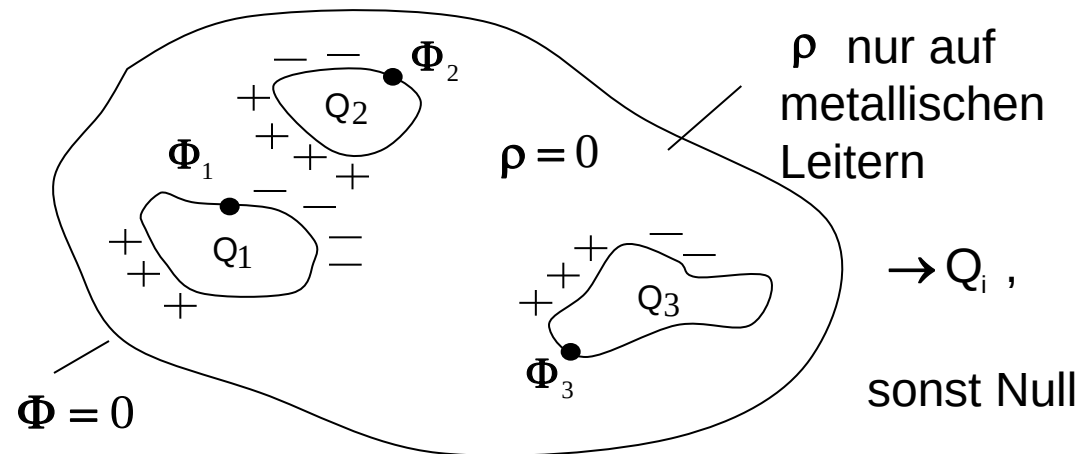
→ $\Phi = \text{const.}$ auf Metall-Oberfläche

bei N Leitern gilt: da $\rho = 0$ außerhalb der Leiter, Integration nur in Leitern

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^N \int \Phi_k \cdot \rho_k \, dv \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^N \Phi_k \cdot \int \rho_k \, dv \end{aligned}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^N \Phi_k \cdot Q_k$$

Leiter

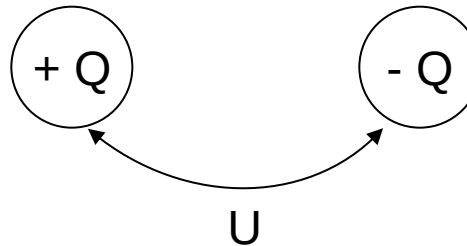


3.6 Kapazität C

In der Elektrodynamik gibt es zwei Beziehungen von Größen, die durch die gleiche Proportionalitätskonstante C verbunden sind.

- Die Ladung Q mit der Potentialdifferenz bzw. der Spannung U
- Die elektrische Feldenergie mit der Potentialdifferenz bzw. der Spannung U

$$\boxed{Q = C \cdot U}$$
$$\updownarrow$$
$$\boxed{W_e = \frac{1}{2} C \cdot U^2}$$

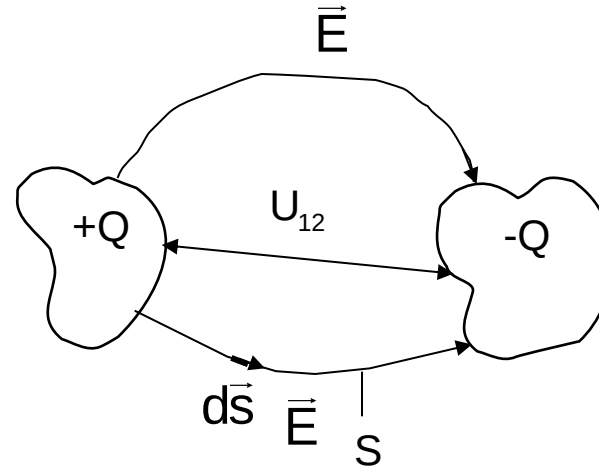


zwei mit $+Q$, $-Q$ geladene
metallische Leiter

Die gemeinsame Proportionalitätskonstante C heißt Kapazität

Definition der Kapazität C:

$$C = \left| \frac{Q}{U} \right| = \left| \frac{\oint_H \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{f}}{\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s}} \right|$$

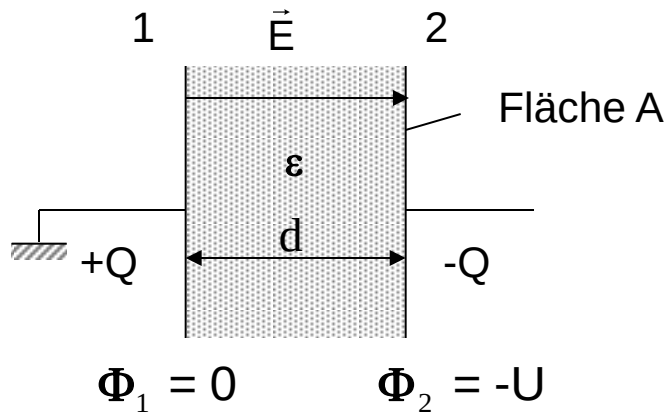


Kapazität nur Funktion der Geometrie
unabhängig von $\vec{E}$

Berechnung von C

- suche $\vec{E}$ als Funktion von Q
- berechne $\Phi_2 - \Phi_1 = U_{12}$ aus E als Funktion von Q
- dividiere Q durch U_{12}
- Voraussetzung: gleich starke entgegengesetzte Ladungen: $+Q -Q = 0$

3.6.1 Kapazität eines Plattenkondensators



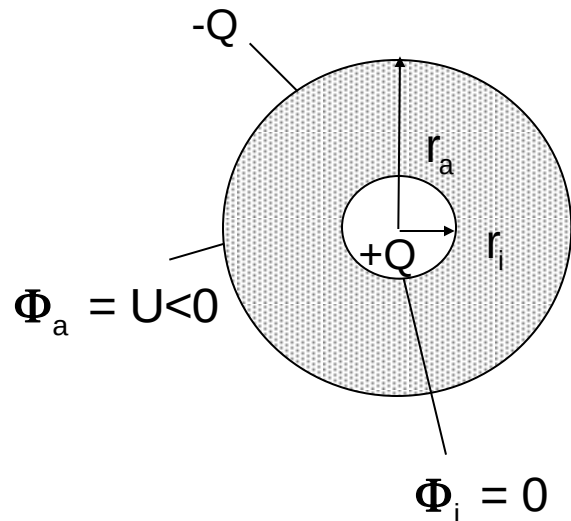
$$\Phi_2 - \Phi_1 = - \int_1^2 \vec{E} \, d\vec{s} = - E \cdot d$$

$$\sigma = \frac{Q}{A} = D = \epsilon \cdot E$$

$$E = \frac{Q}{\epsilon \cdot A} \rightarrow U = \frac{-Q}{\epsilon \cdot A} \cdot d$$

$$C = \left| \frac{Q}{U} \right| \rightarrow \boxed{C = \frac{\epsilon \cdot A}{d}}$$

3.6.2 Kapazität eines Kugelkondensators

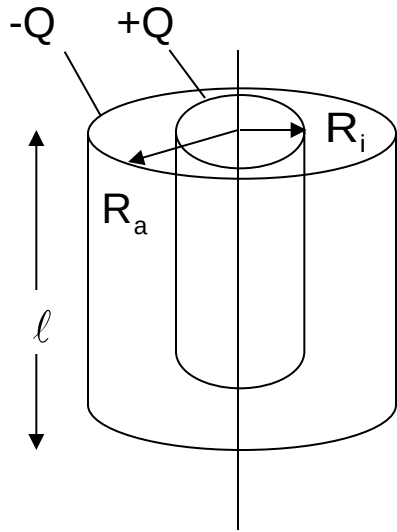


$$\Phi_a - \Phi_i = - \int_{r_i}^{r_a} \vec{E} \, d\vec{s} = - \int_{r_i}^{r_a} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \, dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r^2} \, dr$$

$$U = - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(-\frac{1}{r} \right)_{r_i}^{r_a} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right)$$

$$\boxed{C = \frac{4\pi\epsilon}{\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right)}}$$

3.6.3. Kapazität eines Zylinderkondensators



$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad \int \text{div } \vec{D} \, dv = \int \rho \, dv \rightarrow \int \vec{D} \, d\vec{f} = Q$$

Symmetrie: $\vec{D} = D_R \vec{e}_R$

Zylinder: $d\vec{f} = dz \, R \, d\phi \, \vec{e}_R$

$$D_R \cdot \ell \cdot 2\pi \cdot R = Q \quad \text{für } \ell \gg R_a$$

$$\epsilon \cdot E_R \cdot \ell \cdot 2\pi \cdot R = Q$$

$$E_R = \frac{Q}{2\pi\epsilon\ell} \cdot \frac{1}{R}$$

$$\Phi_a - \Phi_i = - \int_{R_i}^{R_a} \vec{E} \, d\vec{s} = - \frac{Q}{2\pi\epsilon\ell} \cdot \ln R \Big|_{R_i}^{R_a}$$

$$\Delta\Phi = - \frac{Q}{2\pi\epsilon\ell} \cdot \ln \left(\frac{R_a}{R_i} \right)$$

$$C = \left| \frac{Q}{U} \right|$$

$$C = \frac{2\pi \cdot \epsilon \cdot \ell}{\ln \left(\frac{R_a}{R_i} \right)}$$

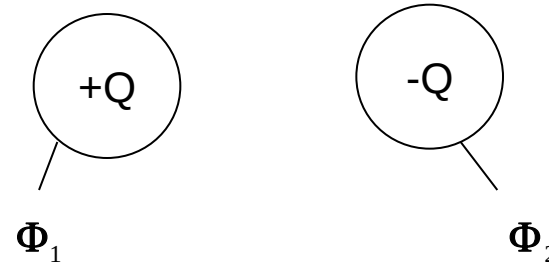
Kapazität des
Zylinderkondensators

$$\frac{C}{\ell} = \frac{2\pi \cdot \epsilon}{\ln \left(\frac{R_a}{R_i} \right)}$$

Kapazität pro Länge
des Koaxialleiters

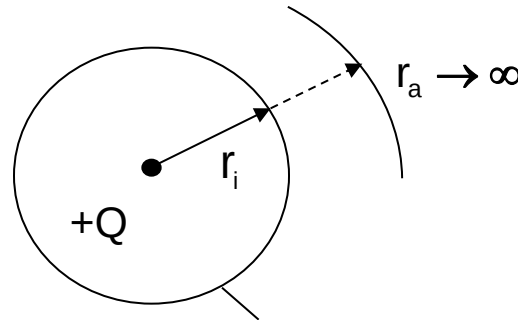
3.6.4. Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter

Bisher zwei Leiter



$$\begin{aligned} Q &= C \cdot U \\ &= C \cdot (\Phi_2 - \Phi_1) \end{aligned}$$

Jetzt ein Leiter



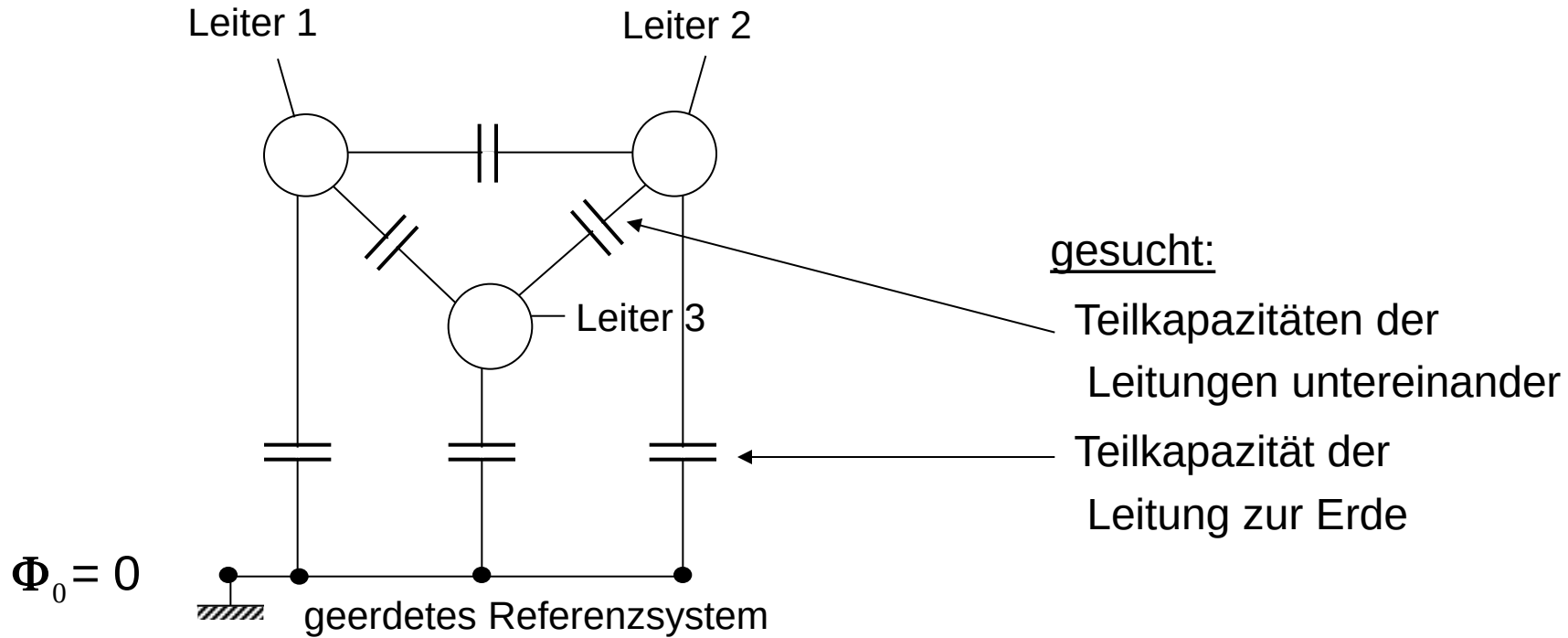
Potential an Kugeloberfläche $\Phi(r_i)$:

$$\Phi(r_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r_i}$$

$$Q = C \cdot \Phi(r_i) \rightarrow C = \frac{Q}{\Phi(r_i)} = 4\pi\epsilon r_i$$

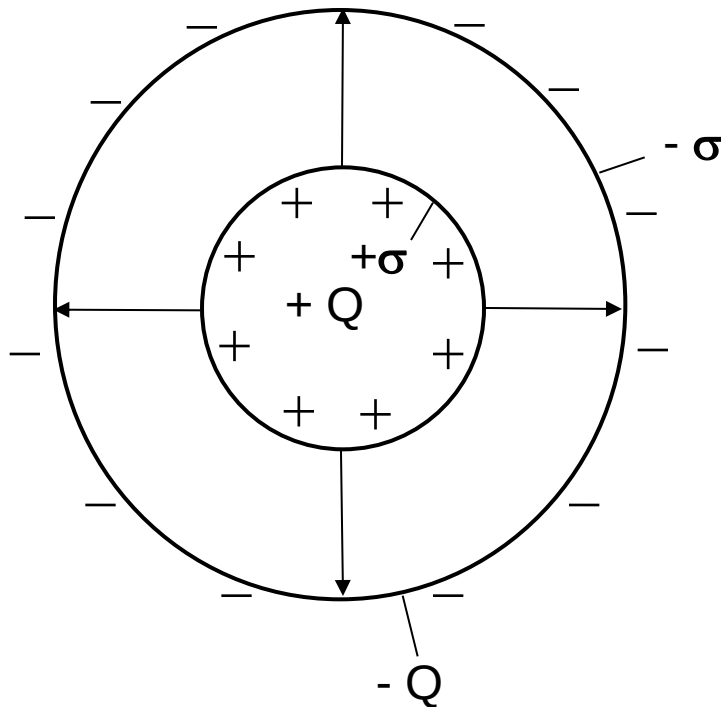
Kapazität C ist die Proportionalitätskonstante für Zusammenhang zwischen Ladung und Potential

Kapazität dreier Leiter (z.B. Hochspannungsleitungen)



Symmetrische Ladungsverteilung

z.B. Platten-, Koax.-, Kugel - Kondensatoren



Ladungen gleichmäßig auf Oberfläche verteilt

$$\sigma = \text{const.}$$

Symmetrische Anordnung

→ Satz vom Hüllenfluss nutzbar

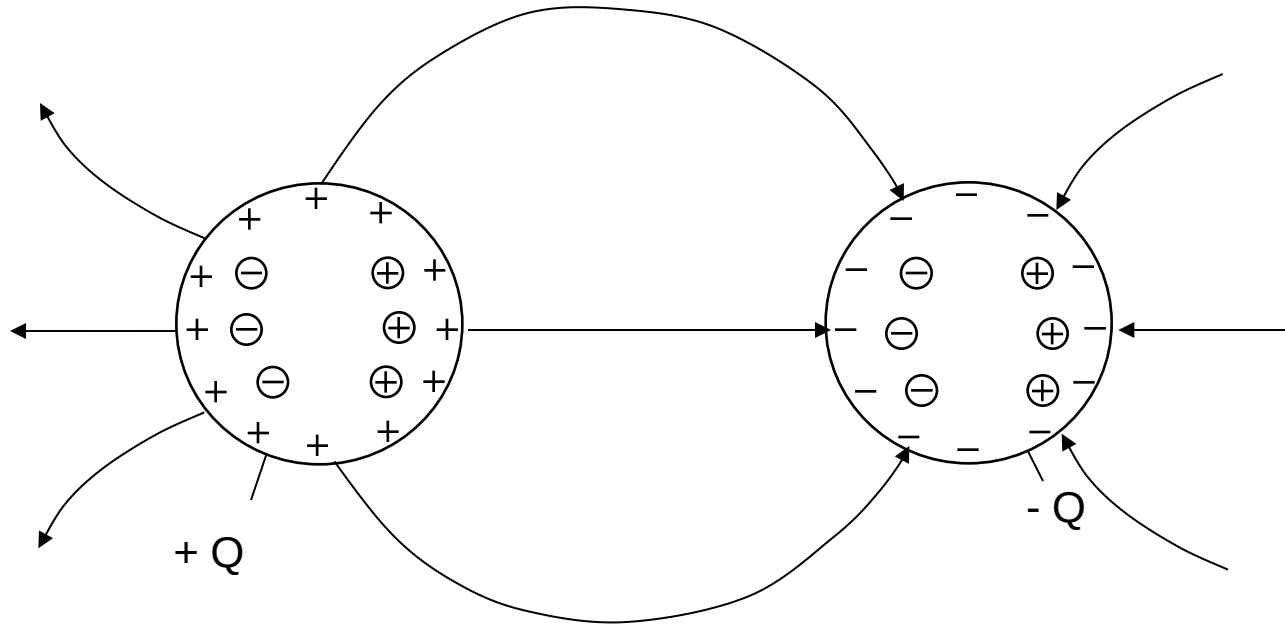
$$\oint \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{f} = Q$$

↳ Berechnung von $\vec{E} = \vec{E}(Q)$

$$\rightarrow \Phi_2 - \Phi_1 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\rightarrow C = \left| \frac{Q}{\Phi_2 - \Phi_1} \right|$$

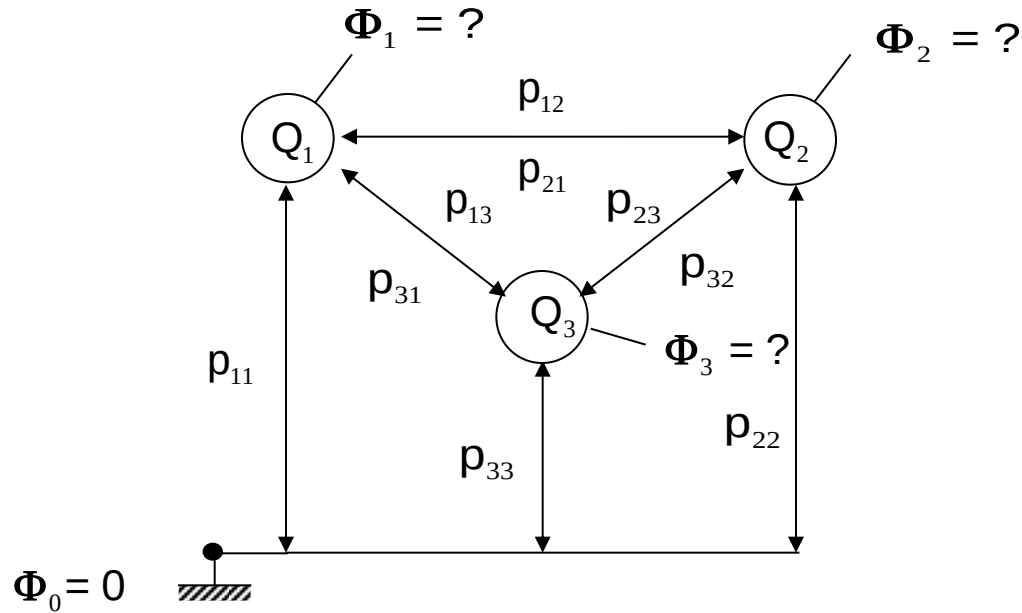
Unsymmetrische Ladungsverteilung durch Influenzladungen



Aufgabe: Berechnung von Φ aus gegebenem Q

- $\sigma = ? \neq \text{const.}$ "Influenzladungen" ; KEINE Symmetrie
- Satz vom Hüllenfluss oder Coulomb-Integral NICHT nutzbar
- + Feldlinien senkrecht zur Oberfläche
- + $\Phi = \text{const.}$ auf Metallen (Äquipotential-Flächen)
- Methode Laplace Gl. möglich (siehe Kap. 3.7.1)

Lösung der Aufgabenstellung mittels Potentialkoeffizienten



Fragestellung wie bisher

$Q_i = \text{vorgegeben}$

$\Phi_k = \text{gesucht}$



Lösung mittels
numerischer Methoden
(schwierig)

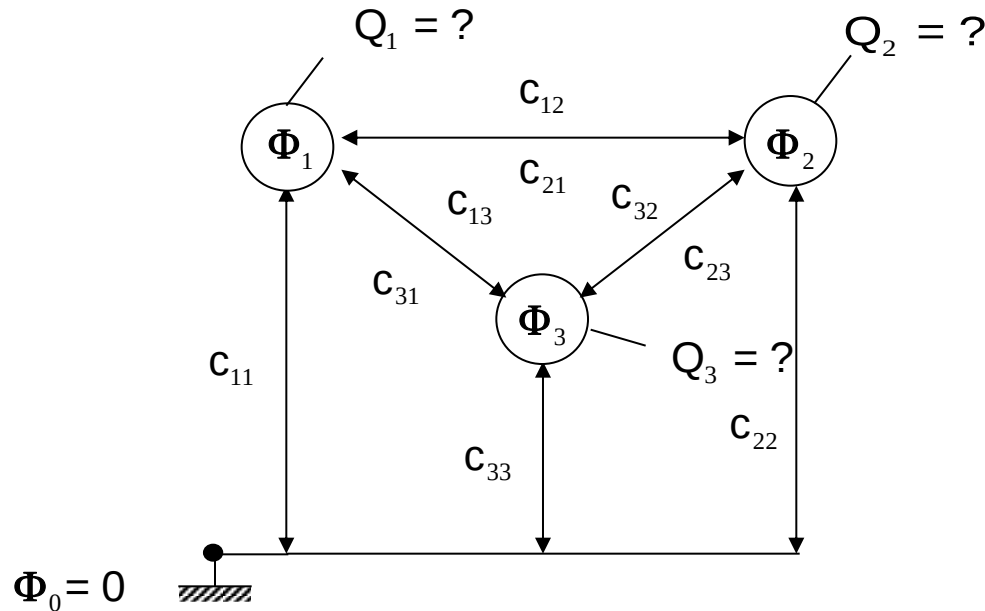
$$\Phi_i = \Phi_i(Q_k)$$

Lösung ist eine lineare Funktion von Q

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^3 p_{ik} Q_k$$

Potentialkoeffizienten p_{ik}

Lösung der Aufgabenstellung mittels Influenz-Koeffizienten



Lösung ist eine lineare Funktion von Φ

$$Q_i = \sum_{k=1}^3 c_{ik} \Phi_k$$

c_{ik} = Influenzkoeffizienten;
es sind Kopplungskonstanten,
keine echten Kapazitäten

Frage

Φ_i = vorgegeben

Q_k = gesucht

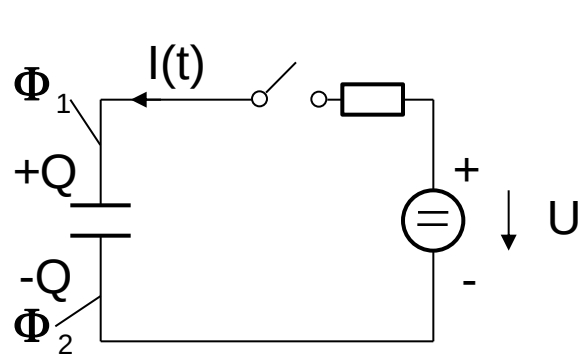


Lösung mittels
numerischer Methoden,
siehe Kapitel 3.7.1.3



$$Q_i = Q_i(\Phi_k)$$

Unterschied von Kapazität des Kondensators und Influenzkoeffizient



$$Q = \int_0^T I(t) dt$$

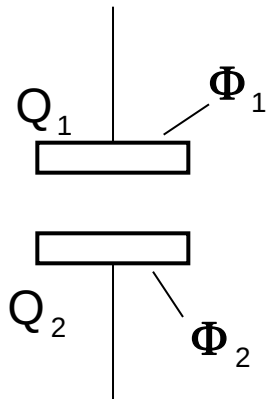
Kondensator, „echte“ Kapazität

$$Q = C \cdot (\Phi_1 - \Phi_2) = C \cdot U$$

↑ C Kapazität

$$Q_1 = -Q_2 = Q$$

„Spezialfall“



$$Q_1 = c_{11}\Phi_1 + c_{12}\Phi_2$$

$$Q_1, Q_2$$

$$Q_2 = c_{21}\Phi_1 + c_{22}\Phi_2$$

beliebig

↑ c_{ik} Influenzkoeffizienten „allgemeiner Fall“

Die Ladungen sind eine lineare Funktion der Potentiale:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1N} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ c_{N1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_N \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{Q_i = \sum_{k=1}^N c_{ik} \cdot \Phi_k}$$

Ladungen Q_i der Leiter i
Potential Φ_k im Leiter k

c_{ik} = Influenzkoeffizienten;
es sind Kopplungskonstanten,
keine echten Kapazitäten

Die Potentiale sind eine lineare Funktion der Ladungen:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{1N} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ p_{N1} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_N \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Phi_i = \sum_{k=1}^N p_{ik} \cdot Q_k}$$

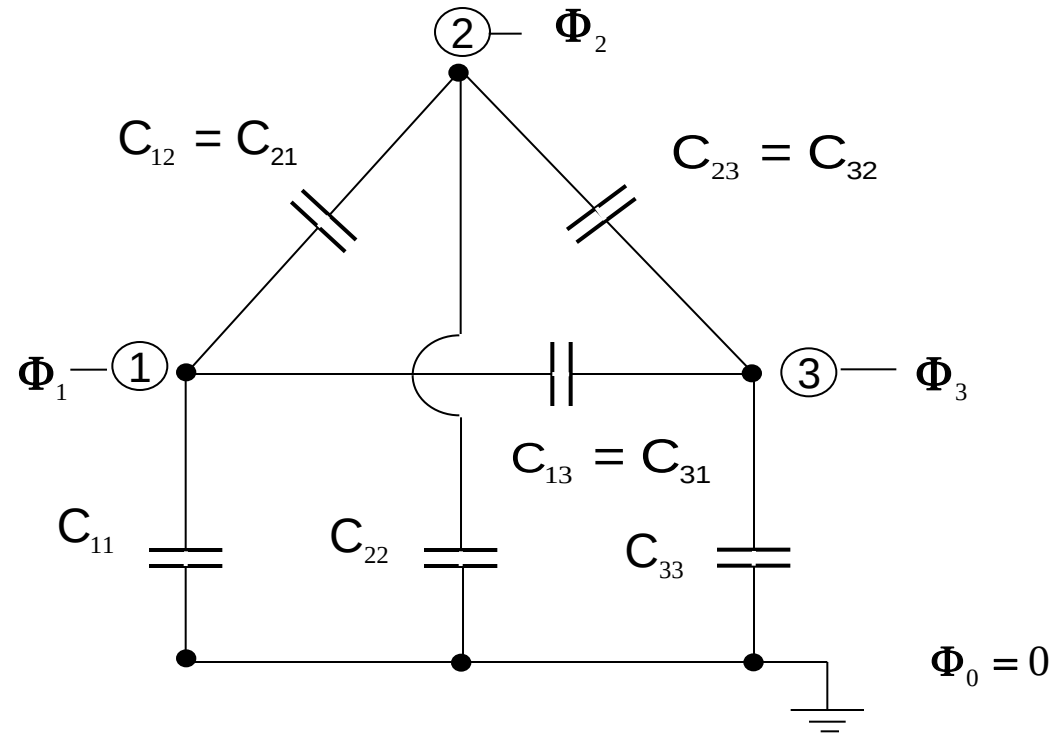
Potential Φ_i im Leiter i
Ladungen Q_k der Leiter k

p_{ik} : Potentialkoeffizienten

$\{p_{ik}\}$ ist die inverse Matrix von $\{c_{ik}\}$

Teilkapazitäten C_{ij}

„echte“ Teilkapazitäten
sind wie beim
gewöhnlichen
Kapazitätsbegriff
die Proportionalitätskonstanten
zwischen
Spannungsdifferenzen
und Ladungen



→ „erwünschte“ Darstellung:

$$Q_1 = C_{11} \Phi_1 + C_{12} (\Phi_1 - \Phi_2) + C_{13} (\Phi_1 - \Phi_3)$$

$$Q_2 = C_{21} (\Phi_2 - \Phi_1) + C_{22} \Phi_2 + C_{23} (\Phi_2 - \Phi_3)$$

$$Q_3 = C_{31} (\Phi_3 - \Phi_1) + C_{32} (\Phi_3 - \Phi_2) + C_{33} \Phi_3$$

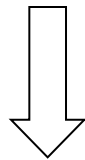
Teilkapazitäten

„erwünschte“ Darstellung
mit Teilkapazitäten C_{ij}

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11} \Phi_1 + C_{12} (\Phi_1 - \Phi_2) + C_{13} (\Phi_1 - \Phi_3) \\ Q_2 &= C_{21} (\Phi_2 - \Phi_1) + C_{22} \Phi_2 + C_{23} (\Phi_2 - \Phi_3) \\ Q_3 &= C_{31} (\Phi_3 - \Phi_1) + C_{32} (\Phi_3 - \Phi_2) + C_{33} \Phi_3 \end{aligned}$$



"große" C_{ij}
 $\triangleq$ Kapazitäten



$$\begin{aligned} Q_1 &= (C_{11} + C_{12} + C_{13}) \Phi_1 - C_{12} \Phi_2 - C_{13} \Phi_3 \\ Q_2 &= (C_{21} + C_{22} + C_{23}) \Phi_2 - C_{21} \Phi_1 - C_{23} \Phi_3 \\ Q_3 &= (C_{31} + C_{32} + C_{33}) \Phi_3 - C_{31} \Phi_1 - C_{32} \Phi_2 \end{aligned}$$

bisherige Darstellung mit
Influenzkoeffizienten $\{c_{ij}\}$

$$\begin{aligned} Q_1 &= c_{11} \Phi_1 + c_{12} \Phi_2 + c_{13} \Phi_3 \\ Q_2 &= c_{21} \Phi_1 + c_{22} \Phi_2 + c_{23} \Phi_3 \\ Q_3 &= c_{31} \Phi_1 + c_{32} \Phi_2 + c_{33} \Phi_3 \end{aligned}$$



alles "kleine" c_{ij}

Influenzkoeffizienten
nicht Kapazitäten

„erwünscht“

$$\begin{aligned} Q_1 &= (C_{11} + C_{12} + C_{13}) \Phi_1 - C_{12} \Phi_2 - C_{13} \Phi_3 \\ Q_2 &= (C_{21} + C_{22} + C_{23}) \Phi_2 - C_{21} \Phi_1 - C_{23} \Phi_3 \\ Q_3 &= (C_{31} + C_{32} + C_{33}) \Phi_3 - C_{31} \Phi_1 - C_{32} \Phi_2 \end{aligned}$$

„bisher“

$$\begin{aligned} Q_1 &= c_{11} \Phi_1 + c_{12} \Phi_2 + c_{13} \Phi_3 \\ Q_2 &= c_{21} \Phi_1 + c_{22} \Phi_2 + c_{23} \Phi_3 \\ Q_3 &= c_{31} \Phi_1 + c_{32} \Phi_2 + c_{33} \Phi_3 \end{aligned}$$

Koeffizienten-Vergleich:

$$\begin{aligned} C_{12} &= -c_{12} \\ C_{13} &= -c_{13} \\ C_{21} &= -c_{21} \\ C_{23} &= -c_{23} \\ C_{31} &= -c_{31} \\ C_{32} &= -c_{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{11} - c_{12} - c_{13} &= c_{11} &\rightarrow C_{11} &= c_{11} + c_{12} + c_{13} \\ -c_{21} + C_{22} - c_{23} &= c_{22} &\rightarrow C_{22} &= c_{22} + c_{21} + c_{23} \\ -c_{31} - c_{32} + C_{33} &= c_{33} &\rightarrow C_{33} &= c_{33} + c_{31} + c_{32} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{C_{ik} = -c_{ik}}$$

und

$$\boxed{C_{ii} = \sum_{k=1}^N c_{ik}}$$

wobei

$$\boxed{c_{ik} = c_{ki}}$$

Zusammenfassung

Bestimmung der Teilkapazitäten C_{ik}

- 1) Bestimmung von Q_i als Funktion von Φ_k mittels numerischer Verfahren

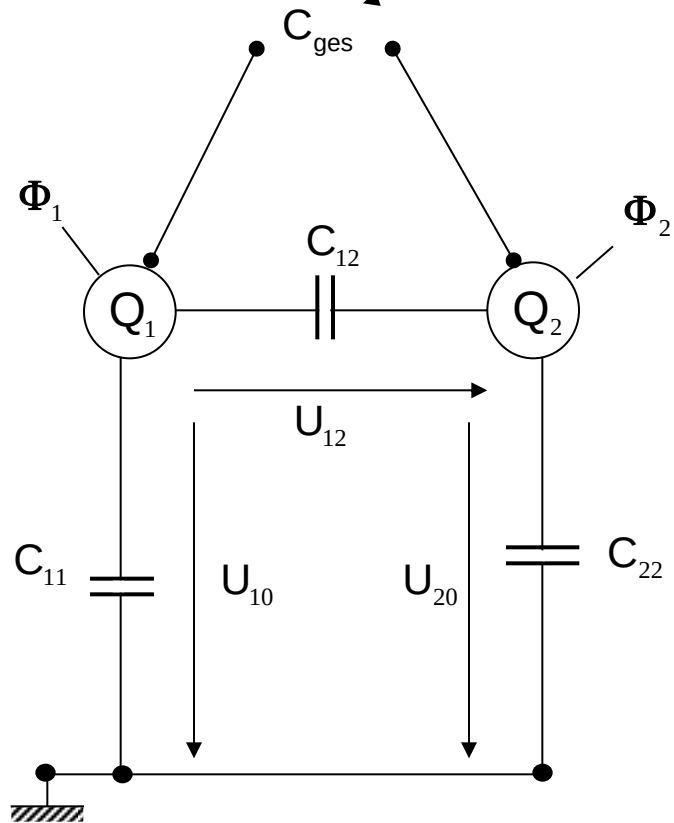
$$Q_i = \{c_{ik}\} \Phi_k \quad \text{Influenzkoeffizienten - Matrix } \{c_{ik}\}$$

- 2) Ermitteln der individuellen Teilkapazitäten C_{ik}

$$C_{ik} = -c_{ik}$$

$$C_{ii} = \sum_{k=1}^N c_{ik}$$

Beispiel: Berechnung der Gesamtkapazität von Doppelleitern



Frage

$\Phi_i = \text{vorgegeben}$

$Q_k = \text{gesucht}$



Lösung mittels
numerischer Methoden,
siehe Kapitel 3.7.1.3



$$Q_i = Q_i(\Phi_k)$$

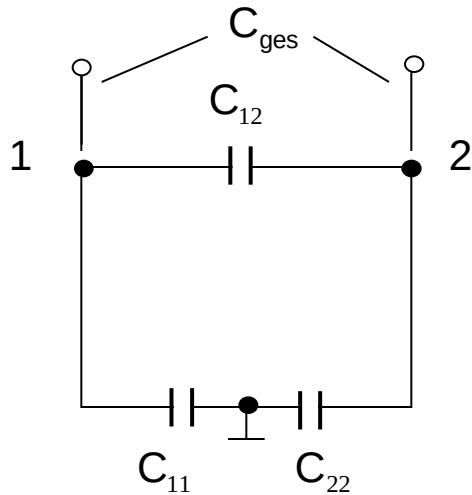
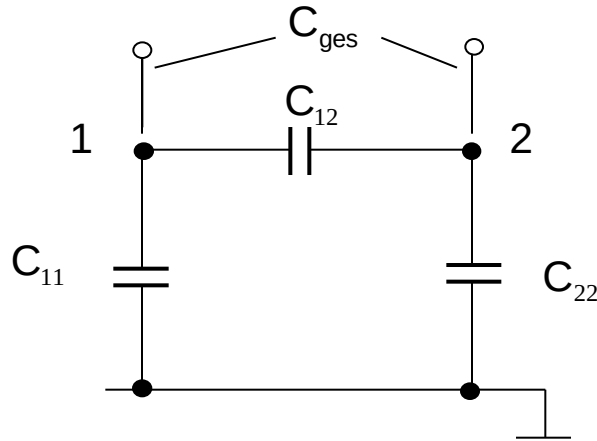
$$Q_i = \sum_{k=1}^2 c_{ik} \Phi_k$$

$c_{ik} = \text{Influenzkoeffizienten}$

Gesamtkapazität - Teilkapazität

Für 2 Elektroden mit $N=2$ gilt:

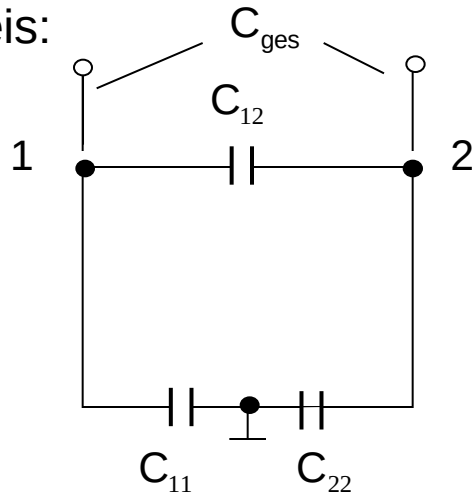
$$\begin{aligned} C_{12} &= -c_{12} \\ C_{11} &= c_{11} + c_{12} \\ C_{22} &= c_{22} + c_{21} \end{aligned}$$



$$C_{\text{ges}} = C_{12} + \frac{1}{\frac{1}{C_{11}} + \frac{1}{C_{22}}} \longrightarrow C_{\text{ges}} = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}{c_{11} + c_{22} + c_{12} + c_{21}}$$

Die effektive Kapazität C_{ges} zwischen zwei Punkten setzt sich aus den Einflüssen aller Teilkapazitäten zusammen.

Beweis:



$$C_{\text{ges}} = C_{21} + \frac{1}{\frac{1}{C_{11}} + \frac{1}{C_{22}}} = C_{21} + \frac{C_{11} C_{22}}{C_{11} + C_{22}} = \frac{C_{11} C_{21} + C_{22} C_{21} + C_{11} C_{22}}{C_{11} + C_{22}}$$

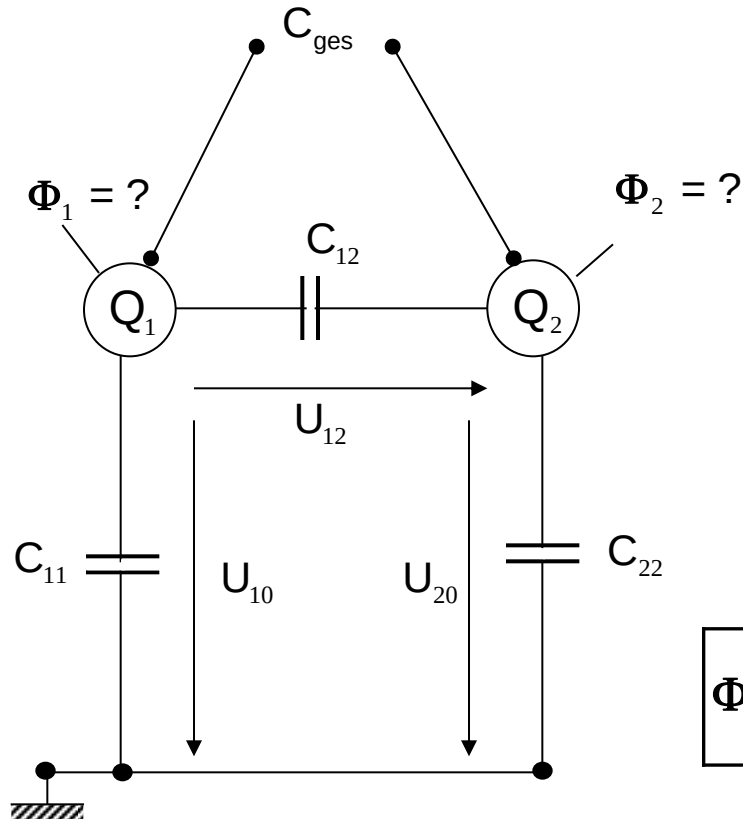
$$= \frac{-(C_{11} + C_{12})C_{21} - (C_{22} + C_{21})C_{21} + (C_{11} + C_{12})(C_{22} + C_{21})}{C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22}}$$

$$= \frac{-C_{11}C_{21} - C_{12}C_{21} - C_{21}C_{22} - C_{21}C_{21} + C_{11}C_{22} + C_{11}C_{21} + C_{12}C_{22} + C_{12}C_{21}}{C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22}}$$

$$= \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}}{C_{11} + C_{22} + C_{12} + C_{21}}$$

q.e.d.

Alternative: Berechnung mittels Potentialkoeffizienten



$$\Phi_i = \sum_{k=1}^2 p_{ik} Q_k$$

$$C_{ij} = ?$$

$$\Phi_1 = f_1(Q_1, Q_2)$$

$$\Phi_2 = f_2(Q_1, Q_2)$$

$$\Phi_1 = p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2$$

$$\Phi_2 = p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2$$

Potentialkoeffizienten p_{ik}

mit $\{p_{ik}\} = \{c_{ik}\}^{-1}$

$$\begin{cases} \Phi_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 \\ \Phi_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 \end{cases}$$

$$Q_1 = -Q_2 \rightarrow \begin{cases} \Phi_1 = (p_{11} - p_{12}) Q_1 \\ \Phi_2 = (p_{21} - p_{22}) Q_1 \end{cases}$$

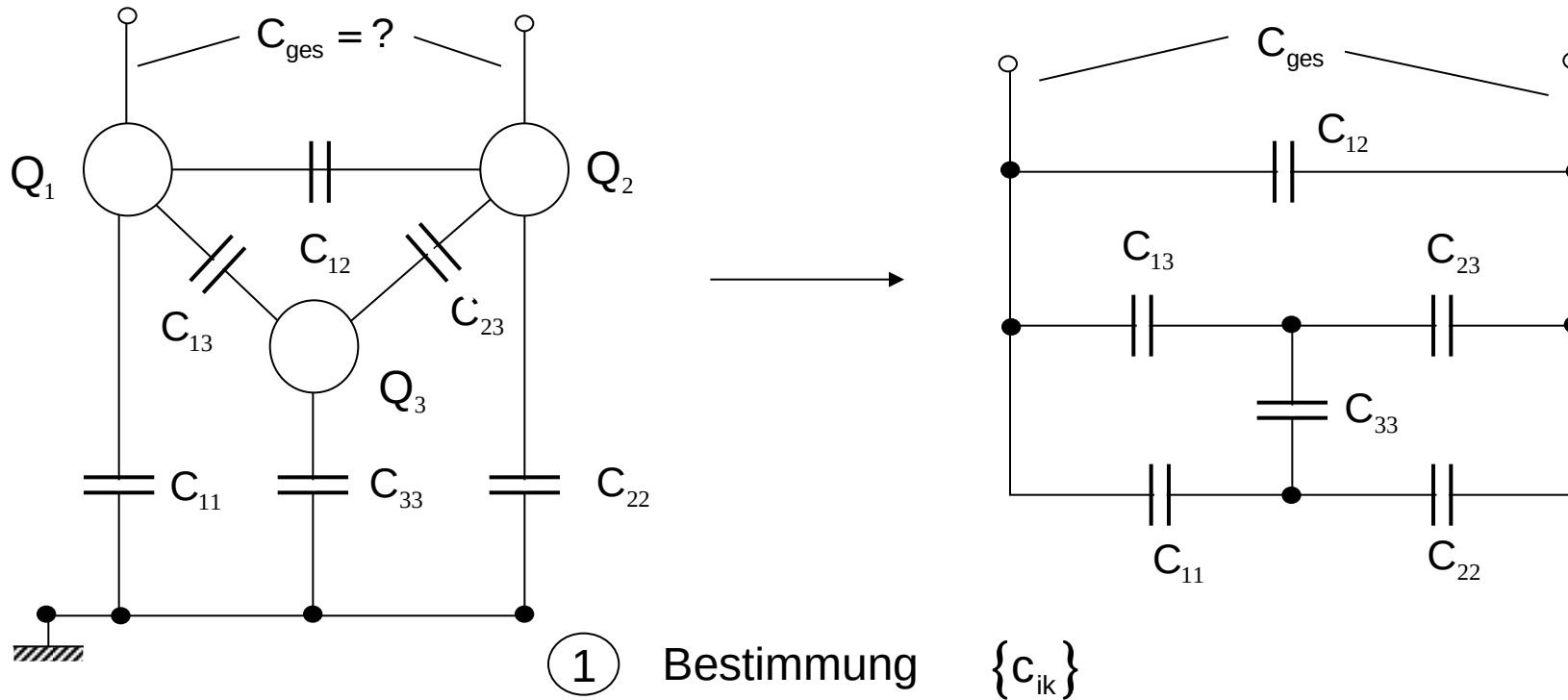
Spannung $U_{12} = \Phi_1 - \Phi_2$ zwischen Leiter 1 und 2

$$\begin{aligned} U_{12} &= (p_{11} - p_{12}) Q_1 - (p_{21} - p_{22}) Q_1 \\ &= (p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}) Q_1 \end{aligned}$$

Matrix – Inversion: $p \rightarrow c$

$$\rightarrow C_{\text{ges}} = \left| \frac{Q_1}{U_{12}} \right| = \left| \frac{1}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}} \right| = \left| \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}{c_{11} + c_{22} + c_{12} + c_{21}} \right|$$

Beispiel: Berechnung der Gesamtkapazität von Dreifachleitern



② Teilkapazitäten

$$C_{ik} = -c_{ik}$$

$$C_{ii} = \sum_{k=1}^N c_{ik}$$

③ Serien/Parallel-Schaltung $\longrightarrow C_{\text{ges}}$

Alternative: Berechnung mittels Potentialkoeffizienten

$$\Phi_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 + p_{13}Q_3$$

$$\Phi_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 + p_{23}Q_3$$

$$\Phi_3 = p_{31}Q_1 + p_{32}Q_2 + p_{33}Q_3$$

$$\Phi_1 = p_{11}Q_1 - p_{12}Q_1 = (p_{11} - p_{12}) Q_1$$

$$Q_2 = -Q_1$$

$$\Phi_2 = p_{21}Q_1 - p_{22}Q_1 = (p_{21} - p_{22}) Q_1$$

$$Q_3 = 0$$

$$\Phi_3 = p_{31}Q_1 - p_{32}Q_1 = (p_{31} - p_{32}) Q_1 \rightarrow \text{Null bei Symmetrie } p_{31} = p_{32}$$

$$U_{12} = \Phi_1 - \Phi_2 = (p_{11} - p_{12} - p_{21} + p_{22}) Q_1$$

$$C = \left| \frac{Q}{U} \right| = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}}$$

3.6.5 Zusammenhang gespeicherter Energie mit der Kapazität

bisher:

gespeicherte Ladung

$$Q = C \cdot U$$

jetzt:

gespeicherte Energie

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2$$

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

⇒ Verallgemeinerung auf viele geladene Leiter

Es war: $W_e = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \Phi_k Q_k \rightarrow \boxed{W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N p_{ik} \cdot Q_i \cdot Q_k}$ mit $\boxed{\Phi_i = \sum_{k=1}^N p_{ik} \cdot Q_k}$

Die Feldenergie ist eine quadratische Funktion der Ladungen.

Oder: $W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \Phi_k Q_k \rightarrow \boxed{W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N c_{ik} \cdot \Phi_i \cdot \Phi_k}$ $\boxed{Q_i = \sum_{k=1}^N c_{ik} \cdot \Phi_k}$

Die Feldenergie ist eine quadratische Funktion der Potentiale.

Vorteil:

Das Feld muss nicht im gesamten Raum bekannt sein;
es genügt, Φ auf den Elektroden zu messen.

Gesamtkapazität für $N = 1$

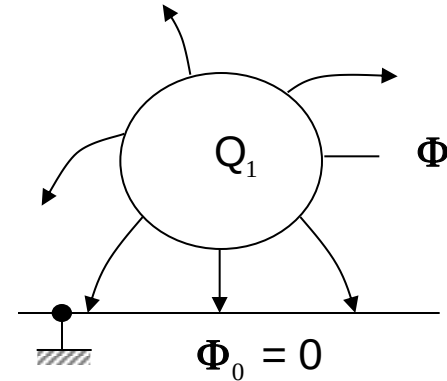
$$\boxed{Q_1 = c_{11} \cdot \Phi_1}$$

entspricht $\rightarrow$

$$\boxed{Q = C \cdot U}$$

es war für Teilkapazitäten

$$\left. \begin{aligned} C_{ik} &= -c_{ik} \\ C_{ii} &= \sum_{k=1}^N c_{ik} \end{aligned} \right\} \rightarrow C_{11} = c_{11}$$



Feldenergie des Kondensators:

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \Phi_1 Q_1 \\ &= \frac{1}{2} \Phi_1 (c_{11} \Phi_1) = \frac{1}{2} (p_{11} Q_1) Q_1 \\ &= \frac{1}{2} c_{11} \Phi_1^2 = \frac{1}{2} c_{11}^{-1} Q_1^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2} C_{11} \Phi_1^2 = \frac{1}{2} Q_1^2 / C_{11}}$$

entspricht $\rightarrow$

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2} Q^2 / C}$$

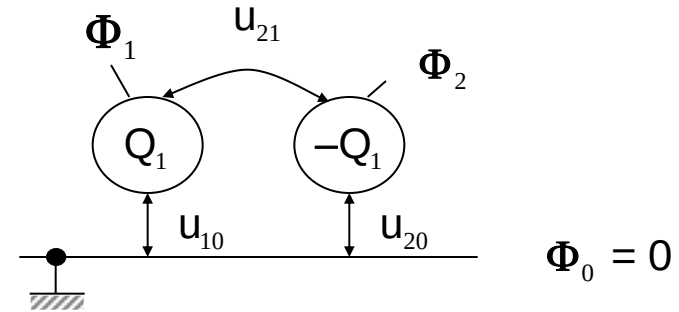
$\updownarrow$

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2} C U^2}$$

Berechnung der Gesamtkapazität **N = 2** mit Hilfe der Gesamtenergie

Weg zur Lösung über $\Phi = f(Q)$

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 \\ \Phi_2 &= p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2\end{aligned}$$



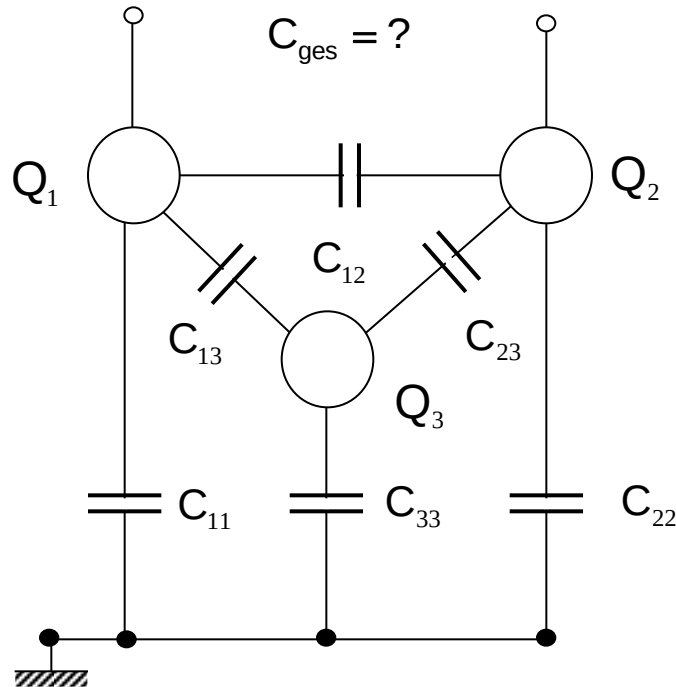
$$W_e = \frac{1}{2}(p_{11}Q_1^2 + p_{12}Q_2Q_1 + p_{21}Q_1Q_2 + p_{22}Q_2^2) \quad \leftarrow \quad W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \Phi_k Q_k = \frac{1}{2}(\Phi_1 Q_1 + \Phi_2 Q_2)$$

für Kondensator gesetzt: $Q_2 = -Q_1$

$$\begin{aligned}\rightarrow W_e &= \frac{1}{2}(p_{11}Q_1^2 + p_{12}(-Q_1)Q_1 + p_{21}Q_1(-Q_1) + p_{22}(-Q_1)(-Q_1)) \\ &= \frac{1}{2}(p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}) Q_1^2 \quad \leftarrow \text{Gesamtenergie}\end{aligned}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C} \rightarrow C_{\text{ges}} = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}} \quad \text{Gesamtkapazität}$$

Berechnung der Gesamtkapazität **$N = 3$** mit Hilfe der Gesamtenergie



Berechnung der Gesamtkapazität zwischen den Elektroden 1 und 2 nun nicht über die Teilkapazitäten sondern über die gespeicherte Energie, welche sich durch Aufladung der beiden Elektroden ergibt.

$$\Phi_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 + p_{13}Q_3$$

$$\Phi_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 + p_{23}Q_3$$

$$\Phi_3 = p_{31}Q_1 + p_{32}Q_2 + p_{33}Q_3$$

$$Q_2 = -Q_1$$

$$Q_3 = 0$$

Aufladung nur der Elektroden 1 und 2

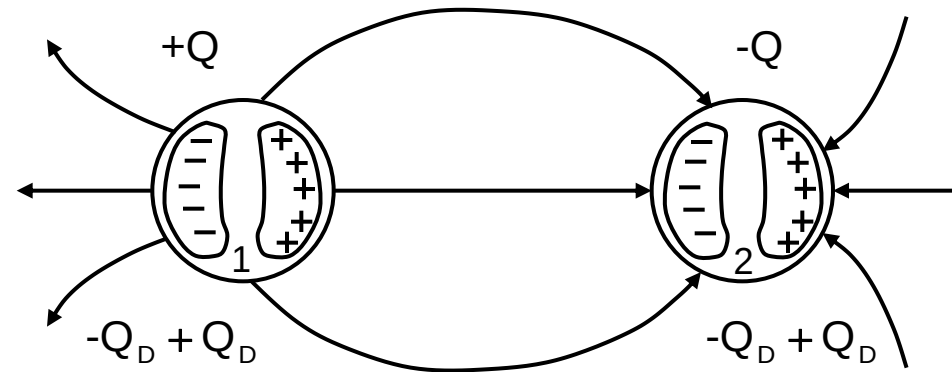
$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Phi_i Q_i = \frac{1}{2} (\Phi_1 Q_1 - \Phi_2 Q_1 + \Phi_3 \cdot 0)$$

$$W_e = \frac{1}{2} [(p_{11}Q_1 - p_{12}Q_1 + 0)Q_1 \\ - (p_{21}Q_1 - p_{22}Q_1 + 0)Q_1 \\ + (\dots) \cdot 0]$$

$$W_e = \frac{1}{2} (p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}) Q_1^2$$

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{\text{ges}}}} \rightarrow \boxed{C_{\text{ges}} = \frac{1}{(p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21})}}$$

3.7 Bestimmung der Kapazität bei Anwesenheit von Influenzladungen



Bestimmung von C schwierig mit Coulomb-Integral:

$$\Phi_1(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \sum_{i=1}^2 \left(\iiint \frac{\rho_i(\vec{r}')}{|\vec{r}_1 - \vec{r}'|} dv' \right)$$

$$\Phi_2(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \sum_{i=1}^2 \left(\iiint \frac{\rho_i(\vec{r}')}{|\vec{r}_2 - \vec{r}'|} dv' \right)$$

$$U_{12} = \Phi_2 - \Phi_1$$

$$C = \left| \frac{Q}{U_{12}} \right| = ?$$

wobei $\iiint \rho_i(\vec{r}') dv' = \begin{cases} +Q & \text{für } i=1 \\ -Q & \text{für } i=2 \end{cases}$

PROBLEM:

Verteilung $\rho_i(\vec{r})$ unbekannt

nur $\iiint \rho_i(\vec{r}') dv = \pm Q$ bekannt

3.7.1. Lösung durch Anwendung der Laplace-Gleichung

3.7.1.1 Herleitung von Laplace- und Poisson-Gleichung

Voraussetzung: ϵ nicht ortsabhängig

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho} \quad \text{Maxwell}$$

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}} \quad \text{Material -Gleichung}$$

$$\operatorname{div} \epsilon \vec{E} = \epsilon \operatorname{div} \vec{E} = - \epsilon \underbrace{\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi}_{\Delta} = \rho$$

Poisson - Gleichung

$$\boxed{\Delta \Phi = - \frac{\rho}{\epsilon}}$$

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

Laplace - Gleichung

$$\boxed{\Delta \Phi = 0}$$

gültig für Ladungs-freie Raumgebiete $\rho = 0$

3.7.1.2 Eindeutigkeitssatz, Randwertprobleme

1. in metallischen Leitern (ohne Ströme) gilt:

$$\vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \text{grad } \Phi = 0 \Rightarrow \boxed{\Phi = \text{const}} \quad \text{innerhalb und auf der Oberfläche}$$

2. Die Potentialverteilung $\Phi(\vec{r})$ im Raum mit $\rho = 0$ hängt nur von der Potentialverteilung

$$\Phi(\vec{r}_{\text{Rand}}) \text{ ab}$$

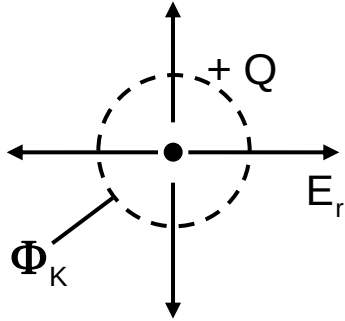
3. Die Potentialverteilung wird durch die Laplace Gleichung $\Delta\Phi = 0$ bestimmt

$\Rightarrow$

Die Potentialverteilung in diesem Raum ist eindeutig gegeben, egal, wie $\Phi(\vec{r}_{\text{Rand}})$ auf dem Rand erzeugt wurde.

Beispiel

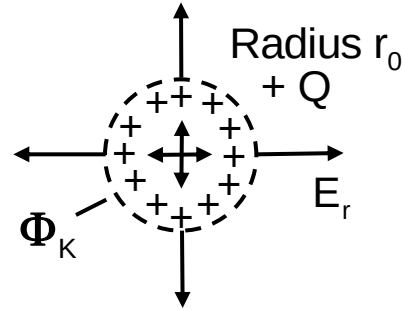
① Punktladung, +Q



$$E_{r1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} \begin{cases} r < r_0 \\ r \geq r_0 \end{cases}$$

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \quad \text{für } r \geq r_0$$

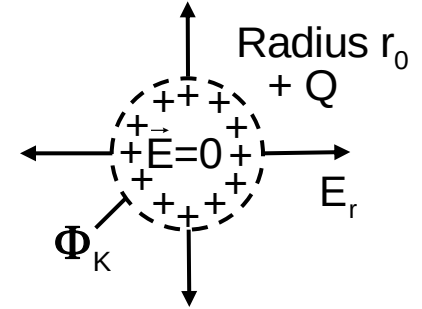
② Isolator, +Q



$$E_{r2} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{r}{r_0^3} & r < r_0 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} & r \geq r_0 \end{cases}$$

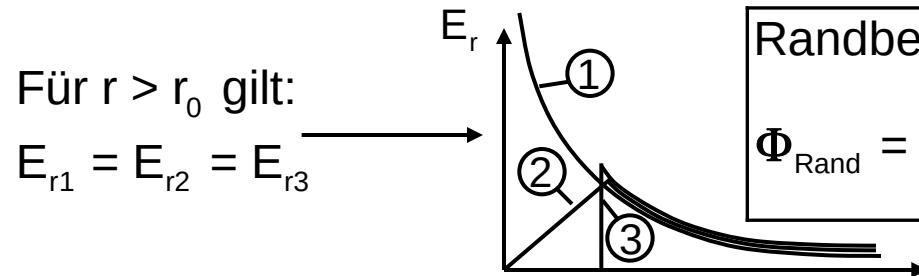
$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \quad \text{für } r \geq r_0$$

③ Leiter, +Q



$$E_{r3} = \begin{cases} 0 & r < r_0 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} & r \geq r_0 \end{cases}$$

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \quad \text{für } r \geq r_0$$



Randbedingung bei r_0 :

$$\Phi_{\text{Rand}} = \Phi(r_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r_0}$$

Potential im Raum $r > r_0$:

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} = \Phi_{\text{Rand}} \cdot \left(\frac{r_0}{r} \right)$$

für alle drei Fälle

Begründung

Aus Maxwell-Gleichungen folgt die Laplace-Gleichung für Φ :

$$\Delta\Phi = 0$$

Kartesisch:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

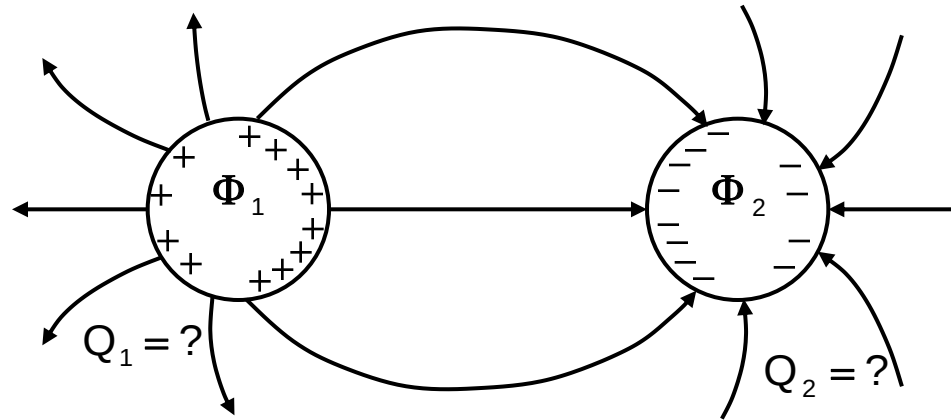
Die Potentialverteilung $\Phi(\vec{r})$ im leeren Raum muss immer die DGL erfüllen.

Die Lösung einer partiellen DGL ist ausschließlich durch ihre Randbedingungen $\Phi = \Phi_{\text{Rand}}$ festgelegt.

3.7.1.3 Berechnungsmethode von Kapazitäten mit Influenzladungen

gegeben: Φ_1, Φ_2

gesucht: Q_1, Q_2



- ① Randbedingung:
Potentiale und Form
der Elektroden

$$\Phi_1 = \Phi_1(\vec{r} = \text{Elektrodenoberfläche}) = \text{const.}$$

$$\Phi_2 = \Phi_2(\vec{r} = \text{Elektrodenoberfläche}) = \text{const.}$$

- ② Lösung der Laplace-Gl.

$$\boxed{\Delta\Phi = 0} \quad \text{mit Randbedingung aus } \textcircled{1}$$

↳ $\Phi(\vec{r})$ im Raum zwischen/außerhalb der Elektroden

- ③ Bestimmung von E :

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \Phi(\vec{r})}$$

- ④ Speziell auf Elektrodenoberflächen:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r} = \text{Oberfläche}) = \vec{E}_{H1,2}(\vec{r}_{\text{Rand}})} \quad \text{aus } \textcircled{3}$$

- ⑤ Bestimmung $Q_{1,2}$ aus

$$\boxed{\oint \epsilon \vec{E}_{H1,2} \cdot d\vec{f} = \oint \sigma \cdot df = Q_{1,2}}$$

Bestimmung der Influenz - Koeffizienten

Algorithmus ① - ⑤ liefert:

$$Q_1 = \text{Alg}_1 (\Phi_1, \Phi_2)$$

$$Q_2 = \text{Alg}_2 (\Phi_1, \Phi_2)$$

Influenz - Koeffizienten - Matrix c_{ik}

$$Q_1 = c_{11} \Phi_1 + c_{12} \Phi_2$$

$$Q_2 = c_{21} \Phi_1 + c_{22} \Phi_2$$

Bestimmung der c_{ik} :

a) setze $\Phi_1 = 0$

$$Q_{1a} = \text{Alg}_1 (0, \Phi_2)$$

$$Q_{2a} = \text{Alg}_2 (0, \Phi_2)$$

und

$$Q_{1a} = c_{12} \Phi_2$$

$$Q_{2a} = c_{22} \Phi_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_{12} = \text{Alg}_1 (0, \Phi_2) / \Phi_2 \\ c_{22} = \text{Alg}_2 (0, \Phi_2) / \Phi_2 \end{cases}$$

b) setze $\Phi_2 = 0$

$$Q_{1b} = \text{Alg}_1 (\Phi_1, 0)$$

$$Q_{2b} = \text{Alg}_2 (\Phi_1, 0)$$

und

$$Q_{1b} = c_{11} \Phi_1$$

$$Q_{2b} = c_{21} \Phi_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_{11} = \text{Alg}_1 (\Phi_1, 0) / \Phi_1 \\ c_{21} = \text{Alg}_2 (\Phi_1, 0) / \Phi_1 \end{cases}$$

Bestimmung der Teilkapazitäten bzw. der Potentialkoeffizienten

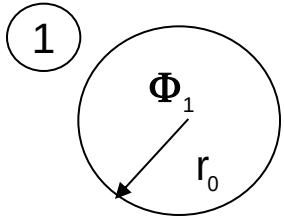
- 1) Bestimmung von Q_k als Funktion von Φ_i
- 2) Aus $Q_i = \{c_{ik}\} \Phi_k$ folgten die Influenz-Koeffizientenmatrix $\{c_{ik}\}$
- 3) Ermitteln der individuellen Teilkapazitäten

$$\begin{aligned} C_{ik} &= -c_{ik} \\ C_{ii} &= \sum_{k=1}^N c_{ik} \end{aligned}$$

- 4) Oder ermitteln der Potentialkoeffizienten durch Invertierung der Matrix der Influenzkoeffizienten

$$\{p_{ik}\} = \{c_{ik}\}^{-1}$$

3.7.1.4 Beispiel kugelsymmetrisches Problem



Φ_1 auf Metallkugel gegeben

$\rightarrow \Phi_1 = \text{const.}$ „Randbedingung“

$\Phi(\vec{r}) = ?$ im Außenraum

Kugelsymmetrie

$\rightarrow$ nur radiale Variation von Φ

$\Phi = \Phi(r)$ unabhängig von ϑ, φ

2

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi(r)}{dr} \right) = 0$$

Laplace-Gl. (r-Abhängigkeit)
in Kugelkoordinaten

$$\rightarrow r^2 \frac{d\Phi(r)}{dr} = c_1$$

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{c_1}{r^2}$$

$$\Phi(r) = -\frac{c_1}{r} + c_2$$

c_1, c_2 sind (noch) unbekannte
Integrationskonstanten

Bestimmung von c_1 , c_2 aus den Randbedingungen:

a) Potential auf Kugeloberfläche ist $\Phi_1 = \text{const.}$

b) Potential im ∞ soll gegen Null gehen

$$\boxed{\Phi(r) = -c_1/r + c_2} \quad \text{allg. Lösung der Laplace-Gl.}$$

$$\text{mit } \Phi(r \rightarrow \infty) = 0 \quad \text{folgt } c_2 = 0$$

$$\text{mit } \Phi(r = r_0) = \Phi_1 \quad \text{folgt } -c_1/r_0 = \Phi_1 \rightarrow c_1 = -r_0 \cdot \Phi_1$$

$$\rightarrow \boxed{\Phi(r) = \Phi_1 \frac{r_0}{r}} \quad \begin{array}{l} \text{Lösung der Laplace-Gl. im Außenraum} \\ \text{für geg. Randbedingungen} \end{array}$$

③ Bestimmung von $\vec{E}(\vec{r})$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = - \text{grad } \Phi(r) = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\Phi_1 \frac{r_0}{r} \right) \vec{e}_r = \Phi_1 \frac{r_0}{r^2} \vec{e}_r$$

④ $\vec{E}$ auf Kugeloberfläche $r = r_0$

$$\vec{E}_{H1} = \vec{E}(r_0) = \Phi_1 \frac{r_0}{r_0^2} \vec{e}_r = \Phi_1 \frac{1}{r_0} \vec{e}_r$$

⑤ Bestimmung von Q_1

$$\oint \varepsilon \vec{E}_{H1} \cdot d\vec{f} = Q_1$$
$$= \varepsilon \cdot \Phi_1 \frac{1}{r_0} \cdot 4 \pi r_0^2 = \varepsilon 4 \pi r_0 \cdot \Phi_1$$

$$\rightarrow \boxed{Q_1 = \varepsilon \Phi_1 4 \pi r_0}$$

→ Algorithmus ① - ⑤ liefert hier also:

$$\boxed{Q_1 = \text{Alg}_1(\Phi_1) = 4 \pi \varepsilon r_0 \cdot \Phi_1}$$

Bestimmung des Influenzkoeffizienten

Algorithmus ① - ⑤ liefert:

$$Q_1 = \text{Alg}_1 (\Phi_1) = 4 \pi \varepsilon r_0 \Phi_1$$

Influenz - Koeffizienten - Matrix c_{ik}

$$Q_1 = c_{11} \Phi_1$$

Bestimmung von c_{11} :

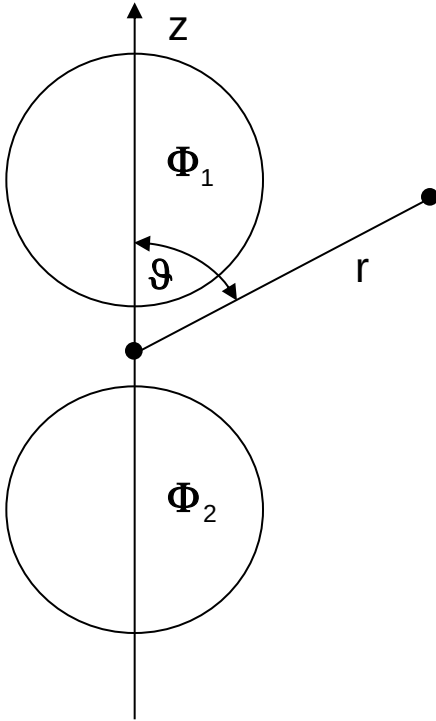
$$c_{11} = \text{Alg}_1 (\Phi_1) / \Phi_1 = (4 \pi \varepsilon r_0 \Phi_1) / \Phi_1$$

$$\boxed{c_{11} = 4 \pi \varepsilon r_0}$$

mit $C_{11} = c_{11}$ folgt auch für die Kapazität

$$\boxed{C_{11} = 4 \pi \varepsilon r_0}$$

3.7.1.5 Beispiel rotationssymmetrisches Problem



keine Kugelsymmetrie mehr

$\Phi = \Phi(r, \vartheta)$ abhängig von ϑ

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi(r, \vartheta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Phi(r, \vartheta)}{\partial \vartheta} \right)$$

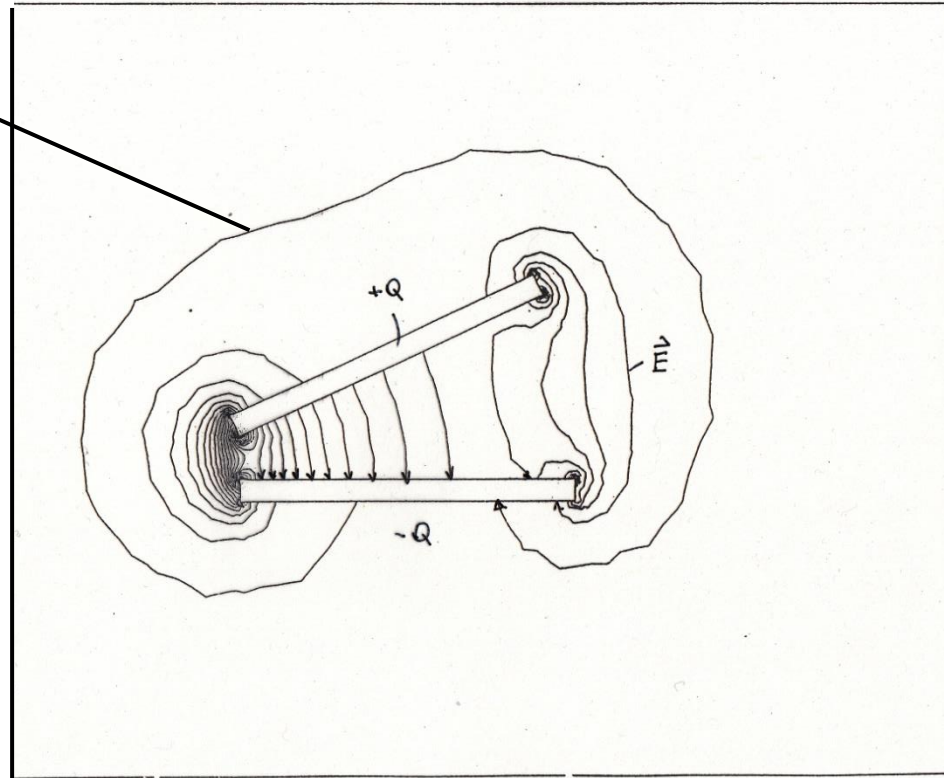


Integration?

Lösung mittels Separation der Variablen
oder numerische PDGL - Routine

3.7.1.6 Verifikation numerischer Lösungen der Laplace - Gleichung

Beispiel für eine fehlerhafte numerische Simulation



Vergleiche Lösungen von Verfahren ① und ②

Verfahren ① Laplace - Gleichung

$\Delta\Phi = 0$	$\Phi_1 = \dots$	$\Phi_2 = \dots$
Laplace	geg. Randbedingungen	

Raumladungsverteilung
(noch) nicht bekannt

└→ $\Phi(\vec{r})$ Lösung der Laplace - Gleichung

└→ $\vec{E}(\vec{r}) = - \text{grad } \Phi(\vec{r})$

└→ $\vec{D}_{H1,2}(\vec{r}) = \epsilon \cdot \vec{E}_{H1,2}(\vec{r})$ Feld auf Metalloberflächen 1,2

└→ $\sigma_{H1,2}(\vec{r}) = \vec{D}_{H1,2}(\vec{r})$ Oberflächenladungsdichte auf
den Metalloberflächen 1,2

└→ Input für Verfahren ②

Verfahren (2) Coulomb - Integral

auf Metalloberflächen 1,2 konzentrieren sich die Raumladungen an der Metalloberfläche $\triangleq$ Oberflächenladungsdichten σ

$$\rightarrow \rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_{1,2}(\vec{r}) & \text{für } \vec{r} \approx \text{Oberfläche 1,2 mit Dicke } ds \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\rightarrow \Phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\text{Vol}_i} \frac{\rho_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right)$$

mit $dv = df \cdot ds$ folgt

$$= \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\text{Vol}_i} \frac{\rho_i ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} df' \right)$$

mit $\rho \cdot ds = \sigma$ folgt

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{F_i} \frac{\sigma_{ki}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} df' \right)}$$

mit

$$\boxed{\sigma_{Hi}(\vec{r}) = \vec{D}_{Hi}(\vec{r})}$$

Input aus Verfahren (1)

$$\hookrightarrow \Phi(\vec{r}) \stackrel{?}{=} \Phi(\vec{r})$$

Verfahren (2) Verfahren (1)

wenn ja, Lösung ok

Zusammenfassung

Lösung der Laplacegleichung ist eine geeignete Methode:

$$\Delta\Phi = 0$$

- wenn Äquipotentiallinien durch metallische Flächen vorgegeben sind,
- und wenn das Medium linear und isotrop ist,
- und wenn zwischen den Metallen keine freien Ladungen sind.

3.7.2 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen

3.7.2.1 Kartesische Koordinaten (Rechteck-Hohlleiter)

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\Phi = U(x) \cdot V(y) \cdot W(z) \quad \rightarrow \quad V \cdot W \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} U + U \cdot W \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} V + U \cdot V \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} W = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{U \cdot V \cdot W} \right.$$

$$\text{Separationssatz} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{U(x)} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{V(y)} \frac{\partial^2 V(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{W(z)} \frac{\partial^2 W(z)}{\partial z^2} = 0$$

wir haben die Summe dreier
Funktionen $f_x(x)$, $f_y(y)$, $f_z(z)$, }

$$f_x(x) + f_y(y) + f_z(z) = 0$$

$$\begin{array}{ccc} | & | & | \\ -\alpha^2 & -\beta^2 & +\gamma^2 = 0 \end{array}$$

diese ist nur Null für alle x , y , z ,
wenn diese konstant sind

wann ist $f_x(x)$, $f_y(y)$, $f_z(z)$, konstant, unabhängig von x , y , z ?

$$f_x(x) = -\alpha^2 \quad \alpha \text{ unabhängig von } x$$

$$f_y(y) = -\beta^2 \quad \beta \text{ unabhängig von } y$$

$$f_z(z) = +\gamma^2 \quad \gamma \text{ unabhängig von } z$$

erfüllt für:

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{U(x)} \frac{d^2 U(x)}{dx^2} = -\alpha^2 & \rightarrow & \boxed{\frac{d^2 U(x)}{dx^2} + \alpha^2 \cdot U(x) = 0} \Rightarrow \sin(\alpha x), \cos(\alpha x); \\ \frac{1}{V(y)} \frac{d^2 V(y)}{dy^2} = -\beta^2 & \rightarrow & \boxed{\frac{d^2 V(y)}{dy^2} + \beta^2 \cdot V(y) = 0} \Rightarrow \sin(\beta y), \cos(\beta y); \\ \frac{1}{W(z)} \frac{d^2 W(z)}{dz^2} = +\gamma^2 & \rightarrow & \boxed{\frac{d^2 W(z)}{dz^2} - \gamma^2 \cdot W(z) = 0} \Rightarrow e^{\pm \gamma z} \end{array}$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

Jede Linearkombination ist ebenfalls Lösung
der Potentialgleichung

partikuläre Lösung (1)

$$\Phi_{ij}(x, y, z) = A_{ij} \sin(\alpha_i x) \cdot \cos(\beta_j y) \cdot e^{-\gamma_{ij} z} \quad \text{mit} \quad \gamma_{ij}^2 = \alpha_i^2 + \beta_j^2$$

└ (noch) unbekannter Koeffizient

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial x^2} = A_{ij} (-\alpha_i^2) \sin(\alpha_i x) \cdot \cos(\beta_j y) \cdot e^{-\gamma_{ij} z} = -\alpha_i^2 \Phi_{ij}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial y^2} = -\beta_j^2 \Phi_{ij}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial z^2} = +\gamma_{ij}^2 \Phi_{ij}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial z^2} = (-\alpha_i^2 - \beta_j^2 + \gamma_{ij}^2) \Phi_{ij} = 0 \cdot \Phi_{ij} = 0$$

→ Φ_{ij} ist Teillösung der Laplace - Gl.

partikuläre Lösung (2)

$$\Phi_{nm}(x, y, z) = A_{nm} \cos(\alpha_n x) \cos(\beta_m y) e^{+\gamma_{nm} z} \quad \text{mit} \quad \gamma_{nm}^2 = \alpha_n^2 + \beta_m^2$$

└ (noch) unbekannter Koeffizient

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \Phi_{nm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{nm}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{nm}}{\partial z^2} = 0$$

$$-\alpha_n^2 - \beta_m^2 + \gamma_{nm}^2 = 0$$

→ Φ_{nm} ist ebenfalls Teillösung der Laplace - Gl.

Zusammengesetzte Lösung:

$$\Phi_{1+2} = (\Phi_{ij} + \Phi_{nm})$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \Phi_{1+2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{1+2}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{1+2}}{\partial z^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \Phi_{1+2} \quad \text{ist ebenfalls Lösung}$$

Allgemeine Lösung mit allen Kombinationen von sin, cos, exp ($\pm \dots$)

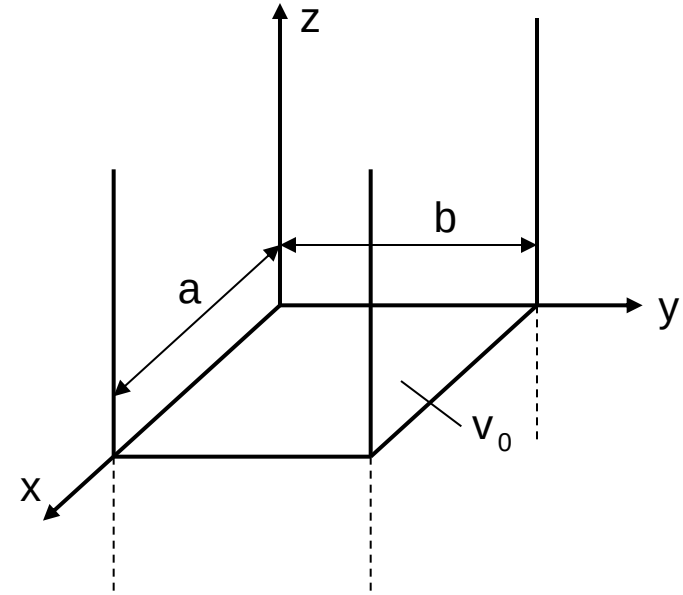
$$\boxed{\Phi = \sum_{n,m} \Phi_{nm}}$$

unbekannte Koeffizienten A_{nm} bestimmen
sich aus Randbedingungen

Beispiel: Gegeben sei ein rechteckiges
metallisches Rohr (Hohlleiter)

Randbedingungen:

- a) $\Phi(x, y, z) = 0$ auf dem Rand
- b) $\Phi(x, y, 0)$ vorgegeben $= v_0(x, y)$
- c) abfallendes Potential in z - Richtung



Einschränkung der Lösungsvielfalt durch Randbedingungen $\Phi = 0$ auf Rand:

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \sin(\alpha_n x) \cdot \sin(\beta_m y) \cdot e^{-\gamma_{mn} z} \quad \gamma_{mn}^2 = \alpha_n^2 + \beta_m^2$$

nur sin wegen
 $\Phi(0, y, z) = 0$
„hintere Wand“

nur sin wegen
 $\Phi(x, 0, z) = 0$
„linke Wand“

Bestimmung von α_n und β_m durch Berücksichtigung der weiteren Randbedingungen $\Phi = 0$

$$\begin{array}{lcl} \text{am vorderen Deckel} & x = a & \longrightarrow \Phi(a, y, z) = 0 \rightarrow \alpha_n = \frac{n\pi}{a} \\ \text{am rechten Deckel} & y = b & \Phi(x, b, z) = 0 \rightarrow \beta_m = \frac{m\pi}{b} \end{array}$$

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \cdot e^{-\gamma_{mn} z}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot a}{a}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot b}{b}\right) = 0 \end{array} \right\} \text{Rand-} \\ \text{bedingung} \\ \text{erfüllt}$$

$$\gamma_{mn} = \sqrt{\left(\frac{n \cdot \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m \cdot \pi}{b}\right)^2}$$

Bestimmung der Koeffizienten A_{nm} durch Anpassung
an die vorgegebene Randbedingung des Potentialverlaufs $V_0(x, y)$

$$\Phi(x, y, z=0) \stackrel{!}{=} V_0(x, y)$$

Sei die Randbedingung z.B.:

$$V_0(x,y) = k \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right)$$

$$\Phi(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot y}{b}\right) e^{-\gamma_{nm} \cdot z} \Rightarrow A_{nm} = \begin{cases} 0 & n \neq 1, m \neq 1 \\ k & n = 1, m = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \Phi(x,y,z) = k \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right) \cdot e^{-\gamma z} \quad \text{mit} \quad \gamma = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} \quad \dim(k) = V$$

Ist die Laplace – Gleichung erfüllt?

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -k \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right) \cdot e^{-\gamma z}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -k \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right) \cdot e^{-\gamma z}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = k \left\{ \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \right\} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right) \cdot e^{-\gamma z}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

Berechnung der Felder im Inneren des Hohlleiters:

Potential

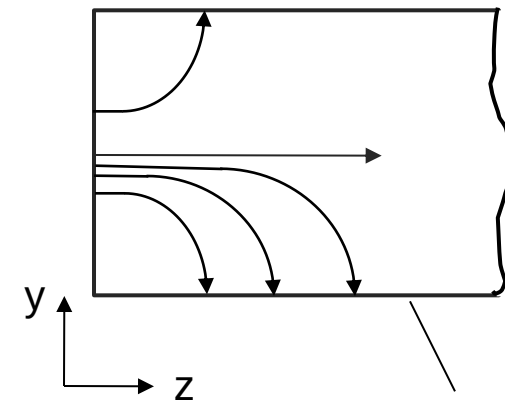
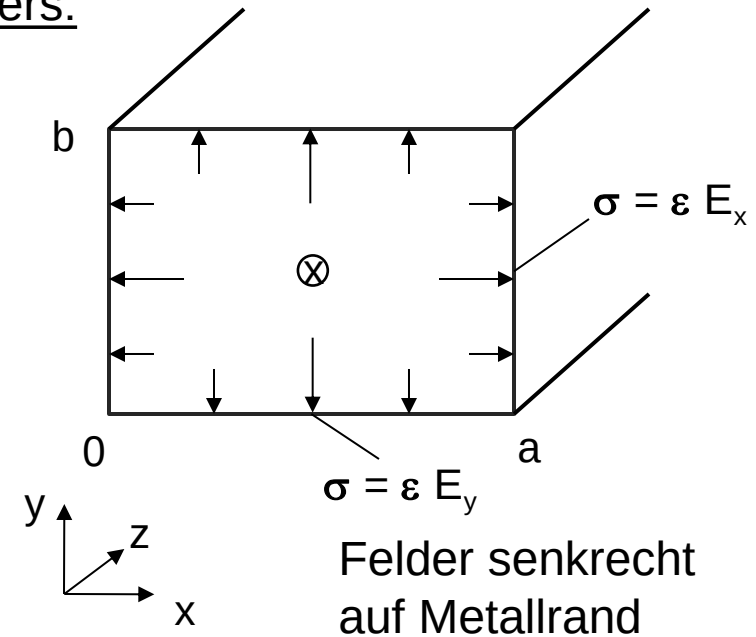
$$\Phi = k \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$

Elektrisches Feld $\vec{E} = ?$

$$E_z = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = + \gamma k \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$

$$E_x = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = - k \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$

$$E_y = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = - k \frac{\pi}{b} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$



Vorgehen bei allgemeinen Randbedingungen $V_0(x,y)$

wenn sich $V_0(x,y)$ als Produkt zweier Funktionen in x und y darstellen lässt, gilt

$$\Phi(x,y,0) \stackrel{!}{=} V_0(x,y) = f_0(x) \cdot g_0(y) \quad \left. \begin{array}{l} \text{mit } f_0(x) = 0 \text{ an } x = 0,a \\ g_0(y) = 0 \text{ an } y = 0,b \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{entsprechend} \\ \text{Randbed.} \\ \Phi = 0 \text{ am Rand} \end{array}$$

$$\boxed{\Phi(x,y,z=0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \stackrel{!}{=} f_0(x) \cdot g_0(y)}$$

Zerlegung von $f_0(x)$, $g_0(y)$ nach Fourier:

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

$$g_0(y) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad \text{mit} \quad b_m = \frac{2}{b} \int_0^b g_0(y) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy$$

Koeffizientenvergleich:

$$\boxed{A_{mn} = a_n \cdot b_m}$$

$$a_n \cdot b_m$$

3.7.2.2 Zylinderkoordinaten (Rundhohlleiter)

$$\Delta\Phi = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\Phi = U(R) \cdot V(\varphi) \cdot W(z) \rightarrow \frac{1}{U(R)} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{1}{V(\varphi)} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{W} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0$$

Separationsansatz

$$f_R(R) + \frac{1}{R^2} \underbrace{f_\varphi(\varphi) + f_z(z)}_{\text{Konstanten, unabhängig von } \varphi \text{ bzw. } z} = 0$$

$\begin{array}{ccc} | & & | \\ \textcircled{?} & & \begin{array}{c} -m^2 \quad \gamma^2 \end{array} \end{array}$

Konstanten,
unabhängig von φ bzw. z

3.7.2.3 Kugelkoordinaten

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0 \quad / \cdot \frac{r^2 \sin^2\vartheta}{U \cdot V \cdot W}$$

$$\Phi = U(r) \cdot V(\vartheta) \cdot W(\varphi)$$

$$\rightarrow \frac{\sin^2\vartheta}{U(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U(r)}{\partial r} \right) + \frac{\sin\vartheta}{V(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial V(\vartheta)}{\partial\vartheta} \right) + \underbrace{\frac{1}{W(\varphi)} \frac{\partial^2 W(\varphi)}{\partial\varphi^2}}_{-m^2} = 0$$

Separationsansatz

$$\rightarrow \boxed{\frac{d^2 W(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 W(\varphi) = 0} \quad \begin{array}{l} \text{gewöhnliche DGL} \\ \text{der sin-,cos-Funktionen} \end{array}$$

$$\rightarrow W(\varphi) \sim \sin(m\varphi), \cos(m\varphi)$$

m ganze Zahl: Erfüllung der Randbedingung

$$W(\varphi) = W(\varphi + 2\pi)$$

3.7.3 Lösung der Poisson - Gleichung

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = - \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_P(\vec{r}) + \Phi_L(\vec{r})$$

$\Phi_P(\vec{r})$: partikuläre Lösung

$\Phi_L(\vec{r})$: homogene Lösung der Laplace-Gleichung;
ungleich Null im Falle von geladenen Elektroden;
Randbedingungen durch deren Potentiale.

Lösung der Poisson - Gleichung (partikuläre Lösung):

$$\Phi_P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

Coulomb - Integral

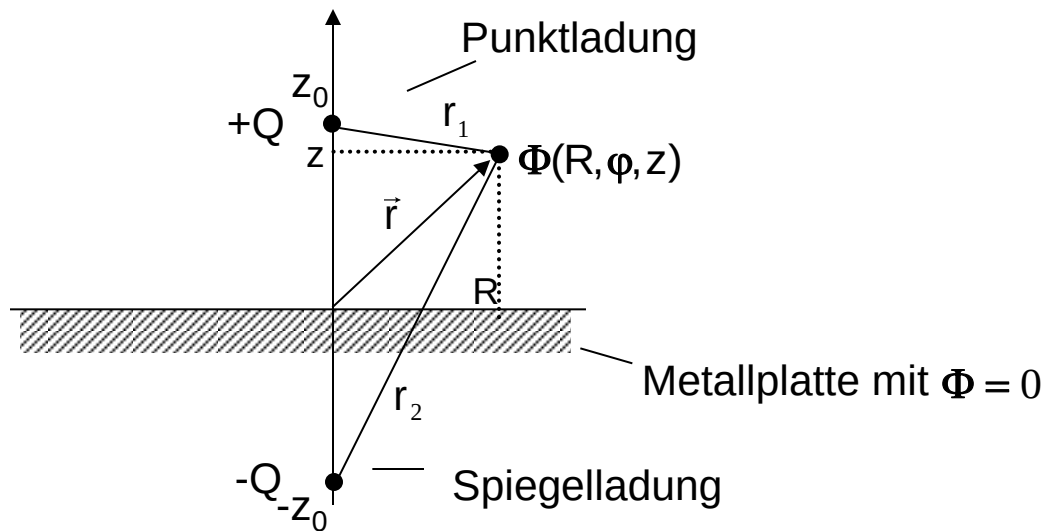
3.7.4 Spiegelungsmethode

„elektrisches Spiegelbild“

Anwendungsbereich: Punktförmige Ladungen vor Metallplatten

Vorgehen: Metallplatte „wegdenken“ und durch Anbringen von „fiktiven“ Ladungen eine Äquipotentialfläche an der Stelle der Metallplatte mit gleichem Potential erzeugen.

Beispiel: Punktladung vor ebener Metallplatte



$$r_1 = \sqrt{R^2 + (z - z_0)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{R^2 + (z + z_0)^2}$$

$$\Phi(R, \varphi, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z + z_0)^2}} \right) \cdot Q$$

$\Phi(R, \varphi, z) = 0$ für $z = 0$ und beliebige R, φ (entspricht Potentialfläche der Metallplatte)

Zylinderkoordinaten

wegen Zylindersymmetrie

$$\begin{aligned}\Phi(R, \varphi, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} Q \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z + z_0)^2}} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= - \text{grad } \Phi = - \frac{\partial \Phi}{\partial R} \vec{e}_R - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_z \\ &= - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[\left(- \frac{R}{(R^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} + \frac{R}{(R^2 + (z + z_0)^2)^{3/2}} \right) \vec{e}_R \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{-(z - z_0)}{(R^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} + \frac{(z + z_0)}{(R^2 + (z + z_0)^2)^{3/2}} \right) \vec{e}_z \right. \\ &\quad \left. + 0 \cdot \vec{e}_\varphi \right]\end{aligned}$$

Auf Metallplattenoberfläche bei $z = 0$ gilt:

$$\vec{E}(R, z=0) = 0 \cdot \vec{e}_R - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{2z_0}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

Das elektrische Feld steht senkrecht auf der Metalloberfläche.

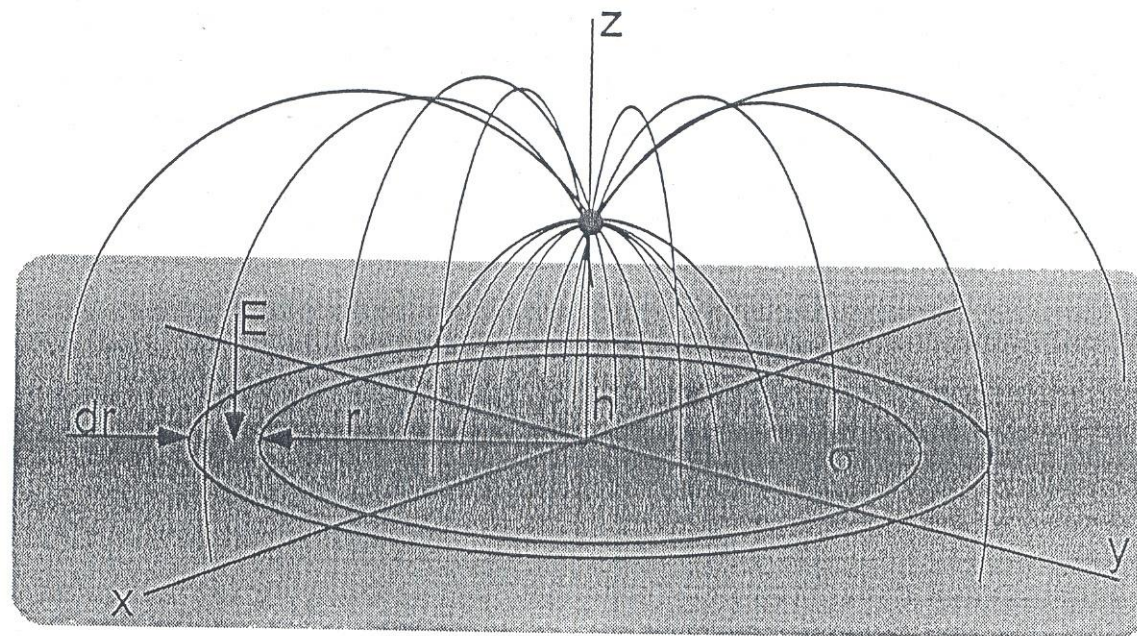
Die Oberflächenladungsdichte $\sigma(R)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\sigma(R) &= \epsilon E_z(R, z=0) \\ &= -\frac{Q}{4\pi} \frac{2z_0}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

Die gesamte Influenzladung auf der Metallplatte

$$\begin{aligned}Q_{\text{inf}} &= \int_F \sigma \, df = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sigma(R) R \, d\varphi \, dR \\ &= -\frac{Q}{4\pi} \cdot 2\pi \int_0^\infty \frac{2z_0}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}} R \, dR \\ &= -Q \cdot z_0 \left[\frac{-1}{(R^2 + z_0^2)^{1/2}} \right]_0^\infty = +Q z_0 \left(0 - \frac{1}{z_0} \right) = -Q\end{aligned}$$

ist gleich groß wie die Punktladung Q , aber mit negativem Vorzeichen.



4 Stationäre elektrische Strömungsfelder

4.1 Erhaltung der Ladung

Maxwell $\boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}}$ $\rightarrow \text{div rot } \vec{H} = \text{div } \vec{J} + \text{div } \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$$0 = \text{div } \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{D} \qquad \text{div}(\text{rot } \vec{H}) \equiv 0$$

Maxwell $\boxed{\text{div } \vec{D} = \rho}$

Kontinuitätsgleichung
der Ladung

$$\boxed{\text{div } \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0}$$

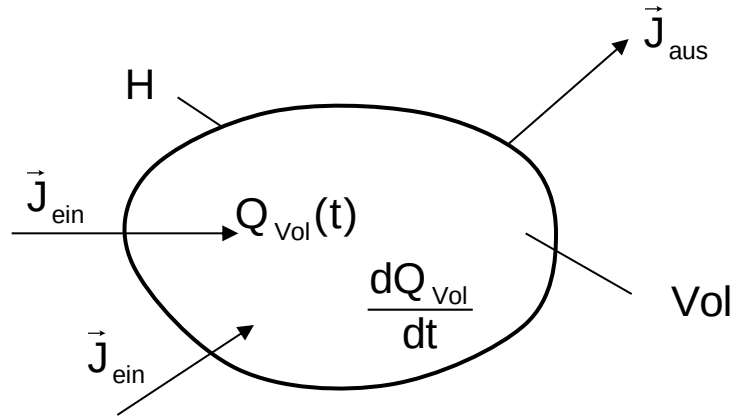
$$\int \text{div } \vec{J} \, dv + \frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dv = 0 \quad \rightarrow \oint \vec{J} \cdot d\vec{f} + \frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dv = 0$$

Bilanzgleichung
der Ladung

$$\boxed{\oint \vec{J} \cdot d\vec{f} + \frac{dQ_{\text{vol}}}{dt} = 0}$$

Ladung geht
nicht verloren

$$\oint_H \vec{J} \cdot d\vec{f} = - \frac{dQ_{Vol}}{dt}$$

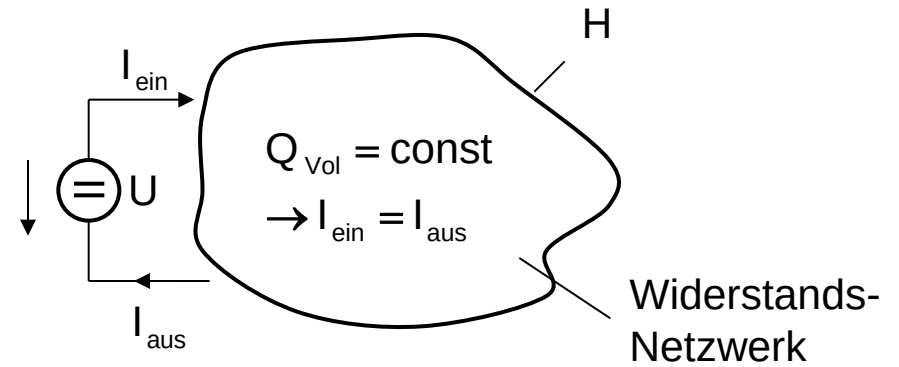


Ladungs-
Erhaltung

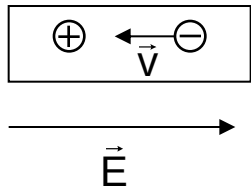
$Q_{Vol} = \text{const. z.B. Null}$

$$\rightarrow \frac{dQ_{Vol}}{dt} = 0 \rightarrow \oint_H \vec{J} \cdot d\vec{f} = 0$$

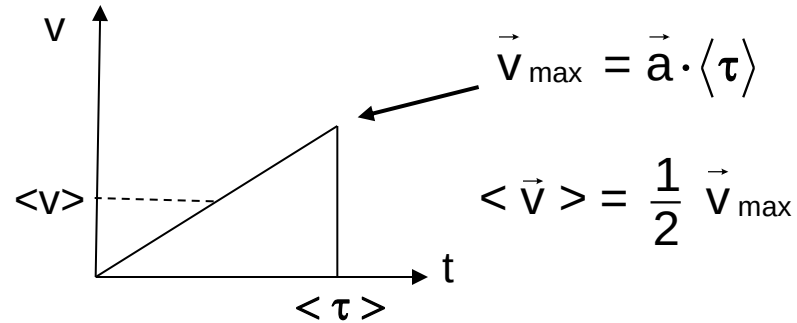
$$\rightarrow \boxed{I_{ein} = I_{aus}}$$



4.2 Ohmsches Gesetz



$$\vec{J} = \rho_e \langle \vec{v} \rangle$$



$$\vec{F} = m_e \vec{a} = q_e \vec{E} \rightarrow \vec{a} = \frac{q_e}{m_e} \vec{E}$$

$$\rightarrow \vec{v} = \vec{a} \cdot t = \frac{q_e}{m_e} \vec{E} \cdot t$$

Stöße Elektron/Ion $\rightarrow$ Abbremsung $\rightarrow$ mittl. freie Flugzeit $\langle \tau \rangle$
zwischen zwei Stößen

$$\rightarrow \langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{2} \frac{q_e}{m_e} \langle \tau \rangle \vec{E}$$

$$\rightarrow \vec{J} = \rho_e \underbrace{\frac{1}{2} \frac{q_e}{m_e} \langle \tau \rangle}_{\kappa} \vec{E} \rightarrow \boxed{\vec{J} = \kappa \vec{E}}$$

Ohmsches Gesetz

Die Bewegung der Elektronen im Metall ist die Überlagerung aus

- zufällig gerichteter thermischer Bewegung, abhängig von Temperatur T

$$\langle \vec{v}_{th} \rangle = 0 \quad \langle v_{th} \rangle = f(T) \neq 0$$

- gerichteter Bewegung in Richtung des elektr. Feldes, abhängig von E

$$\langle \vec{v} \rangle \sim \vec{E} \quad \langle v_{th} \rangle \gg \langle v \rangle$$

- wobei

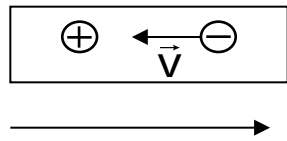
die mittlere freie Weglänge zwischen zwei Stößen des Elektrons mit den Ionen $\langle s \rangle$ abhängig ist von den Abständen der Ionen voneinander

Die mittlere Stoßzeit $\langle \tau \rangle$ ergibt sich aus der mittleren freien Weglänge $\langle s \rangle$ und der dominanten thermischen Geschwindigkeit $\langle v_{th}(T) \rangle$

$$\boxed{\langle \tau(T) \rangle = \frac{\langle s \rangle}{\langle v_{th}(T) \rangle}} \rightarrow \vec{J} = \rho_e \frac{1}{2} \frac{q_e}{m_e} \frac{\langle s \rangle}{\langle v_{th}(T) \rangle} \vec{E} \rightarrow \boxed{\vec{J} = \kappa(T) \vec{E}}$$

$$\text{mit } \kappa(T) \sim \frac{\langle s \rangle}{\langle v_{th}(T) \rangle}$$

4.3 Ohmsche Verlustleistung



mittlere freie
Flugzeit $\langle \tau \rangle$

$$\vec{F} = m_e \vec{a} = q_e \vec{E} \rightarrow \vec{v}_{\max} = \frac{q_e}{m_e} \vec{E} \cdot \langle \tau \rangle$$

Kin. Energie des Einzelelektrons:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_e v_{\max}^2$$

Anzahl Elektronen pro Volumeneinheit

$$n = \frac{\rho_{\text{el}}}{q_e}$$

- Beschleunigung der Elektronen durch el. Feld
- Stöße Elektronen/Ionen
- Abbremsung der Elektronen
- Abgabe kinetische Energie in thermische Energie
- Erwärmung
- Joulesche Verluste

Umgesetzte Energie pro Volumeneinheit in Stoßzeit $\langle \tau \rangle$:

$$n \cdot E_{\text{kin}} = \frac{\rho_{\text{el}}}{q_e} \frac{1}{2} m_e \vec{v}_{\max} \cdot \vec{v}_{\max} = \rho_{\text{el}} \frac{1}{2} \vec{v}_{\max} \frac{m_e}{q_e} \cdot \vec{v}_{\max} \quad \text{wobei} \quad \vec{J} = \rho_{\text{el}} \langle \vec{v} \rangle = \rho_{\text{el}} \frac{1}{2} \vec{v}_{\max}$$

$$= \vec{J} \cdot \frac{m_e}{q_e} \left(\frac{q_e}{m_e} \vec{E} \langle \tau \rangle \right) = \vec{J} \cdot \vec{E} \cdot \langle \tau \rangle \rightarrow \boxed{\frac{n \cdot E_{\text{kin}}}{\langle \tau \rangle} = \frac{\partial w_J}{\partial t} = \vec{J} \cdot \vec{E}} \quad \text{Lokale Verlustleistung}$$

$$w_J = \int_0^t \vec{J} \cdot \vec{E} \, dt \qquad \frac{\partial w_J}{\partial t} = \vec{J} \cdot \vec{E}$$

„verheizte“ Joulesche Wärme

Leistungsdichte

$$\text{Einheit } (w_J) = \frac{A}{m^2} \cdot \frac{V}{m} \cdot s = \frac{\text{Joule}}{m^3}$$

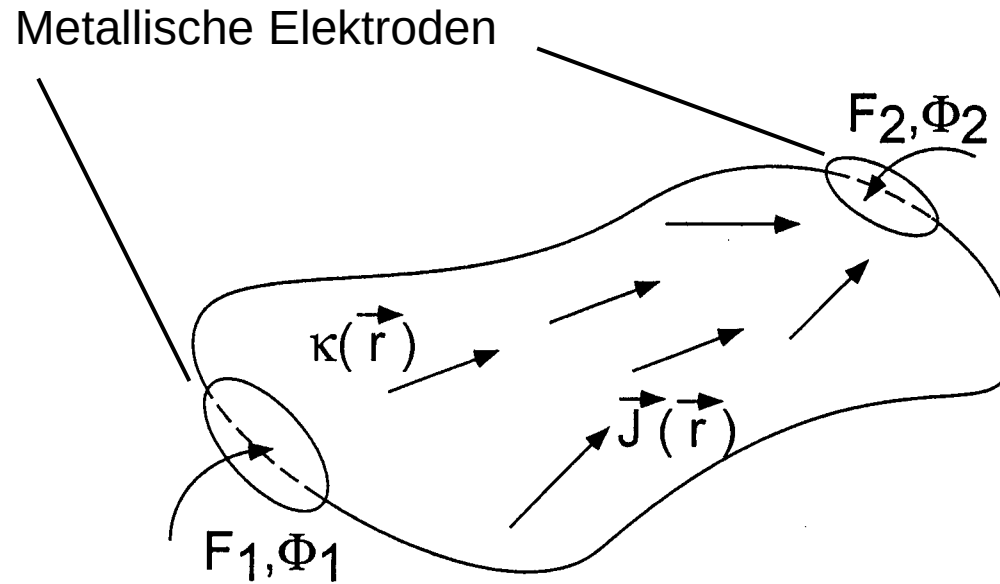
$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E} \quad \rightarrow \quad w_J = \kappa \int_0^t \vec{E}^2 \, dt = \frac{1}{\kappa} \int_0^t \vec{J}^2 \, dt$$

Gesamtleistung :

$$\frac{dW_J}{\partial t} = \int \vec{J} \cdot \vec{E} \, dv = \int \vec{J} \cdot \vec{E} \, d\vec{f} \, d\vec{s} = U \cdot I$$

$$\frac{dW_J}{\partial t} = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$$

4.4 Ohmscher Widerstand



$$U = \Phi_2 - \Phi_1 = - \int_1^2 \vec{E} \, d\vec{s}$$

$$I = \int_{F_1} \vec{J} \, d\vec{f}$$

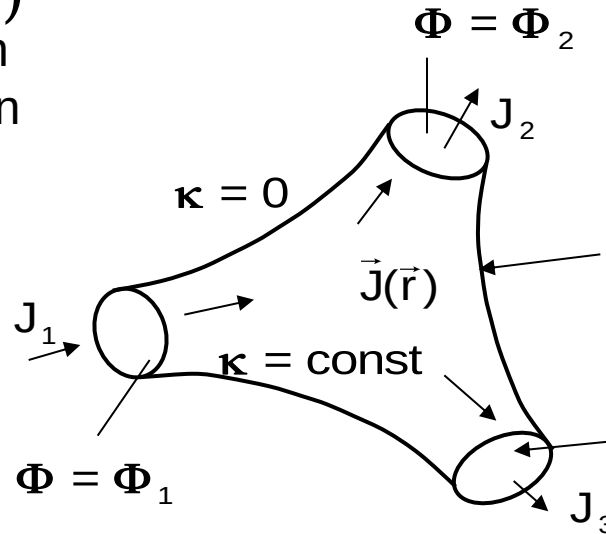
$$R = \frac{U}{I} = \frac{- \int_1^2 \vec{E} \, d\vec{s}}{\int_{F_1} \vec{J} \, d\vec{f}} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\int_{F_1} \vec{J} \, d\vec{f}}$$

Φ_2 und Φ_1 sind bekannt.

Verteilung von $\vec{J}$ über Elektroden unbekannt

4.5 Laplace-Gleichung für stationäre Strömungsfelder

Ziel: Berechnung von $\vec{J}(\vec{r})$
 innen bei gegebenen
 Randbedingungen an
 den Ein-Ausgängen
 Φ_1, Φ_2, Φ_3



Ziel:
 $\vec{J} \leftarrow \kappa \vec{E} \leftarrow -\kappa \text{grad} \Phi \quad \Phi = ?$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

Randbedingungen
 für Laplace-Gleichung
 für $\rho = 0$
 im Inneren

Stationär $\partial/\partial t = 0$

$$\rightarrow \vec{E} = -\text{grad} \Phi$$

Im Inneren für $\rho = 0$

$$\rightarrow \text{div} \vec{D} = 0$$

Linear & isotrop mit $\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$

$$\rightarrow \text{div} (\epsilon \cdot \vec{E}) = 0$$

$$\rightarrow \epsilon \text{div} \text{grad} \Phi + \text{grad} \epsilon \cdot \text{grad} \Phi = 0$$

$$\rightarrow \text{div} \text{grad} \Phi = 0$$

Null bei $\epsilon = \text{const.}$

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{Laplace-Gleichung}$$

$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E} = -\kappa \cdot \text{grad} \Phi$$

$$\Delta\Phi = 0$$

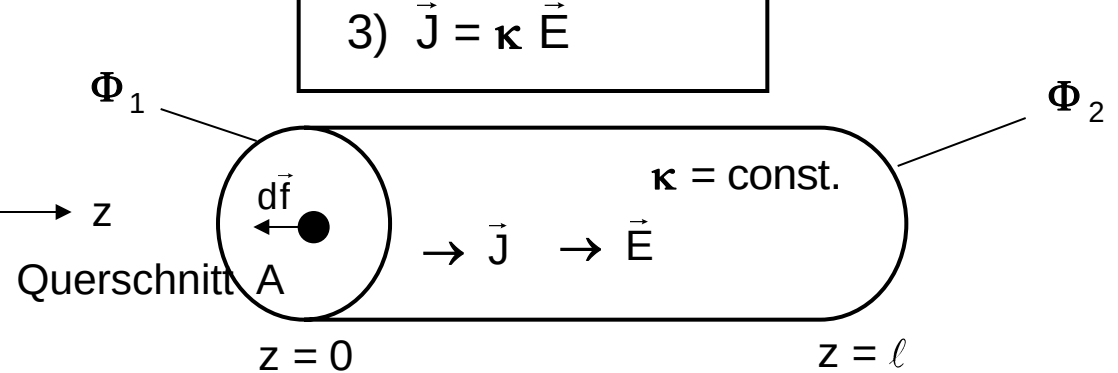
Beispiel:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = c_1$$

$$\Phi(z) = c_1 \cdot z + c_2$$

- 1) Lösung von $\Delta\Phi = 0 \Rightarrow \Phi(z)$
- 2) $\vec{E} = -\text{grad } \Phi$
- 3) $\vec{J} = \kappa \vec{E}$



Randbedingungen:

$$\Phi(z=0) = \Phi_1 \rightarrow c_2 = \Phi_1$$

$$\Phi(z=\ell) = \Phi_2 \rightarrow c_1 \ell + \Phi_1 = \Phi_2 \rightarrow c_1 = (\Phi_2 - \Phi_1) / \ell$$

$$\rightarrow \Phi(z) = \frac{(\Phi_2 - \Phi_1)}{\ell} \cdot z + \Phi_1$$

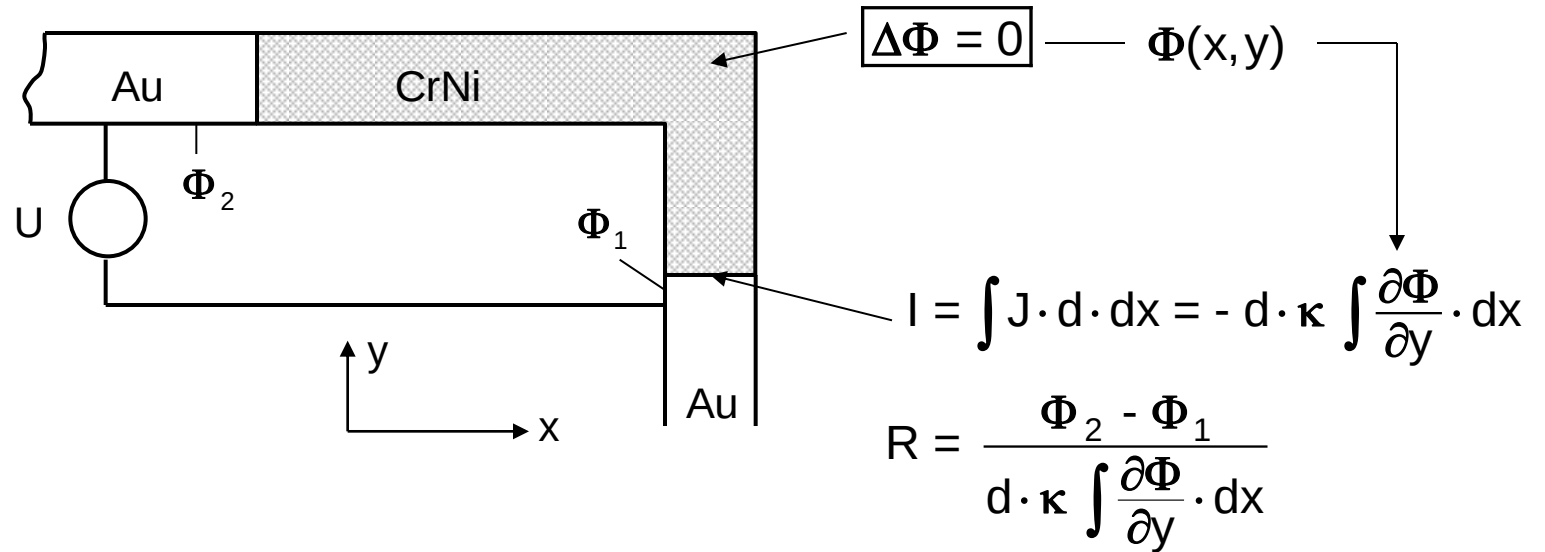
$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi = -\frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ell} \vec{e}_z$$

$$R = \frac{-\int \vec{E} d\vec{s}}{\int \vec{J} d\vec{f}} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{-\kappa \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} (-A)} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\kappa \cdot \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\ell} \cdot A} = \frac{\ell}{\kappa \cdot A} = R$$

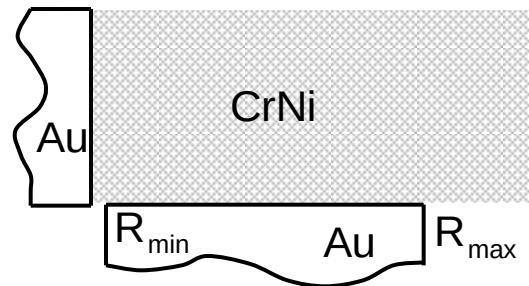
Beispiel: Gegeben: leitendes Widerstandsmaterial als strukturierter Dünnsfilm (Dicke d)

Gesucht: Stromdichte im Material und Gesamtwiderstand

Struktur 1:



Struktur 2:



4.6 Stromdichte und Raumladungsdichte an Grenzflächen

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad \text{Stationär heißt } \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \operatorname{div} \vec{J} = 0$$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}} \rightarrow \vec{J} = \frac{\kappa}{\epsilon} \vec{D}$$

$$\rightarrow \operatorname{div} \left(\frac{\kappa}{\epsilon} \vec{D} \right) = 0$$

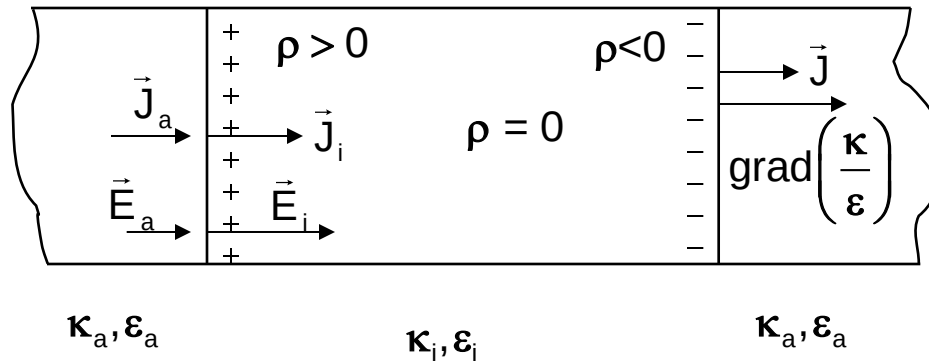
$$\frac{\kappa}{\epsilon} \cdot \operatorname{div} \vec{D} + \vec{D} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{\kappa}{\epsilon} \right) = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \text{und} \quad \vec{D} = \epsilon/\kappa \vec{J} \Rightarrow \boxed{\frac{\kappa}{\epsilon} \cdot \rho + \frac{\epsilon}{\kappa} \vec{J} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{\kappa}{\epsilon} \right) = 0} \left\{ \begin{array}{l} \text{Zusammenhang zwischen} \\ \text{Strömen und dadurch} \\ \text{erzeugten Raumladungen} \end{array} \right.$$

In Gebieten ungeladener Leiter, wo $\frac{\kappa}{\epsilon}$ konstant ist, gibt es keine freie Raumladung.

An Grenzflächen mit unterschiedlichen ϵ oder κ können Ladungen auftreten, solange Ströme fließen.

Grenzflächen - Ladungen



$$\left(\frac{\kappa_i}{\epsilon_i}\right) < \left(\frac{\kappa_a}{\epsilon_a}\right)$$

„gute Außenleiter“

$$\frac{\kappa}{\epsilon} \rho = - \frac{\epsilon}{\kappa} \vec{J} \cdot \text{grad}\left(\frac{\kappa}{\epsilon}\right)$$

„Ladungserhaltung“: $\vec{J}_a = \vec{J}_i = \vec{J}$

„Ohm“ $\vec{J} = \kappa \vec{E}$ $\kappa_a \vec{E}_a = \kappa_i \vec{E}_i$

$$\rightarrow \vec{E}_a = \frac{\kappa_i}{\kappa_a} \vec{E}_i$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{- Stetigkeitsbeziehung für} \\ \text{Normalkomponenten } D_n: \end{array} \right\} \quad D_i - D_a = \sigma \quad \begin{array}{l} \text{Oberflächenladungs-} \\ \text{Dichte} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{- } \vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \\ \text{- } \vec{E}_a = \frac{\kappa_i}{\kappa_a} \vec{E}_i \\ \text{- } \vec{E}_i = \vec{J} / \kappa_i \end{array} \quad \begin{array}{l} \epsilon_i \epsilon_0 E_i - \epsilon_a \epsilon_0 E_a = \sigma \\ \epsilon_i \epsilon_0 E_i - \epsilon_a \epsilon_0 \frac{\kappa_i}{\kappa_a} E_i = \sigma \\ \frac{\epsilon_i \epsilon_0}{\kappa_i} \cdot J - \frac{\epsilon_a \epsilon_0}{\kappa_i} \frac{\kappa_i}{\kappa_a} \cdot J = \sigma \end{array}$$

$$\rightarrow \boxed{\sigma = \left(\frac{\epsilon_i \epsilon_0}{\kappa_i} - \frac{\epsilon_a \epsilon_0}{\kappa_a} \right) J}$$

An Grenzen unterschiedlicher Leitfähigkeit bzw. rel. Dielektrizitätskonstanten gibt es eine Proportionalität zwischen der Oberflächenladungsdichte und der Stromdichte.

Die Oberflächenladungsdichten verursachen ein elektrisches Feld, welches frei bewegliche Ladungsträger antreibt und so eine Stromdichte erzeugt.

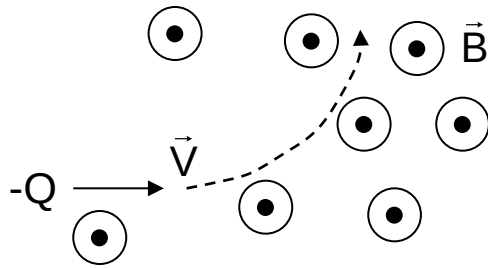
5 Streng stationäre Magnetfelder

5.1 Kräfte auf bewegte Ladungen und stromdurchflossene Leiter

Magnetische Flussdichte $\vec{B}$

Definiert über Kraft auf bewegte Ladung Q

$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

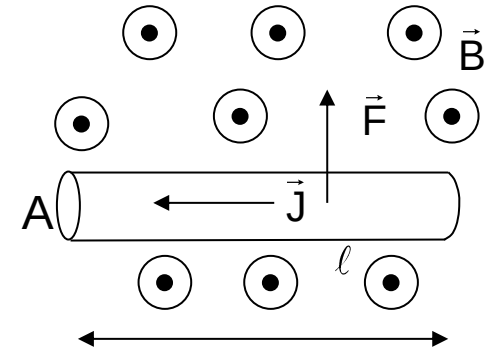


Ursprünglich definiert über Kraft auf Leiter, durchflossen von Strom I

$$\vec{F} = \ell \cdot A \cdot (\vec{j} \times \vec{B})$$

$$\begin{aligned} &= \ell \cdot A \cdot \rho_{\text{el}} (\vec{v} \times \vec{B}) \\ &= \ell \cdot A \cdot \frac{Q}{\ell \cdot A} (\vec{v} \times \vec{B}) \\ &= Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow |\vec{F}| = \ell \cdot I \cdot |\vec{B}|$$



$$\dim(\vec{B}) = \frac{\text{Ns}}{\text{As} \cdot \text{m}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{W} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{V} \cdot \text{A} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}^2} = \boxed{\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}} = \text{T}; \quad \text{Tesla; Erdfeld} \approx 50 \mu\text{T}$$

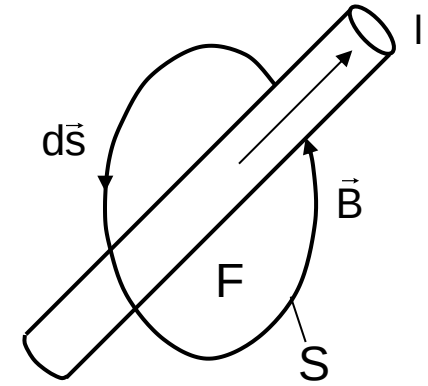
Magnetische stationäre Flussdichte $\vec{B}$:

erzeugt durch alle Ströme (frei und gebunden)

Maxwell: $\boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t}$

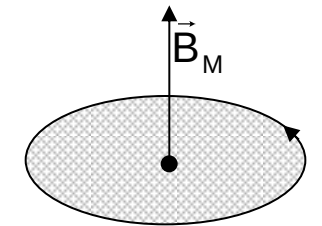
$$\partial / \partial t = 0 \rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Leftrightarrow \int_F \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{f} = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_F \vec{J} \cdot d\vec{f}}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad \text{Permeabilitätskonstante des Vakuums}$$



Magnetisierung $\vec{B}_M$:

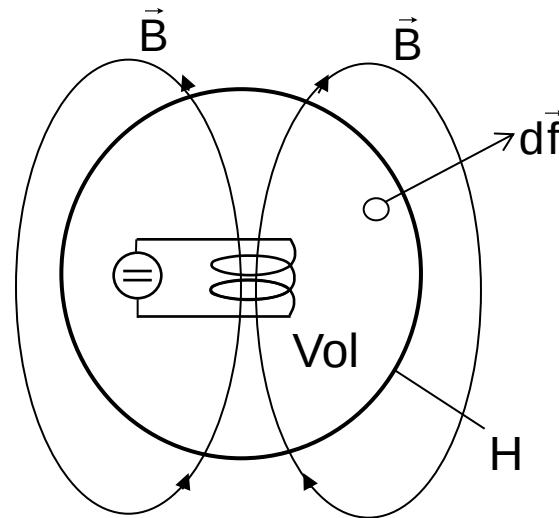
erzeugt durch den gemittelten summierten Beitrag aller atomaren Kreisströme der um Atomkerne kreisenden Elektronen



Mikroskopischer
Beitrag der
Magnetisierung

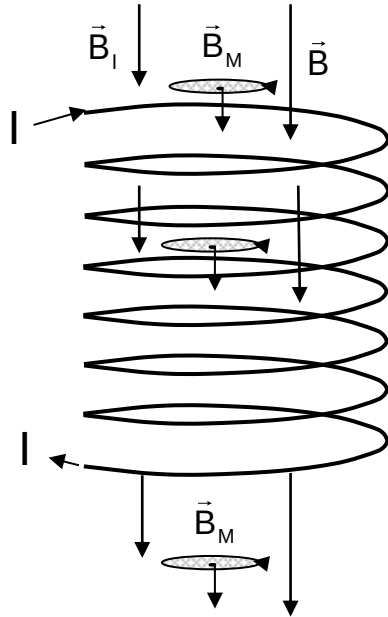
Quellenfreiheit des Magnetfeldes $\vec{B}$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0} \quad \rightarrow \quad \int_{\text{vol}} \operatorname{div} \vec{B} \, dv = \oint_H \vec{B} \cdot d\vec{f} = 0$$



Durch die Hüllfläche H des Volumens Vol gehen genausoviel Feldlinien des Magnetfeldes $\vec{B}$ hinein wie hinaus: Die Bilanz ist Null.
→ Magnetfelder haben keinen Anfang, sondern sind immer geschlossene Feldlinien.

Zusammenspiel von freien Strömen und atomaren Kreisströmen



Überlagerung

- des durch freie Ströme I erzeugten Feldes $\vec{B}_I$
- und der durch gebundene atomare Kreisströme erzeugten Magnetisierung $\vec{B}_M$ (bzw. $\vec{M}$)

liefert für das effektive, messbare Gesamtfeld $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \vec{B}_I + \vec{B}_M$$

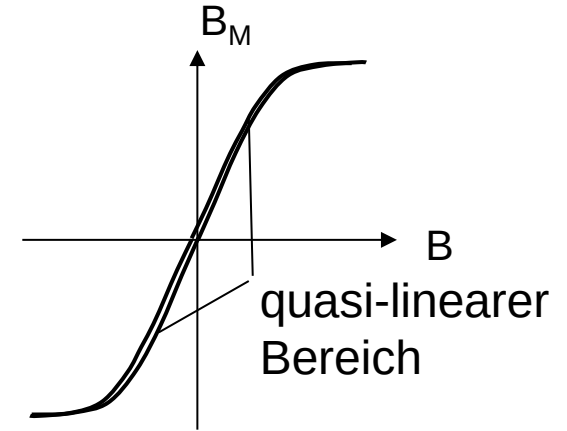
Die gemeinsame Wirkung äußerer freier Ströme und atomarer, gebundener Kreisströme resultiert im messbaren Gesamtfeld.

5.2 Zusammenhang zwischen $\vec{H}$ und $\vec{B}$ - Materialgleichungen

z.B. Ferromagnete:

$$\vec{B} = \vec{B}_I + \vec{B}_M$$

Materialgleichung,
allgemein gültig, nicht zwingend linear



Im Falle linearer Abhängigkeit zwischen $\vec{B}_M$ und $\vec{B}$ gilt

$\vec{B}_M = \chi_B \vec{B}$ Proportionalitätskonstante χ_B (experimentell bestimmt)

$$\rightarrow \vec{B} = \vec{B}_I + \chi_B \vec{B}$$

$$\rightarrow \vec{B} = \underbrace{\frac{1}{1 - \chi_B}}_{\mu_r} \vec{B}_I \quad \mu_r \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{1 - \chi_B}$$

$$\vec{B} = \mu_r \vec{B}_I$$

Zusammenhang der historischen Größen $\vec{H}$, $\vec{M}$ mit $\vec{B}_I$, $\vec{B}_M$ und $\vec{B}$:

Historische Definition:

Magnetische Feldstärke $\vec{H}$ und Magnetisierung $\vec{M}$:

$$\vec{H} \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\vec{B}_I}{\mu_0} \quad \vec{M} \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\vec{B}_M}{\mu_0}$$

Mit

$$\vec{B} = \vec{B}_I + \vec{B}_M$$

ergibt sich die bekannte Schreibweise der Materialgleichung:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Im Falle eines linearen Zusammenhangs zwischen $\vec{B}_M$ und $\vec{B}$ mit $\vec{B} = \mu_r \vec{B}_I$

ergibt sich mit obiger Definition für $\vec{H}$ die bekannte Schreibweise

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

Ziel: Umgehung der Berücksichtigung atomarer Ringströme

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_{\text{frei}} + \vec{J}_{\text{atom}})$$

$$\vec{B} = \vec{B}_I + \vec{B}_M = ?$$

$\vec{J}_{\text{frei}}$: freie Ströme ungebundener Ladungen

$\vec{J}_{\text{atom}}$: Kreisströme innerhalb von Atomen

Superposition: $\text{rot } \vec{B}_I = \mu_0 \vec{J}_{\text{frei}}$

$$\text{rot } \vec{B}_M = \mu_0 \vec{J}_{\text{atom}}$$

$\vec{J}_{\text{frei}}$ ist bekannt; damit lässt sich $\vec{B}_I$ berechnen.

$\vec{J}_{\text{atom}}$ ist nicht im Detail bekannt; damit ist $\vec{B}_M$ nicht berechenbar.

Bei linearer Abhängigkeit zwischen $\vec{B}$ und $\vec{B}_I$ bekommen wir

$\vec{B} = \mu_r \vec{B}_I$, wobei μ_r den Anteil von $\vec{B}_M$ am Gesamtfeld beinhaltet.

Mit der Definition $\vec{H} = \vec{B}_I / \mu_0$ ergibt sich

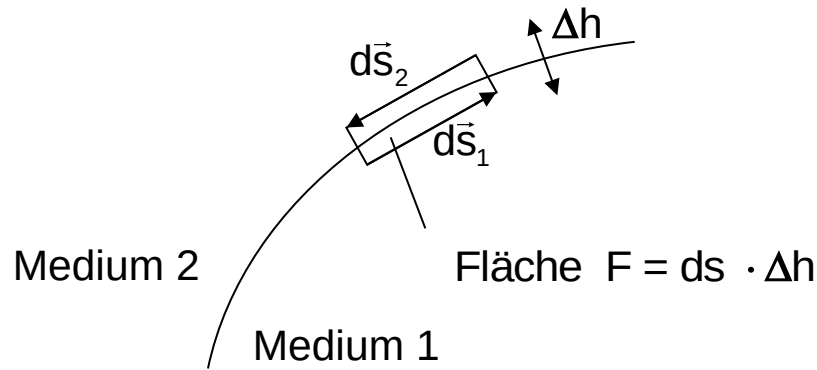
$$\boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_{\text{frei}}}$$

$\leftrightarrow$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}}$$

Zur Berechnung von B sind jetzt nur noch freie Ströme, aber keine atomaren Ringströme mehr nötig.

5.3 Übergänge an Grenzflächen



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int \vec{J} \cdot d\vec{f} \quad \text{stationärer Fall}$$

Grenzübergang $\Delta h \rightarrow 0$; keine Oberflächenströme

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \vec{H}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \vec{H}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \int_{\Delta h \rightarrow 0} \vec{J} \cdot d\vec{f} = 0$$

Aufteilung in Tangential- und Normalkomponenten:

$$\vec{H}_i = H_{ti} \vec{e}_t + H_{ni} \vec{e}_n \quad i = 1, 2$$

Wegelemente $d\vec{S}_i$:

$$d\vec{S}_1 = ds \cdot \vec{e}_t$$

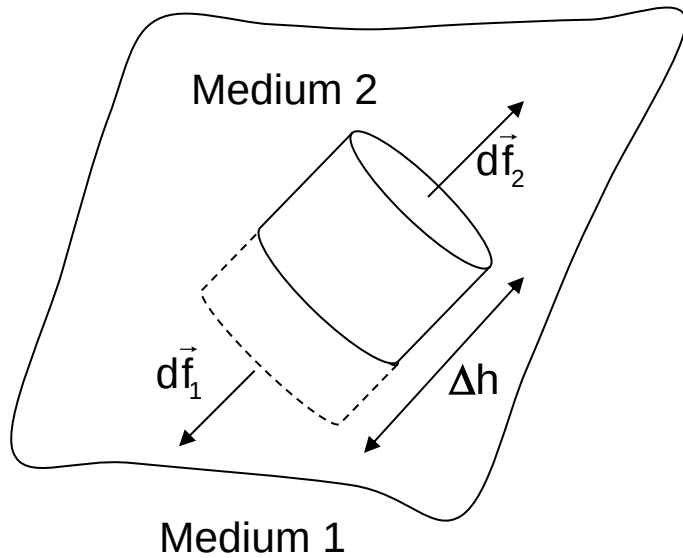
$$d\vec{S}_2 = ds \cdot (-\vec{e}_t)$$

$$\rightarrow \vec{H}_1 \cdot d\vec{S}_1 = (H_{t1} \vec{e}_t + H_{n1} \vec{e}_n) \cdot ds \vec{e}_t = H_{t1} ds$$

$$\rightarrow \vec{H}_2 \cdot d\vec{S}_2 = -H_{t2} \cdot ds$$

$$\rightarrow H_{t1} \cdot ds - H_{t2} \cdot ds = 0 \rightarrow \boxed{H_{t1} = H_{t2}}$$

Die Tangentialkomponente der magn. Feldstärke (bei Abwesenheit von Oberflächenströmen) ist stetig.



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{f} = 0$$

Grenzübergang $\Delta h \rightarrow 0$

Aufteilung in Tangential- und Normalkomponenten:

$$\vec{B}_i = B_{ti} \vec{e}_t + B_{ni} \vec{e}_n \quad i = 1, 2$$

Oberflächenelemente $d\vec{f}$:

$$\text{oben: } d\vec{f} = df \cdot \vec{e}_n$$

$$\text{unten: } d\vec{f} = df (-\vec{e}_n)$$

$$\text{Rand: } \Delta h \rightarrow 0 \rightarrow F_{\text{Rand}} = 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{f} = B_{n2} df - B_{n1} df = 0 \rightarrow \boxed{B_{n1} = B_{n2}}$$

Die Normalkomponente der magn. Flussdichte ist an Grenzflächen stetig.

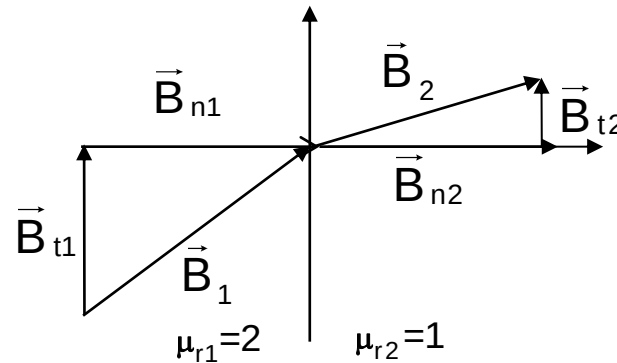
Vorausgesetzt $\vec{B} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}$ und keine Oberflächenströme

$$B_{n2} = B_{n1}$$

$$H_{t2} = H_{t1}$$

$$\frac{B_{t2}}{\mu_{r2}} = \frac{B_{t1}}{\mu_{r1}}$$

$$B_{t2} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}} \cdot B_{t1}$$



5.4 Ferromagnetika

Starke magnetische Momente mit starker Kopplung

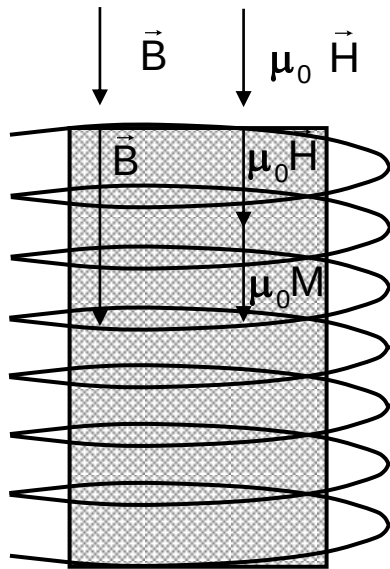
Spontane Magnetisierung großer Bereiche
unterhalb T_c : Curie Temperatur

Ungerade Elektronenzahl, überschüssiges
„d - Elektron“.

Cr, Mn, Fe, Co, Ni....

Magnetit Fe_3O_4

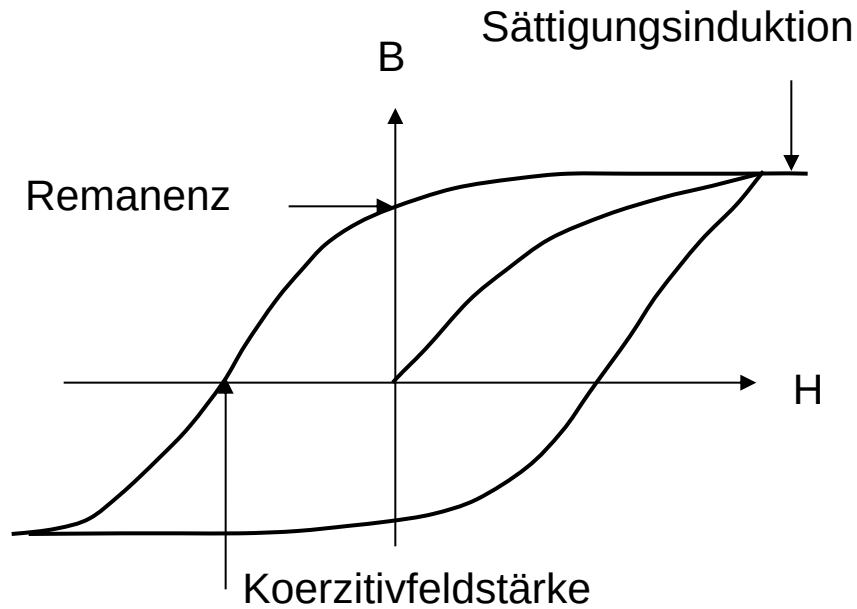
Stark abhängig von Zulegerungen!



$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

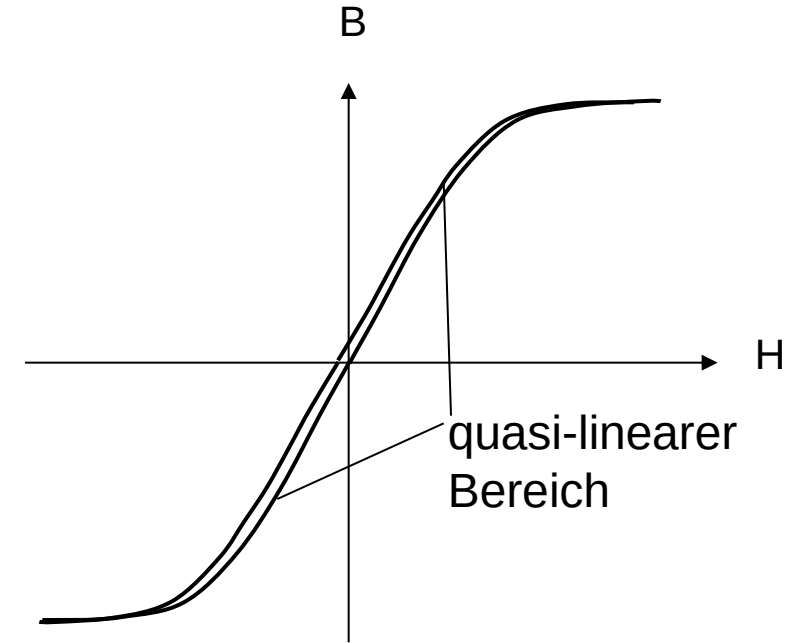
↓
durch Spulenstrom I erzeugt (kann auch Null sein !)

Hysterese Kurve:



Hartmagnetische Stoffe:

- große Hysterese,
- gute Permanentmagnete (Alnico, CoSm)



Weichmagnetische Stoffe:

- kleine Hysterese
- gute Abschirmmaterialien
- gute Trafokerne (Permalloy 80% Ni, 20% Fe)

Anfangspermeabilität bis zu $\mu_r \approx 250\,000$

Dynamoblech $\mu_r \approx 1\,000$

5.5 Durchflutungsgesetz und Symmetrie

1. Beispiel: Magnetfeld eines stromdurchflossenen Drahtes

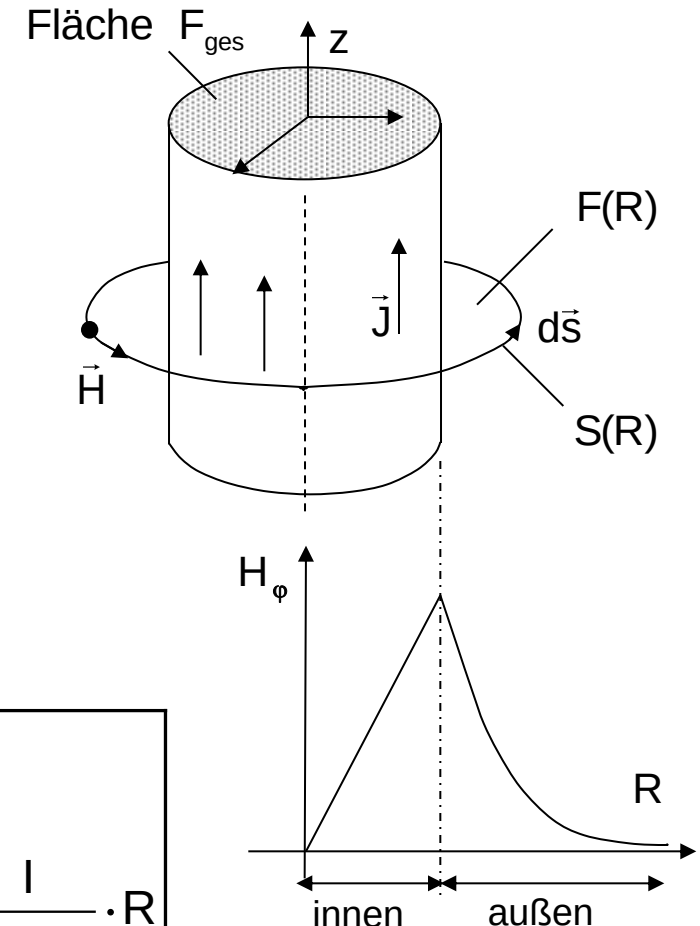
$$\vec{J} = 0 \cdot \vec{e}_r + 0 \cdot \vec{e}_\varphi + J_z \cdot \vec{e}_z$$

Symmetrie $\Rightarrow \vec{H} = H_\varphi(R) \cdot \vec{e}_\varphi$

$$\oint_{S(R)} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_{F(R)} \vec{J} \cdot d\vec{f} \quad \text{Maxwell}$$

$$\begin{aligned} \oint_{S(R)} \vec{H} d\vec{S} &= \oint_{S(R)} (H_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi) \cdot (R d\varphi \vec{e}_\varphi) \\ &= \oint_{S(R)} H_\varphi(R) \cdot R \cdot d\varphi = 2 \cdot \pi H_\varphi(R) \cdot R \end{aligned}$$

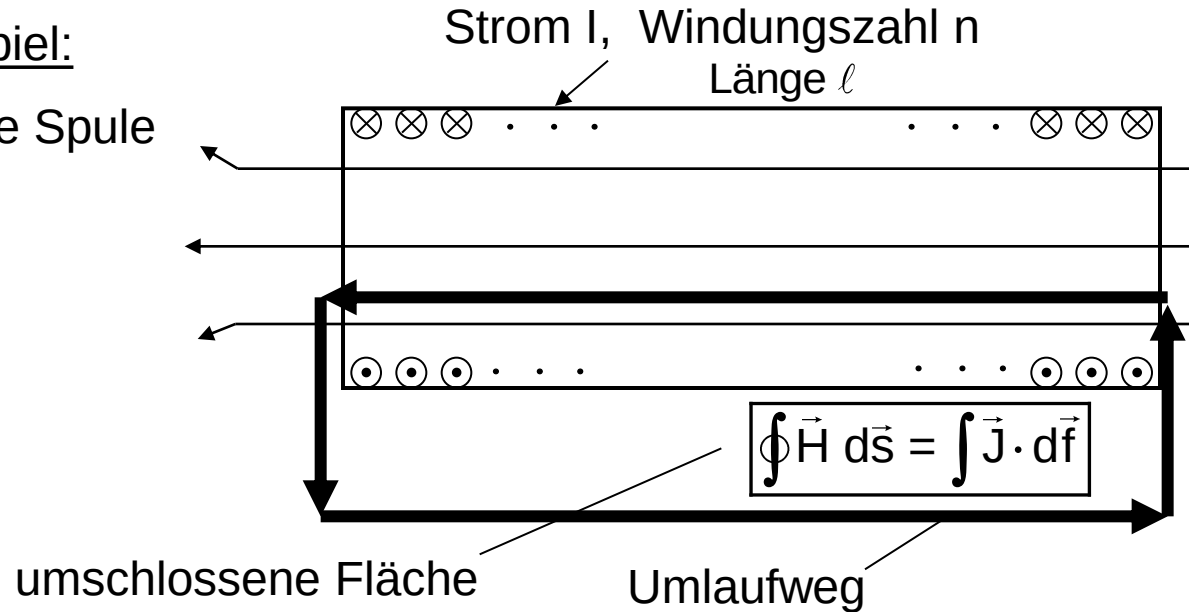
außen:	$\int_{F(R)} \vec{J} d\vec{f} = I \Rightarrow 2\pi H_{\varphi a}(R) \cdot R \Rightarrow H_{\varphi a}(R) = \frac{I}{2\pi R}$
innen:	$\int_{F(R)} \vec{J} d\vec{f} = \frac{I}{F_{\text{ges}}} \cdot \pi \cdot R^2 \Rightarrow H_{\varphi i}(R) = \frac{I \cdot \pi \cdot R^2}{F_{\text{ges}} \cdot 2\pi R} = \frac{I}{2 \cdot F_{\text{ges}}} \cdot R$



5.6 Berechnung von $\vec{H}$ in verschiedenen Spulenkonfigurationen

2. Beispiel:

lange Spule



Näherung:

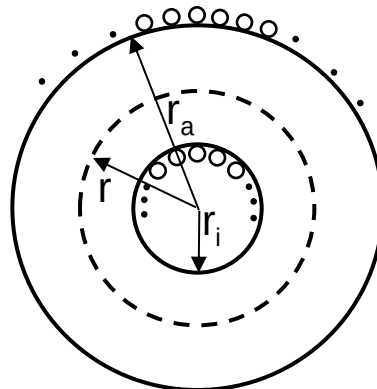
- innen Feld homogen
→ $H = \text{const.}$
- außen Feld Null
→ $H = 0$

$$\rightarrow H \cdot \ell \approx n \cdot I$$

$$\Rightarrow H_z = \frac{n \cdot I}{\ell}$$

3. Beispiel:

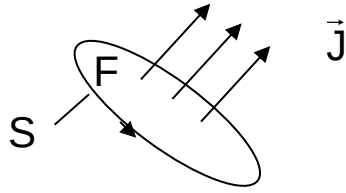
Magnetfeld
einer
Toroidspule



In der Zentralebene $r_i < r < r_a$:

$$\left. \begin{aligned} \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} &= n \cdot I \\ &= H_\phi(r) \cdot 2\pi r \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_\phi(r) = \frac{n \cdot I}{2\pi r}$$

Innen $0 < r < r_i$ und außen $r > r_a$: $H_\phi = 0$



5.7 Vektorpotential

Ziel: Berechnung von $\vec{H}$ aus $\vec{J}$

$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_F \vec{J} \cdot d\vec{f}$$

wenn $\vec{H}$ konstant entlang Integrationsweg $d\vec{s}$

$$\text{z.B. } H_\phi \oint_S ds_\phi = \int_F \vec{J} \cdot d\vec{f} \quad \rightarrow \quad H_\phi = \frac{\int_F \vec{J} \cdot d\vec{f}}{\oint_S ds_\phi}$$

funktioniert nicht, wenn $\vec{H}$ variabel entlang Integrationsweg

Versuch differentielle Form:

$$\boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{J}} \quad \leftrightarrow \quad \int_F \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{f} = \oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_F \vec{J} \cdot d\vec{f}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= J_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= J_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= J_z \end{aligned} \right\}$$

-gekoppeltes System
partieller DGLn

-keine analytischen
Lösungen bekannt

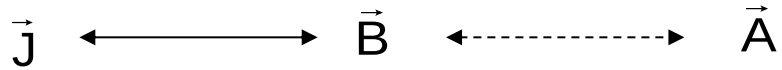
-numerisch schwierig

Einführen
magn. Vektorpotential $\vec{A}$

analog zum
el.stat. Potential Φ

Ziel:

Verknüpfung von Magnetfeld mit Strömen



el. Stromdichte Magnetfeld magn. Vektorpotential

Stationäre Verhältnisse $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$:

Für magn. Feld gilt:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$$

Maxwell

Def. $\rightarrow$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{A} \stackrel{\text{Def}}{=} \vec{B}}$$

$\uparrow$ magn. Vektorpotential $\vec{A}$

Definition erlaubt, da immer gilt

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$$

für beliebige Vektorfunktionen $\vec{A}$

5.7.1 Definition, Coulomb-Eichung

Definition: $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

vergl. $\vec{E} = - \text{grad } \Phi$

$$E_x = - \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$E_y = - \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$E_z = - \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{B} &= \text{div } (\text{rot } \vec{A}) \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= \text{rot } (\text{grad } \Phi) \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \text{grad } \Psi \\ \text{rot } \vec{A}' &= \text{rot } \vec{A} = \vec{B} \end{aligned}$$

beliebige Eichung von $\vec{A}$

Coulomb Eichung: $\text{div } \vec{A} = 0$

$$\Phi' = \Phi + C$$

$$\text{grad } \Phi' = \text{grad } \Phi$$

beliebige Lage des Nullpunktes von Φ

Beweis für Coulomb-Eichung

Es besteht der Freiheitsgrad der Hinzufügung einer Integrationskonstanten, da das physikalisch reale Magnetfeld $\vec{B}$ durch Differenzieren (Rotor-Bildung) des magnetischen Vektorpotentials beschrieben wird.

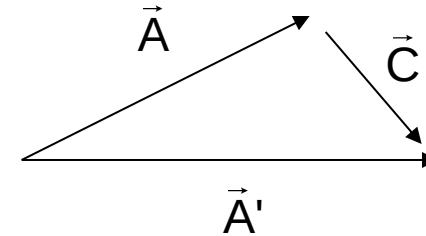
$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r})}$$

Vieldeutigkeit von $\vec{A}$: $\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \vec{C}(\vec{r})$

mit $\vec{C}(\vec{r}) = \text{grad } \psi(\vec{r})$

Beweis:

beliebige Funktion $\uparrow$



$$\vec{B}'(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}'(\vec{r})$$

$$= \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) + \underbrace{\text{rot grad } \psi(\vec{r})}_{\equiv 0}$$

$$= \vec{B}(\vec{r})$$

$\vec{A}(\vec{r})$ repräsentiert das gleiche $\vec{B}(\vec{r})$ wie das mit $\text{grad } \psi(\vec{r})$ modifizierte $\vec{A}'(\vec{r})$

→ $\boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \psi}$ Freiheitsgrad für ψ , frei wählbar

Annahme: $\vec{A}(\vec{r})$ sei so, dass $\text{div } \vec{A}(\vec{r}) = V_A(\vec{r}) \neq 0$

Wunsch: $\text{div } \vec{A}(\vec{r}) = 0$

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \vec{C}(\vec{r}) \quad \text{mit } \vec{C}(\vec{r}) = \text{grad } \psi(\vec{r})$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{div } \vec{A}'(\vec{r}) &= \text{div } \vec{A}(\vec{r}) + \text{div } \vec{C}(\vec{r}) \\ &= V_A(\vec{r}) + V_C(\vec{r}) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \swarrow \\ \text{Skalare} \end{array}$$

$$\rightarrow V_C(\vec{r}) \stackrel{!}{=} -V_A(\vec{r})$$

$$\rightarrow \text{div } \vec{C}(\vec{r}) = \text{div grad } \psi(\vec{r}) \stackrel{!}{=} -V_A(\vec{r})$$

$$\rightarrow \Delta \psi(\vec{r}) = -V_A(\vec{r}) \quad \text{Poisson DGL. Bestimmungsgleichung für } \psi$$

$$\rightarrow \psi(\vec{r}) = \psi_A(\vec{r}) \quad \text{Lösung } \psi_A(\vec{r}) \text{ der Poisson Gleichung}$$

$$\rightarrow \vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \text{grad } \psi_A(\vec{r})$$

$$\rightarrow \text{div } \vec{A}'(\vec{r}) = \text{div } \vec{A}(\vec{r}) + \text{div grad } \psi_A(\vec{r})$$

$$= V_A(\vec{r}) - V_A(\vec{r}) = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\text{div } \vec{A}'(\vec{r}) = 0} \quad \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}'(\vec{r})}$$

Es existiert immer ein $\vec{A}$, welches $\vec{B}$ richtig beschreibt, und für welches $\text{div } \vec{A} = 0$ gilt.

Es existiert unter den vielen, möglichen Vektorpotentialen immer ein Vektorpotential $\vec{A}$, welches das Magnetfeld $\vec{B}$ richtig beschreibt, und für welches $\text{div } \vec{A} = 0$ gilt.

Hätte man ein $\vec{A}'$ mit $\text{div } \vec{A}' \neq 0$
so ließe sich ein ψ über $\Delta\psi = \text{div } \vec{A}'$ finden, welches das
richtige $\vec{A}$ mittels $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \psi$ liefert, für welches $\text{div } \vec{A} = 0$ gilt.

Berechnet man aber $\vec{A}$ aus den Maxwell-Gleichungen, indem man bei der
Berechnung $\text{div } \vec{A} = 0$ bereits nutzt, dann erhält man das erwünschte
einfachere und auch (siehe oben) erlaubte Ergebnis.

5.7.2 Differentialgleichung des magnetischen Vektorpotentials

Voraussetzung : Medium linear und isotrop $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Maxwell: } \text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \cancel{\frac{\partial D}{\partial t}} \\ \text{Definition: } \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \end{array} \right\} \rightarrow \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \cdot \text{rot } \vec{A} \right) = \vec{J}$$

$\mu = \text{stückweise konstant}$

$$\text{rot} (\text{rot } \vec{A}) = \mu \cdot \vec{J}$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad } \cancel{\text{div } \vec{A}} - \Delta \vec{A}$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta \vec{A} = - \mu \cdot \vec{J}}$$

Coulomb – Eichung!

5.7.2.1 Poisson – Gleichung für das Vektorpotential

in kartesischen
Koordinaten

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = - \mu J_x \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = - \mu J_y \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = - \mu J_z \end{array} \right\}$$

- 3 ungekoppelte partielle DGln:
- Poisson Gleichungen
- analytische Lösung vorhanden:
- Coulomb Integral

5.7.2.2 Coulomb-Integral als Lösung der Poisson-Gleichung

Differential-Gleichung: $\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu \cdot \vec{J}(\vec{r})$

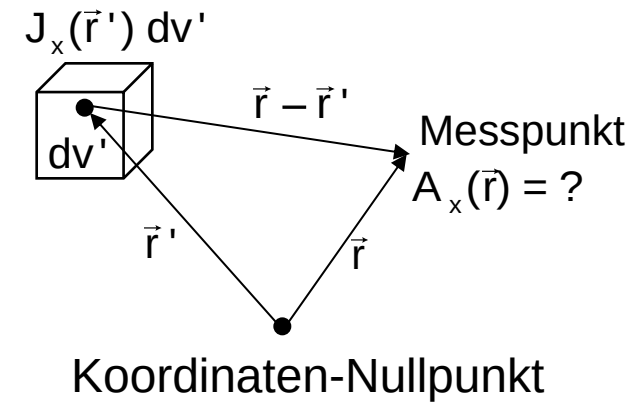
Analytische Lösung:

$$\left. \begin{array}{l} A_x, J_x \\ A_y, J_y \\ A_z, J_z \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} A_x(\vec{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{J_x(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \\ A_y(\vec{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{J_y(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \\ A_z(\vec{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{J_z(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \end{aligned}$$

x, y, z - Komponenten
unabhängig voneinander;
daher einzeln lösbar

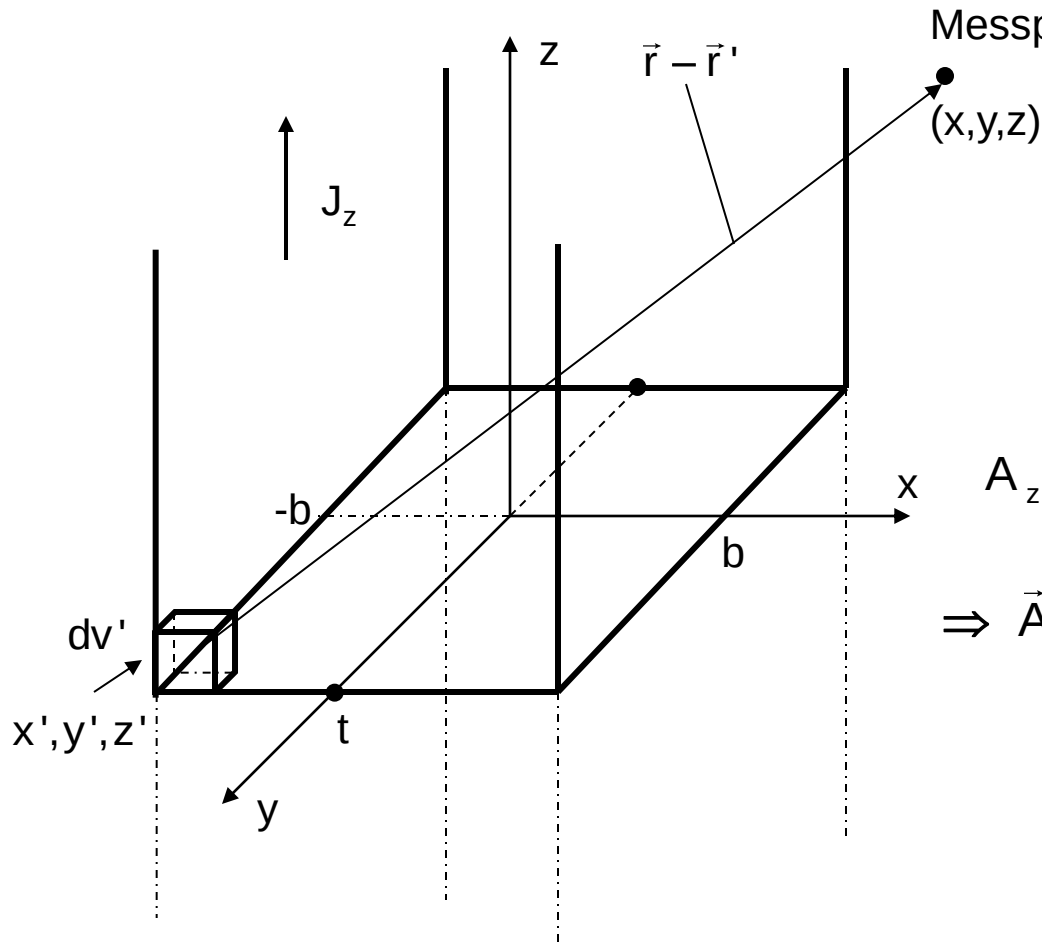
„laufender“ Punkt



Beispiel für

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

Leiter mit rechteckigem Querschnitt,
Vektorpotential am Messpunkt P außerhalb des Leiters.



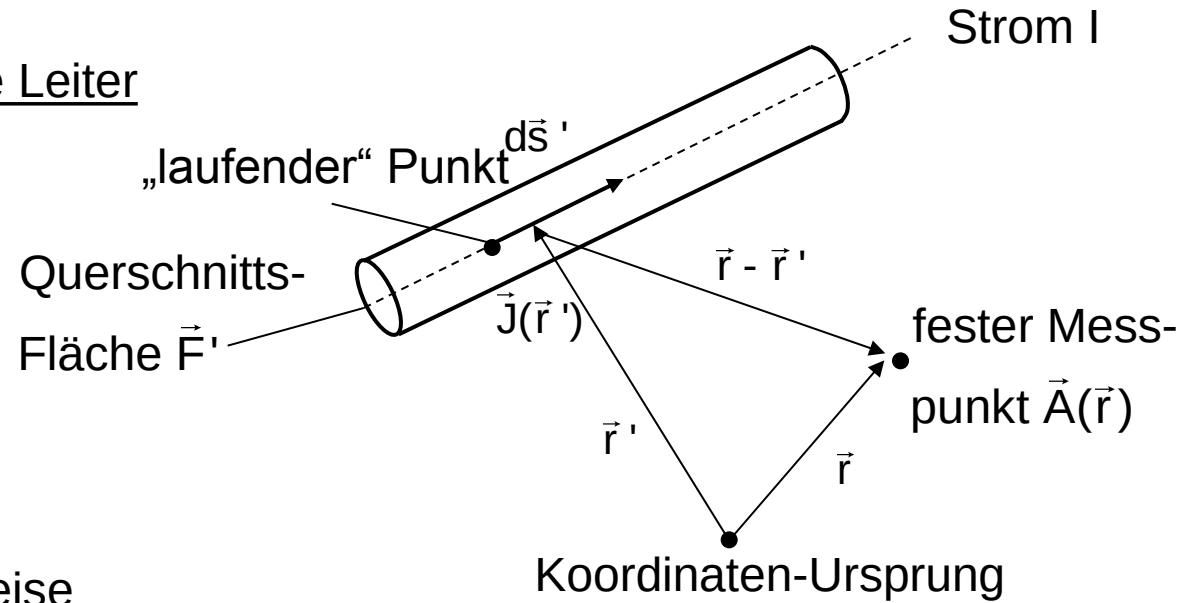
$$J_z = \text{const.}$$

$$A_z(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} J_z \cdot \int_{-b}^b \int_{-t}^t \int_0^h \frac{dx' dy' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = A_z(x, y, z) \vec{e}_z$$

Das Integral wird hier nicht weiter aufgelöst.

Spezialfall:
Magn. Vektorpotential $\vec{A}$ für dünne Leiter



für dünne Leiter gilt näherungsweise

$$\vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{v}' = \vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{F}' \cdot d\vec{s}' = I \cdot d\vec{s}'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

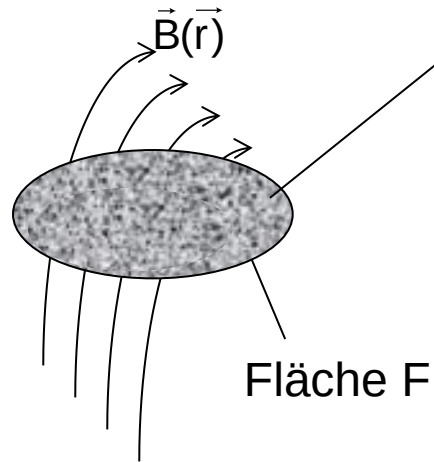
Allgemeiner Fall

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \int_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Spezialfall für dünne Leiter

5.7.2.3 Magnetischer Fluss und Vektorpotential

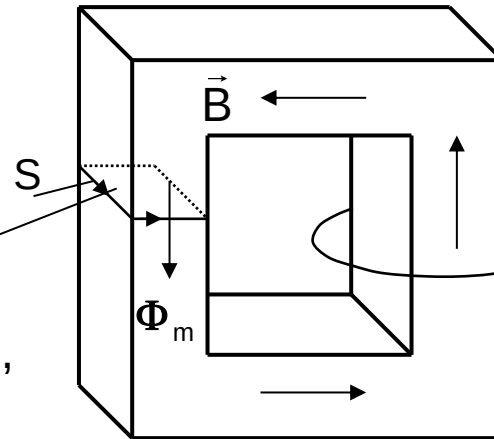
Magnetischer Fluss Def: $\Phi_m = \int_F \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}$ $\dim(\Phi_m) = \boxed{\text{Vs}} = \text{Weber}$



$$\begin{aligned}\Phi_m &= \int \vec{B} d\vec{f} & \# \quad \vec{B} &= \text{rot } \vec{A} \\ \Phi_m &= \int \text{rot } \vec{A} d\vec{f} & \# \quad &\text{Stokes} \\ \Phi_m &= \oint_S \vec{A} d\vec{s}\end{aligned}$$

wäre hier eine Leiter-
schleife mit 1 Windung,
dann ergäbe sich eine
Induktionsspannung

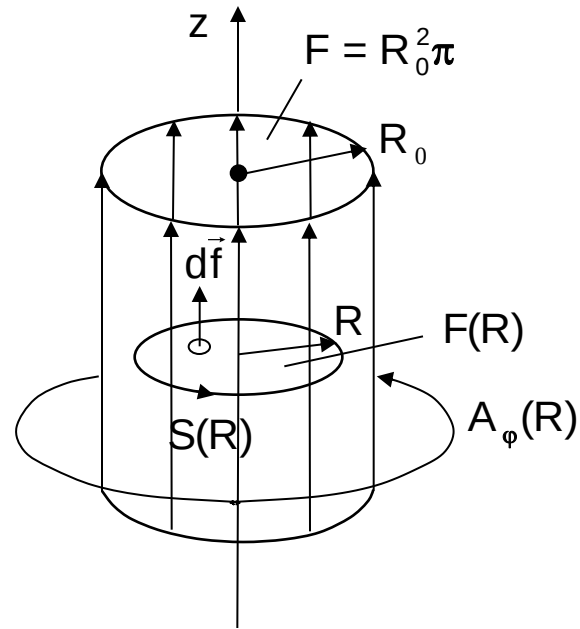
$$U_{\text{ind}} = \frac{-d\Phi_m}{dt}$$



außen gilt:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= 0! \\ \vec{A} &\neq 0!\end{aligned}$$

Beispiel: Vektorpotential eines zylindrischen homogenen Magnetfeldes



$$\vec{B} = \begin{cases} B_0 \vec{e}_z & R \leq R_0 \\ 0 & R > R_0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\Phi_{\text{m ges}} = B_0 R_0^2 \pi} \leftarrow \Phi_{\text{m}} \stackrel{\text{Def.}}{=} \int_{\text{F}} \vec{B} \cdot d\vec{f}$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\rightarrow \int_{\text{F(R)}} \vec{B} \cdot d\vec{f} = \int_{\text{F(R)}} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{f} = \oint_{\text{S(R)}} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \Phi_{\text{m}}(R)$$

Berechnung von $\vec{A}$ aus $\vec{B}$

Innen $R \leq R_0$

$$\int_{F(R)} (\vec{B}_0 \vec{e}_z) \cdot (d\vec{f} \vec{e}_z) = B_0 R^2 \pi$$

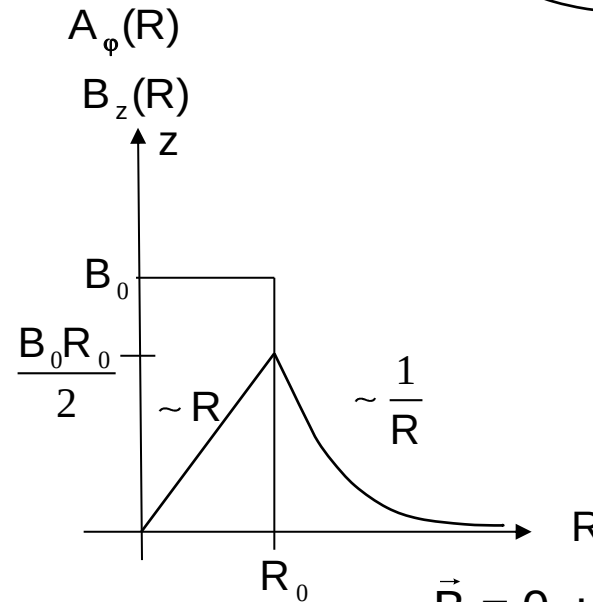
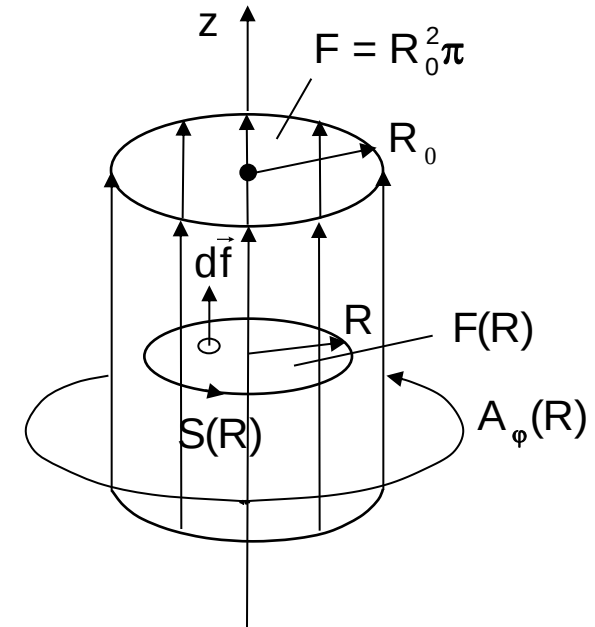
$$= \oint_{C(R)} (A_\varphi(R) \vec{e}_\varphi) \cdot (R d\varphi \vec{e}_\varphi) = A_\varphi(R) 2\pi R$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{A}(R) = \frac{B_0}{2} R \vec{e}_\varphi}$$

Außen $R > R_0$

$$\int_{F(R)} \vec{B} \cdot d\vec{f} = B_0 R_0^2 \pi = \Phi_{\text{m ges}}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{A}(R) = \frac{B_0 R_0^2}{2} \frac{1}{R} \vec{e}_\varphi}$$



$\vec{A}$ ist mathematisch
außerhalb der Spule
ungleich Null.

Trotzdem ist dort
keine messbare
physikalische
Größe:

$$\vec{B} = 0 \text{ und damit } \vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = 0$$

Umkehrung: Berechnung von $\vec{B}$ aus $\vec{A}$

Innen:

$$\begin{aligned}\vec{B}(R) &= \text{rot } \vec{A}(R) = \vec{e}_z \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R A_\varphi(R)) \right) \\ &= \vec{e}_z \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \cdot \frac{B_0}{2} R \right) \right) = \vec{e}_z \left(\frac{1}{R} \cdot \frac{B_0}{2} 2 R \right) = B_0 \vec{e}_z\end{aligned}$$

Außen:

$$\vec{B}(R) = \vec{e}_z \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \cdot \frac{B_0 R_0^2}{2} \frac{1}{R} \right) \right) = \vec{e}_z \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{B_0 R_0^2}{2} \right) \right) = 0$$

-außen messbares
phys.Feld $B = \text{Null}$

$$\begin{aligned}\int_{F(R>R_0)} \vec{B} \cdot d\vec{f} &= \Phi_{\text{m ges}} = \oint_{\underline{\underline{S(R>R_0)}}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_{2\pi} \left(\frac{B_0 R_0^2}{2} \frac{1}{R} \vec{e}_\varphi \right) \cdot (R d\varphi \vec{e}_\varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{B_0 R_0^2}{2} d\varphi = \underline{\underline{B_0 R_0^2 \pi = \Phi_{\text{m ges}}}}\end{aligned}$$

-außen nicht messbares
Vektorpot. ungleich Null

-Kenntnis von A außen
genügt, den Fluss
innen zu berechnen

5.8 Biot-Savart-Gesetz und Anwendung auf einfache Leitergeometrie

Ziel: direkte Berechnung von $\vec{B}$ aus $\vec{J}$ (ohne magnetisches Vektorpotential $\vec{A}$)

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'} \quad \text{Lösung der Poisson-Gleichung für } \vec{A}; \quad \vec{A} \text{ ist hier nur eine mathematische Zwischenlösung}$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot}_{(\vec{r})} \vec{A}(\vec{r})} \quad \# \text{ rot}_{(\vec{r})}: \text{differenziere bezüglich der ungestrichenen Koordinaten}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{B}(\vec{r}) &= \text{rot}_{(\vec{r})} \left\{ \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right\} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \text{rot}_{(\vec{r})} \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \text{rot}_{(\vec{r})} \vec{J}(\vec{r}') + \text{grad}_{(\vec{r})} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times \vec{J}(\vec{r}') \right) dV' \end{aligned}$$

Mathematik:
$\text{rot}(\Psi \cdot \vec{G}) = \Psi \cdot \text{rot } \vec{G} + \text{grad } \Psi \times \vec{G}$
 $\swarrow \Psi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{und} \quad \vec{G} = \vec{J}$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \operatorname{rot}_{(\vec{r})} \vec{J}(\vec{r}') + \operatorname{grad}_{(\vec{r})} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times \vec{J}(\vec{r}') \right) dv'$$

$$= \frac{\mu}{4\pi} \iiint \left(0 + \operatorname{grad}_{(\vec{r})} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times \vec{J}(\vec{r}') \right) dv' \quad \begin{array}{l} \swarrow \# \operatorname{rot}_{\vec{r}}(\vec{J}(\vec{r}')) = 0 \\ \vec{J}(\vec{r}') \text{ ist } \underline{\text{keine}} \text{ Funktion der} \\ \text{ungestrichenen Koordinate } \vec{r} \end{array}$$

$$= \frac{\mu}{4\pi} \iiint \left(- \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times \vec{J}(\vec{r}') \right) dv' \quad \longleftarrow \# \operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = - \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'}$$

Biot - Savart Gesetz

Damit ist das Feld $\vec{B}$ direkt aus der Stromdichte $\vec{J}$ durch Integration berechenbar.

Nebenrechnung

$$\text{grad } \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = ?$$

$$\vec{r}-\vec{r}' = (x-x') \vec{e}_x + (y-y') \vec{e}_y + (z-z') \vec{e}_z$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

$$= \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{\cdot}} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{\cdot}}$$

$$= \vec{e}_x \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}^3} 2(x-x') + \vec{e}_y \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{\cdot}^3} 2(y-y') + \vec{e}_z \dots$$

$$= -\vec{e}_x \frac{(x-x')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}^3} - \vec{e}_y \frac{(y-y')}{\sqrt{\cdot}^3} - \vec{e}_z \frac{(z-z')}{\sqrt{\cdot}^3}$$

$$= -\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

q.e.d.

für dünne Leiter gilt näherungsweise

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'$$

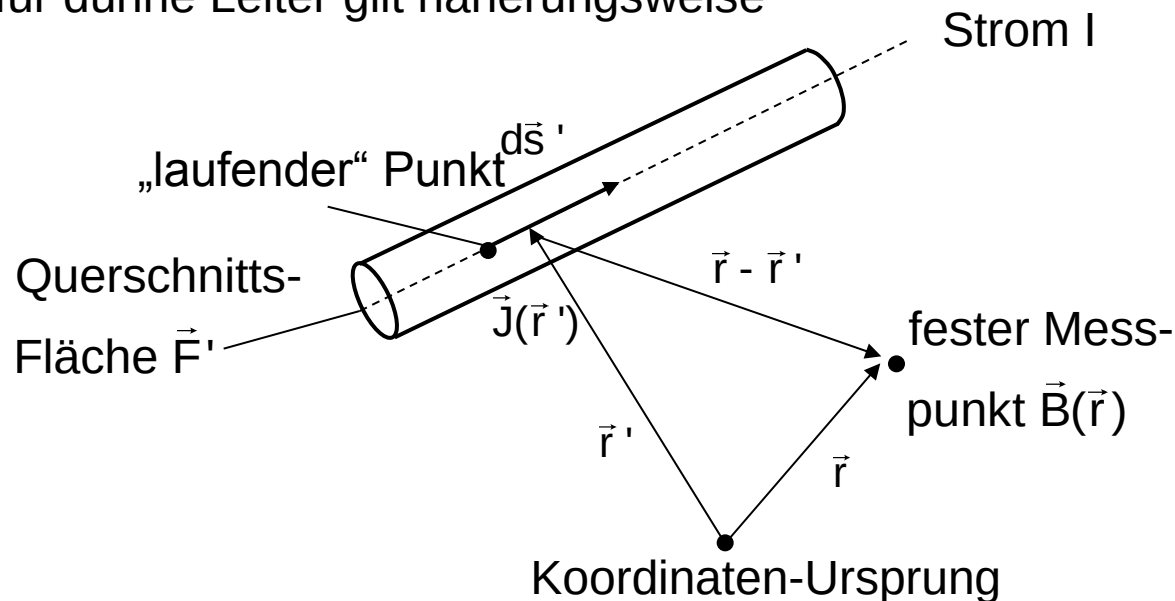
Biot - Savart

$$\vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{v}' = \vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{F}' \cdot d\vec{S}' = I \cdot d\vec{S}'$$

$$\rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\text{Leiter}} \frac{I \cdot d\vec{S}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \int \frac{d\vec{S}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Magnetfeld $\vec{B}$ als Funktion des Leitungsstroms I und der Leitergeometrie



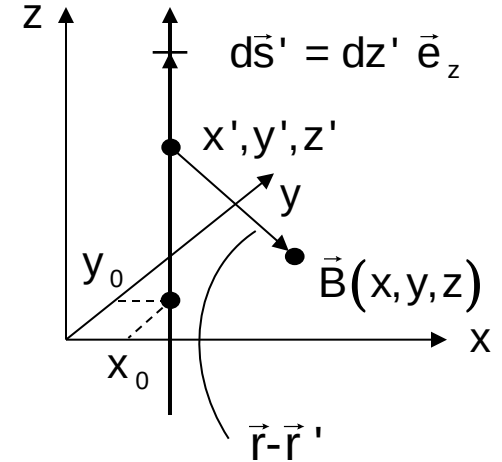
Beispiel: gerader Leiter in z-Richtung

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{d\vec{S}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_z \times \vec{e}_x &= \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_y &= -\vec{e}_x \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_z &= 0\end{aligned}$$

$$d\vec{S}' = dz' \vec{e}_z$$

$$\vec{r}' \Rightarrow \begin{cases} x' = x_0 \\ y' = y_0 \\ z' \end{cases} \begin{matrix} \text{fest} \\ \text{variabel} \end{matrix}$$



$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\vec{e}_z \times ((x-x_0) \vec{e}_x + (y-y_0) \vec{e}_y + (z-z') \vec{e}_z)}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z')^2)^{3/2}} dz'$$

$$= \frac{\mu I}{4\pi} \left(\vec{e}_y \int_{z_1}^{z_2} \frac{(x-x_0) dz'}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z')^2)^{3/2}} - \vec{e}_x \int_{z_1}^{z_2} \frac{(y-y_0) dz'}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z')^2)^{3/2}} + 0 \right)$$

speziell Draht auf z-Achse, d.h.

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0$$

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu I}{4\pi} \left(\vec{e}_y \int_{z_1}^{z_2} \frac{x \cdot dz'}{(x^2 + y^2 + (z-z')^2)^{3/2}} - \vec{e}_x \int_{z_1}^{z_2} \frac{y \cdot dz'}{(x^2 + y^2 + (z-z')^2)^{3/2}} \right)$$

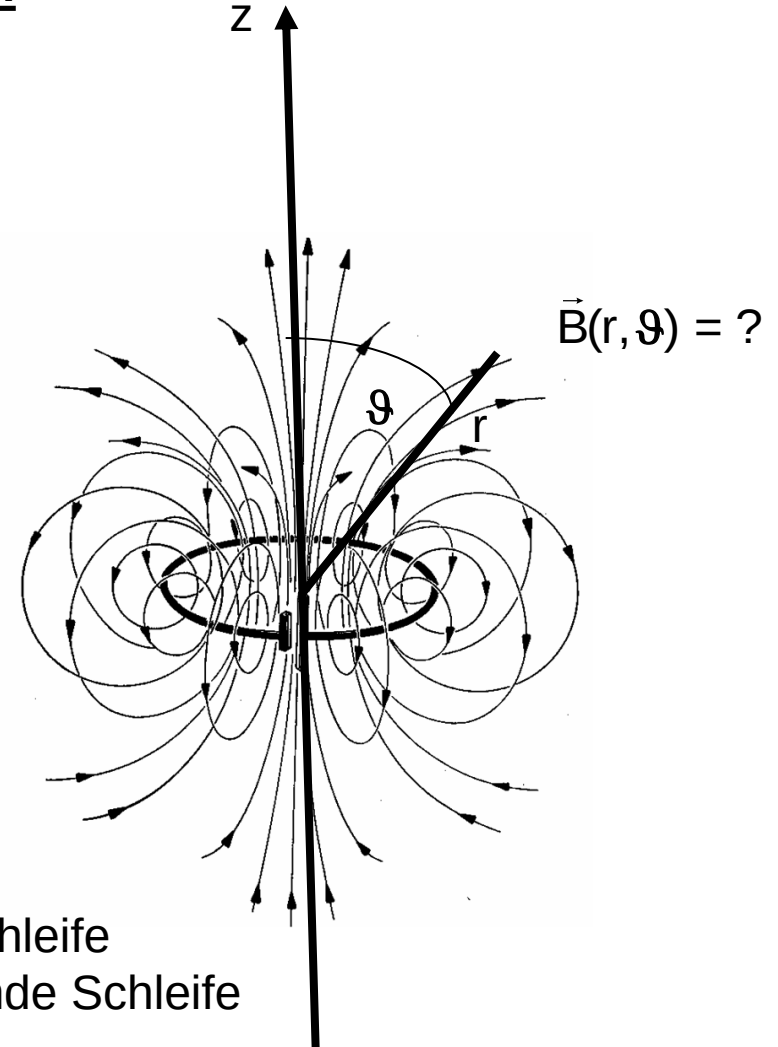
5.9 Magnetischer Dipol

Ziel:

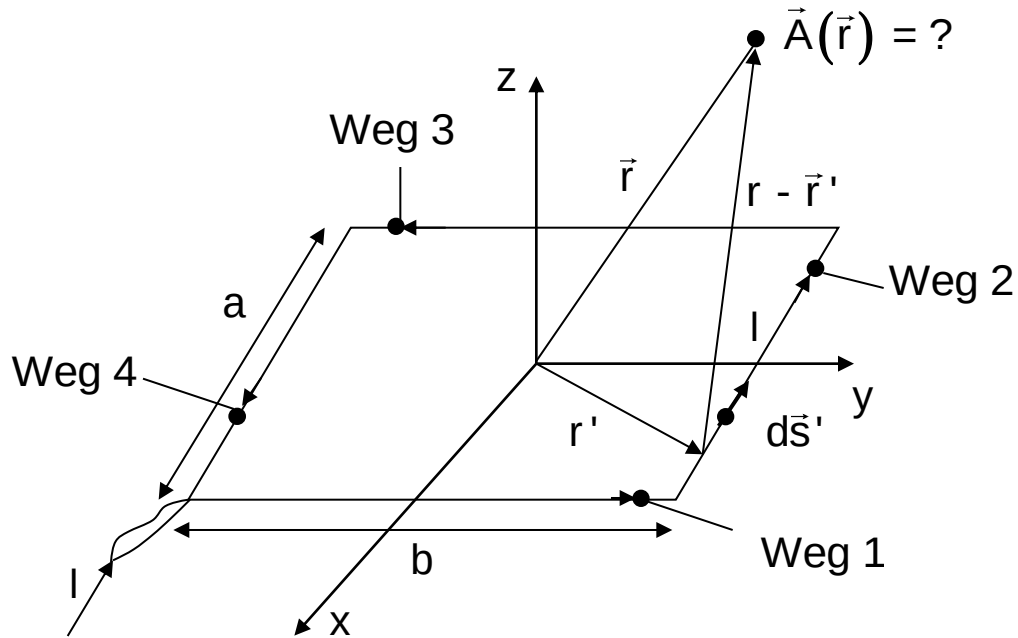
Berechnung des Magnetfeldes
des magnetischen Dipols $\vec{B}(r, \vartheta)$
in Abhängigkeit vom Abstand r
und dem Winkel ϑ

Methode:

- Vereinfachung durch Betrachtung einer rechteckigen an Stelle einer runden Leiterschleife
- Berechnung des Vektorpotentials in kartesischen Koordinaten
- Näherung für sehr kleine Abmessung der Leiterschleife
- Nachweis der Äquivalenz der Lösung auch für runde Schleife
- Transformation in Kugelkoordinaten
- Berechnung der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$



Vektorpotential einer rechteckigen Leiterschleife



kleine Schleife bei $z=0$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \int_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{S}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left(\int_{\text{Weg1}} \frac{dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{e}_y + \int_{\text{Weg2}} \frac{dx'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{e}_x + \int_{\text{Weg3}} \frac{dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{e}_y + \int_{\text{Weg4}} \frac{dx'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{e}_x \right)$$

$$A_x = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left(\int_{\text{Weg2}}^{-a/2} \frac{dx'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{\text{Weg4}}^{+a/2} \frac{dx'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad \text{und} \quad A_y = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left(\int_{\text{Weg1}}^{+b/2} \frac{dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{\text{Weg3}}^{-b/2} \frac{dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad \text{und} \quad A_z = 0$$

Berechnung für sehr kleine Schleife

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}}$$

wobei $z' = 0$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2 + z^2}}$$

wobei $x', y' \ll x, y$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xx' - 2yy'}}$$

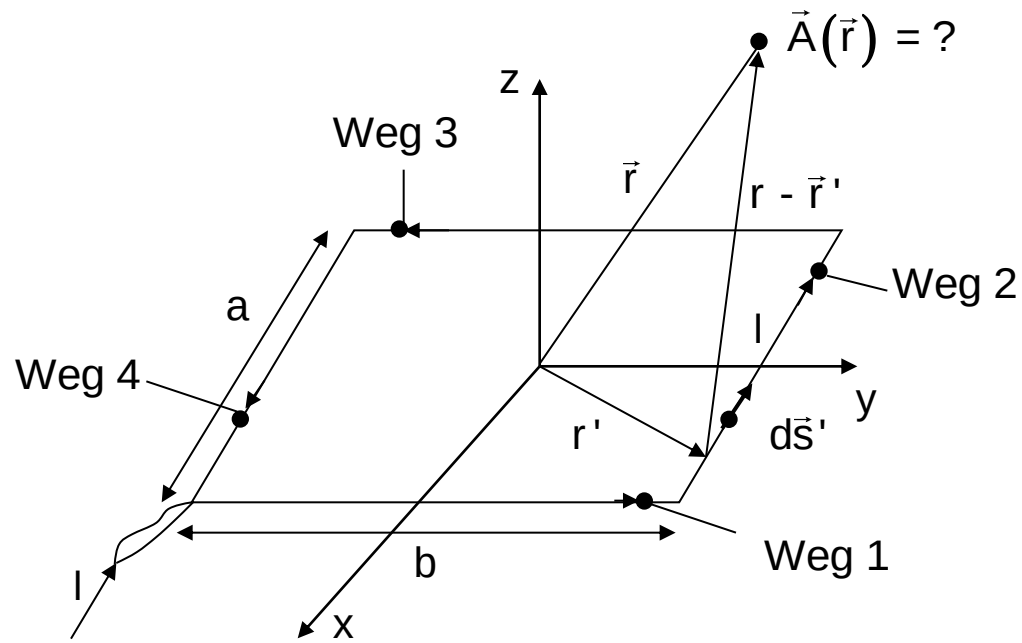
wobei $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

$$= \frac{1}{r \sqrt{1 - \frac{2xx' + 2yy'}{r^2}}}$$

Näherung $\frac{1}{\sqrt{1+\sigma}} \approx 1 - \frac{1}{2} \sigma$

$\sigma \ll 1$

$$\approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{xx' + yy'}{r^2} \right)$$



$$A_x = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left(\int_{\text{Weg2}}^{-a/2} \frac{dx'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \int_{\text{Weg4}}^{+a/2} \frac{dx'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)$$

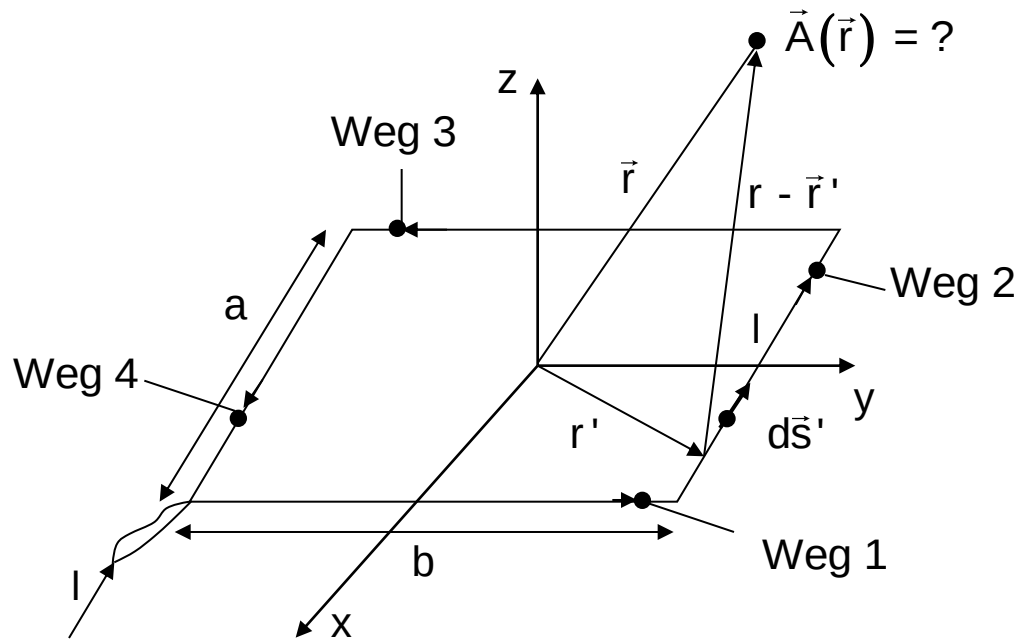
Weg 2: $y' = +b/2$

Weg 4: $y' = -b/2$

$$\rightarrow A_x = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left\{ \int_{+a/2}^{-a/2} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{x \cdot x' + y \cdot (+b/2)}{r^2} \right) dx' + \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{x \cdot x' + y \cdot (-b/2)}{r^2} \right) dx' \right\}$$

$$= \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \left(\frac{b}{2} \right) \cdot y \underbrace{\left\{ \int_{+a/2}^{-a/2} dx' - \int_{-a/2}^{+a/2} dx' \right\}}_{-2a} = -\frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot a \cdot b \cdot y$$

$a \cdot b = F \text{ (Fläche)}$



$$A_y = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left(\int_{\text{Weg1}}^{+b/2} \frac{dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{+b/2}^{-b/2} \frac{dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

Weg 1: $x' = +a/2$

Weg 3: $x' = -a/2$

$$\rightarrow A_y = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left\{ \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{x \cdot (+a/2) + y \cdot y'}{r^2} \right) dy' + \int_{+b/2}^{-b/2} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{x \cdot (-a/2) + y \cdot y'}{r^2} \right) dy' \right\}$$

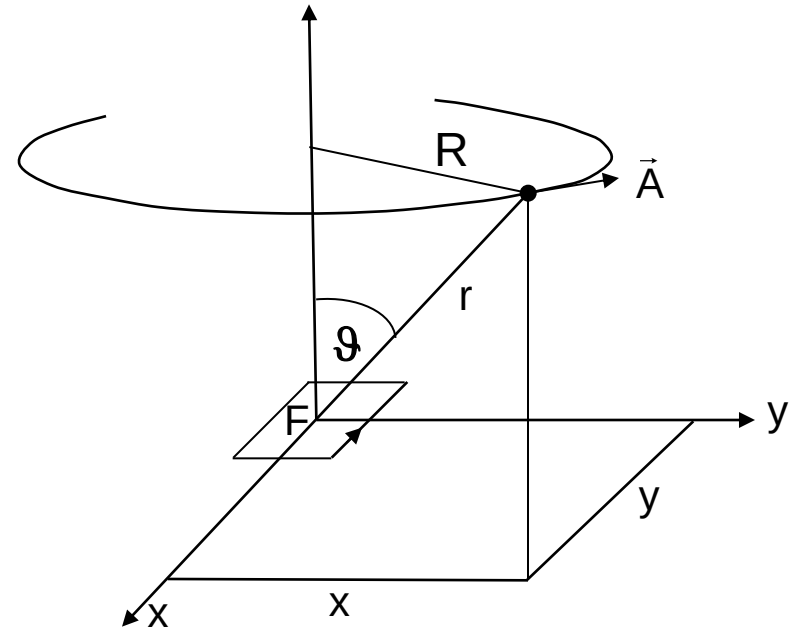
$$= \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \left(\frac{a}{2} \right) \cdot x \underbrace{\left\{ \int_{-b/2}^{+b/2} dy' - \int_{+b/2}^{-b/2} dy' \right\}}_{+2b} = + \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot a \cdot b \cdot x$$

$a \cdot b = F \text{ (Fläche)}$

Lösung $\vec{A}(x,y,z)$ für
Drahtschleife:

$$\begin{aligned} A_x &= - \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot F \cdot y \\ A_y &= + \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot F \cdot x \\ A_z &= 0 \end{aligned}$$

mit $F = a \cdot b$ (Fläche)



- Das Ergebnis ist auf Grund der Annahme sehr kleiner Abmessungen der Schleife unabhängig von den Abmessungen a und b der Schleife.
- Sowohl eine sehr schmale Schleife mit $a < b$ als auch eine quadratische Schleife mit $a = b$ liefert das gleiche Ergebnis für gleiche Schleifenflächen $F = a \cdot b$.
- Daher gilt dieses Ergebnis auch für eine Schleife mit rundem Querschnitt.

Kartesische Koordinaten $\longrightarrow$ Kugelkoordinaten

$$A_x(x, y, z) = -k y$$

$$A_y(x, y, z) = +k x \quad \text{mit Abkürzung } k = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{F}{r^3}$$

$$A_z(x, y, z) = 0$$

① Ortsvektoren $(x, y, z) \longrightarrow (r, \vartheta, \varphi)$

$$A_x(r, \vartheta, \varphi) = -k r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$A_y(r, \vartheta, \varphi) = +k r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$A_z(r, \vartheta, \varphi) = 0$$

② Vektorfeld $A_x, A_y, A_z \rightarrow A_r, A_\vartheta, A_\varphi$

$$\begin{aligned} A_r &= A_x \sin \vartheta \cos \varphi + A_y \sin \vartheta \sin \varphi + 0 \\ &= -k r \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + k r \sin^2 \vartheta \cos \varphi \sin \varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_\vartheta &= A_x \cos \vartheta \cos \varphi + A_y \cos \vartheta \sin \varphi \\ &= -k r \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + k r \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \sin \varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_\varphi &= -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi \\ &= +k r \sin \vartheta \sin^2 \varphi + k r \sin \vartheta \cos^2 \varphi \\ &= k r \sin \vartheta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = k r \sin \vartheta \end{aligned}$$

mit Abkürzung $k = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I \cdot F}{r^3}$

$$\rightarrow \boxed{\vec{A}(r, \vartheta) = \frac{\mu}{4\pi} I \cdot F \frac{\sin \vartheta}{r^2} \vec{e}_\varphi}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{A}(r, \vartheta) = \frac{\mu}{4\pi} I \cdot F \frac{\sin \vartheta}{r^2} \vec{e}_\varphi}$$

$$\vec{B}(r, \vartheta) = \text{rot} \left(A_\varphi \vec{e}_\varphi \right)$$

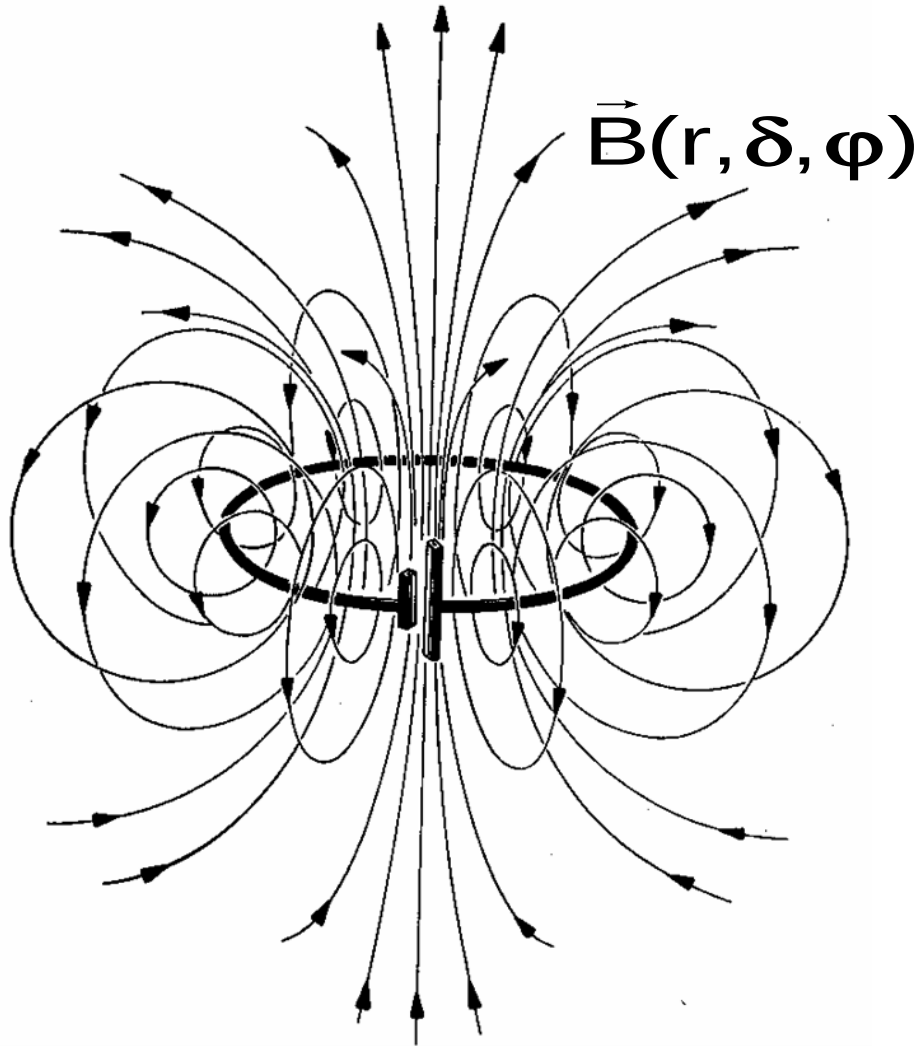
$$= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\varphi \sin \vartheta) \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(- \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \vec{e}_\vartheta + 0 \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$= \frac{\mu I}{4\pi} F \left[\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta \right) \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \sin \vartheta \right) \vec{e}_\vartheta \right]$$

$$= \frac{\mu I}{4\pi} F \left[\left(\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{1}{r^2} 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \right) \vec{e}_r - \frac{1}{r} \left(- \frac{1}{r^2} \sin \vartheta \right) \vec{e}_\vartheta \right]$$

$$= \frac{\mu I}{4\pi} F \left[\frac{2 \cos \vartheta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{\sin \vartheta}{r^3} \vec{e}_\vartheta \right]$$

Ergebnis



$$\begin{aligned} B_r &= \frac{\mu}{4\pi} I \cdot F \frac{2 \cos \vartheta}{r^3} \\ B_\vartheta &= \frac{\mu}{4\pi} I \cdot F \frac{\sin \vartheta}{r^3} \\ B_\varphi &= 0 \end{aligned}$$

6 Induktionskoeffizient L

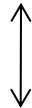
In der Elektrodynamik gibt es zwei Beziehungen von Größen, die durch die gleiche Proportionalitätskonstante L verbunden sind.

- Der magnetische Fluss mit dem erzeugenden Strom
- Die magnetische Feldenergie mit dem erzeugenden Strom

$$\Phi_m = L \cdot I$$

→

$$U_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi_m(t)}{dt} = -L \frac{dI(t)}{dt}$$



$$W_m = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

Die Proportionalitätskonstante L
heißt Induktionskoeffizient

6.1 Induktionskoeffizient und magnetischer Fluss

Voraussetzungen: dünne Leiter bilden geschlossene Drahtschleifen

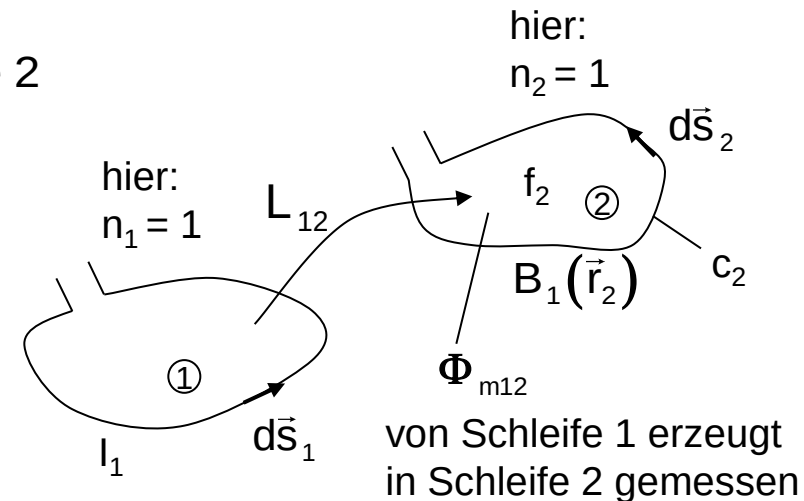
Gegeninduktion Φ_{m12} : von Strom I_1 erzeugt und in Schleife 2 gemessen

$$\Phi_{m12} = \int_{f_2} \vec{B}_1(\vec{r}_2) \cdot d\vec{f}_2 \quad \vec{r}_2 \text{ ist Ortsvektor innerhalb Schleife 2}$$

$$= \int_{f_2} \text{rot } \vec{A}_1(\vec{r}_2) \cdot d\vec{f}_2$$

$$= \oint_{c_2} \vec{A}_1(\vec{r}_2) \cdot d\vec{s}_2 \quad \vec{A}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu \cdot I_1}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$\rightarrow \Phi_{m12} = \frac{\mu \cdot I_1}{4\pi} \oint_{c_1} \oint_{c_2} \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = L_{12} I_1$$



Gegeninduktion: eine Windung:
n Windungen:

$$L_{12} = \Phi_{m12} / I_1$$

$$L_{12}^{(n_2)} = n_2 \Phi_{m12} / I_1$$

Selbstinduktion: n Windungen:

$$L_{11}^{(n_1)} = n_1 \Phi_{m1} / I_1$$

Selbstinduktivität einer langen Spule mit Kern

(Methode magn. Fluss)

Querschnittsfläche

A

$\vec{B} \approx \text{const. über } A$

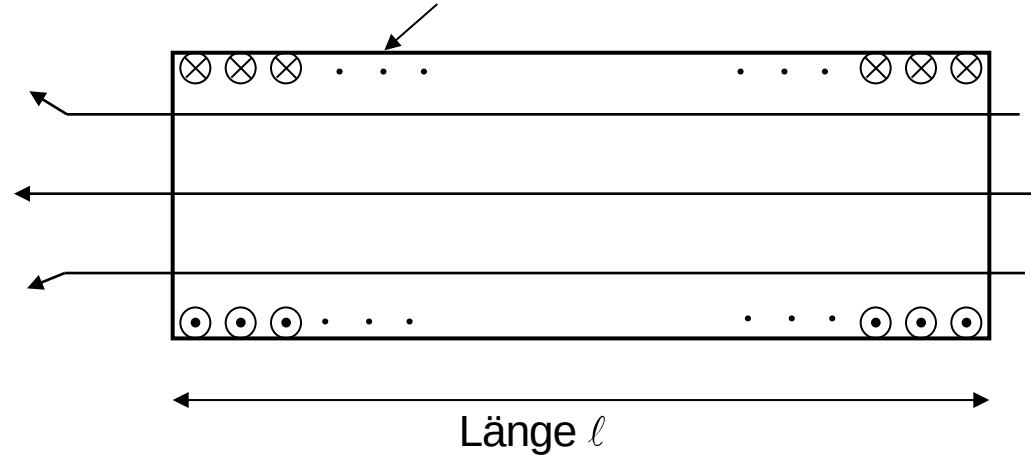
magn. Fluss
im Querschnitt

$$\left. \begin{array}{l} \text{magn. Fluss} \\ \text{im Querschnitt} \end{array} \right\} \Phi_m = B \cdot A = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H \cdot A$$

$$\Phi_m = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{A \cdot n \cdot I}{\ell} \quad H$$

$$n \cdot \Phi_m = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{A \cdot n^2}{\ell} \cdot I \Leftrightarrow \boxed{n \cdot \Phi_m = L \cdot I} \Rightarrow \boxed{L = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{A \cdot n^2}{\ell}}$$

Strom I , Windungszahl n



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int \vec{J} \cdot d\vec{f}$$

Durchflutungsgesetz:

$$H \cdot \ell \approx n \cdot I$$

6.2 Induktionskoeffizient und magnetische Feldenergie

Def.:
(Erinnerung)

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad \text{Energiedichte des elektrischen Feldes}$$

$$W_e = \int w_e \, dv \quad \text{gesamte elektrische Feldenergie}$$

$$\text{Einheit } (w_e) = \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{As}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Joule}}{\text{m}^3}$$

wenn $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ gilt, dann folgt:

$$w_e = \frac{\epsilon}{2} E^2$$

Def.:

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \quad \text{Energiedichte des magnetischen Feldes}$$

$$W_m = \int w_m \, dv \quad \text{gesamte magnetische Feldenergie}$$

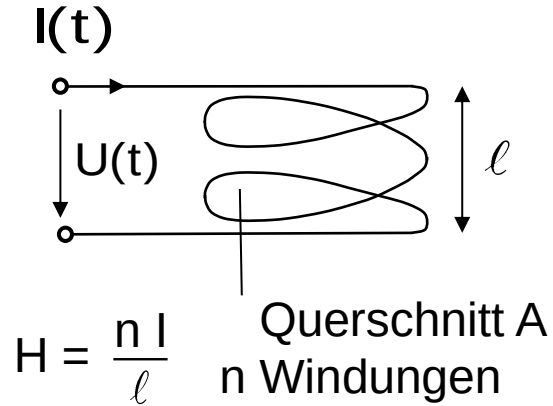
$$\text{Einheit } (w_m) = \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Joule}}{\text{m}^3}$$

wenn $\vec{B} = \mu \vec{H}$ gilt, dann folgt:

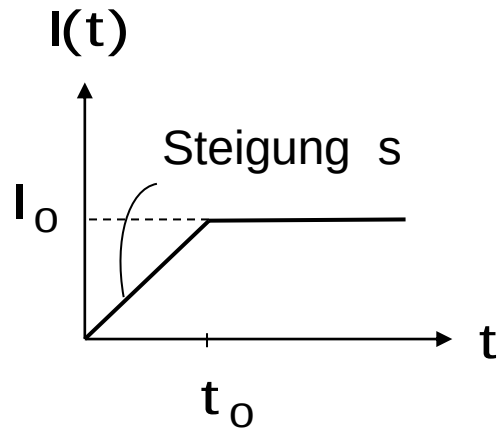
$$w_m = \frac{\mu}{2} H^2$$

Veranschaulichung der magnetischen Feldenergie

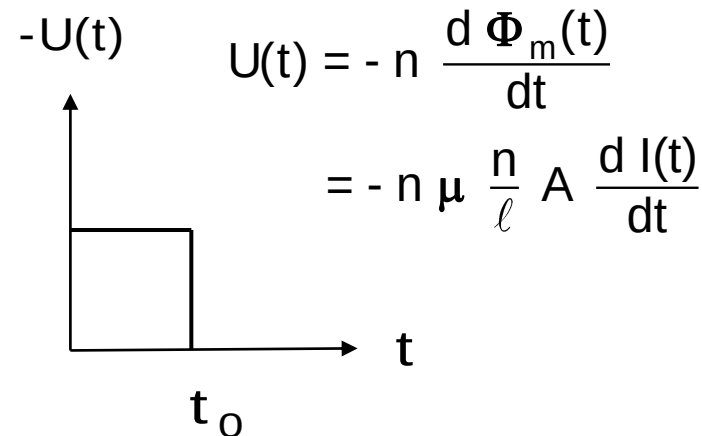
Strom wird in eine Spule eingespeist, ein Magnetfeld baut sich auf



$$\Phi_m(t) = \mu H(t) A = \mu \frac{n}{l} I(t) A$$



$$I(t) = \begin{cases} s t & t < t_0 \\ I_0 & t \geq t_0 \end{cases}$$



$$U(t) = \begin{cases} -\frac{\mu n^2}{l} A s & t < t_0 \\ 0 & t \geq t_0 \end{cases}$$

Aufgenommene elektrische Leistung:

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = \begin{cases} - \left(\frac{\mu n^2}{\ell} A s \right) (s t) & t < t_0 \\ 0 & t \geq t_0 \end{cases}$$

Gesamte aufgenommene elektrische Energie nach $t \geq t_0$

$$W_{UI} = \int_0^{t_0} P(t) dt = - \frac{\mu n^2}{\ell} A s^2 \frac{1}{2} t_0^2 = - \frac{1}{2} \frac{\mu n^2 A}{\ell} I_0^2$$

$$H_0 = \frac{n I_0}{\ell} \quad \rightarrow I_0 = \frac{\ell H_0}{n} \quad \rightarrow \boxed{W_{UI} = - \frac{1}{2} \mu H_0^2 A \ell}$$

Gesamte aufgebaute magnetische Feldenergie: $W_m = \int w_m dv$

Magnetfeld H räumlich konstant in Spule mit Volumen $A \ell$ $\rightarrow \boxed{W_m = w_m A \ell}$

Energiesatz: $W_m \stackrel{!}{=} W_{UI} \quad \rightarrow w_m A \ell \stackrel{!}{=} - \frac{1}{2} \mu H_0^2 A \ell$

$\rightarrow \boxed{w_m = \frac{1}{2} \mu H_0^2}$ magnetische Feldenergiedichte

Ziel: Berechnung der Feldenergie über die erzeugenden Ströme

Energiedichte des magn. Feldes:

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$$
$$W_m = \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \vec{B} \, dv$$

Ziel: Feldenergie als Funktion
der erzeugenden Ströme bestimmen

Gesamte Feldenergie:

$$W_m = \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{A} \, dv \quad \text{und} \quad \text{div}(\vec{A} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{H}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int \text{div}(\vec{A} \times \vec{H}) \, dv + \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{H} \, dv \quad \text{und Gaußsatz und } \text{rot } \vec{H} = \vec{J}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \oint (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot d\vec{f} + \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{J} \, dv \quad \text{und } \oint (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot d\vec{f} = 0 \text{ über "Fernkugel"}$$

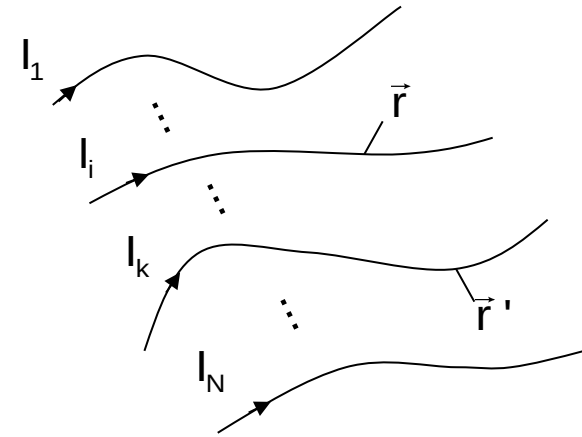
$$W_m = \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{J} \, dv \quad \text{mit} \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, dv' \rightarrow \boxed{W_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu}{4\pi} \iint \frac{\vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, dv \, dv'}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\mu}{4\pi} \iint \frac{\vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv dv'$$

magnetische Feldenergie als Funktion
der Stromdichte $\vec{J}(\vec{r})$

Spezialfall: N Leiter wobei $\vec{J}(\vec{r}) = 0$ außerhalb der Leiter

$$\begin{aligned} \rightarrow W_m &= \frac{1}{2} \frac{\mu}{4\pi} \iint \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\vec{J}_i(\vec{r}) \cdot \vec{J}_k(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv dv' \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \left(\underbrace{\frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{I_i \cdot I_k} \iint \frac{\vec{J}_i(\vec{r}) \cdot \vec{J}_k(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv dv'}_{\text{Def. } L_{ik} \text{ Induktionskoeffizienten}} \right) I_i \cdot I_k \end{aligned}$$



Def. L_{ik} Induktionskoeffizienten

↑
stromunabhängig!

$$\rightarrow W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N L_{ik} I_i I_k$$

Einheit: Henry $1H = \frac{1 \text{ J}}{A^2} = \frac{1 \text{ VAs}}{A^2} = \frac{1 \text{ Vs}}{A}$

I_i = Gesamtstrom durch Leiter i

$$L_{ii} = \frac{1}{I_i^2} \cdot \frac{\mu}{4\pi} \cdot \iiint_{\text{Leiter } i} \iiint_{\text{Leiter } i} \frac{\vec{J}_i(\vec{r}) \cdot \vec{J}_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv dv'$$

Selbstinduktionskoeffizienten

$$L_{ik} = \frac{1}{I_i \cdot I_k} \cdot \frac{\mu}{4\pi} \cdot \iiint_{\text{Leiter } i} \iiint_{\text{Leiter } k} \frac{\vec{J}_i(\vec{r}) \cdot \vec{J}_k(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv dv'$$

Gegeninduktionskoeffizienten

$$(L_{ik} = L_{ki})$$

$$\rightarrow W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N L_{ik} \cdot I_i \cdot I_k$$

$$\text{z.B.: } N = 1 \quad W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

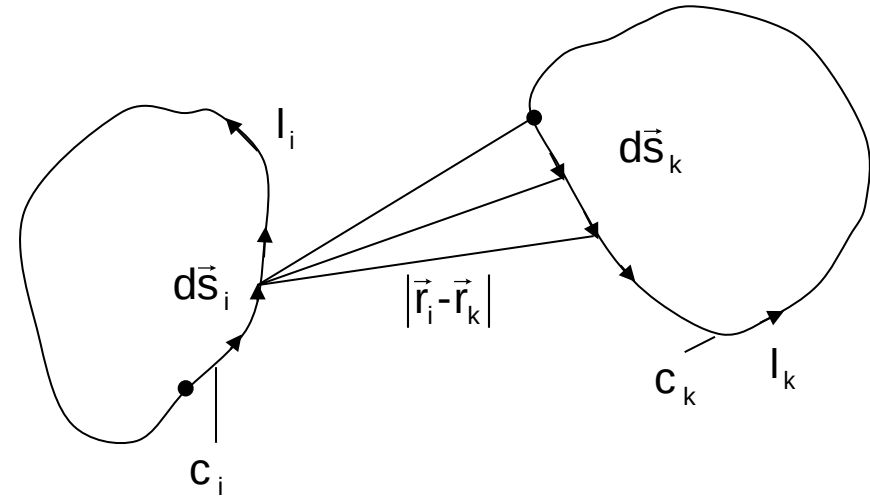
$$\text{z.B.: } N = 2 \quad W_m = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2$$

Gegeninduktionskoeffizient dünner Leiter

$$L_{ik} = \frac{1}{I_i \cdot I_k} \frac{\mu}{4\pi} \iiint \iiint \frac{\vec{J}_i(\vec{r}) \cdot \vec{J}_k(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv_i dv'_k \quad \text{mit } \vec{J}_i dv_i = \vec{J}_i \cdot d\vec{f}_i \quad d\vec{S}_i = I_i d\vec{S}_i$$

$$= \frac{1}{I_i \cdot I_k} \frac{\mu}{4\pi} I_i I_k \oint_{C_i} \oint_{C_k} \frac{d\vec{S}_i \cdot d\vec{S}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}$$

$$\rightarrow \boxed{L_{ik} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_k} \frac{d\vec{S}_i \cdot d\vec{S}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}} \quad L_{ik} = L_{ki}$$



dies ist der Beweis, dass die Proportionalität
von L_{ik} für die Feldenergie die gleiche Größe
ist wie die für den magnetischen Fluss

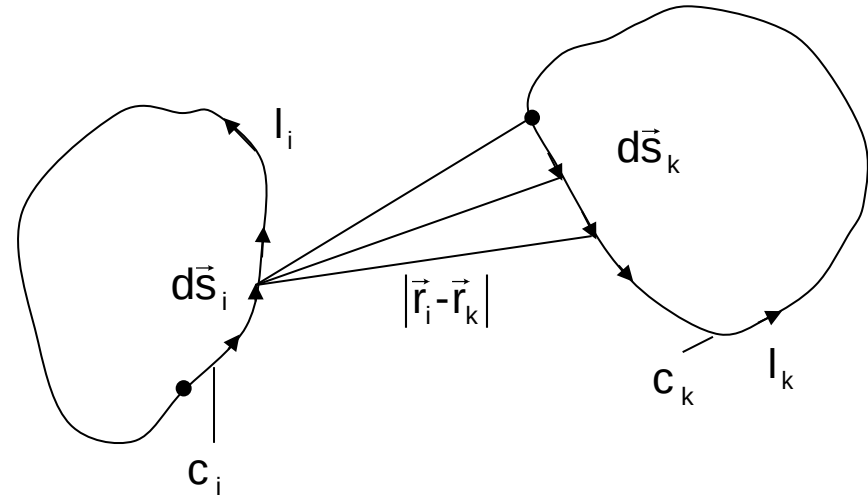
$$\boxed{\Phi_{mik} = L_{ik} \cdot I_k}$$

Gegeninduktionskoeffizient dünner Leiter

$$L_{ik} = \frac{1}{I_i \cdot I_k} \frac{\mu}{4\pi} \iiint \iiint \frac{\vec{J}_i(\vec{r}) \cdot \vec{J}_k(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv_i dv'_k \quad \text{mit } \vec{J}_i dv_i = J_i df_i d\vec{s}_i = I_i d\vec{s}_i$$

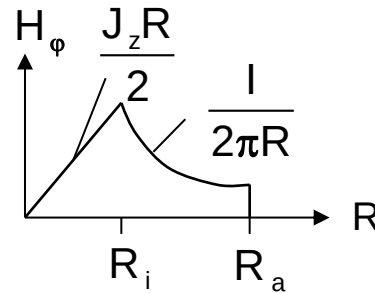
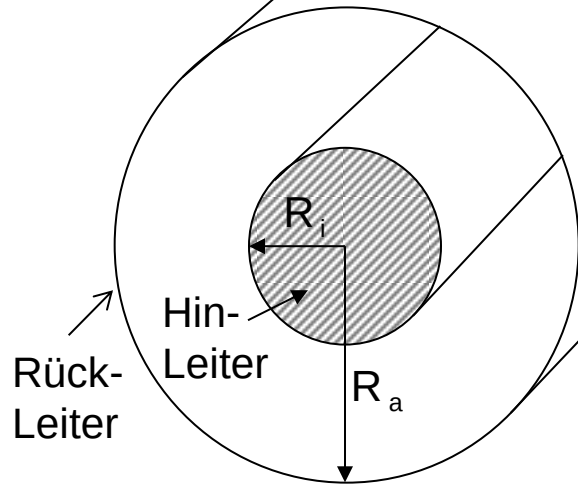
$$= \frac{1}{I_i \cdot I_k} \frac{\mu}{4\pi} I_i I_k \oint_{C_i} \oint_{C_k} \frac{d\vec{s}_i \cdot d\vec{s}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}$$

$$\rightarrow \boxed{L_{ik} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_k} \frac{d\vec{s}_i \cdot d\vec{s}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}} \quad L_{ik} = L_{ki}$$



Selbstinduktivität einer Koaxialleitung

(Methode Feldenergie)



Radius Hinleiter: R_i
 Radius Außenradius: R_a
 Dazwischen Isolator
 Längenabschnitt: ℓ

Sehr dünner Rückleiter
 dort keine innere Induktivität

J_z konstant über Leiterquerschnitt

Berechnung über die Feldenergie: **im Innendraht gilt:**

$$W_{mi} = \int w_{mi} dv = \frac{\mu}{2} \cdot \int H_{\phi}^2 dv = \frac{\mu}{2} \cdot \int \frac{J_z^2}{4} R^2 dv$$

$$= \frac{\mu}{2} \cdot \frac{J_z^2}{4} \int_0^{\ell} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_i} R^2 \cdot R \cdot dR d\phi dz$$

$$= \frac{\mu}{2} \cdot \frac{J_z^2}{4} \cdot \ell \cdot 2\pi \cdot \frac{R_i^4}{4} \quad \text{mit } J_z = I / (\pi \cdot R_i^2)$$

$$= \frac{\mu \cdot I^2}{16 \cdot \pi} \cdot \ell \Leftrightarrow \boxed{W_{mi} = \frac{1}{2} L_i I^2} \rightarrow \underset{\uparrow}{L_i} = \frac{\mu \cdot \ell}{8 \cdot \pi} \Rightarrow \boxed{\frac{L_i}{\ell} = \frac{\mu}{8 \cdot \pi}}$$

innere Selbstinduktion

zwischen den beiden Leitern im Isolator gilt:

$$\begin{aligned}
 W_{\text{ma}} &= \int w_{\text{ma}} \, dv = \frac{\mu}{2} \cdot \int H_{\varphi a}^2 \, dv = \frac{\mu}{2} \int_0^{\ell} \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_a} \frac{I^2}{4\pi^2 R^2} R \, dR \, d\varphi \, dz \\
 &= \frac{\mu}{2} \frac{I^2}{4\pi^2} \cdot \ell \cdot 2\pi \cdot \int_{R_i}^{R_a} \frac{1}{R} \, dR = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \ell \cdot I^2 \cdot \ln \frac{R_a}{R_i}
 \end{aligned}$$

$$W_{\text{ma}} = \frac{1}{2} L_a \cdot I^2 \quad \Rightarrow \quad L_a = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \ell \cdot \ln \frac{R_a}{R_i} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{L_a}{\ell} = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \ln \frac{R_a}{R_i}} \quad \begin{array}{l} \text{äußere} \\ \text{Selbstinduktion} \end{array}$$

Im Bereich $R > R_a$ außerhalb der beiden Leiter ist

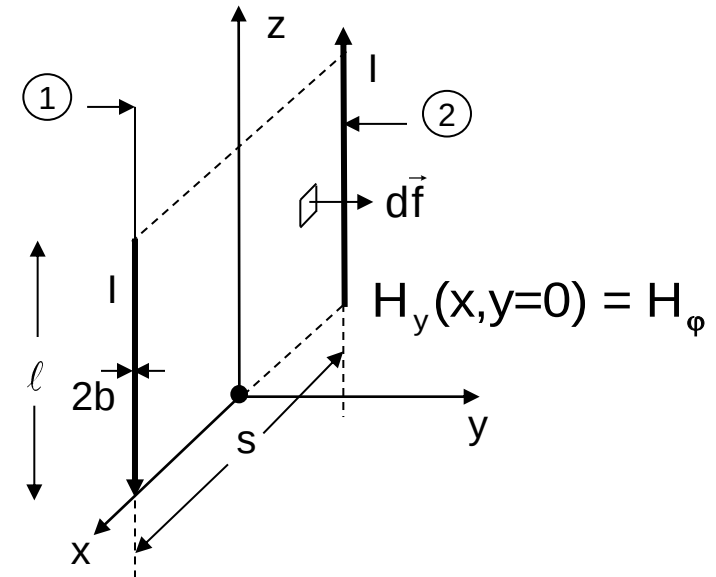
$$\boxed{H_{\varphi}(R > R_a) = 0}$$

wegen $\oint_{\text{Kreis} > R_a} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int \vec{j} \cdot d\vec{f} = I_{\text{hin}} - I_{\text{rück}} = 0$

Selbstinduktivität von Doppelleitungen

Doppelleitung, Abstand s , symm. zur z -Achse
Drahtradius b

Gesucht:
 die Selbstinduktivität pro Länge



Berechnung über den Fluss Φ_a
 zwischen den Drähten

$$\Phi_a = \int \vec{B}_a \cdot d\vec{f} = \ell \cdot \int_{-\frac{s}{2}+b}^{+\frac{s}{2}-b} B_y dx = \ell \cdot \mu_0 \int_{-\frac{s}{2}+b}^{+\frac{s}{2}-b} H_y dx$$

$\vec{B} = \vec{B}(x, y)$ $d\vec{f} = dz dx \vec{e}_y$ B_y in x, z -Ebene
 $\vec{B}$ hängt nicht von z ab $\rightarrow B_y(x, y=0)$

In der gesamten x-z-Ebene für $y = 0$ gilt: $H_{\varphi}(y=0) = H_y$

$$\boxed{H_{\varphi} = \frac{I}{2\pi R}} \rightarrow H_y = H_{\varphi}^{(1)} + H_{\varphi}^{(2)} = \frac{I}{2\pi\left(\frac{s}{2} - x\right)} + \frac{I}{2\pi\left(\frac{s}{2} + x\right)}$$

$$\begin{aligned} \Phi_a &= \mu_0 \cdot \ell \int_{-\frac{s}{2}+b}^{+\frac{s}{2}-b} H_y \, dx = \mu_0 \cdot \ell \cdot \frac{I}{2\pi} \cdot \left\{ -\ln\left(\frac{s}{2} - x\right) \Big|_{-\frac{s}{2}+b}^{+\frac{s}{2}-b} + \ln\left(\frac{s}{2} + x\right) \Big|_{-\frac{s}{2}+b}^{+\frac{s}{2}-b} \right\} \\ &= \mu_0 \cdot \ell \cdot \frac{I}{2\pi} \cdot \left\{ -\ln(b) + \ln(s-b) + \ln(s-b) - \ln(b) \right\} = \mu_0 \cdot \ell \cdot \frac{I}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{s-b}{b}\right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \Phi_a = \mu_0 \cdot \ell \cdot \frac{I}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{s-b}{b}\right)$$

$$\Phi_a = L_a \cdot I \quad \rightarrow \quad L_a = \ell \cdot \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{s-b}{b}\right) \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{L_a}{\ell} = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{s-b}{b}\right)}$$

Innere Selbstinduktivität L_i

$$L_i / \ell = L_{i1} / \ell + L_{i2} / \ell \quad \text{Summe der beiden Leitungen 1 und 2}$$

$$L_i / \ell = 2 \cdot \frac{\mu_0}{8\pi}$$

(siehe Rechnung für Koaxial-Leitung)
unabhängig von Drahtdicke $2b$

Gesamtinduktivität L_{ges}

$$L_{\text{ges}} / \ell = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{s-b}{b}\right) + \frac{\mu_0}{4\pi}$$

Zusammenfassung

Induktivität

- Energiedichte des magn. Feldes $W_m = \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \vec{B} \, dv$

$$\textcircled{1} \quad W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N L_{ik} I_i \cdot I_k$$

W_{mik} berechnen $\rightarrow$ $L_{ik} = \frac{W_{\text{mik}}}{I_i I_k}$

einfach nur bei $N=1$, d.h. $i = k$

- Magnetischer Fluss $\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{f} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}$

$$\textcircled{2} \quad \Phi_{\text{mik}} = L_{ik} I_i$$

Φ_{mik} berechnen $\rightarrow$ $L_{ik} = \frac{\Phi_{\text{mik}}}{I_i}$

- für $\textcircled{1}$ sowie $\textcircled{2}$ gilt

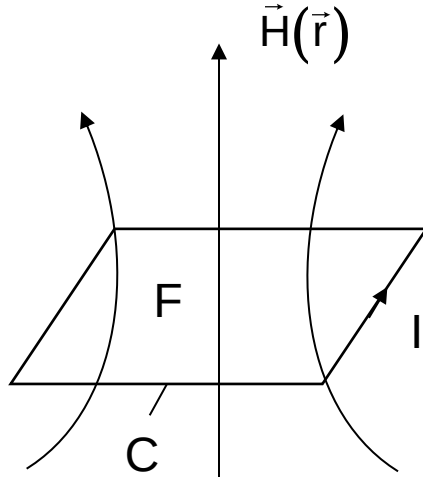
$$L_{ik} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_k} \frac{d\vec{s}_i \cdot d\vec{s}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}$$

Integral direkt

berechnen $\rightarrow$ $L_{ik} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_k} \frac{d\vec{s}_i \cdot d\vec{s}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}$

$$\rightarrow L_{ik} \textcircled{1} = L_{ik} \textcircled{2}$$

Alternativen zur Berechnung von W_m



① Raum $\gg$
 $1000 \times 1000 \times 1000$
 $= 10^9$ Stützstellen

② Fläche =
 100×100
 $= 10^4$ Stützstellen

③ Kurve = 4×100
 400 Stützstellen

① $W_m = \frac{1}{2} \int \mu \vec{H}^2 dv = \frac{1}{2} L \cdot I^2$
 $\vec{H}$ im ganzen Raum

② $\Phi_m = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{f} = L \cdot I$
 $\vec{B}$ nur innerhalb Fläche F

$L = \frac{\int_F \vec{B} \cdot d\vec{f}}{I}$

③ $\Phi_m = \int_F \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{f} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s}$
 $\vec{A}$ nur auf Weg C

$L = \frac{\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s}}{I}$

7 Quasistationäre Felder

$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$	$\oint \vec{D} \cdot d\vec{f} = \int \rho \, dv$
$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{f}$
$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}$	$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int \vec{J} \cdot d\vec{f}$
$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{f} = 0$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \ll \vec{J}$$

↑
quasistationär

Zeitliche Änderungen der Feldgrößen wirken sich sofort im gesamten betrachteten Gebiet aus.

$$\text{rot } \vec{E}_w = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Wirbelfeld, erzeugt durch } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div}(\epsilon \vec{E}_Q) = \rho \quad \text{Quellenfeld, erzeugt durch } \rho$$

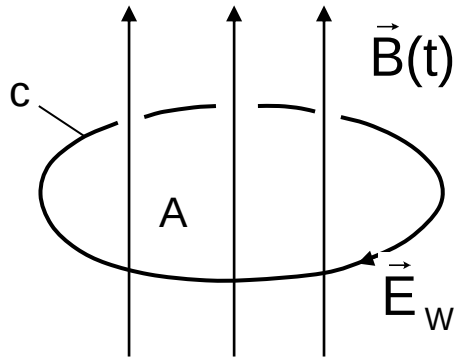
$$\vec{E}_Q = - \text{grad } \Phi \quad \text{Def. von } \Phi$$

$$\text{rot } \vec{E}_Q = - \text{rot grad } \Phi = 0$$

Unterschied
Q, W

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_Q + \vec{E}_w}$$

7.1 Induktionsgesetz für zeitlich sich ändernde Felder oder zeitlich variable Randkurven



Fall A: zeitlich variables B-Feld; konstante Fläche A bzw. Randkurve C

Maxwell:

$$\text{rot } \vec{E}_w = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ändert sich die magnetische Flussdichte an einem Punkt, so entstehen dort wirbelartige elektrische Felder.

In einer leitfähigen Leiterschleife mit geöffneten Enden geschieht folgendes:

$\vec{E}_w \rightarrow \rho_+, \rho_-$ $\vec{E}_w$ erzeugt Ladungstrennung in der Drahtschleife

$\rho_+, \rho_- \rightarrow \vec{E}_Q$ ρ_+, ρ_- erzeugen elektrisches Quellenfeld

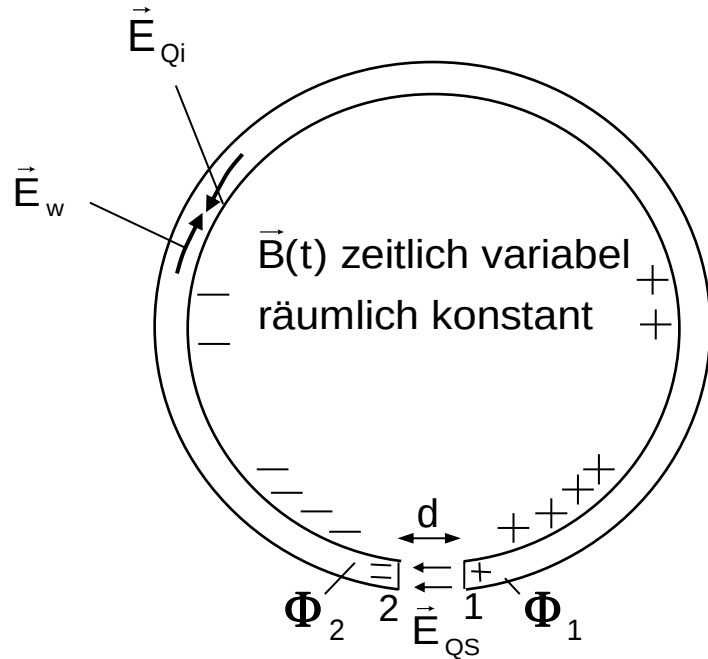
$\vec{E}_Q \rightarrow \Phi_1, \Phi_2$ $\vec{E}_Q$ lässt sich durch elektrisches Potential beschreiben

$\Phi_1, \Phi_2 \rightarrow U_{\text{ind}}$ Potentialdifferenz lässt sich als el. Induktionsspannung messen

$$\rightarrow \boxed{U_{\text{ind}} = - \frac{d}{dt} \Phi_m \text{ wobei } A = \text{const.}}$$

Ändert sich zeitlich die magnetische Flussdichte bzw. der magnetische Fluss, so wird in einer offenen Leiterschleife eine elektrische Spannung induziert.

offene Leiterschleife mit Luftspalt



$$\text{rot } \vec{E}_w = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\int \text{rot } \vec{E}_w \cdot d\vec{f} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{f}$$

$$\oint \vec{E}_w \cdot d\vec{s} = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$\vec{E}_w \rightarrow \rho_+, \rho_- \rightarrow \vec{E}_Q$$

$$\vec{J} = \kappa_i (\vec{E}_{Qi} + \vec{E}_w) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \vec{E}_{Qi} = -\vec{E}_w$$

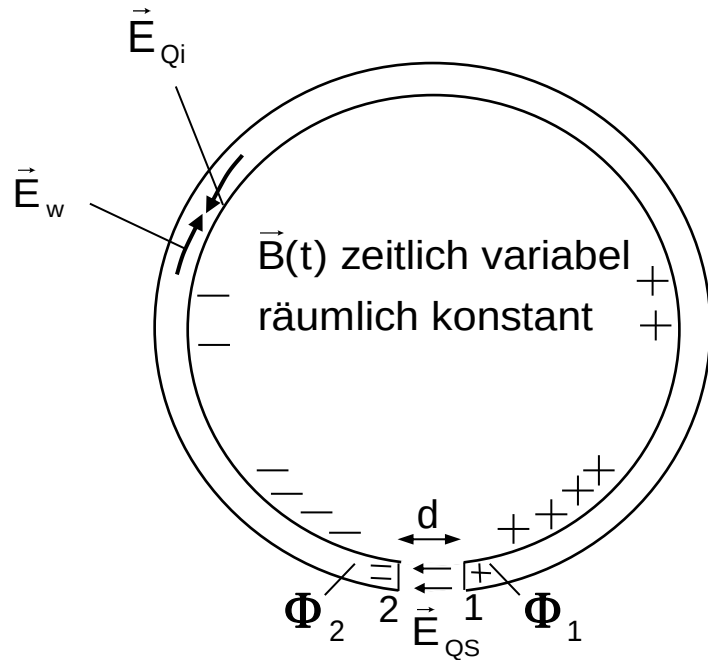
Stromdichte ist durch gegenläufige Felder Null

$$U_{\text{ind}} = \Phi_2 - \Phi_1 = - \int_1^2 \vec{E}_{QS} \cdot d\vec{s}$$

$\vec{E}_{QS}$ ist im Spalt unbekannt, aber in Drahtschleife bekannt ($\vec{E}_{Qi} = -\vec{E}_w$),

Integral wegunabhängig $\rightarrow$ Integration durch Drahtschleife statt über Spalt

$$\rightarrow U_{\text{ind}} = - \int_1^2 \vec{E}_{QS} \cdot d\vec{s} = - \int_1^2 \vec{E}_{Qi} \cdot d\vec{s} = + \int_1^2 \vec{E}_w \cdot d\vec{s} = - \frac{d\Phi_m}{dt} \rightarrow \boxed{U_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi_m}{dt}}$$



INNERES DES LEITERS:

Das elektrische Feld im Inneren des Leiters ist Null, da sich Quellenfeld und Wirbelfeld gegenseitig auslöschen.

$$\vec{E}_{\text{ges}} = \vec{E}_Q + \vec{E}_w = 0$$

LUFTSPALT:

Das elektrische Feld im Luftspalt ist abhängig von der Länge des Luftspaltes d .

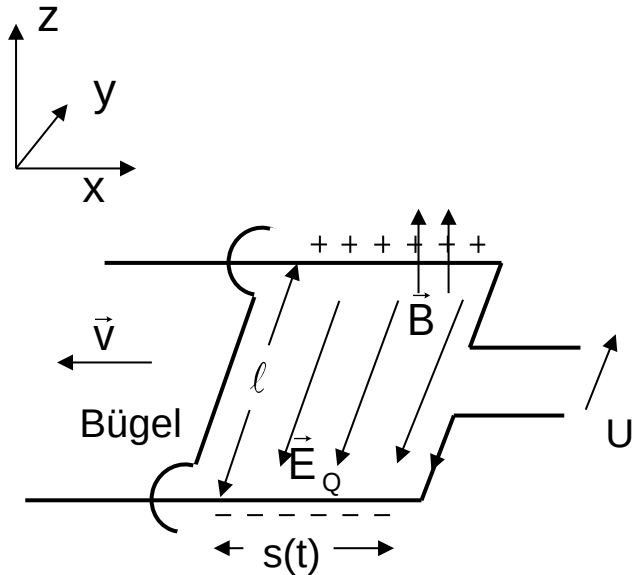
Bei sehr kleinem d wird es sehr groß und übersteigt die Größenordnung des Wirbelfeldes.

Die Induktionsspannung ist unabhängig von d .

$$U_{\text{ind}} = - \int_1^2 \vec{E}_{Q_i} \cdot d\vec{s} = + \int_1^2 \vec{E}_w \cdot d\vec{s} = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$\vec{E}_{Q_s} \approx \frac{U_{\text{ind}}}{d} \vec{e}_s = - \frac{d\Phi_m}{dt} \frac{1}{d} \vec{e}_s$$

Fall B: zeitlich konstantes B-Feld; zeitlich variable Fläche A(t) bzw. Randkurve C(t)



Magnetische Kräfte auf bewegte Ladungen wirken gegen elektrostatische Kräfte.
Im Kräfte-Gleichgewicht gilt:

$$q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) + q \cdot \vec{E}_Q = 0$$

$$\rightarrow \vec{E}_Q = -(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$U = E_y \cdot l = -v_x \cdot B_z \cdot l$$

$$= -l \cdot (ds(t) / dt) \cdot B_z \quad \text{und} \quad l \cdot s(t) = A(t)$$

$$= - (dA(t)/dt) \cdot B_z = -d(A(t) \cdot B_z) / dt$$

$$\rightarrow \boxed{U = -\frac{d\Phi_m}{dt}}$$

Ändert sich die Fläche oder Richtung der Leiterschleife, entsteht durch $\vec{v} \times \vec{B}$ Kräfte ein elektrisches Feld und damit eine elektrische Spannung U .

Für bewegte Medien gilt nicht mehr $\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$, sondern $\boxed{\vec{J} = \kappa \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})}$

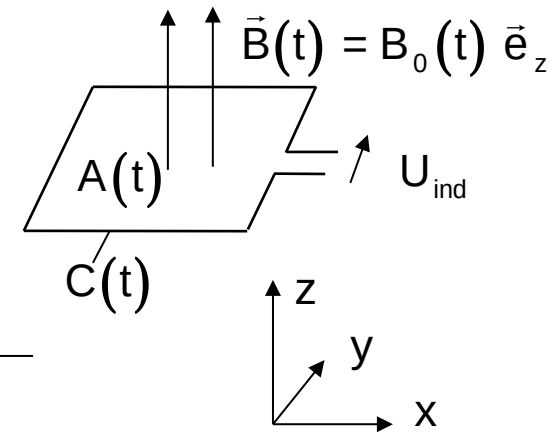
Zusammenfassung

$$\Phi_m(t) = \int_{A(t)} \vec{B} \cdot d\vec{f} = B_0(t) A(t) \quad (\text{hier } B \text{ räumlich konstant})$$

Effekt ①: $\vec{B} = \vec{B}(t)$ zeitlich variabel

$$\text{rot } \vec{E} = - \partial \vec{B}(t) / \partial t \quad \rightarrow \quad \oint_{C(t)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{A(t)} \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \cdot d\vec{f}$$

$$U_{\text{ind } A} = - \frac{\partial B_0(t)}{\partial t} \cdot A(t)$$



Effekt ②: $A = A(t)$ zeitlich variabel

$$\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{E}(t) = - v_x B_0 \vec{e}_y$$

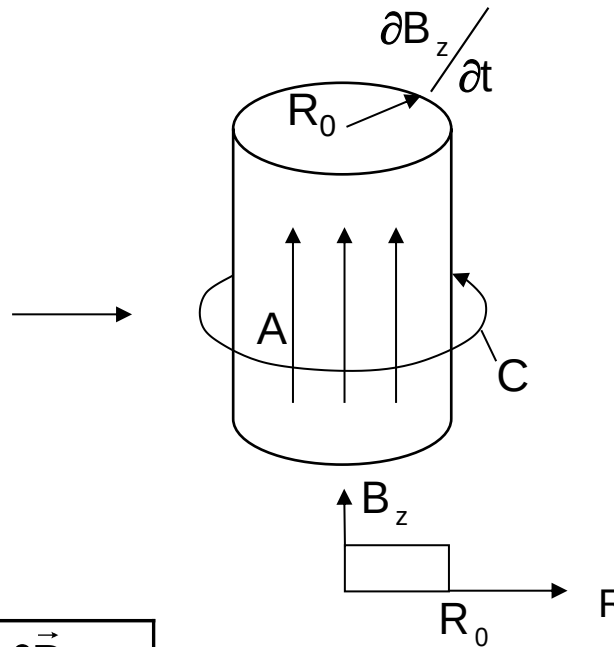
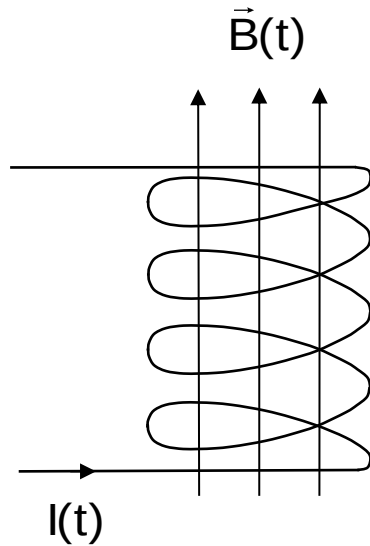
$$U_B = - \frac{\partial A(t)}{\partial t} \cdot B_0(t)$$

Gesamtwirkung von Effekt ① + ②

$$U_{\text{ind}} = - \frac{\partial B_0(t)}{\partial t} A(t) - \frac{\partial A(t)}{\partial t} B_0(t) = - \frac{d \Phi_m(t)}{dt}$$

Die Induktionsspannung wird erzeugt durch effektive Änderung des Flusses, hervorgerufen aber durch zwei ganz unterschiedliche Prozesse

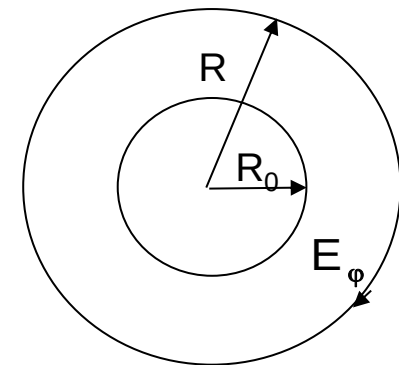
7.2 Eigenschaften der Wirbelfelder



Berechnung des Wirbelfeldes E_w

$$-\vec{E}_\phi = ?$$

– Einfluss der Lage der Sekundärwindung



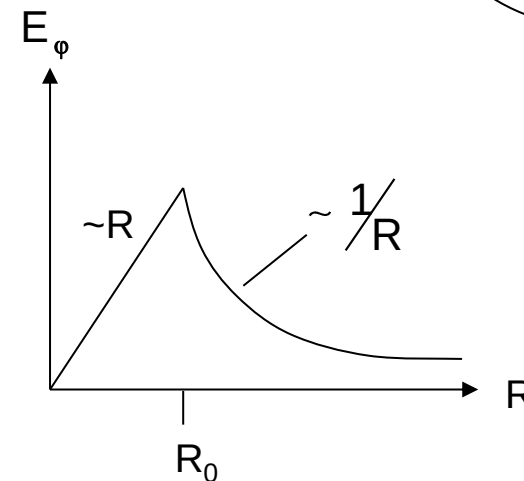
$$\int_{A(R)} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{f} = \oint_{C(R)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{A(R)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{f}$$

$$R < R_0 \quad E_\phi(R) \cdot 2\pi R = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \cdot R^2 \pi$$

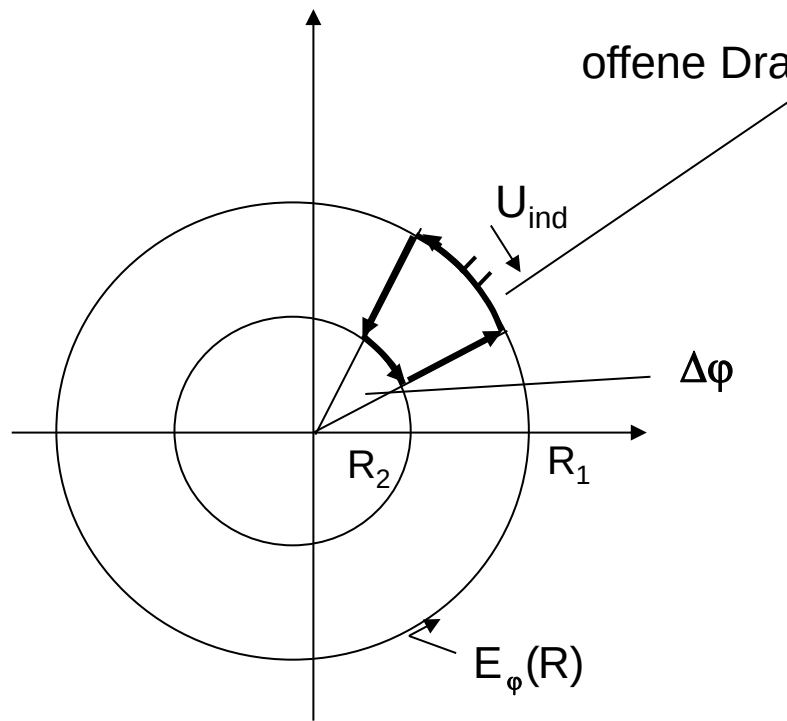
$$\rightarrow E_\phi(R) = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \cdot \frac{R}{2}$$

$$R > R_0 \quad E_\phi(R) \cdot 2\pi R = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \cdot R_0^2 \pi$$

$$\rightarrow E_\phi(R) = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \cdot \frac{R_0^2}{2R}$$



Das elektrische Wirbelfeld befindet sich innerhalb sowie außerhalb des Magnetfeldes



offene Drahtschleife nicht zentrisch zwischen R_1 , R_2 und $\Delta\phi$

$$\begin{aligned}
 U_{\text{ind}} &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \\
 &= \int_{\Delta\phi} E_{\phi}(R_1) \vec{e}_{\phi} \cdot R_1 d\phi \vec{e}_{\phi} \\
 &\quad + \int_{\Delta R} E_{\phi}(R) \vec{e}_{\phi} \cdot (-dR \vec{e}_R) \\
 &\quad + \int_{\Delta\phi} E_{\phi}(R_2) \vec{e}_{\phi} \cdot (-R_2 d\phi \vec{e}_{\phi}) \\
 &\quad + \int_{\Delta R} E_{\phi}(R) \vec{e}_{\phi} \cdot (dR \vec{e}_R)
 \end{aligned}$$

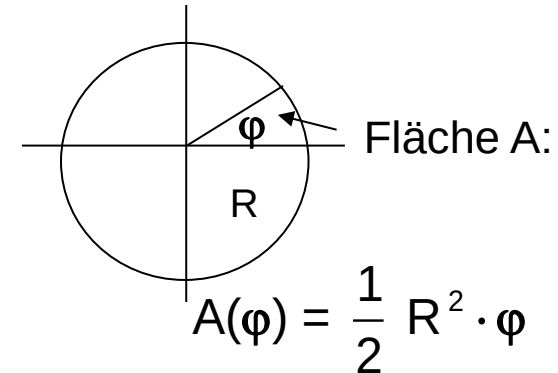
$$U_{\text{ind}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_{\phi}(R_1) \cdot R_1 \Delta\phi - E_{\phi}(R_2) \cdot R_2 \Delta\phi$$

Drahtschleife innerhalb des Magnetfeldes:

$$E_{\varphi}(R) = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \frac{R}{2}$$

$$\rightarrow U_{\text{ind}} = E_{\varphi}(R_1) \cdot R_1 \Delta\varphi - E_{\varphi}(R_2) \cdot R_2 \Delta\varphi = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \underbrace{\left(\frac{R_1^2 - R_2^2}{2} \right)}_{\text{Schleifenfläche}} \Delta\varphi = - \frac{\partial \Phi_{\text{m Schleife}}}{\partial t}$$

Spannung wird induziert



Drahtschleife außerhalb des Magnetfeldes:

$$E_{\varphi}(R) = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \frac{R_0^2}{2R} \neq 0$$

$$\rightarrow U_{\text{ind}} = E_{\varphi}(R_1) \cdot R_1 \Delta\varphi - E_{\varphi}(R_2) \cdot R_2 \Delta\varphi = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \left(\frac{R_0^2}{2R_1} R_1 - \frac{R_0^2}{2R_2} R_2 \right) \Delta\varphi = 0$$

Es wird KEINE Spannung induziert

Drahtschleife außerhalb des Magnetfeldes, aber dieses umhüllend:

$$U_{\text{ind}} = \oint_{C(R)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_{\varphi}(R_1) \cdot 2\pi R_1$$

$$= - \frac{\partial B_z}{\partial t} \frac{R_0^2}{2R_1} \cdot 2\pi R_1 = - \frac{\partial B_z}{\partial t} R_0^2 \pi = - \frac{\partial \Phi_{\text{m Schleife}}}{\partial t} \rightarrow \text{Spannung wird induziert}$$

Lokale Wirbel von $\vec{E}$

$$\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$$

$$\text{rot } \left(E_\varphi(R) \vec{e}_\varphi \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R E_\varphi(R) \right) \vec{e}_z$$

innen:

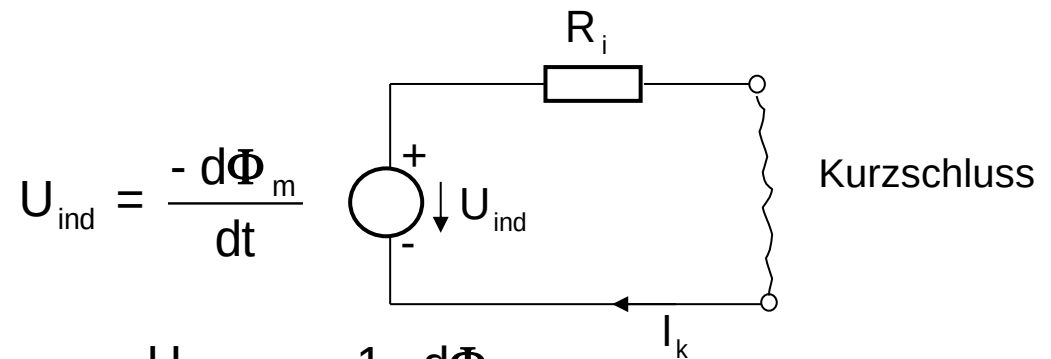
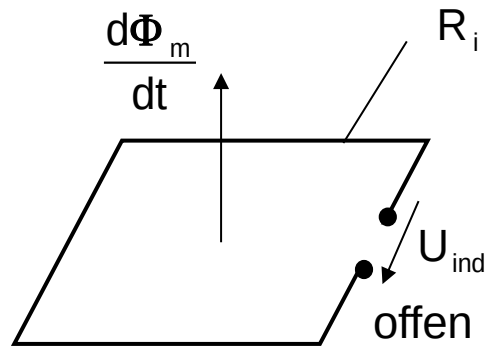
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(- \frac{\partial B_z}{\partial t} \frac{R^2}{2} \right) \vec{e}_z \\ &= \frac{1}{R} \left(- \frac{\partial B_z}{\partial t} \frac{2R}{2} \right) \vec{e}_z = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \vec{e}_z \end{aligned}$$

außen:

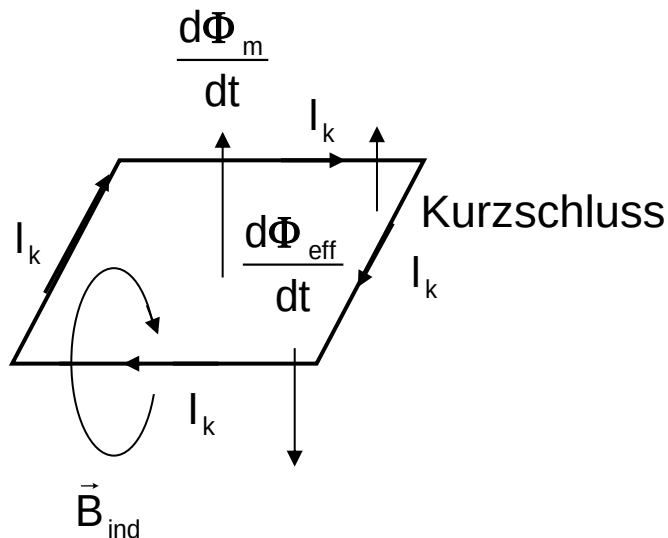
$$= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(- \frac{\partial B_z}{\partial t} \frac{R_0^2}{2R} R \right) = 0$$

⇒ Induktionsspannungen entstehen nur in Leiterschleifen,
in denen es lokale Wirbel $\text{rot } \vec{E} \neq 0$, d.h. geschlossene
Feldlinien von $\vec{E}$ gibt.

7.3 Rückwirkung des Induktionsstroms auf den magnetischen Fluss



$$I_k = \frac{U_{\text{ind}}}{R_i} \neq - \frac{1}{R} \frac{d\Phi_m}{dt}$$



$$I_k = - \frac{1}{R_i} \frac{d\Phi_{\text{eff}}}{dt} = - \frac{1}{R_i} \left(\frac{d\Phi_m}{dt} + \frac{d\Phi_{\text{ind}}}{dt} \right)$$

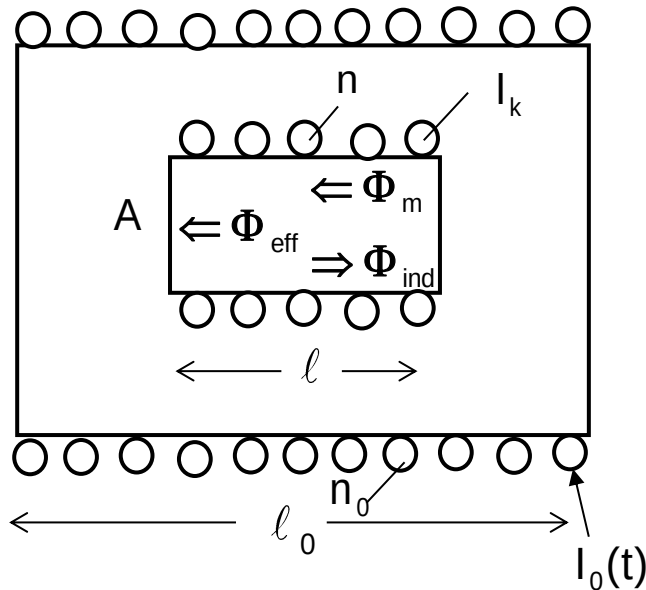
Differentialgleichung für $I_k(t)$

$$\Phi_{\text{eff}} = \Phi_m + \Phi_{\text{ind}}$$

Der effektive Fluss, der bei zeitlicher Variation ein elektrisches Wirbelfeld und dadurch eine Induktionsspannung erzeugt, setzt sich aus der Überlagerung

- des Flusses vom externen Magnetfeld sowie
- des Flusses vom Magnetfeld des induzierten Stromes der Leiterschleife zusammen.

Beispiel: Kleine supraleitende Spule innerhalb großer normaler Spule



Kleine Spule:
 Querschnitt A
 Windungszahl n
 Innenwiderstand R_i

Große Spule:
 Windungszahl n_0

$$\rightarrow \vec{B} = B_0(t) \vec{e}_z = \frac{\mu n_0}{l_0} I_0(t) \vec{e}_z$$

kleine Spule offen:
$$U_{ind} = -n \frac{d\Phi_m(t)}{dt} = -n A \frac{dB_0(t)}{dt}$$

Kurzschluss in
 kleiner Spule

$$I_k = -\frac{1}{R_i} n \frac{d\Phi_{eff}(t)}{dt} = -\frac{1}{R_i} n \left(\frac{d\Phi_m(t)}{dt} + \frac{d\Phi_{ind}(t)}{dt} \right)$$

$$\frac{d\Phi_{ind}(I_k)}{dt} = nA \frac{\mu}{l} \frac{dI_k}{dt} \rightarrow \text{DGL}$$

Supraleitung: $R_i = 0$

Damit $I_k \neq \infty \rightarrow \frac{d\Phi_{\text{ind}}(t)}{dt} \stackrel{!}{=} - \frac{d\Phi_m(t)}{dt}$

$$A \frac{\mu n}{\ell} \frac{dI_k(t)}{dt} = - A \frac{dB_0(t)}{dt} \rightarrow \frac{dI_k(t)}{dt} = - \frac{\ell}{\mu n} \frac{dB_0(t)}{dt}$$

$$I_k(t) = I_0 - \frac{\ell}{\mu n} B_0(t)$$

Der Kurzschlussstrom im Supraleiter folgt der Änderung des äußeren Magnetfeldes $B_0(t)$

↑ Anfangswert, Integrationskonstante

$$\frac{d\Phi_{\text{ind}}(t)}{dt} \stackrel{!}{=} - \frac{d\Phi_m(t)}{dt}$$

$$\rightarrow \Phi_{\text{ind}}(t) = \Phi_0 - \Phi_m(t)$$

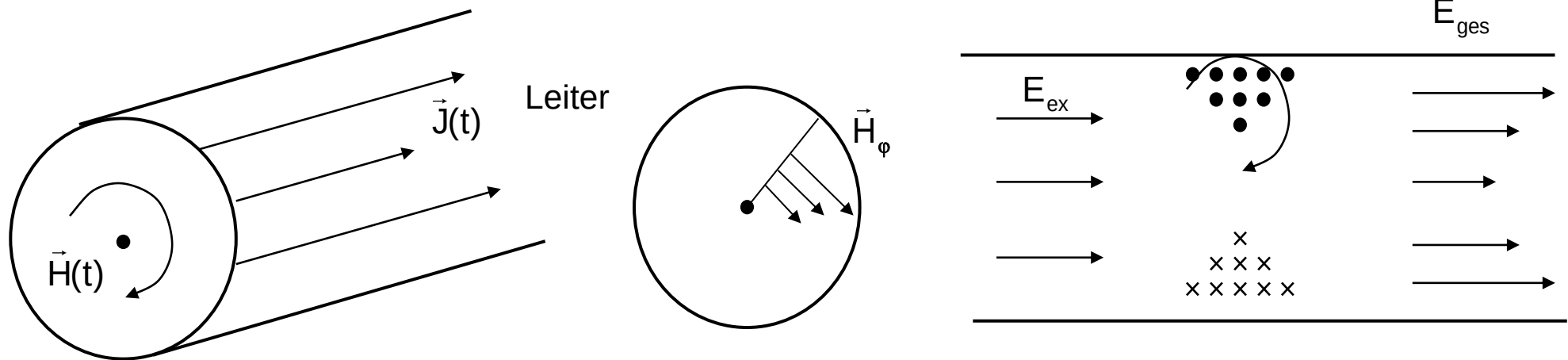
↑ Anfangswert, Integrationskonstante

$$\rightarrow \begin{aligned} \Phi_{\text{eff}}(t) &= \Phi_m(t) + \Phi_{\text{ind}}(t) \\ &= \Phi_0 = \text{const} \end{aligned}$$

Der effektive Fluss im Supraleiter bleibt unabhängig von äußeren Magnetfeldern konstant auf seinem ursprünglichen Wert Φ_0 eingefroren.

7.4 Rückwirkung des Magnetfeldes auf elektrische Wechselfelder (Skin-Effekt)

Problem:



E_{ex} - Feld erzeugt Strom, Strom erzeugt H - Feld, $\frac{\partial H}{\partial t}$ erzeugt E_{ind} - Feld
verändert E - Feld

7.5 Diffusionsgleichung für $\vec{J}$

$$\boxed{\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}}$$

$$\boxed{\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\kappa} \cdot \text{rot } \vec{J} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\kappa\mu} \text{rot } \vec{J} \quad \Bigg|$$

Ziel:
Suche einer Bestimmungs-
gleichung nur für $\vec{J}$

$$\boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{J}}$$

$$\Rightarrow \text{rot } \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \text{rot } \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot} \left(-\frac{1}{\kappa\mu} \text{rot } \vec{J} \right) = -\frac{1}{\kappa\mu} \cdot \text{rot } \text{rot } \vec{J} = -\frac{1}{\kappa\mu} \left(\text{grad div } \vec{J} - \Delta \vec{J} \right) = \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

$$\underbrace{\text{div rot } \vec{H}}_0 = \text{div } \vec{J} \rightarrow \text{div } \vec{J} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta \vec{J} = \kappa\mu \cdot \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}}$$

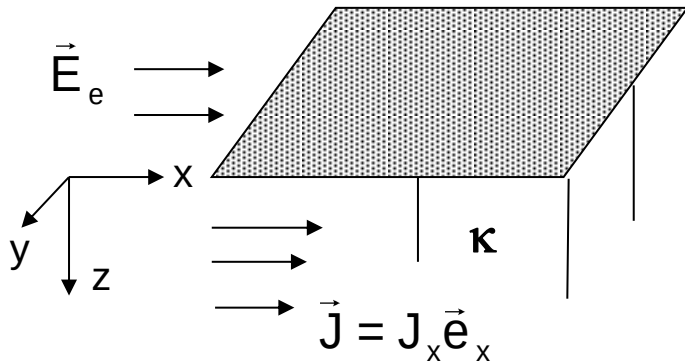
„Diffusions - Gleichung“
für Stromdichte

7.6 Skin - Effekt

ebener Fall:

- oben kein Strom

- innen Strom



$$\Delta \vec{J} = \kappa \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

J konstant in y - und x -Richtung
aber variabel in die Tiefe in z -Richtung

$$\frac{\partial^2 J_x}{\partial z^2} = \kappa \mu \frac{\partial J_x}{\partial t}$$

Ansatz: $\vec{J}(z, t) = J_x(z) e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_x$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 J_x(z)}{\partial z^2} = j \omega \kappa \mu J_x(z)$$

$\rightarrow$ allg. Lösung $J_x(z) = c_1 e^{+\sqrt{j\omega\kappa\mu} \cdot z} + c_2 e^{-\sqrt{j\omega\kappa\mu} \cdot z}$

Abkürzung: $d \stackrel{\text{Def}}{=} \sqrt{\frac{2}{\omega\kappa\mu}}$ und Mathematik: $\sqrt{j} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$

$$\rightarrow J_x(z) = c_1 e^{(j+1)z/d} + c_2 e^{-(j+1)z/d}$$

$\perp J_x(0)$ Stromdichte am Rand $z = 0$

$$\rightarrow J_x(z) = J_x(0) e^{-jz/d} \cdot e^{-z/d}$$

$\perp$ exponentieller Abfall mit
Eindringtiefe d

Beispiel: zylindrischer Draht

Zylinderkoordinaten $J_R = 0$ $J_\phi = 0$ $J_z = J_z(R) \cdot e^{j\omega t}$

Laplace Operator für z-Komponente:

$$\Delta J_z = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \cdot \frac{\partial}{\partial R} J_z(R) \right) + \dots \frac{\partial}{\partial \phi} + \dots \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{R} \cdot R \cdot \frac{\partial^2}{\partial R^2} J_z(R) + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} J_z(R)$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial^2}{\partial R^2} J_z(R) + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} J_z(R) = +j\omega \kappa \mu \cdot J_z(R)}$$

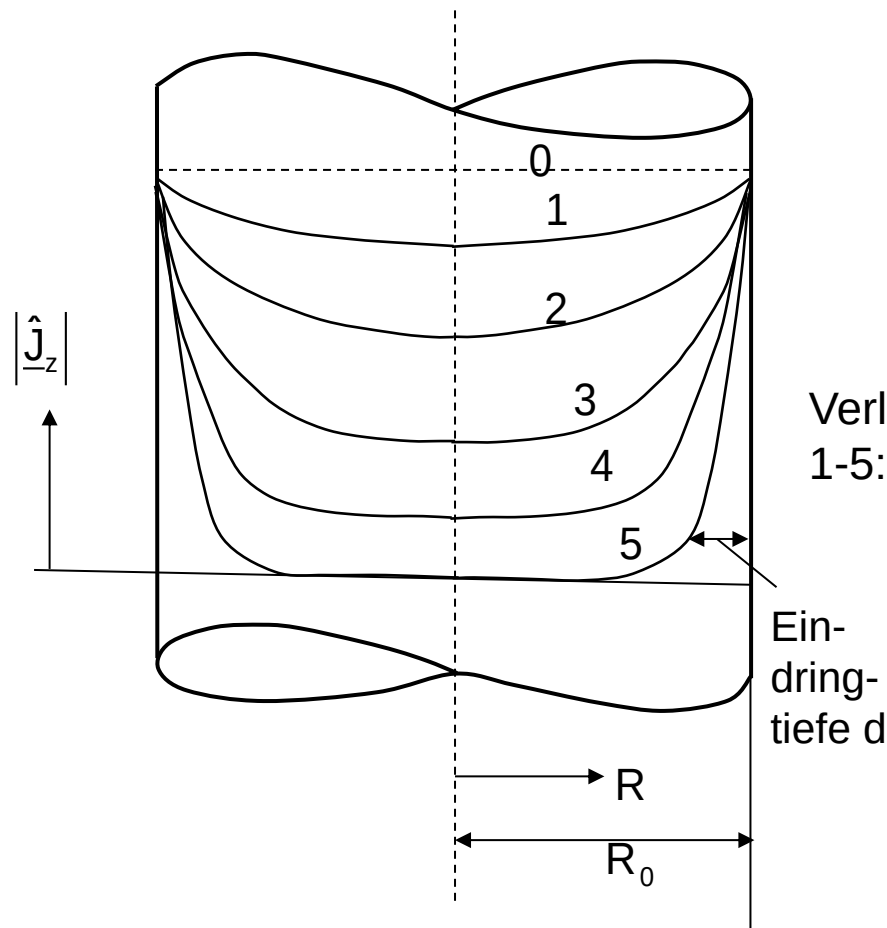
DGL für radiale
Verteilung
der Stromdichte

Lösung der DGL liefert:

$$\rightarrow d = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}} = \text{Eindringtiefe} \quad \Leftarrow$$

gleiche Größe wie Eindringtiefe
auf einem ebenen Leiter

Definition der Eindringtiefe d:
J auf 1/e abgefallen



Verlauf bei 0: Gleichstrom
1-5: wachsende Frequenz

Ein-
dring-
tiefe d

Zahlenbeispiel Kupfer:

$$\kappa = 5,8 \cdot 10^7 \frac{\text{A}}{\text{Vm}}$$

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}}$$

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

$$f = 1\,000 \text{ Hz}$$

$$d = 2,0 \text{ mm}$$

$$f = 100\,000 \text{ Hz}$$

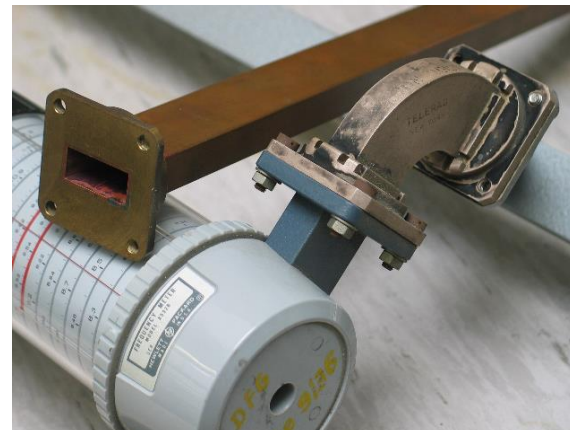
$$d = 0,20 \text{ mm}$$

} vermindert sich
mit wachsendem
 ω und κ



→ Problem: effektive Leistungs - HF - Übertragung

→ Lösung: Hohlleiter (siehe Kap.9.6)



8 Feldenergie und Energiestromdichte

8.1 Leistungsbilanz mittels Poynting Vektor

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow -\vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} = -\vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad / \cdot \vec{E}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad / \cdot \vec{H}$$

$$\vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} = -\vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

aus Formelsammlung: $\text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H}$

Def.: $\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{H})$ Poynting Vektor

$$\boxed{\text{div } \vec{S} = -\vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \Leftarrow \text{differentielle Leistungsbilanz}$$

$$\text{Einheit } (\vec{S}) = \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Joule}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$$

Poynting-Vektor beschreibt die Energie, die pro Zeit durch eine Fläche fließt:
„**Energiestromdichte**“

Energiedichte der Felder

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad \text{Energiedichte des el. Feldes}$$

$$W_e = \int w_e \, dv \quad \text{gesamte el. Feldenergie}$$

$$\text{Einheit } (w_e) = \frac{V}{m} \cdot \frac{As}{m^2} = \frac{\text{Joule}}{m^3}$$

$$\frac{\partial w_e}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^2(t)) = \frac{1}{2} \epsilon 2 \vec{E}(t) \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial w_e}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad \text{Energiedichte des magn. Feldes}$$

$$W_m = \int w_m \, dv \quad \text{gesamte magn. Feldenergie}$$

$$\text{Einheit } (w_m) = \frac{A}{m} \cdot \frac{Vs}{m^2} = \frac{\text{Joule}}{m^3}$$

$$\frac{\partial w_m}{\partial t} = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H}^2(t)) = \frac{1}{2} \mu 2 \vec{H}(t) \frac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial w_m}{\partial t} = \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

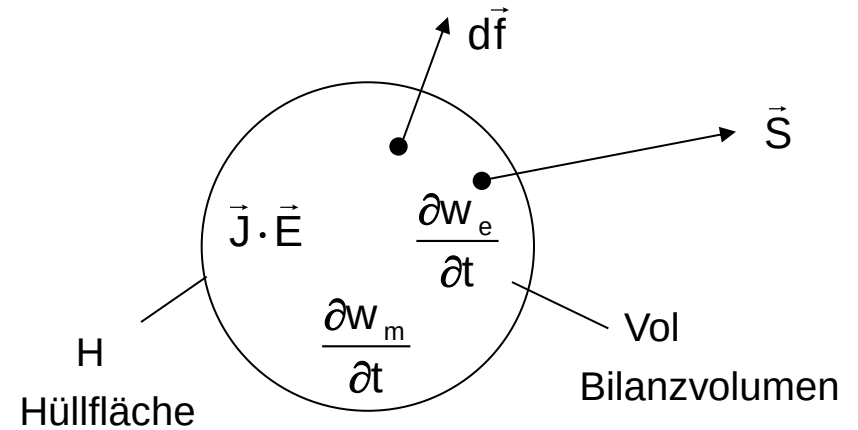
Übergang zur integralen Leistungsbilanz innerhalb eines Volumens

$$\underbrace{\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H})}_{\vec{S}} = -\vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} (w_j + w_e + w_m)$$

$$\int_{\text{Vol}} \operatorname{div} \vec{S} \, dv = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{Vol}} (w_j + w_e + w_m) \, dv$$

$$\oint_H \vec{S} \cdot d\vec{f} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{Vol}} (w_j + w_e + w_m) \, dv = 0$$



Die Summe aus:

- der aus einem Volumen herausströmenden Energie
- der im Volumen „verheizten“ Jouleschen Wärmeleistung
- der Änderung der im Volumen enthaltenen elektrischen Feldenergie
- der Änderung der im Volumen enthaltenen magnetischen Feldenergie

ist Null.

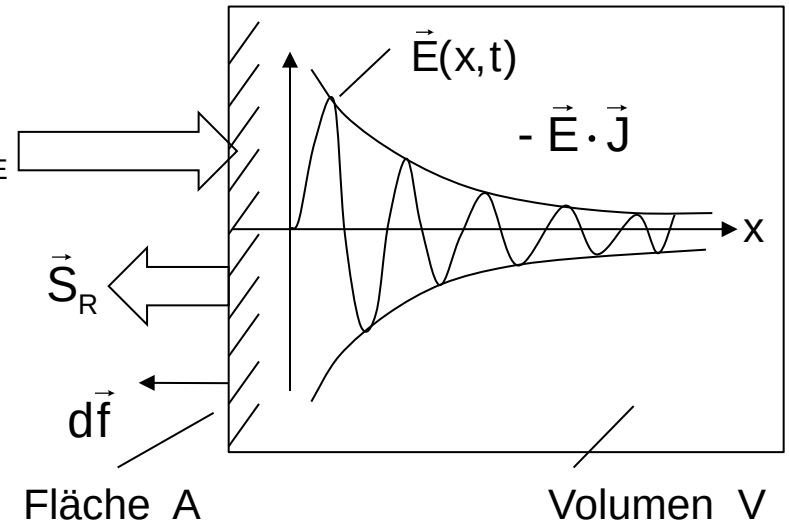
8.2 Beispiel einfallende Welle auf verlustbehaftetes Medium

- Teil der Welle wird reflektiert
- eindringende Welle wird absorbiert und produziert ohmsche Verluste

Leistungsdichte der einfallenden Welle: $\vec{S}_E = (\vec{E} \times \vec{H})_E$

Leistungsdichte der reflektierten Welle: $\vec{S}_R = (\vec{E} \times \vec{H})_R$

Ohmsche Verluste in leitfähigem Medium: $\vec{E} \cdot \vec{J}$

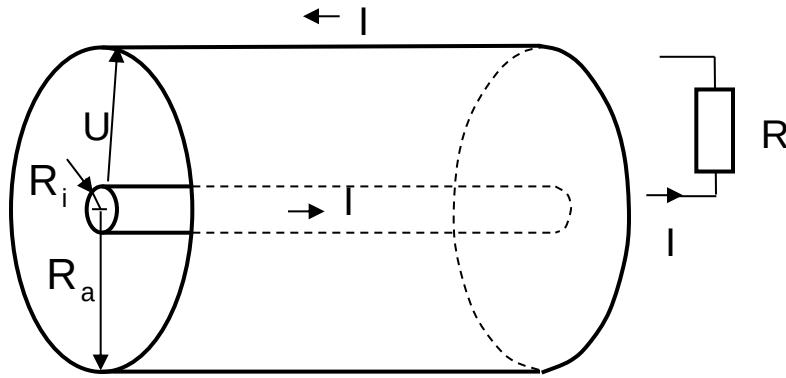


$$\oint_H \vec{S} \cdot d\vec{f} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{Vol} (w_j + w_e + w_m) dv = 0$$

$$\rightarrow \oint_H \vec{S} \cdot d\vec{f} = |\vec{S}_R| \cdot A - |\vec{S}_E| \cdot A = - \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dv$$

Energie - Erhaltung

8.3 Beispiel Energietransport im Koaxialleiter



- Spannung U zwischen Innenleiter und Außenrückleiter
- Strom I fließt durch Koaxialleiter
- Koaxialleiter sei verlustfrei $\kappa \rightarrow \infty$
 $\rightarrow \vec{J} = \kappa \cdot \vec{E} \rightarrow E_z = 0$

Zylinder-Koordinaten:

(mit $Q = C U$)

$$\vec{E} = E_R \cdot \vec{e}_R = \frac{Q}{2\pi\epsilon \cdot \ell R} \cdot \vec{e}_R = \frac{2\pi\epsilon \cdot \ell}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} \cdot U \cdot \frac{1}{2\pi\epsilon \cdot \ell R} \cdot \vec{e}_R = \frac{U}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right) R} \cdot \vec{e}_R$$

für $R_i < R < R_a$ sonst: $E_R = 0$

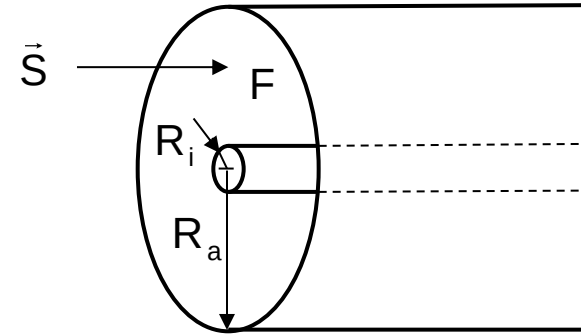
$$\vec{H} = H_\phi \cdot \vec{e}_\phi = \frac{I}{2\pi R} \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\rightarrow \vec{E} \times \vec{H} = E_R \cdot H_\phi \cdot \vec{e}_z = \frac{U}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} \cdot \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \vec{e}_z$$

Poyntingvektor $\sim \frac{1}{R^2}$
 weist zum Verbraucher

$$\vec{E} \times \vec{H} = E_R \cdot H_\phi \cdot \vec{e}_z = \frac{U}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} \cdot \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \vec{e}_z$$

Poynting - Vektor $\vec{S}(R)$



$$\int_F \vec{S} \cdot d\vec{f} = \frac{U \cdot I}{2\pi \cdot \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} \cdot \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_a} \frac{1}{R^2} R dR d\phi$$

$$= \frac{U \cdot I}{2\pi \cdot \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \int_{R_i}^{R_a} \frac{1}{R} dR$$

$$= \frac{U \cdot I}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} \cdot \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right) = U \cdot I$$

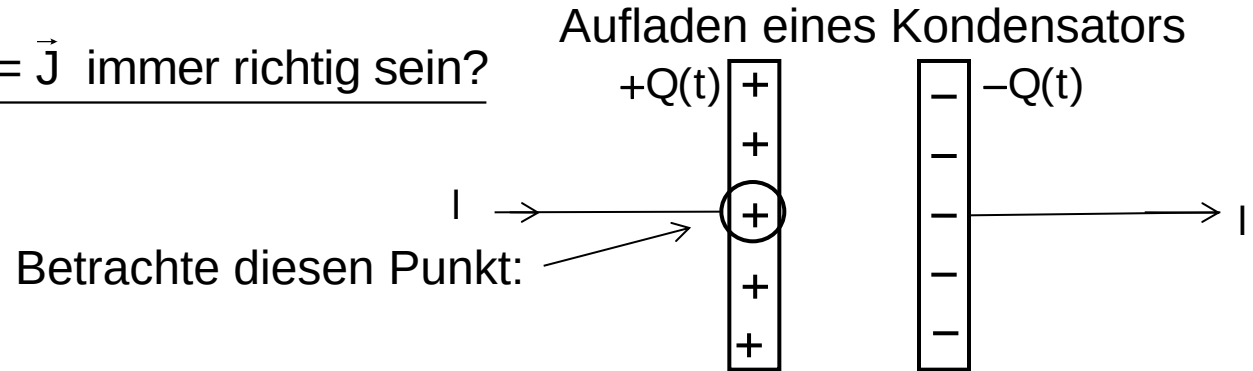
⇐ gesamte in den Querschnitt eintretende Leistung

⇒ Die gesamte Leistung wird durch das Feld zwischen Innen- und Außenleiter transportiert

9 Schnell veränderliche Felder

9.1 Verschiebungsstrom und dessen Magnetfeld

Frage: Kann $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$ immer richtig sein?



Erhaltung der Ladung heißt:

$$\oint \vec{J} \, d\vec{f} + \frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dv = 0 \quad \leftrightarrow \quad \text{div } \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0$$

An dieser Stelle im Raum gilt also:

$$\text{div } \vec{J} \neq 0$$

Für $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$ würde gelten:

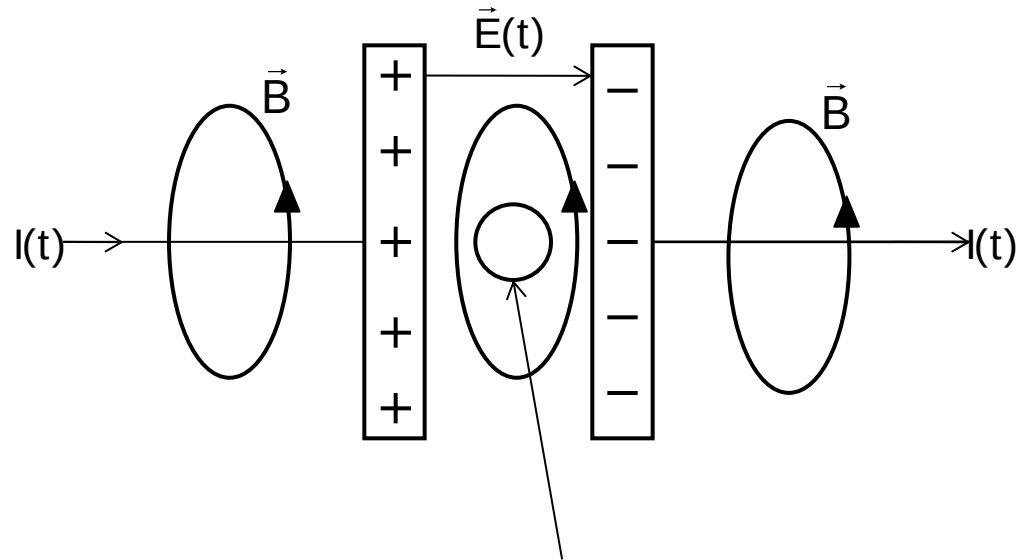
$$\text{div } \vec{J} = \text{div } \text{rot } \vec{H} \equiv 0$$

Widerspruch

Richtig ist: $\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

und damit: $\text{div } \text{rot } \vec{H} = \text{div } \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{D}$ und $\text{div } \vec{D} = \rho$

$$0 = \text{div } \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \rho$$



Betrachte nun diesen Punkt:

wenn gilt: $\boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t}$ und an diesem Punkt $\vec{J}$ Null ist

dann folgt: $\text{rot } \vec{H} = \partial \vec{D} / \partial t \quad \leftrightarrow \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int (\partial \vec{D} / \partial t) \cdot d\vec{f}$

→ es gibt auch Magnetfelder in Bereichen mit $\vec{J} = 0$

wenn zeitlich variable elektrische Felder vorliegen mit $\partial \vec{D} / \partial t \neq 0$

Berücksichtigung von atomaren Ringströmen und molekularen Ladungsverschiebungen

$$\boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{\text{ges}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad \begin{array}{l} \text{grundlegende} \\ \text{Maxwell Gleichung} \end{array}$$

$$\vec{J}_{\text{ges}} = \vec{J}_{\text{frei}} + \vec{J}_{\text{P}} + \vec{J}_{\text{atom}}$$

mit $\vec{J}_{\text{frei}}$: Ströme freier Elektronen/Ionen, erstere z.B. in Metallen

$\vec{J}_{\text{P}}$: Ladungsverschiebungen in Molekülen dielektrischer Materialien bei zeitlich variablen Vorgängen

$\vec{J}_{\text{atom}}$: Kreisströme in para- und ferromagnetischen Materialien, verantwortlich für die atomaren Elementarmagnete

Rückblick: Berücksichtigung magn. Materialien mit atomaren Ringströmen $\vec{J}_{\text{atom}}$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J}_{\text{frei}} + \vec{J}_P + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) + \mu_0 \vec{J}_{\text{atom}}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{IPE}} + \vec{B}_M$$

$\vec{B}_{\text{IPE}}$: hervorgerufen durch freie Ströme $\vec{J}_{\text{frei}}$, durch Polarisationsströme in Molekülen $\vec{J}_P$ sowie durch zeitliche Variation des $\vec{E}$ -Feldes

$\vec{B}_M$: hervorgerufen durch atomare Ringströme $\vec{J}_{\text{atom}}$

$$\text{Superposition: } \text{rot } \vec{B}_{\text{IPE}} = \mu_0 \left(\vec{J}_{\text{frei}} + \vec{J}_P + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \text{ und } \text{rot } \vec{B}_M = \mu_0 \vec{J}_{\text{atom}}$$

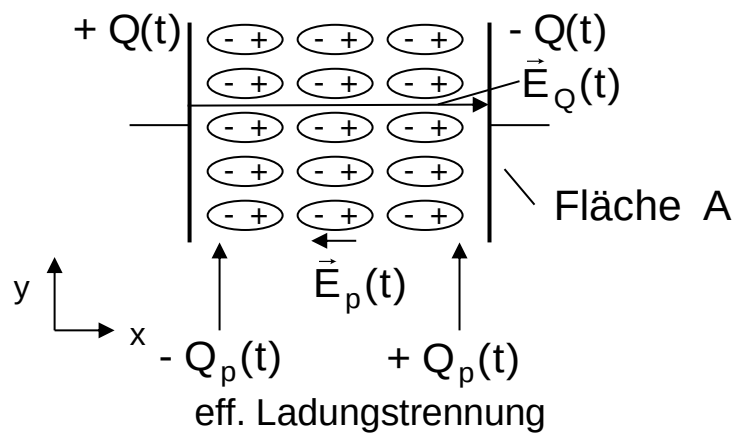
Bei linearer Abhängigkeit zwischen $\vec{B}$ und $\vec{B}_M$ bekommen wir

$\vec{B} = \mu_r \vec{B}_{\text{IPE}}$, wobei μ_r den Anteil von $\vec{B}_M$ am Gesamtfeld beinhaltet

Mit der Definition $\vec{H} = \vec{B}_{\text{IPE}} / \mu_0$ ergibt sich schließlich

$$\boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_{\text{frei}} + \vec{J}_P + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad \text{und} \quad \boxed{\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}}$$

Berücksichtigung molekularer Ladungsbewegungen am Beispiel eines Kondensators mit leitfähigem Dielektrikum:



$$\vec{E}_Q = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} \vec{e}_x$$

$$\vec{E}_P = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q_P}{A} \vec{e}_x$$

$$\vec{J}_P = \frac{1}{A} I_P \vec{e}_x = \frac{1}{A} \frac{dQ_P}{dt} \vec{e}_x$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_{\text{frei}} + \vec{J}_P + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \left\{ \begin{array}{l} \vec{J}_{\text{frei}} : \text{freie Leckströme im leitfähigen Dielektrikum} \\ \vec{J}_P : \text{Bewegung gebundener Elektronen in Molekülen} \\ \vec{E} = \vec{E}_Q + \vec{E}_P : \text{effektives elektrisches Gesamtfeld} \end{array} \right.$$

$$= \vec{J}_{\text{frei}} + \frac{1}{A} \frac{dQ_P}{dt} \vec{e}_x + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$= \vec{J}_{\text{frei}} + \frac{1}{A} \frac{dQ_P}{dt} \vec{e}_x + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_Q}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_P}{\partial t}$$

$$= \vec{J}_{\text{frei}} + \frac{1}{A} \frac{dQ_P}{dt} \vec{e}_x + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_Q}{\partial t} + \epsilon_0 \left(-\frac{1}{\epsilon_0 A} \frac{dQ_P}{dt} \right) \vec{e}_x$$

$$= \vec{J}_{\text{frei}} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_Q}{\partial t}$$

Es kompensieren sich also in den Molekülen des Dielektrikums die Beiträge

- der durch Ladungstrennung erzeugten Polarisationsfelder $\frac{\partial \vec{E}_P}{\partial t}$

- und der Bewegung der gebundenen Elektronen $\vec{J}_P$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_{\text{frei}} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_Q}{\partial t}$$

Mit der Definition $\vec{D} \stackrel{\text{Def}}{=} \epsilon_0 \vec{E}_Q$ erhalten wir

$$\boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_{\text{frei}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \quad \text{und} \quad \boxed{\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}}$$

Hierbei verbergen sich in

$\vec{B}$: das effektive Gesamtmagnetfeld, welches mittels μ_r zusätzlich zu $\vec{B}_{\text{IPE}}$ die atomaren Ringströme $\vec{J}_{\text{atom}}$ beinhaltet

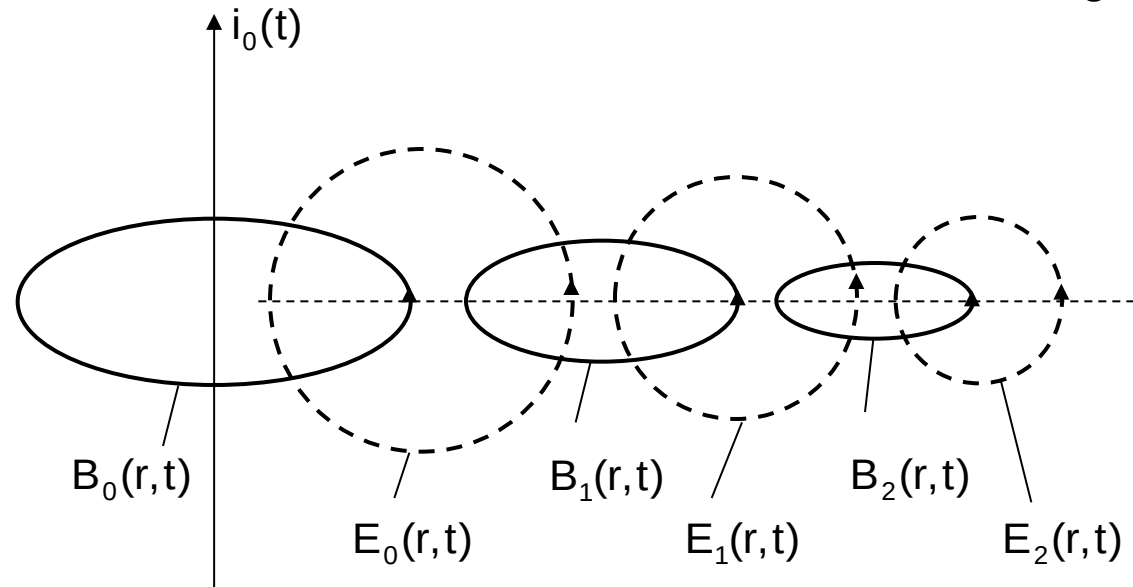
$\vec{H}$: die Magnetfeldanteile $\vec{B}_{\text{IPE}}$, die durch $\vec{J}_{\text{frei}}$, $\vec{J}_P$ und $\partial \vec{E} / \partial t$ erzeugt werden

$\vec{J}_{\text{frei}}$: die Ströme von ungebundenen Elektronen und Ionen, z.B. die Elektronen in Leitern

$\vec{D}$: die das Magnetfeld erzeugende Wirkung von $\vec{E}_Q$; die Wirkungen von $\vec{E}_P$ sowie $\vec{J}_P$ der Ladungsverschiebungen in dielektrischen Molekülen kompensieren sich gegenseitig

Wellenvorgang bei schnell veränderlichen Feldern

Wellenausbreitung im leeren Raum $\rightarrow$ keine Ladungen,
keine Stromdichte nötig



$$\boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Wellenausbreitung durch Kopplung $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B} \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E}$

9.2 Wellengleichung für Nichtleiter

$$\rho = 0 \quad \vec{J} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad \vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{H} = 0 \end{array} \right\} \text{ für } \epsilon, \mu = \text{const.}$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}}$$

„Maxwell“

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{H} = \epsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}}$$

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = -\mu \cdot \operatorname{rot} \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}$$

Ziel: Entkoppeln der PDGln für E und H;
→ H eliminieren

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H}$$

$$\Delta \vec{E} - \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\boxed{\text{Abkürzung} \quad \mu \epsilon \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{1}{c^2}}$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

Wellengleichung für das elektrische Feld

$$\text{rot } \vec{H} = \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

„Maxwell“

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}$$

$$\text{rot} \left(\text{rot } \vec{H} \right) = \varepsilon \cdot \text{rot} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

Ziel: E eliminieren

$$\text{grad} \underset{0}{\text{div}} \vec{H} - \Delta \vec{H} = \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E}$$

$$\Delta \vec{H} - \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{Abkürzung} \quad \mu \varepsilon \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{1}{c^2}$$

$$\rightarrow \Delta \vec{H} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Wellengleichung
für magnetisches Feld

und
$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Wellengleichung
für elektrisches Feld

Aber: $\vec{E}$ und $\vec{H}$
sind mit einander verkoppelt

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Freie Ausbreitung im leeren Raum, kartesische Koordinaten

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Ebene Wellen:

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

Wellenausbreitung in x-Richtung

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \neq 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}_x}{\partial t^2} = 0 \leftarrow \text{Longitudinale Wellen: gibt es die im freien Raum? NEIN!}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \leftarrow \text{Transversale Wellen: gibt es die im freien Raum? JA!}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

Die transversalen E_y und E_z – Komponenten sind entkoppelt; es sind 2 unabhängige Wellengleichungen

9.2.1 Lösungen für ebene Wellen

Ausbreitung in x-Richtung:

y-Richtung von E

$$E_x = E_z = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

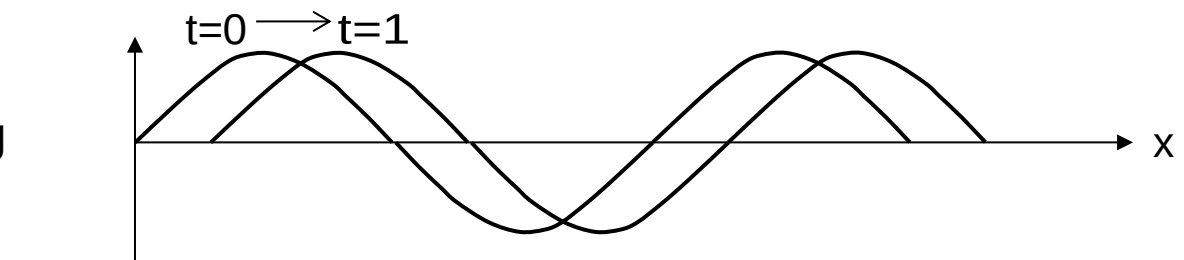
Lösung: $\rightarrow$

$$E_y = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

Dieser Ansatz löst die Wellengleichungen mit beliebigen Funktionen f und g.

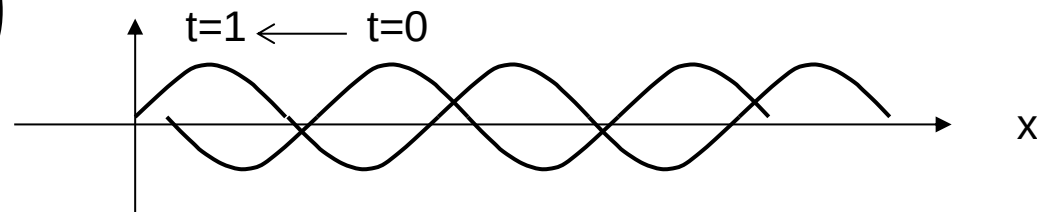
$$\text{z.B. } f\left(t - \frac{x}{c}\right) = E_f \sin\left(\omega_f \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$$

Wellenmuster f
läuft in +x-Richtung



$$\text{z.B. } g\left(t + \frac{x}{c}\right) = E_g \sin\left(\omega_g \cdot \left(t + \frac{x}{c}\right)\right)$$

Wellenmuster g
läuft in -x-Richtung



Beweis

$$E_y(x,t) = f\left(t \mp \frac{x}{c}\right) \stackrel{\text{z.B.}}{=} E_{y0} \cos\left(\omega \cdot \left(t \mp \frac{x}{c}\right)\right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} = \pm \frac{\omega}{c} E_{y0} \sin\left(\omega \cdot \left(t \mp \frac{x}{c}\right)\right)$$

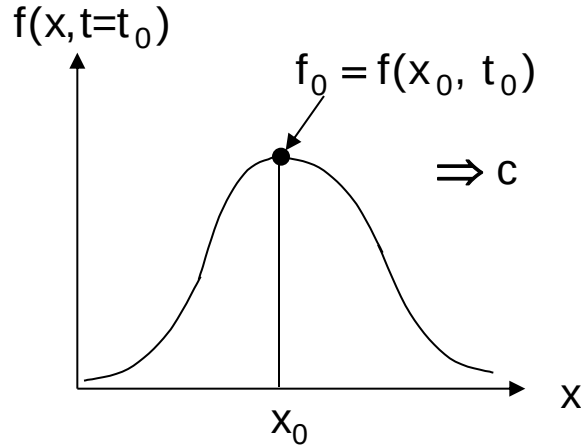
$$\rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} E_{y0} \cos\left(\omega \cdot \left(t \mp \frac{x}{c}\right)\right) = -\frac{\omega^2}{c^2} E_y$$

$$\rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\omega E_{y0} \sin\left(\omega \cdot \left(t \mp \frac{x}{c}\right)\right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -\omega^2 E_{y0} \cos\left(\omega \cdot \left(t \mp \frac{x}{c}\right)\right) = -\omega^2 E_y$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} E_y\right) - \frac{1}{c^2} (-\omega^2 E_y) = 0 \quad \text{qed}$$

Wie schnell und in welche Richtung wandert die Welle?



$$E_y(x, t) = f\left(t \mp \frac{x}{c}\right) = f(\xi)$$

$f(\xi)$ beschreibt die Form
des Wellenpulses

mit Abkürzung $\xi(x, t) = t \mp \frac{x}{c}$

Wellengeschwindigkeit = Änderung der Orte konstanter Amplitude $f_0 = f(x_0, t_0) = f(\xi_0)$ pro Zeit

$$\xi(x, t) = t \mp \frac{x}{c} \stackrel{!}{=} \xi_0 = \text{const.} \quad \underline{\text{gesucht}} \quad (x, t) \text{ - Paare für } \xi_0 = \text{const}$$

$$\rightarrow \frac{d\xi(x, t)}{dt} = 1 \mp \frac{1}{c} \frac{dx}{dt} \stackrel{!}{=} \frac{d\xi_0}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = \pm c = \frac{\pm 1}{\sqrt{\epsilon \mu}}}$$

Wellengeschwindigkeit in (+) positiver bzw. (-) negativer x - Richtung

Verkopplung von elektrischem u. magnetischem Feld

E und H sind verkoppelt durch: $\boxed{\text{rot } \vec{H} = \epsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

Ebene Wellenausbreitung entlang der x-Achse mit $\vec{E} = E_y(x,t) \vec{e}_y$

$$\rightarrow (\text{rot } \vec{H})_y = \left(\cancel{\frac{\partial H_x}{\partial z}} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \vec{e}_y$$

$$\rightarrow \boxed{-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}}$$

Einsetzen der allgemeinen Lösungen der Wellengleichungen liefert:

$$E_y(x,t) = E_0 f\left(t \mp \frac{x}{c}\right) \stackrel{\text{z.B.}}{=} E_{y0} \cos\left(\omega \cdot \left(t \mp \frac{x}{c}\right)\right)$$

$$H_z(x,t) = H_0 f\left(t \mp \frac{x}{c}\right) \stackrel{\text{z.B.}}{=} H_{z0} \cos\left(\omega \cdot \left(t \mp \frac{x}{c}\right)\right)$$

$$\rightarrow -\left(\pm \frac{\omega}{c}\right) H_z = \epsilon(-\omega) E_y$$

$$\rightarrow H_z = \pm \epsilon c E_y \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \rightarrow \boxed{H_z = \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_y}$$

Analog gilt für die Richtung des elektrischen Feldes in z-Richtung mit E_z

$$\boxed{H_y = \mp \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_z}$$

Wellenwiderstand

$$\frac{E_y}{H_z} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} = \Gamma$$

„Definition: Wellenwiderstand“

↑
Verhältnis zwischen $\vec{E}$ und $\vec{H}$

Achtung !!

Γ hat nichts
mit einem
Ohmschen Widerstand
zu tun.

$$\Gamma_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8.85 \cdot 10^{-12}}} \sqrt{\frac{\left(\frac{Vs}{Am}\right)}{\left(\frac{As}{Vm}\right)}} = 377 \sqrt{\frac{V^2}{A^2}}$$

$$\Gamma_0 = 377 \frac{V}{A}$$

Wellenwiderstand des Vakuums:
Naturkonstante des Vakuums (ähnlich c_0)

Der Wellenwiderstand (Dimension Ohm) ist die feste Proportionalitätskonstante zwischen elektrischen und magnetischen Feldvektoren ebener Wellen im Vakuum

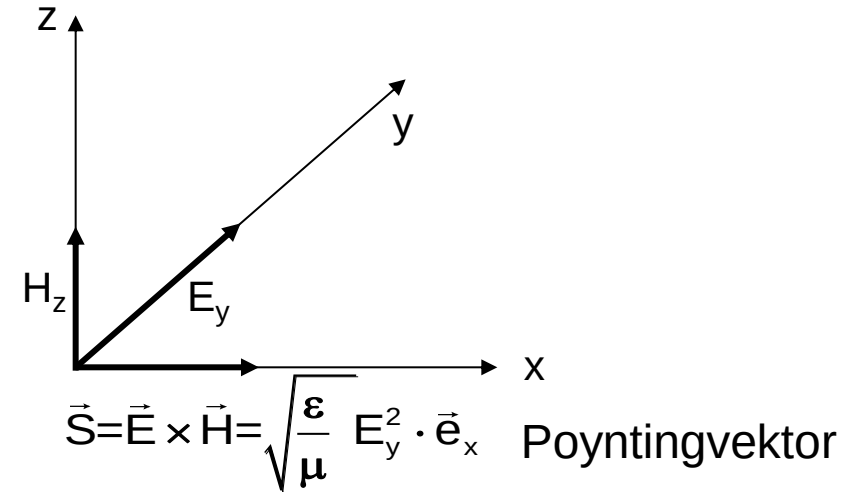
Transversalwellen

$$f(t - x / c)$$

Welle in
+x-Richtung

$$H_z = + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_y$$

E_y und H_z in Phase



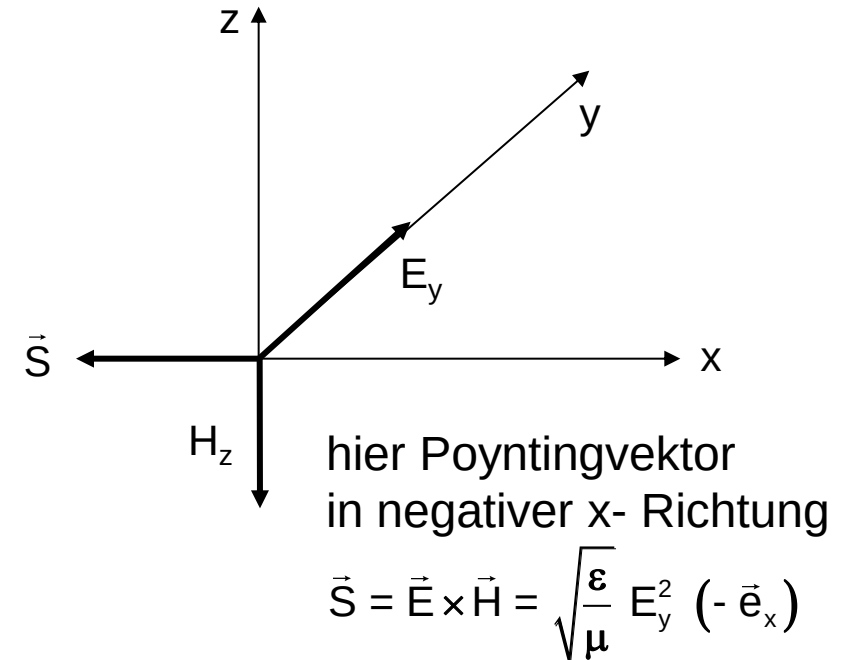
Rücklaufende Welle:

$$g(t + x / c)$$

Welle in
-x-Richtung

$$H_z = - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_y$$

E_y und H_z in Phase
mit umgekehrtem Vorzeichen



Gibt es ebene Longitudinalwellen?

Longitudinal: $\vec{E}$ und $\vec{H}$ würden in Ausbreitungsrichtung x weisen

Versuch Ansatz:

$$E_x(x,t) = f_x(t - x/c)$$

$$\stackrel{\text{z.B.}}{=} E_{x0} \cos\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$$

$$H_x(x,t) = g_x(t - x/c)$$

$$\stackrel{\text{z.B.}}{=} H_{x0} \cos\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$$

$$\boxed{\text{div } \vec{D} = 0}$$

Maxwell

$$\boxed{\text{div } \vec{B} = 0}$$

$$\rho = 0$$

$$\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial x} = \epsilon \left(+ \frac{\omega}{c} \right) E_{x0} \sin\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \neq 0$$

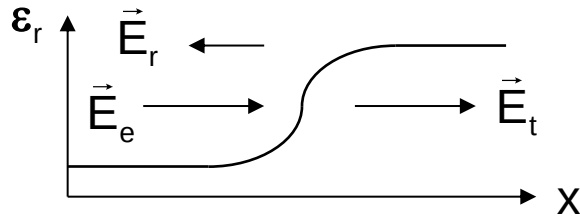
$$\mu \frac{\partial H_x}{\partial x} = \mu \left(+ \frac{\omega}{c} \right) H_{x0} \sin\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \neq 0$$

Widerspruch

→ Ansatz falsch!

Es gibt keine ebenen Longitudinalwellen

9.2.2.2 Reflexionen



Es entstehen Reflexionen an Stellen, an denen ϵ_r sich ändert.

Die bisherige Wellengleichung liefert keine Erklärung für Reflexionen.

Ursache ist die Vernachlässigung des Terms $\text{div } \vec{E}$ in der Herleitung der Wellengleichung. Bei räumlich variablem ϵ_r gilt statt dessen:

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{rot } \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H} = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{div } \vec{D} = 0 \quad \text{für } \rho = 0$$

$$\text{div } (\epsilon \vec{E}) = \epsilon \text{div } \vec{E} + \text{grad } \epsilon \cdot \vec{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{div } \vec{E} = -\frac{\text{grad } \epsilon}{\epsilon} \cdot \vec{E}$$

Null für $\epsilon = \text{const.}$

$$\rightarrow \boxed{\Delta \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\text{grad} \left(\frac{\text{grad } \epsilon}{\epsilon} \cdot \vec{E} \right)}$$

Störterm; erzeugt Reflexionen

Für den Fall, dass die Anregung der Welle durch eine links platzierte Antenne bewirkt wurde, gilt:

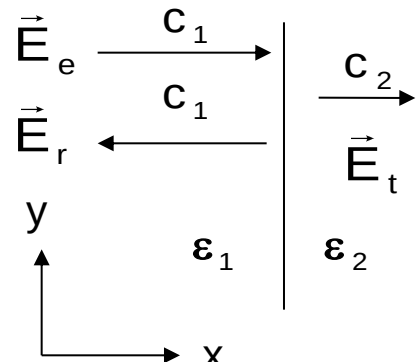
$$\text{Fall } \varepsilon = \text{const} \quad \rightarrow \quad \vec{E} \sim E_e f\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \text{keine Reflexion}$$

$$\text{Fall } \varepsilon = \varepsilon(x) \quad \rightarrow \quad \vec{E} \sim E_e \left(\underbrace{f_t(x)f\left(t - \frac{x}{c}\right)}_{\text{transmittierte Welle}} + \underbrace{f_r(x)f\left(t + \frac{x}{c}\right)}_{\text{reflektierte Welle}} \right)$$

Einfacher Fall: ϵ stückweise konstant (Beispiel Glas/Luft bei Lichtwellen)

$$\begin{array}{lll} \vec{E}_e \sim f\left(t - \frac{x}{c_1}\right), & \vec{E}_r \sim f\left(t + \frac{x}{c_1}\right), & \vec{E}_t \sim f\left(t - \frac{x}{c_2}\right) \\ \text{einfallende} & \text{reflektierte} & \text{transmittierte Wellen} \end{array}$$

Stetigkeit der Tangentialkomponenten an Grenzschicht Glas/Luft:



$$\rightarrow \boxed{E_{ye} + E_{yr} = E_{yt}} \quad (1)$$

$$H_{ze} + H_{zr} = H_{zt} \quad \text{mit} \quad H_z = \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_y$$

$$\rightarrow \boxed{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu}} E_{ye} - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu}} E_{yr} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu}} E_{yt}} \quad (2)$$

$$\sqrt{\epsilon_1} E_{ye} + \sqrt{\epsilon_1} E_{yr} = \sqrt{\epsilon_1} E_{yt} \quad (1) \quad \text{erweitert mit } \sqrt{\epsilon_1}$$

$$\sqrt{\epsilon_1} E_{ye} - \sqrt{\epsilon_1} E_{yr} = \sqrt{\epsilon_2} E_{yt} \quad (2)$$

$$\Sigma \rightarrow 2 \sqrt{\epsilon_1} E_{ye} = (\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}) E_{yt} \rightarrow \boxed{E_{yt} = \frac{2 \sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} E_{ye}}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{\epsilon_1} = 1 \\ \sqrt{\epsilon_2} = 1,5 \\ \rightarrow E_{yt} = 0.80 E_{ye} \end{array}$$

9.2.3 Harmonische Wellen

9.2.3.1 Sinusförmige elektrische und magnetische Felder

Einführung komplexer Größen wie in der Wechselstromlehre:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \rightarrow \operatorname{Re}[\vec{H}(\vec{r}, t)]$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \rightarrow \operatorname{Re}[\vec{E}(\vec{r}, t)]$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \rightarrow \operatorname{Re}[\vec{J}(\vec{r}, t)]$$

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \rightarrow \operatorname{Re}[\rho(\vec{r}, t)]$$

Hierbei sind die Größen $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{H}(\vec{r})$, $\vec{J}(\vec{r})$, $\rho(\vec{r})$ usw. komplexe Größen welche die jeweilige Amplitude sowie Phasenlage bestimmen.

$$\text{Komplexer Poynting-Vektor: } \vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \vec{S}_R + j\vec{S}_I$$

$$\text{Zeitlicher Mittelwert: } \langle \vec{S}_R \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\vec{E} \times \vec{H}^*] \quad \langle \vec{S}_I \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Im} [\vec{E} \times \vec{H}^*]$$

Lösung der harmonischen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2}$$

Harmonischer Ansatz: $E_y(x,t) = E_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot f(x)$

Ansatz folgt

- NICHT aus Mathematik oder Maxwell
- sondern aus technisch vorgegebener Anregung der Welle durch Antenne mit fester Frequenz

$$\rightarrow E_0 \cdot e^{j\omega t} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \epsilon \mu (-\omega^2) E_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot f(x)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \underbrace{\epsilon \mu \omega^2}_{\frac{\omega^2}{c^2}} f(x) = 0 \rightarrow \text{Lösung } e^{-j\frac{\omega}{c}x}, e^{+j\frac{\omega}{c}x}$$

$$\rightarrow E_y(x,t) = E_0 \cdot e^{j\omega t} e^{-j\frac{\omega}{c}x} \rightarrow \boxed{E_y(x,t) = E_0 \cdot e^{j\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}} \text{ Welle in pos. x - Richtung}$$

$$\rightarrow E_y(x,t) = E_0 \cdot e^{j\omega t} e^{+j\frac{\omega}{c}x} \rightarrow \boxed{E_y(x,t) = E_0 \cdot e^{j\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)}} \text{ Welle in neg. x - Richtung}$$

Definition der Wellenlänge und Frequenz

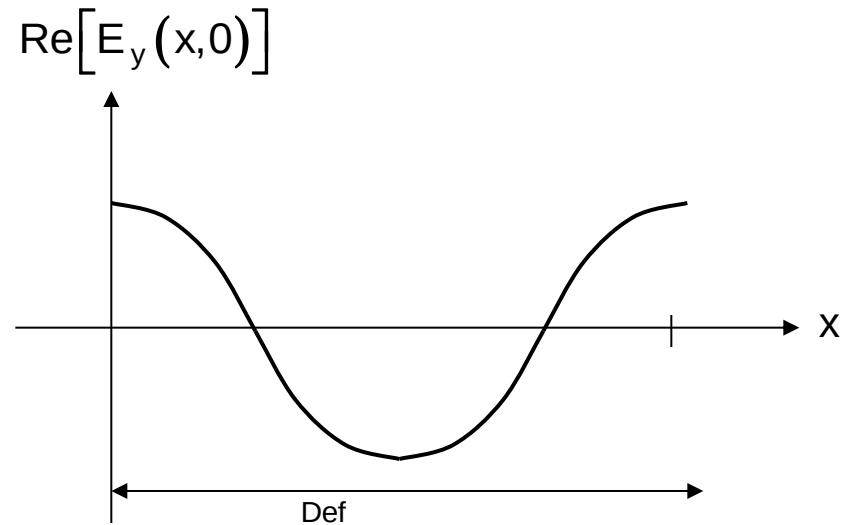
$$\operatorname{Re}\left[E_y(x,t)\right] = \operatorname{Re}\left[E_0 \cdot e^{j\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}\right] = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$$

räuml. Abhängigkeit bei $t = 0$:

$$\operatorname{Re}\left[E_y(x,0)\right] = E_0 \cos\left(-\frac{\omega}{c} \cdot x\right)$$

$$\frac{\omega}{c} \cdot \lambda = 2\pi \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}}$$

$$\omega = 2\pi f \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{c}{f}} \quad \text{Frequenz}$$



λ = Wellenlänge

Abstand zwischen zwei Maxima der Welle,
auch Periodenlänge genannt

$$\rightarrow \boxed{\operatorname{Re}\left[E_y(x,t)\right] = E_0 \cos\left(2\pi\left(f \cdot t - x/\lambda\right)\right)} \quad \text{Frequenz-Wellenlängen-Darstellung}$$

$$\rightarrow \boxed{E_y(x,t) = E_0 e^{j2\pi(f \cdot t - x/\lambda)}} \quad \text{Komplexe Darstellung}$$

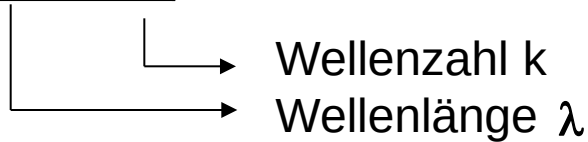
Darstellungen der harmonischen Welle durch Wellenzahl k

Wir hatten

$$\operatorname{Re}\left[E_y(x,t)\right] = \operatorname{Re}\left[E_0 \cdot e^{j\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}\right] = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$$

$$\boxed{\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \stackrel{\text{Def}}{=} k}$$

Definition der Wellenzahl k



→ $\boxed{\operatorname{Re}\left[E_y(x,t)\right] = E_0 \cos(\omega t - kx)}$ Kreisfrequenz-Wellenzahl-Darstellung

→ $\boxed{E_y(x,t) = E_0 e^{j(\omega t - kx)}}$ Komplexe Darstellung

In Wellenzahl k ist nun die Wellengeschwindigkeit c enthalten: $\boxed{c = \frac{\omega}{k}}$

9.2.3.2 Linear polarisierte Wellen

Lineare Polarisation in y-Richtung: $\vec{E} = E_y \vec{e}_y$

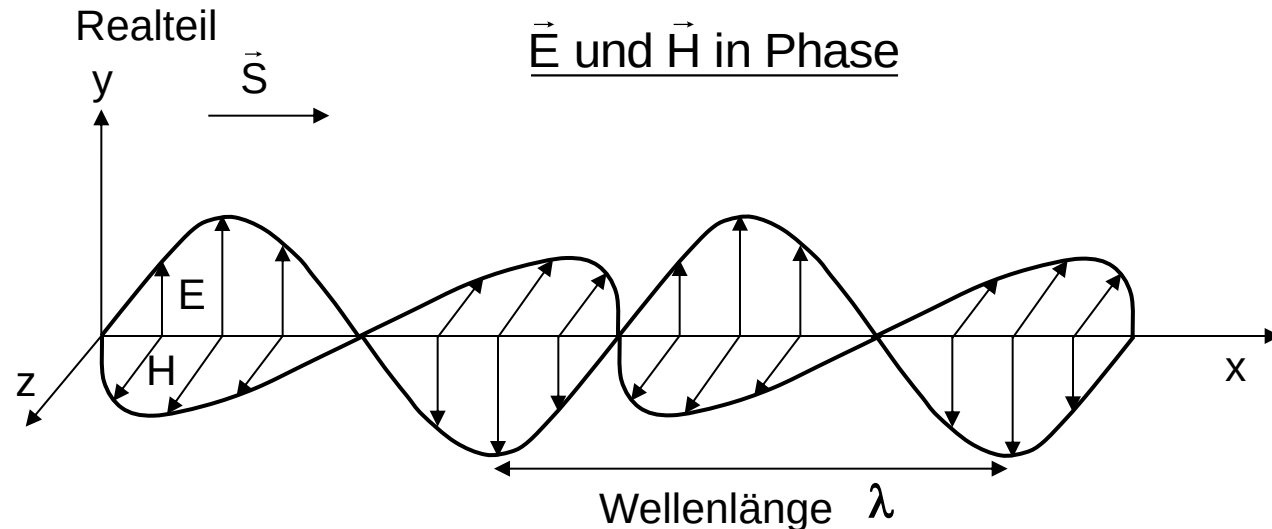
Kreisfrequenz-
Wellenzahl-
Darstellung

$$\begin{cases} E_y = E_0 \cdot e^{j(\omega t - k \cdot x)} \\ H_z = H_0 \cdot e^{j(\omega t - k \cdot x)} \end{cases} \quad \text{mit} \quad H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot E_0$$

Poynting Vektor: $\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \vec{e}_x$

Reelle
Darstellung:

$$E_y(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \quad \text{und} \quad H_z(x, t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot E_0 \cos(\omega t - kx)$$



Lineare Polarisation in y-Richtung: $\vec{E} = E_y \vec{e}_y$

Rücklaufende Welle

Kreisfrequenz-
Wellenzahl-
Darstellung

$$\begin{cases} E_y = E_0 \cdot e^{j(\omega t + k \cdot x)} \\ H_z = H_0 \cdot e^{j(\omega t + k \cdot x)} \end{cases} \quad \text{mit} \quad H_0 = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot E_0$$

$$\text{Poynting Vektor: } \vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \vec{e}_x$$

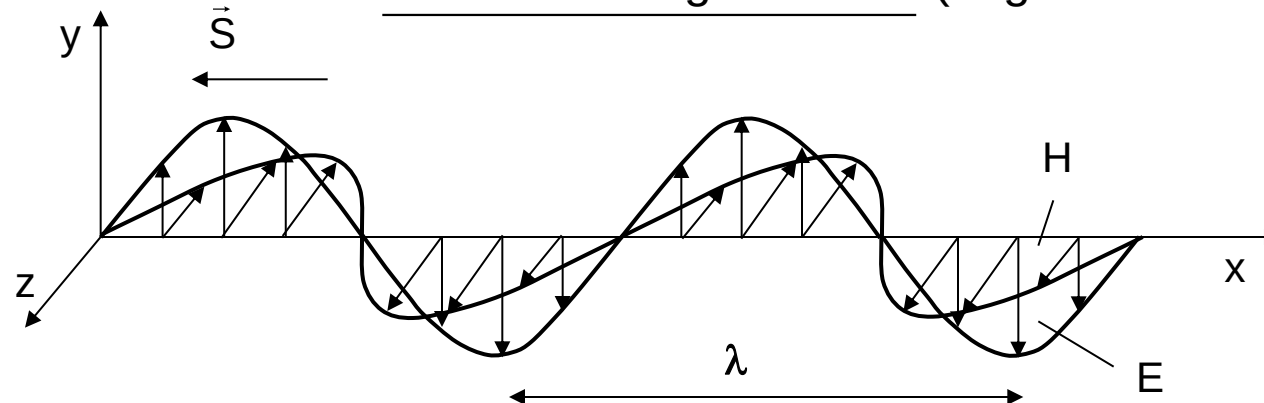
Reelle

Darstellung:

$$E_y(x, t) = E_0 \cos(\omega t + kx) \quad \text{und} \quad H_z(x, t) = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot E_0 \cos(\omega t + kx)$$

Realteil

$\vec{E}$ und $\vec{H}$ in Gegen-Phase (neg. Vorzeichen)



9.2.3.3 Zirkular polarisierte Wellen

E_z und E_y sind unabhängig voneinander:
jede beliebige Überlagerung ist erlaubt, z.B. 90° Phase

$$\left. \begin{aligned} E_z &= E_0 \cdot e^{j(\omega t - k \cdot x)} \\ E_y &= -j \cdot E_0 \cdot e^{j(\omega t - k \cdot x)} = E_0 \cdot e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \cdot e^{j(\omega t - k \cdot x)} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Phasenunterschied} \\ 90^\circ \end{array}$$

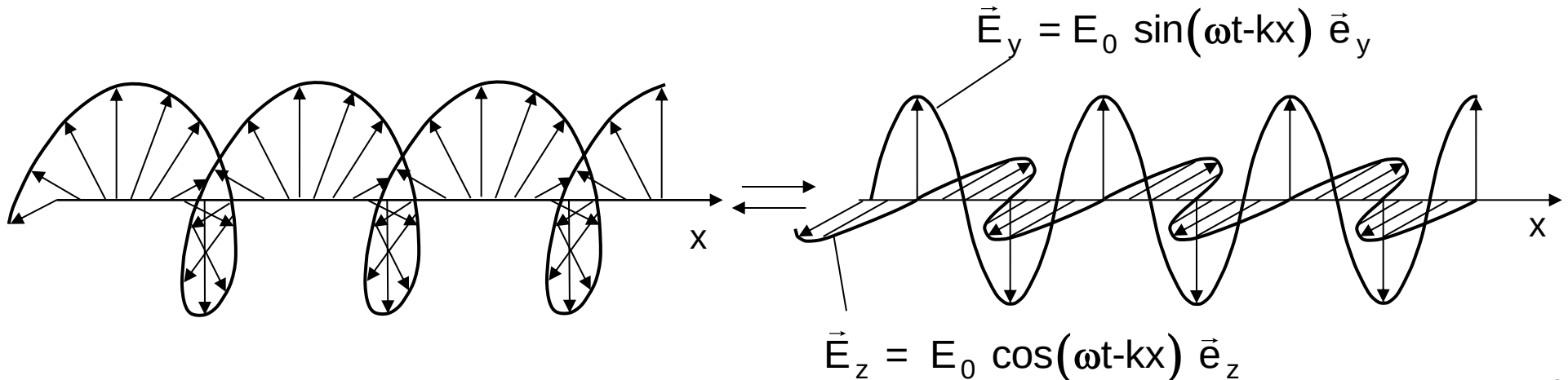
Zirkulare Polarisation:

$$|E_z| = |E_y| = E_0$$

Phasenunterschied $\pi/2$

$$\text{Re}\{E_z(x, t)\} = E_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$\text{Re}\{E_y(x, t)\} = E_0 \cos(-\pi/2 - \omega t + kx) = E_0 \sin(\omega t - kx)$$



9.3 Allgemeine Wellengleichung für leitfähige Medien

„Maxwell“:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}; \quad \boxed{\vec{J} = \kappa \vec{E}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{E} = 0 & \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array}}$$

$$\rightarrow \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{H}) = \operatorname{rot} \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{D}$$

$$-\Delta \vec{H} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} = \kappa \operatorname{rot} \vec{E} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$-\Delta \vec{H} = -\kappa \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\Delta \vec{H} = \kappa \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}} \quad \text{„Telegraphen-Gleichung“}$$

Annahmen für Leiter:

Raumladungsfrei $\rho = 0$

κ ist konstant und $\epsilon_r = \mu_r = 1$

$\vec{J}$ durch Wellenfeld $\vec{E}$ angetrieben;

keine externen eingepprägten

(Antennen-) Ströme

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{rot} \left(-\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right)$$

$$-\Delta \vec{E} + \underbrace{\text{grad div } \vec{E}}_{=0 \text{ für } \rho=0} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H}$$

$$-\Delta \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{J} - \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D}$$

raumladungsfrei $\rho = 0$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \vec{J} = \kappa \vec{E}$$

$$\boxed{\Delta \vec{E} = \kappa \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}} \quad \text{„Telegraphen-Gleichung“}$$

und von vorhin

$$\boxed{\Delta \vec{H} = \kappa \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}}$$

9.3.1 Harmonische ebene Wellen im verlustfreien Fall

ebene Wellen in +x - Richtung laufend

Verlustfreier Fall, keine Leitfähigkeit $\kappa = 0$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \text{mit Ansatz: } E_y \sim e^{j\omega t} \rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 E_y$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 E_y = 0}$$

k^2

Wellenzahl

$$\text{Lösung: } E_y = E_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

$$\boxed{c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c_0}$$

Wellengeschwindigkeit $c = c_0$,
unabhängig von Frequenz

9.3.2 Harmonische ebene Wellen im verlustbehafteten Fall

Verlustbehafteter Fall $\kappa \neq 0$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \kappa \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \text{Ansatz: } E_y \sim e^{j\omega t} \rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = j\omega \kappa \mu_0 E_y - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 E_y$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \left(1 - j \frac{\kappa}{\epsilon_0 \omega} \right) E_y = 0} \quad \text{Lösung: } E_y = E_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{k^2}$

Wellenzahl k komplex

$$\boxed{k = \sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \left(1 - j \frac{\kappa}{\epsilon_0 \omega} \right)}} \longrightarrow k = k_R - jk_I \quad \begin{array}{l} \rightarrow k_R = k_R(\omega, \kappa) > 0 \\ \rightarrow k_I = k_I(\omega, \kappa) > 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \boxed{E_y = E_0 \cdot e^{j(\omega t - k_R x)} \cdot e^{-k_I x}} \quad \begin{array}{l} \text{exponentiell abklingende} \\ \text{Welle in x - Richtung} \end{array}$$

$$\rightarrow \boxed{c = \frac{\omega}{k_R} = c(\omega, \kappa)} \quad \begin{array}{l} \text{Wellengeschwindigkeit ist abhängig von} \\ \text{der Frequenz und von der Leitfähigkeit} \end{array}$$

Komplexe Wellenzahl k

Wir hatten $k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \left(1 - j \frac{\kappa}{\epsilon_0 \omega} \right)$

Aufspaltung in Real- und Imaginärteil:

$$k = k_R - jk_I$$

$$\rightarrow k^2 = k_R^2 - k_I^2 - 2jk_R k_I$$

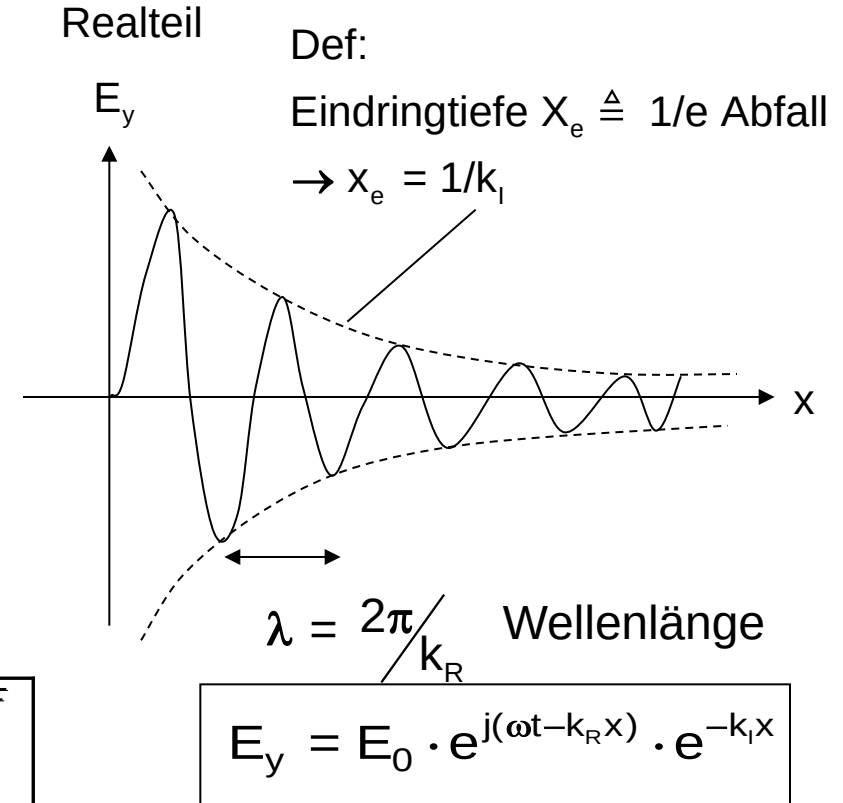
Koeffizientenvergleich:

Realteil	$k_R^2 - k_I^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$	2 Gleichungen
Imaginärteil	$2k_R k_I = +\omega \kappa \mu_0$	2 Unbekannte

Auflösung liefert

$$k_R = \omega \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega \epsilon_0} \right)^2}}$$

$$k_I = \omega \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega \epsilon_0} \right)^2}}$$



Grenzfälle

a) sehr geringe Leitfähigkeit $\boxed{\frac{\kappa}{\omega \epsilon_0} \ll 1}$

$$\rightarrow k_R = \omega \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega \epsilon_0}\right)^2}} \approx \omega \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{2}} \sqrt{2}$$

$$\rightarrow \boxed{k_R = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad \text{wie im verlustfreien Fall: } \lambda = \frac{2\pi}{k_R} \text{ Wellenlänge}$$

$$\rightarrow k_I = \omega \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega \epsilon_0}\right)^2}} \approx \omega \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{\omega \epsilon_0}\right)^2} \quad \text{mit } \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega \epsilon_0}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{\omega \epsilon_0}\right)^2$$

$$\rightarrow \boxed{k_I = \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} \quad \text{exponentieller Abfall der Welle in Ausbreitungs-} \\ \text{richtung mit Eindringtiefe } x_e = \frac{1}{k_I}$$

b) sehr gute Leitfähigkeit (z.B. metallischer Spiegel)

$$\boxed{\frac{\kappa}{\omega \epsilon_0} \gg 1}$$

$$\rightarrow k_R = \omega \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{2}} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega \epsilon_0}\right)^2}} \approx \omega \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{2}} \sqrt{\frac{\kappa}{\omega \epsilon_0}}$$

$$\rightarrow \boxed{k_R = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \kappa}{2}}}$$

→

$$\text{Wellenlänge: } \lambda = \frac{2\pi}{k_R}$$

$$\rightarrow k_I = \omega \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{2}} \cdot \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega \epsilon_0}\right)^2}} \approx \omega \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{2}} \sqrt{\frac{\kappa}{\omega \epsilon_0}}$$

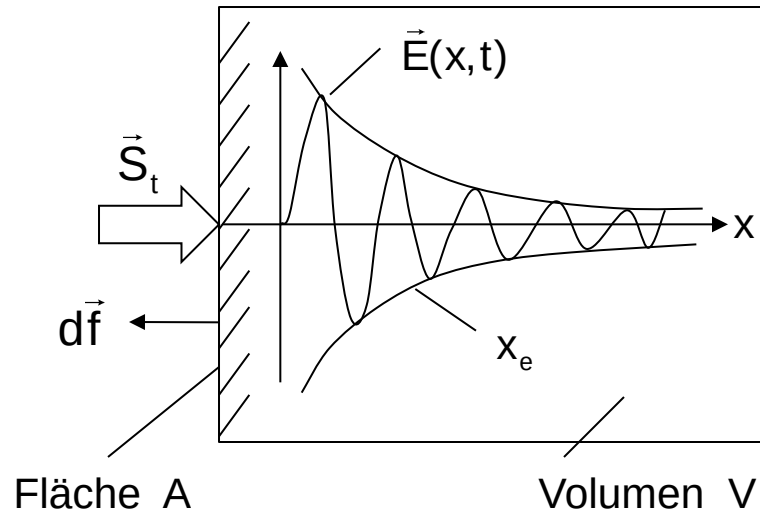
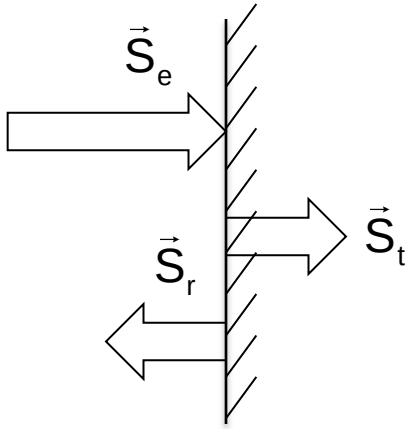
→

$$\text{Eindringtiefe: } x_e = \frac{1}{k_I}$$

$$\rightarrow \boxed{k_I = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \kappa}{2}}}$$

Eindringtiefe (1/e - Abfall) und Wellenlänge haben gleiche Größe

Eindringtiefe sinkt mit wachsender Frequenz und Leitfähigkeit



$$\vec{J} = \kappa \vec{E}$$

Ohmsche Verluste:

$\vec{E} \cdot \vec{J}$ innerhalb

Eindringtiefe x_e

$$|\vec{S}_e| = |\vec{S}_r| + |\vec{S}_t|$$

Energie - Erhaltung

$$\underbrace{\int_A \vec{S}_t \cdot d\vec{f}}_{< 0} = - \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dv$$

Bilanz-Gl.

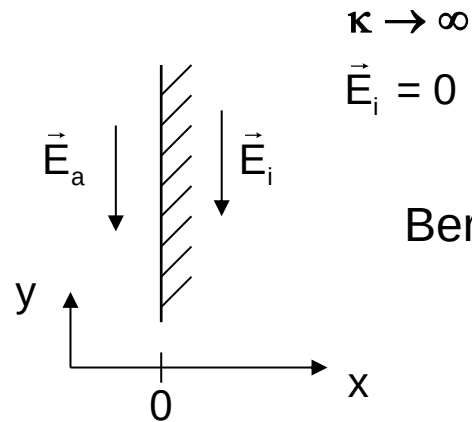
Poynting Vektor für Volumen V

$$\rightarrow |\vec{S}_r| \cdot A = |\vec{S}_e| \cdot A - |\vec{S}_t| \cdot A = |\vec{S}_e| \cdot A - \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dv$$

Grenzfall idealer Spiegel: $\kappa \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow x_e \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{Vol} \vec{E} \cdot \vec{J} dv \rightarrow 0 \rightarrow |\vec{S}_r| = |\vec{S}_e| \quad \text{alle Strahlung wird reflektiert}$$

Reflexionen an der Oberfläche guter Leiter



Berechnung mit Hilfe der Stetigkeit der Tangentialkomponenten

$\vec{E}_a = \vec{E}_i \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow$ das Feld vor dem Reflektor $\vec{E}_a$ muß also Null sein

Das Feld vor dem Reflektor setzt sich aus dem Feld $\vec{E}_e$ der einfallenden Welle und dem Feld $\vec{E}_r$ der reflektierten Welle zusammen

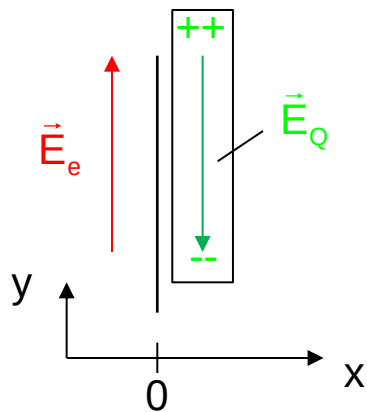
$$\vec{E}_a = \vec{E}_e + \vec{E}_r \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \vec{E}_r = -\vec{E}_e$$

$$\vec{E}_e = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$$

Die reflektierte Welle ist gleich stark wie die einfallende, deren Feld hat umgekehrtes Vorzeichen wie die einfallende.

Physikalische Ursache der Reflexion



$$\kappa \rightarrow \infty$$

$$\vec{E}_i = 0$$

$$\vec{E}_i = \vec{E}_e + \vec{E}_Q \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \vec{E}_Q = -\vec{E}_e$$

- $\vec{E}_e$ erzeugt Ladungstrennung ρ
- ρ erzeugt entgegengerichtetes Quellenfeld E_Q
- Gesamtfeld daher in Leiter Null
- bewegte ρ wirken wie Antenne, die nach links und rechts strahlt

Eingestrahlte Welle:

$$\vec{E}_e(x, t) = E_e \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

Durch Antenne der bewegten Elektronen im Leiter erzeugte Wellen:

$$\vec{E}_t(x, t) = E_Q \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_r(x, t) = E_Q \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$$

Resultierende Wellen mit $\vec{E}_Q = -\vec{E}_e$:

$$\vec{E}_{t \text{ ges}}(x, t) = (E_e + E_Q) \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y = 0 \quad \text{Keine Transmission durch destruktive Interferenz}$$

$$\vec{E}_{r \text{ ges}}(x, t) = E_Q \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y = -E_e \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y \quad \text{Vollständige Rückstrahlung durch bewegte Ladungen}$$

Eindringtiefe

Metall (Spiegel): $\kappa = 6 \cdot 10^7 \frac{\text{A}}{\text{Vm}}$ Kupfer

Gigahertzwellen:

$$f = 1 \text{ GHz} \quad \rightarrow \quad \frac{\kappa}{\omega \epsilon_0} = 10^9 \gg 1 \quad \rightarrow k_I = k_R = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \kappa}{2}}$$

$$x_e = \frac{1}{k_I} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_R} = 1.3 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$c = \frac{\omega}{k_R} = 13 \text{ km/s}$$

Sichtbares Licht:

$$f = 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \quad \rightarrow \quad \frac{\kappa}{\omega \epsilon_0} = 1.7 \cdot 10^3 \gg 1 \quad \rightarrow k_I = k_R = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \kappa}{2}}$$

$$x_e = \frac{1}{k_I} = 2.7 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_R} = 1.7 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

$$c = \frac{\omega}{k_R} = 10\,000 \text{ km/s}$$

Salzwasser: $\kappa = 5 \frac{\text{A}}{\text{Vm}}$ Meereswasser

Langwellen:

$$f = 100 \text{ kHz} \quad \rightarrow \quad \frac{\kappa}{\omega \epsilon_0} = 900\,000 \gg 1 \quad \rightarrow k_I = k_R = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \kappa}{2}}$$

$$x_e = \frac{1}{k_I} = 0.7 \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_R} = 4.5 \text{ m}$$

$$c = \frac{\omega}{k_R} = 450 \text{ km/s}$$

Gigahertzwellen:

$$f = 1 \text{ GHz} \quad \rightarrow \quad \frac{\kappa}{\omega \epsilon_0} = 90 \gg 1 \quad \rightarrow k_I = k_R = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \kappa}{2}}$$

$$x_e = \frac{1}{k_I} = 0.01 \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_R} = 0.04 \text{ m}$$

$$c = \frac{\omega}{k_R} = 45\,000 \text{ km/s}$$

Salzwasser: $\kappa = 5 \frac{\text{A}}{\text{Vm}}$ Meereswasser

Sichtbares Licht:

$$f = 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \quad \rightarrow \quad \frac{\kappa}{\omega \epsilon_0} = 1.5 \cdot 10^{-4} \ll 1 \quad \rightarrow \quad k_R = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \quad \text{und} \quad k_I = \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

$$x_e = \frac{1}{k_I} = 0.001 \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_R} = 500 \text{ nm}$$

$$c = \frac{\omega}{k_R} = 300\,000 \text{ km/s}$$

Hier versagt die Rechnung:

- Wellenlänge und Wellengeschwindigkeit sind in Wahrheit geringer als berechnet
 - Ursache:
 - In den Gleichungen wurde nur die Leitfähigkeit der Salz-Ionen betrachtet
 - Die Dielektrizitätskonstante des Wassers selbst wurde nicht berücksichtigt
- Eindringtiefe von sichtbarem Licht ist in Wahrheit viel tiefer als .1 mm
 - Ursache:
 - In den Gleichungen wurde nur mit der Leitfähigkeit gerechnet
 - Es wurde nicht die Massenträgheit der Ionen betrachtet, welche bei hohen Frequenzen wie denen des Lichts einen wesentlichen Beitrag liefert

9.4 Wellengleichung mit komplexer Dielektrizitätskonstanten

Ergebnis der Telegraphengleichung:

- leitfähige Medien dämpfen Welle
- Dämpfung nimmt mit wachsender Frequenz zu

Beobachtung der Ionosphäre (dünnes Plasma)

- Ionosphäre ist leitfähig
- keine Dämpfung mit hohen Frequenzen
- keine Durchlässigkeit bei niedrigen Frequenzen

Woher kommt der Widerspruch?

- bei Telegraphengleichung wurde der direkte Zusammenhang zwischen Stromdichte und el. Feld $\vec{J} = \kappa \vec{E}$ angenommen
- dieser Zusammenhang ist nicht allgemeingültig; er gilt nur für dichte Medien mit vielen Stößen mit kleiner Stoßzeit
- es muss die exakte Bewegung der Ladungsträger berücksichtigt werden

Sowohl für Metalle, dielektrische Materialien als auch die Ionosphäre gilt für die durch externe elektrische Felder hervorgerufene Ladungsverschiebungen $s(t)$:

Bewegung von Ladungen

	↑	↑	↑	↑	
$+\rho_p$	+	+	+	+	$\frac{d\vec{s}(t)}{dt}$
$-\rho_p$	-	-	-	-	
	↓	↓	↓	↓	

→ Stromdichte $\vec{J} = \rho_p \vec{v}(t) = \rho_p \frac{d\vec{s}(t)}{dt}$

Die exakte Berechnung der Wellenausbreitung erfordert die Berechnung der Stromdichte durch Berücksichtigung der tatsächlichen Geschwindigkeit der Ladungsträger.

9.4.1 Berücksichtigung der Stromdichte schwingender Ladungen

Vorgehensweise

1. Bestimmung der Bewegung $\vec{s}(t)$ der Ladungsträger ρ_p

$$\vec{s}(t) = f(\vec{E}(t))$$

2. Bestimmung der Stromdichte

$$\vec{J}(t) = \rho_p \vec{v}(t) = \rho_p \frac{\partial \vec{s}(t)}{\partial t}$$

3. Einsetzen von $\vec{J}$ in Maxwellgleichung:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \rho_p \frac{\partial \vec{s}(t)}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

4. Berechnung der Wellengleichung mittels Ergebnis von 3.

$$\Delta \vec{E} + \underbrace{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 (\epsilon_r)}_{k^2 \text{ komplex}} \vec{E} = 0$$

mit ϵ_r als komplexer Dielektrizitätskonstante in Abhängigkeit von den Bewegungen der Ladungsträger

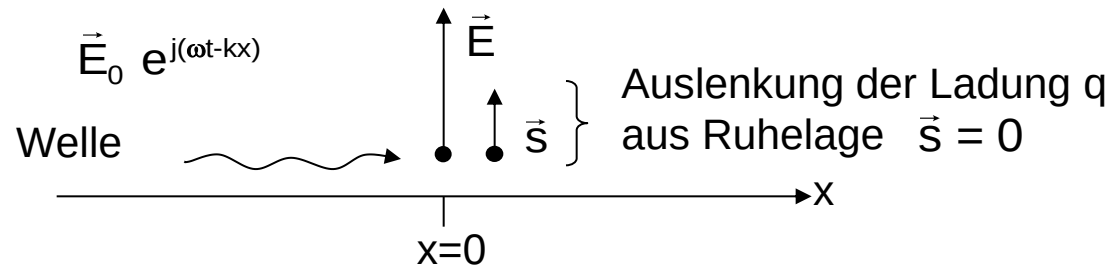
Bestimmung der Bewegungsgleichung der Ladungsträger

Beschreibung der zeitlichen Abhängigkeit der Stromdichte mittels des klassischen Modells gedämpfter harmonischer Schwingungen der Ladungsträger

Oszillator mit Ladung q unter Einfluss des elektrischen Feldes $\vec{E}_0 e^{j\omega t}$ einer Welle:

$$\begin{array}{ccccccc}
 m \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} & + & b \frac{d\vec{s}}{dt} & + & r \vec{s} & = & q \cdot \vec{E}_0 \cdot e^{j\omega t} \\
 \text{Masse der} & & \text{Reibungs-} & & \text{Rückstell-} & & \text{Auslenkungskraft} \\
 \text{Ladung} & & \text{Term} & & \text{Konstante} & & \text{auf } q \text{ durch } \vec{E}
 \end{array}$$

Bewegungs - Gleichung für einen Ladungsträger im Feld



Gedämpfte Differentialgleichung für Auslenkung $\vec{s}(t)$

$$m \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} + b \frac{d \vec{s}}{dt} + r \vec{s} = q \cdot \vec{E}_0 \cdot e^{j\omega t}$$

Mit Lösungsansatz für erzwungene Schwingungen $e^{j\omega t}$ durch Wellenfeld $\vec{E}_0 e^{j\omega t}$

$$\vec{s}(t) = \vec{s}_0 e^{j\omega t} \quad \longleftarrow \quad \underline{\vec{s}_0 : \text{Amplitude der Auslenkung}} \quad (\text{noch unbekannt})$$

folgt nach Einsetzen in DGI

$$m(-\omega^2) \vec{s}_0 e^{j\omega t} + b(j\omega) \vec{s}_0 e^{j\omega t} + r \vec{s}_0 e^{j\omega t} = q \vec{E}_0 e^{j\omega t}$$

Aufgelöst nach $\vec{s}_0$

$$\vec{s}_0 = \frac{q \vec{E}_0}{-m\omega^2 + j\omega b + r} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{s}(t) = \frac{q \vec{E}_0}{-m\omega^2 + j\omega b + r} \cdot e^{j\omega t}}$$

Bestimmung der Wellengleichung im Fall schwingender Ladungen:

$$\text{Maxwell: } \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\Delta \vec{E} + \cancel{\text{grad div } \vec{E}} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B})$$

$$\vec{J} \neq \kappa \vec{E} \quad \text{aber} \quad \vec{J} = \rho_p \vec{v}$$

$$\rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \rho_p \vec{v} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta \vec{E} = \mu_0 \cdot \rho_p \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \cdot \rho_p \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cdot e^{j\omega t} \quad \text{Elektrisches Feld der Welle}$$

$$\vec{s}(t) = \frac{q}{-m\omega^2 + j\omega b + r} \vec{E}_0 e^{j\omega t} \quad \text{durch } \vec{E}(t) \text{ angeregte Ladungsträgerbewegung}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \vec{E}(t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}(t)$$

$$\rightarrow \vec{v}(t) = \frac{\partial \vec{s}(t)}{\partial t} = (j\omega) \vec{s}(t) \quad (\text{hier bedeutet das } j \text{ die imaginäre mathematische GröÙe})$$

$$\rightarrow \frac{\partial \vec{v}(t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{s}(t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{s}(t)$$

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \cdot \rho_p \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}(t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vec{v}(t)}{\partial t} = -\omega^2 \vec{s}(t)$$

$$\rightarrow \Delta \vec{E} = -\omega^2 \mu_0 \rho_p \left(\frac{q}{-m\omega^2 + j\omega b + r} \right) \vec{E} - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \vec{E}$$

mit $\rho_p = N \cdot q$ wobei N die Anzahl der Ladungsträger pro Volumen ist

$$\rightarrow \Delta \vec{E} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{N q^2}{\epsilon_0 (-m\omega^2 + j\omega b + r)} \right) \vec{E} = 0$$

ϵ_r komplexe Dielektrizitätskonstante
beinhaltet die Bewegungen aller Ladungen

Zusammenfassung

Bestimmung der Bewegung $\vec{s}(t)$ der Ladungsträger ρ_p

$$\vec{s}(t) = \frac{q}{-m\omega^2 + j\omega b + r} \vec{E}_0 e^{j\omega t}$$

und deren Stromdichte $\vec{J}(t) = \rho_p \vec{v}(t) = \rho_p \frac{\partial \vec{s}(t)}{\partial t}$

Maxwell: $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \rho_p \vec{v}(t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

↓

Wellengl. $\rightarrow \Delta \vec{E} + \underbrace{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r}_{k^2} \vec{E} = 0$ Welle $\rightarrow \vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cdot e^{j(\omega t - kx)}$ ↑ komplex

$$k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{N q^2}{\epsilon_0 (-m \omega^2 + j \omega b + r)} \right)$$

$\epsilon_r = \epsilon_r(m, b, r, \omega, N)$
komplexe Dielektrizitätskonstante

9.4.2 Eigenschaften der komplexen Dielektrizitätskonstanten

Allgemeine Lösung war

$$\epsilon_r = 1 + \frac{N q^2}{\epsilon_0 (-m\omega^2 + j\omega b + r)}$$

Dielektrische Medien z.B. Glas:

$$\rightarrow r \neq 0$$

Elektronen fest im Kristallgitter gebunden;
Rückstellkraft vorhanden;
geringe Reibungsverluste

Leiter z.B. Kupfer:

$$\rightarrow r = 0$$
$$m_e \omega^2 \ll \omega b$$

Elektronen im festen Ionengitter frei beweglich
keine Rückstellkraft;
Massenträgheit der Elektronen vernachlässigbar

Plasma z.B. Ionosphäre:

$$\rightarrow r = 0 \quad \text{und} \quad b = 0$$

Elektronen im quasineutralen Plasma frei
beweglich; schwere Ionen vergleichsweise
ortsfest; $10^4 - 10^5$ schwerer als Elektronen;
keine Rückstellkraft, keine Reibung

9.4.2.1 Dielektrische Medien

In dielektrischen Medien wie Glas (Glasfaser - Lichtleiter) ist bei Frequenzen jenseits der Absorptionsresonanzen die Reibung b vernachlässigbar gering.

$$\epsilon_r = 1 + \frac{N q^2}{\epsilon_0 (-m\omega^2 + j\omega b + r)} \xrightarrow{\omega b \ll |r - m\omega^2|} \boxed{\epsilon_r = 1 + \frac{N q^2}{\epsilon_0 (-m\omega^2 + r)}} \quad \text{reell}$$

Aus der Wellengleichung folgte die Beziehung zur Wellenzahl k

$$k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r$$

$$k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{N q^2}{\epsilon_0 (r - m\omega^2)} \right) \rightarrow \boxed{k = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{1 + \frac{N q^2}{\epsilon_0 (r - m\omega^2)}}} \quad \text{reell}$$

Dies entspricht einer ungedämpften Welle $\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cdot e^{j(\omega t - kx)}$

mit einer Wellengeschwindigkeit $c \rightarrow \boxed{c = \frac{\omega}{k} = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \frac{N q^2}{\epsilon_0 (r - m\omega^2)}}} = c(\omega, N, m, r)}$

9.4.2.2 Leiter mit hoher Leitfähigkeit

Massenträgheit der Elektronen vernachlässigbar, keine Rückstellkräfte,
Reibung durch Stöße dominiert

$$\epsilon_r = 1 + \frac{N q^2}{\epsilon_0 (-m\omega^2 + j\omega b + r)} \xrightarrow[r=0]{m_e \omega^2 \ll \omega b} \boxed{\epsilon_r = 1 - j \frac{N q^2}{\epsilon_0 \omega b}} \text{ komplex}$$

Aus der Wellengleichung folgte die Beziehung zur Wellenzahl k

$$k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r$$

$$k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \left(1 - j \frac{N q^2}{\epsilon_0 \omega b} \right)$$

Aus Telegraphengleichung hatten wir: $k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \left(1 - j \frac{\kappa}{\epsilon_0 \omega} \right)$

Zusammenhang mit Leitfähigkeit κ

Koeffizientenvergleich des Imaginärteiles $\rightarrow \boxed{\kappa = \frac{N q^2}{b}}$

Zusammenhang zwischen Reibungsterm b und Ohmschem Gesetz

Reibungsterm $\kappa = \frac{Nq^2}{b}$

Ohmsche Stoßgesetze $\kappa = \frac{1}{2} \frac{Nq^2}{m_e} \frac{\langle s \rangle}{\langle v_{th} \rangle}$

$$\rightarrow \frac{Nq^2}{b} = \frac{1}{2} \frac{Nq^2}{m_e} \frac{\langle s \rangle}{\langle v_{th} \rangle}$$

$$\rightarrow \boxed{b = \frac{2 m_e \langle v_{th} \rangle}{\langle s \rangle}}$$

Reibungsterm b wächst mit steigender thermischer Geschwindigkeit der Elektronen, d.h. mit wachsender Temperatur

Wir hatten:

$$k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \left(1 - j \frac{N q^2}{\epsilon_0 \omega b} \right) \rightarrow k = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{1 - j \frac{N q^2}{\epsilon_0 \omega b}} = k_R - j k_I \quad \text{komplex}$$

Dies entspricht einer gedämpften Welle $\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cdot e^{j(\omega t - k_R x)} \cdot e^{-k_I x}$

$$k_R = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{N q^2}{\epsilon_0 \omega b} \right)^2}} \quad \text{und} \quad k_I = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{N q^2}{\epsilon_0 \omega b} \right)^2}}$$

und einer Wellengeschwindigkeit $c \rightarrow c = \frac{\omega}{k_R} = \frac{c_0}{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{N q^2}{\epsilon_0 \omega b} \right)^2}}} = c(\omega, \kappa)$

mit $\frac{N q^2}{b} = \kappa$

9.4.2.3 Dünne Plasmen

- kaum Stöße $b \rightarrow 0$, keine Rückstellkräfte r
- hier Massenträgheit der ausgelenkten Elektronen wesentlich
- schwere Ionen vergleichsweise ortsfest; $10^4 - 10^5$ schwerer als Elektronen

$$\epsilon_r = 1 + \frac{N q^2}{\epsilon_0 (-m\omega^2 + j\omega b + r)} \xrightarrow[r=0]{m_e \omega^2 \gg \omega b} \boxed{\epsilon_r = 1 - \frac{N q^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2}} \quad \text{reell}$$

Mit der Definition der Plasma(kreis)frequenz ω_c bekommen wir

$$\boxed{\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \quad \text{mit} \quad \boxed{\omega_c^2(N) = \frac{N q^2}{\epsilon_0 m_e}} \quad \begin{array}{l} \omega_c = \omega_c(N) \\ \text{wächst mit Ladungsträger-} \\ \text{dichte } N \end{array}$$

Damit wird die Wellenzahl k zu

$$\boxed{k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r = \epsilon_0 \mu_0 (\omega^2 - \omega_c^2(N))} \quad k \text{ ist entweder rein reell oder rein imaginär}$$

Frequenz der Welle kleiner als Plasmafrequenz: $\omega < \omega_c$

$$\boxed{k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r} \quad \boxed{\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} < 0} \quad \rightarrow \quad \boxed{k = \pm \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 (\omega^2 - \omega_c^2)} = \pm j\tilde{k}}$$

rein imaginär mit $\tilde{k} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 (\omega_c^2 - \omega^2)}$

$$E_y(x, t) = E_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-\tilde{k}x}$$

keine Welle
gedämpftes Feld

$$H_z(x, t) = \sqrt{\epsilon_r} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_y(x, t) = j \sqrt{\frac{\omega_c^2}{\omega^2} - 1} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_y(x, t)$$

90° Phasendifferenz zwischen E und H

einfallende

Welle

reflektierte
Welle

Vakuum

Welle wird völlig reflektiert
Plasma undurchlässig

Plasma

Grenzfläche

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = -j \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_c^2}{\omega^2} - 1} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 e^{-2\tilde{k}x} \vec{e}_x$$

imaginär

$$\langle \vec{S}_R \rangle = \text{Re}[\vec{S}] = 0$$

kein Energiefluss;
einfallende Wellen werden vollständig reflektiert

Frequenz der Welle gleich der Plasmafrequenz: $\omega = \omega_c$

$$k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r$$

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} = 0$$

$$\rightarrow k = \pm \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 (\omega^2 - \omega_c^2)} = 0 \quad \text{Wellenzahl ist Null}$$

$$E_y(x, t) = E_0 e^{j\omega t}$$

$$H_z(x, t) = \sqrt{\epsilon_r} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_y(t) = 0 \quad \text{kein Magnetfeld}$$

keine Welle

hier ist die Auslenkung $\vec{s}(t)$ so groß,

$$\text{dass } \vec{J} = \rho_p \frac{d\vec{s}(t)}{dt} = -\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \rho_p \frac{d\vec{s}(t)}{dt} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

$$\rightarrow \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \vec{H} = 0$$

einfallende
Welle

reflektierte
Welle

Vakuum

Welle wird völlig reflektiert
Plasma undurchlässig

Plasma

Grenzfläche

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = 0$$

$$\langle \vec{S}_R \rangle = \text{Re}[\vec{S}] = 0$$

kein Energiefluss; Plasma undurchlässig;
einfallende Wellen werden vollständig reflektiert

Frequenz der Welle größer als Plasmafrequenz: $\omega > \omega_c$

$$\boxed{k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r} \quad \boxed{\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} > 0} \quad \rightarrow \quad \boxed{k = \pm \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 (\omega^2 - \omega_c^2)}}$$

$E_y(x, t) = E_0 e^{j(\omega t - kx)}$
Welle entlang x-Achse
reell

ungedämpft

$$H_z(x, t) = \sqrt{\epsilon_r} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_y(x, t)$$

einfallende Welle durchgelassene Welle

reflektierte Welle geringe Reflexion

Plasma transparent ohne Dämpfung

Vakuum $\epsilon_r = 1$ Plasma $\epsilon_r < 1$

Grenzfläche

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \vec{e}_x \text{ reell}$$

$$\langle \vec{S}_R \rangle = \text{Re}[\vec{S}] = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \vec{e}_x$$

Energiefluss entlang x-Achse

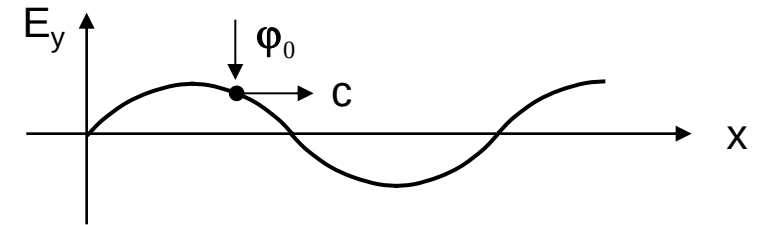
9.5 Signalausbreitung

9.5.1 Phasengeschwindigkeit, Gruppengeschwindigkeit

Phasengeschwindigkeit = Wellengeschwindigkeit = c

Welle (eben) mit Kreis - Frequenz ω_0 in x - Richtung sich ausbreitend

$$E_y(x,t) = E_0 \cdot \exp \underbrace{\left[j(\omega_0 t - k_0 x) \right]}_{\varphi(x,t) \text{ Phase}}$$



Phasengeschwindigkeit = Geschwindigkeit konstanter Phase

$$\boxed{\varphi(x,t) = \varphi_0 = \text{const.}}$$

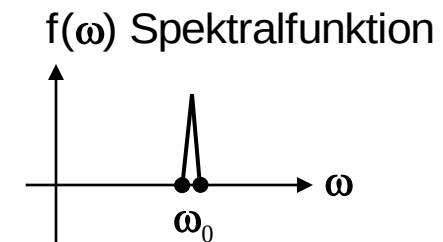
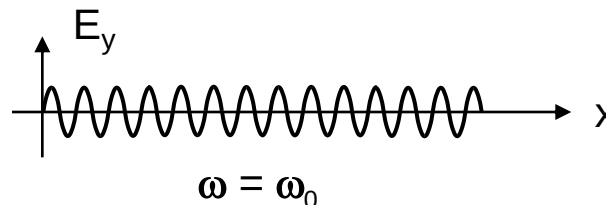
$$\rightarrow \varphi(x,t) = \omega_0 t - k_0 x \stackrel{!}{=} \varphi_0 = \text{const.}$$

$\rightarrow$ gesucht (x,t) - Paare für $\varphi_0 = \text{const.} \rightarrow \textcircled{c}$

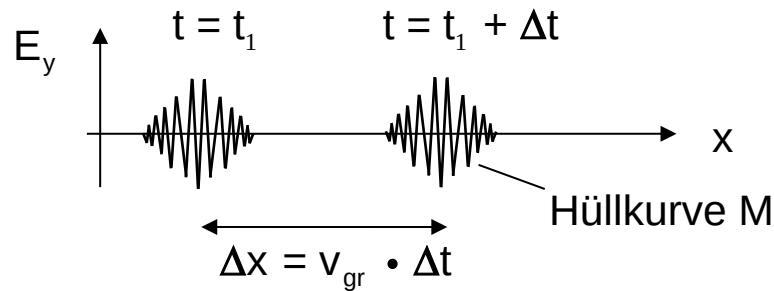
$$\rightarrow \frac{d\varphi(x,t)}{dt} = \omega_0 - k_0 \frac{dx}{dt} \stackrel{!}{=} \frac{d\varphi_0}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{c = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega_0}{k_0}}$$

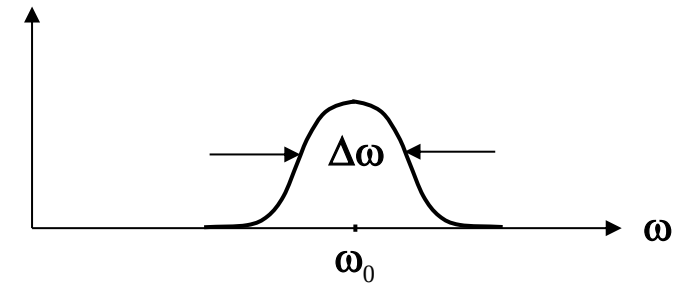
$\uparrow$
Wellengeschwindigkeit



Gruppengeschwindigkeit v_{gr} = (Information tragende) Hüllkurvengeschwindigkeit



$f(\omega)$ Spektralfunktion



Modulierte Welle mit einhüllender Modulationsfunktion $M(x,t)$ mit Kreisfrequenz ω_0

$$E_y(x,t) = M(x,t) \cdot E_0 \exp[j(\omega_0 t - k_0 x)]$$

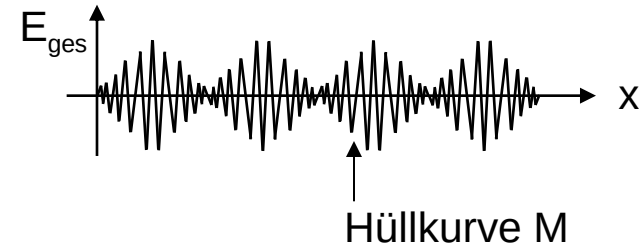
Grundwelle, schnelle Schwingung

Modulationshüllkurve, langsame Funktion in x,t

Frage: mit welcher Geschwindigkeit v_{gr} bewegt sich die Information bzw. die Energie tragende Hüllkurve entlang der x - Achse?

Antwort am Beispiel einer Schwebung zweier harmonischer Wellen

$$\left. \begin{aligned} E_1(x,t) &= \cos(\omega_1 t - k_1 x) \\ E_2(x,t) &= \cos(\omega_2 t - k_2 x) \end{aligned} \right\} \text{Überlagerung}$$

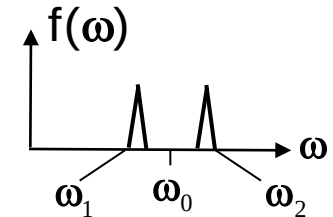


$$\begin{aligned} \rightarrow E_1 + E_2 &= \cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x) \\ &= 2 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_{\text{ges}} = 2 \cos(\Delta\omega t - \Delta k x) \cdot \cos(\omega_0 t - k_0 x)}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Hüllkurve } M(x,t) \hat{=} \text{Modulation}}$

$$\begin{aligned} \omega_1 &\stackrel{\text{Def}}{=} \omega_0 - \Delta\omega \\ \omega_2 &\stackrel{\text{Def}}{=} \omega_0 + \Delta\omega \end{aligned}$$



Maximum der Hüllkurve, wenn Argument in Cosinus Null ist
 —→ Gleichung der Wanderung des Maximums entlang x

$$\left. \begin{aligned} \Delta\omega t - \Delta k x &\stackrel{!}{=} 0 \quad \left| \frac{d}{dt} \right\} \\ \rightarrow \Delta\omega - \Delta k \frac{dx}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow v_{\text{gr}} = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \rightarrow \boxed{v_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk}} \quad \text{für Einzelpuls anstelle von Schwebung}$$

Phasen - u. Gruppengeschwindigkeit in dünnen Plasmen

Phasen (Wellen) Geschwindigkeit c

$$c = \frac{\omega}{k} \quad \text{und} \quad k = \omega \underbrace{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}_{1/c_0} \sqrt{\epsilon_r} = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{c_0} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \longrightarrow \boxed{c = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} > c_0}$$

Gruppen- (Energieausbreitungs-) Geschwindigkeit v_g

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{c_0} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{c_0} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} \cdot 2\omega} = \frac{1}{\frac{1}{c_0} \frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}} \\ \rightarrow \boxed{v_g = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} < c_0} \quad \omega_c^2(N) = \frac{N q^2}{\epsilon_0 m_e} \quad \rightarrow v_g = v_g(N)$$

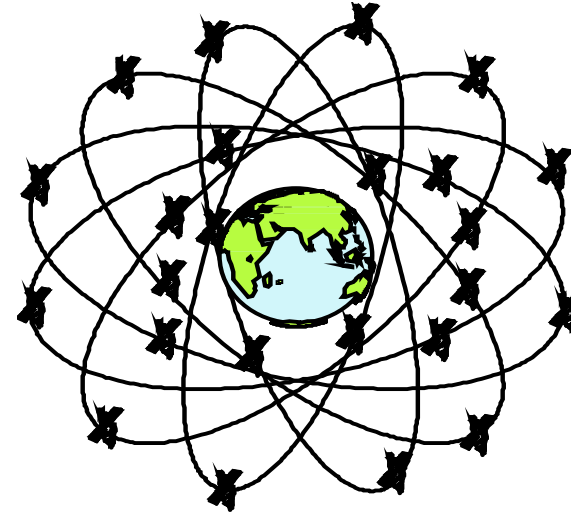
Die Gruppengeschwindigkeit ist abhängig von der Elektronendichte N in der Ionosphäre

Zusammenhang zwischen c und v_g

$$\boxed{v_g \cdot c = c_0^2}$$

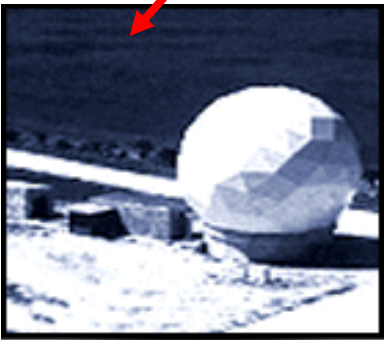
9.5.2 Anwendungsbeispiel GPS Pseudorange Messung

Space Segment



System configuration:

27 satellites
6 Orbital Planes
55° Inclination
20 150 km Altitude
11h 58min Orbital Period

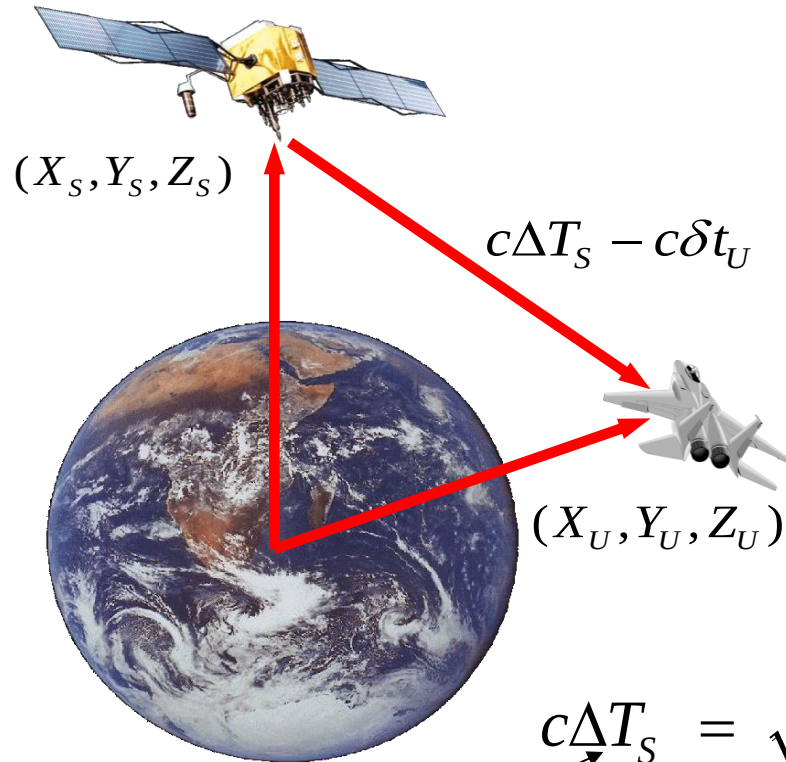


Control Segment



User Segment

Funktionsprinzip des GPS



Satelliten senden ihre Position und Eigenzeit

Receiver berechnet seine Position aus Signallaufzeiten durch Vergleich der Eigenzeit mit der empfangenen Satellitenzeit

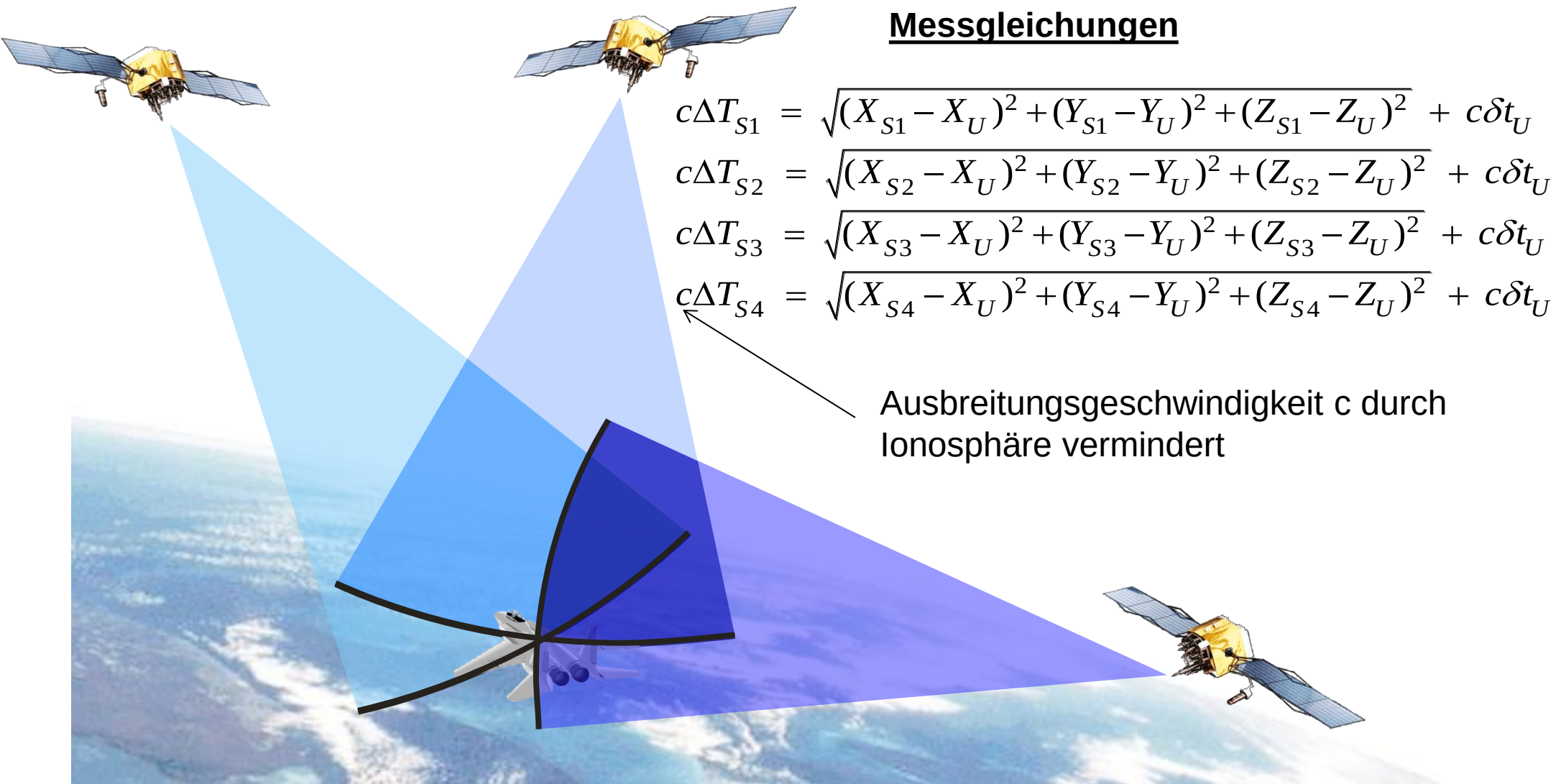
Signale von 4 Satelliten notwendig
3 für 3 Positionskoordinaten
1 für Receiver Uhrenfehler

$$c\Delta T_S = \sqrt{(X_S - X_U)^2 + (Y_S - Y_U)^2 + (Z_S - Z_U)^2} + c\delta t_U$$

Gemessene Signallaufzeit

Satelliten/Receiver-Koordinaten

Receiver-Uhrenfehler



The diagram illustrates a GPS receiver (an aircraft) receiving signals from four GPS satellites. Each satellite's signal is represented by a blue cone originating from the satellite and converging at the aircraft. The background shows a view of Earth from space. The text and equations are positioned to the right of the diagram.

Messgleichungen

$$c\Delta T_{S1} = \sqrt{(X_{S1} - X_U)^2 + (Y_{S1} - Y_U)^2 + (Z_{S1} - Z_U)^2} + c\delta t_U$$
$$c\Delta T_{S2} = \sqrt{(X_{S2} - X_U)^2 + (Y_{S2} - Y_U)^2 + (Z_{S2} - Z_U)^2} + c\delta t_U$$
$$c\Delta T_{S3} = \sqrt{(X_{S3} - X_U)^2 + (Y_{S3} - Y_U)^2 + (Z_{S3} - Z_U)^2} + c\delta t_U$$
$$c\Delta T_{S4} = \sqrt{(X_{S4} - X_U)^2 + (Y_{S4} - Y_U)^2 + (Z_{S4} - Z_U)^2} + c\delta t_U$$

← Ausbreitungsgeschwindigkeit c durch Ionosphäre vermindert

Ionosphäre = dünnes, stoßfreies Plasma in Höhen zwischen 80 km u. 400 km

Plasmafrequenz $\omega_c^2(N) = \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e}$ ist Funktion der unbekannten Elektronendichte N innerhalb der Ionosphäre

Für $N \approx 10^{10}$ bis 10^{12} Elektronen/m³ in der Ionosphäre ergibt sich eine Plasmafrequenz im Bereich von $\omega_c \approx 6 \cdot 10^6$ bis $6 \cdot 10^7$ 1/s

Gruppengeschwindigkeit v_g

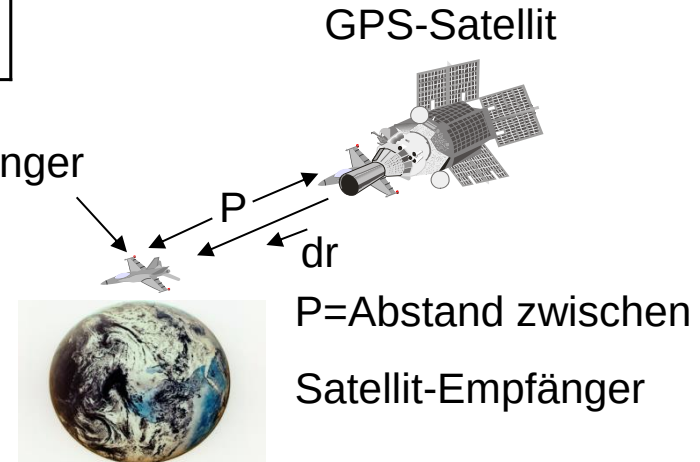
$$v_g = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_c(N)}{f} \right)^2}$$

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{q_e^2}{\epsilon_0 m_e}} \sqrt{N}$$

Gemessene Zeitverzögerung zwischen Satellit und Empfänger:

$$\Delta T = \int_0^P \frac{dr}{v_g(r)}$$

Empfänger



Gemessene Zeitverzögerung ΔT für den Abstand P bei unbekannter, räumlich variabler Gruppengeschwindigkeit v_g :

$$\Delta T = \int_0^P \frac{dr}{v_g(r)} = \int_0^P \frac{dr}{c_0 \underbrace{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}_{\ll 1}} \approx \int_0^P \frac{1}{c_0} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{f_c}{f} \right)^2 \right) dr$$

Mit $f_c(r) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{q_e^2}{\epsilon_0 m_e}} \cdot \sqrt{N(r)}$ ↘ höhenabhängige Elektronendichte $N(r)$

wird die gemessene Zeitverzögerung

$$\Delta T = \frac{1}{c_0} \int_0^P \left(1 + \left(\frac{1}{8\pi^2} \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \right) \cdot \frac{1}{f^2} \cdot N(r) \right) dr$$

$$\Delta T = \frac{1}{c_0} \left[P + \left(\frac{1}{8\pi^2} \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \right) \cdot \frac{1}{f^2} \underbrace{\int_0^P N(r) dr}_{\text{TEC}} \right]$$

TEC: Total Electron Content $1/m^2$
= Menge an Elektronen/Fläche
entlang des Weges der Welle

Kompensation des Ionosphärischen Fehlers

gemessen bei Frequenz f : Zeitverzögerung $\Delta T \leftrightarrow$ Pseudorange

gesucht: Abstand P (Range)

$$\rightarrow \underbrace{\Delta T(f) \cdot c_0}_{\text{Gemessener Pseudo-Range}} = \underbrace{P}_{\text{gesuchter Abstand (Range)}} + \left(\frac{1}{8\pi^2} \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \right) \cdot \frac{1}{f^2} \cdot \text{TEC}$$

Gemessener Pseudo-Range

gesuchter Abstand
(Range)

Ionosphärische Störung
abhängig von unbekannter
Elektronendichte (variabel)

Lösung des Problems:

1. Einsetzen eines theoretisch dem Sonnenstand und der Position zugeordneten TEC
2. Einsetzen von gemessenen und per Funk verbreiteten TEC Werten
3. Messung der Pseudoranges bei zwei unterschiedlichen Frequenzen f_1 und f_2

Übertragung GPS-Daten auf zwei Frequenzen f_1 und f_2

f_1 : L₁ Band 1.575 GHz

f_2 : L₂ Band 1.228 GHz

$$\begin{aligned} \rightarrow c_0 \Delta T_1 &= P + \left(\frac{1}{8\pi^2} \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \right) \cdot \frac{1}{f_1^2} \cdot \text{TEC} \\ \rightarrow c_0 \Delta T_2 &= P + \left(\frac{1}{8\pi^2} \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \right) \cdot \frac{1}{f_2^2} \cdot \text{TEC} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \rightarrow c_0 \Delta T_1 &= P + \left(\frac{1}{8\pi^2} \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \right) \cdot \frac{1}{f_1^2} \cdot \text{TEC} \\ \rightarrow c_0 \Delta T_2 &= P + \left(\frac{1}{8\pi^2} \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \right) \cdot \frac{1}{f_2^2} \cdot \text{TEC} \end{aligned}} \right\} \text{TEC (unbekannt) eliminieren}$$

↑
_____ gemessene Zeitverzögerungen

$$\rightarrow c_0(\Delta T_2 - \Delta T_1) = \left(\frac{1}{8\pi^2} \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \right) \cdot \text{TEC} \left(\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2} \right) \rightarrow \boxed{\text{TEC} = \frac{c_0(\Delta T_2 - \Delta T_1)}{\left(\frac{1}{8\pi^2} \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \right)} \cdot \frac{f_1^2 \cdot f_2^2}{f_1^2 - f_2^2}}$$

$$\rightarrow P = c_0 \Delta T_1 - \frac{\left(\frac{1}{8\pi^2} \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \right)}{f_1^2} \cdot \frac{c_0(\Delta T_2 - \Delta T_1)}{\left(\frac{1}{8\pi^2} \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \right)} \cdot \frac{f_1^2 \cdot f_2^2}{f_1^2 - f_2^2}$$

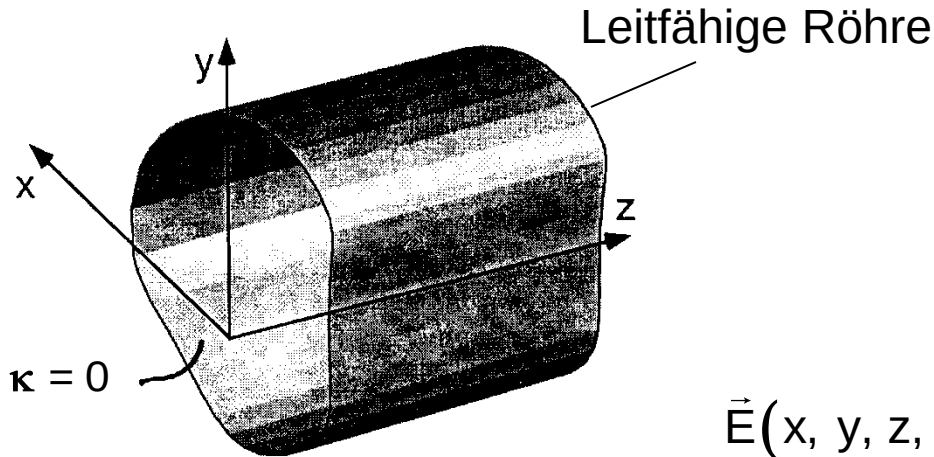
$$\rightarrow \boxed{P = c_0 \Delta T_1 - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} c_0(\Delta T_2 - \Delta T_1)}$$

unabhängig von TEC, N(r)
und auch der Plasmafrequenz

— reine Messgleichung, einfache Ingenieur - Lösung!

9.6 Wellenleiter

9.6.1 Wellengleichung für geführte Wellen



Uniformer, verlustloser Wellenleiter
Harmonische Wellen

$$\Delta \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{innen } \kappa = 0$$

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y) \cdot e^{j(\omega t - k_z \cdot z)}$$

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} - k_z^2 \vec{E}$$

im Gegensatz zu ebenen Wellen im Raum gibt es im Hohlleiter auch longitudinale Komponenten $E_z \neq 0$

Jetzt: Abhängigkeit von $\vec{E}$ auch in x, y -Ebene durch begrenzte Ränder

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + (\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2) \vec{E} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + (\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2) \vec{H} = 0$$

k_z : (noch) unbekannte Wellenzahl in Ausbreitungsrichtung z

9.6.2 Transversal- und Longitudinal - Komponenten

Berechnung der transversalen Komponenten aus z – Komponenten:

aus $\boxed{\text{rot } \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}}$ folgt:

↓

aus $\boxed{\text{rot } \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E}}$ folgt:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + jk_z E_y = -j\omega\mu H_x$$

$$-jk_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}(x,y) e^{j(\omega t - k_z z)} \\ \vec{H} &= \vec{H}(x,y) e^{j(\omega t - k_z z)}\end{aligned}}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + jk_z H_y = j\omega\varepsilon E_x$$

$$-jk_z H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_y$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon E_z$$

$$\boxed{\begin{aligned}E_x &= -\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2} \left(jk_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \\ E_y &= -\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2} \left(jk_z \frac{\partial E_z}{\partial y} - j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\ H_x &= -\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2} \left(jk_z \frac{\partial H_z}{\partial x} - j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \\ H_y &= -\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2} \left(jk_z \frac{\partial H_z}{\partial y} + j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)\end{aligned}}$$

zur Bestimmung aller Feld-Komponenten genügt die Kenntnis der Longitudinal-(z-) Komponenten!

$$\begin{aligned}
 E_x &= -\frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \left(jk_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \\
 E_y &= -\frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \left(jk_z \frac{\partial E_z}{\partial y} - j\omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\
 H_x &= -\frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \left(jk_z \frac{\partial H_z}{\partial x} - j\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \\
 H_y &= -\frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \left(jk_z \frac{\partial H_z}{\partial y} + j\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

Genauere Analyse zeigt, dass es 2 unabhängige, entkoppelte Lösungen für das Wellenfeld gibt. Diese setzen sich aus folgenden Komponenten zusammen:

$$\{H_x, H_y, E_x, E_y, E_z\} \triangleq \text{TM-Wellen}$$

Transversal-magnetischer Wellentyp

$$\{E_x, E_y, H_x, H_y, H_z\} \triangleq \text{TE-Wellen}$$

Transversal-elektrischer Wellentyp

9.6.3 TM-Wellen

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{-jk_z}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ E_y &= \frac{-jk_z}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ H_x &= \frac{j\omega \epsilon}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ H_y &= \frac{-j\omega \epsilon}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{aligned}$$

TM-Wellen= rein transversal magnetische Wellen
keine longitudinale Komponente: $H_z = 0$:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2) E_z = 0$$

Wellengleichung für E_z

Das Wellenfeld setzt sich zusammen aus:

$$\{H_x, H_y, E_x, E_y, E_z\} \triangleq \text{TM-Wellen}$$

Es genügt, E_z zu berechnen; daraus
folgen dann alle anderen Komponenten

9.6.3.1 Separation der Variablen

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2) E_z = 0$$

Wellenansatz



Ansatz: $E_z(x, y, z, t) = U(x) V(y) W(z, t)$ mit $W(z, t) = e^{j(\omega t - k_z z)}$

$$V(y) \cdot W(z, t) \cdot \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + U(x) \cdot W(z, t) \cdot \frac{\partial^2 V(y)}{\partial y^2} + (\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2) \cdot U(x) \cdot V(y) \cdot W(z, t) = 0 \quad /: U \cdot V \cdot W$$

$$\rightarrow \frac{1}{U(x)} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{V(y)} \frac{\partial^2 V(y)}{\partial y^2} + (\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2) = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $-k_x^2 = \text{const}$ $-k_y^2 = \text{const}$ const

$$\rightarrow \boxed{\omega^2 \epsilon \mu = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

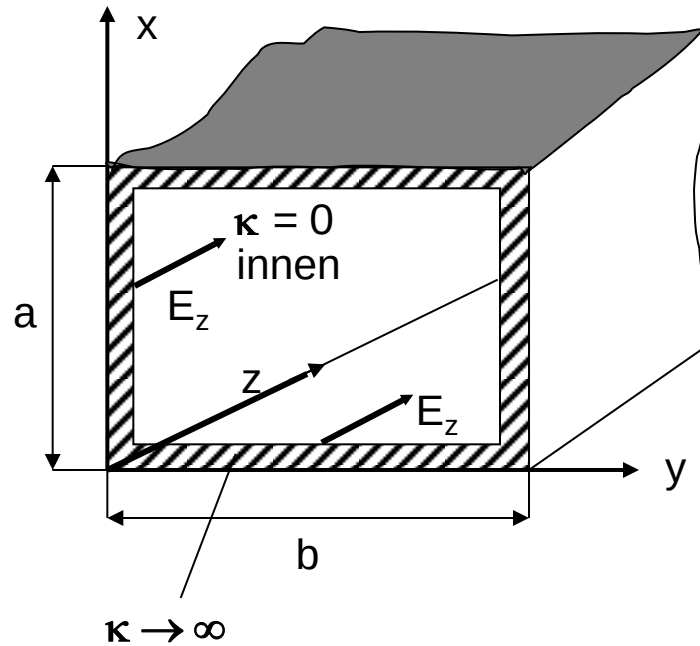
$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + k_x^2 U(x) = 0$$

$$\rightarrow U(x) \sim \sin(k_x x), \cos(k_x x)$$

$$\frac{\partial^2 V(y)}{\partial y^2} + k_y^2 V(y) = 0$$

$$\rightarrow V(y) \sim \sin(k_y y), \cos(k_y y)$$

9.6.3.2 Randbedingungen für Rechteck - Hohlleiter



beliebig gute Leitfähigkeit
in metallischer Berandung

$$\rightarrow J_z = \kappa \cdot E_z$$

$E_z \rightarrow 0$
am Rand

$$E_z(x, y, z, t) = E_z(x, y) e^{j(\omega t - k_z z)} \quad \text{TM - Mode}$$

Randbedingungen:

$$E_z(0, y) = 0 \quad \text{und} \quad E_z(a, y) = 0$$

$$E_z(x, 0) = 0 \quad \text{und} \quad E_z(x, b) = 0$$

} keine tangentialen
Feldkomponenten
an den gut
leitenden Rändern
des Wellenleiters

Aus Randbedingungen $E_z(0, y) = 0$ und $E_z(x, 0)$

fallen Lösungen mit $\cos(k_x x)$ und $\cos(k_y y)$ weg

$$\rightarrow \boxed{E_z(x, y) = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y)}$$

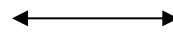
Aus Randbedingungen $E_z(a, y) = 0$ und $E_z(x, b)$

ergibt sich wegen $\sin(k_x a) \stackrel{!}{=} 0$ und $\sin(k_y b) \stackrel{!}{=} 0$

$$\boxed{k_x = \frac{m\pi}{a}}$$

und

$$\boxed{k_y = \frac{n\pi}{b}}$$



m, n sind ganze Zahlen,
durch Wellengleichung nicht festgelegt

Aus der Separation der Variablen und der Berücksichtigung der Randbedingungen folgt schließlich

$$\boxed{E_z(x, y, z, t) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}}$$

$$\boxed{k_z = \sqrt{\epsilon \mu \omega^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}$$

wegen

$$\boxed{\epsilon \mu \omega^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

9.6.3.3 Feldverteilung der TM - Wellen

$$E_x(x,y,z,t) = \frac{-jk_z}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} E_0 \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$E_y(x,y,z,t) = \frac{-jk_z}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} E_0 \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$H_x(x,y,z,t) = \frac{j\omega \epsilon}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} E_0 \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$H_y(x,y,z,t) = \frac{-j\omega \epsilon}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} E_0 \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

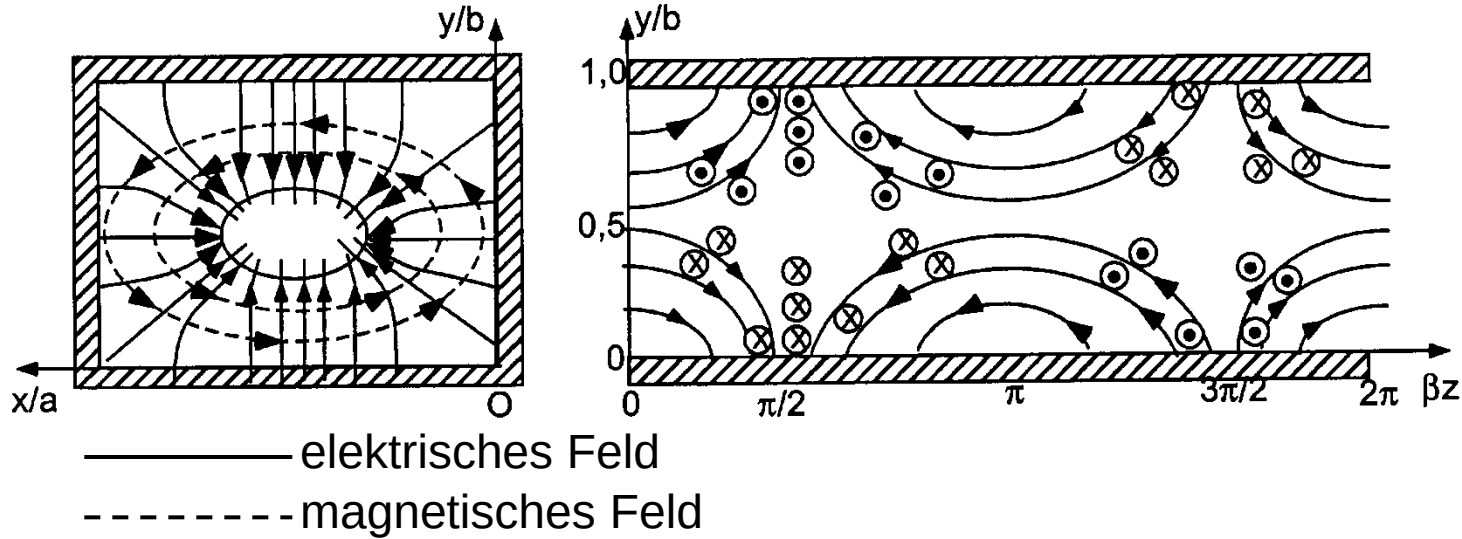
$$E_z(x,y,z,t) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$k_z = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

Definition:

TM₂₃ bedeutet
m=2, n=3

Feldlinien der TM_{11} - Wellen im Rechteck - Hohlleiter



$$E_x \sim j \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)} \quad \rightarrow \operatorname{Re}\{E_x\} \sim \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \sin(\omega t - k_z z)$$

$$E_y \sim j \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)} \quad \rightarrow \operatorname{Re}\{E_y\} \sim \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{b}y\right) \sin(\omega t - k_z z)$$

$$E_z \sim \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)} \quad \rightarrow \operatorname{Re}\{E_z\} \sim \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cos(\omega t - k_z z)$$

Longitudinal-Komponente E_z im Wellenleiter

Es muß gelten: $\text{div} \vec{D} = 0 \rightarrow \boxed{\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \stackrel{!}{=} 0}$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{-jk_z}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} E_0 \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(-\frac{m\pi}{a} \right) \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{-jk_z}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} E_0 \left(\frac{n\pi}{b} \right) \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \left(-\frac{n\pi}{b} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = E_0 \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) (-jk_z) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

Summieren und Kürzen mit E_0 , sin. sin liefert

$$\frac{+jk_z}{\omega^2 \epsilon \mu - k_z^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{jk_z}{\omega^2 \epsilon \mu - k_z^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - jk_z = 0$$

$$\rightarrow \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - (\omega^2 \epsilon \mu - k_z^2) = 0$$

$$\rightarrow \boxed{k_z^2 = \omega^2 \epsilon \mu - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}$$

Bedingung für diskrete Werte der Wellenzahl

$$\rightarrow \text{div } \vec{D} = 0 \text{ ist erfüllt!}$$

9.6.3.4 Leistungsdichte der TM - Wellen

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$$

komplexer Poynting Vektor

$$\rightarrow \vec{S} = \frac{1}{2} \left[\left(\cancel{E_y H_z^*} - E_z H_y^* \right) \vec{e}_x + \left(E_z H_x^* - \cancel{E_x H_z^*} \right) \vec{e}_y + \left(E_x H_y^* - E_y H_x^* \right) \vec{e}_z \right] \quad \text{wegen } [H_z = 0] \text{ bei TM-Wellen}$$

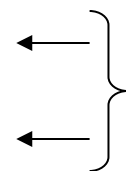
$$= \frac{1}{2} \left[\left(-E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \right) \left(\frac{+j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} E_0 \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \right) \vec{e}_x \right.$$

$$+ \left(E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \right) \left(\frac{-j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} E_0 \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \right) \vec{e}_y$$

$$+ \left[\left(\frac{-jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} E_0 \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \right) \left(\frac{+j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} E_0 \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \right) \right.$$

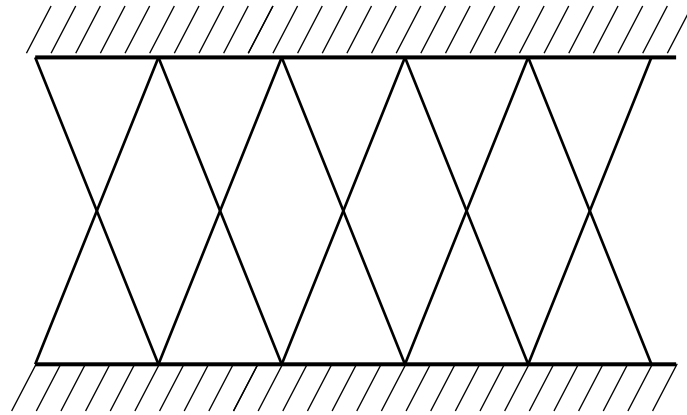
$$\left. - \left(\frac{-jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} E_0 \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \right) \left(\frac{-j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} E_0 \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \right) \right] \vec{e}_z \Bigg]$$

$$\rightarrow \begin{cases} \vec{S} = -j[\dots]E_0^2 \vec{e}_x \\ -j[\dots]E_0^2 \vec{e}_y \\ +[\dots]E_0^2 \vec{e}_z \end{cases}$$



imaginäre „Blind“ - Leistungsdichte quer
(„stehende Querwelle“)

reelle „Wirk“ - Leistungsdichte in Ausbreitungsrichtung z



- Überlagerung von schräg nach oben und unten bzw. nach rechts und links laufender ebener Wellen
- Komponenten senkrecht zur Ausbreitungsrichtung ergeben stehende Wellen
→ imaginäre Poyntingvektorkomponente
- Resonanzbedingung läßt nur diskrete Werte für k_y , k_x zu; dem entsprechen diskrete Winkel der schrägen Welle
- Komponente in Ausbreitungsrichtung ergibt laufende Welle mit reellem Energiefluß → reelle Poyntingvektorkomponente
- Abhängigkeit von k_z bezüglich k_x , k_y mit $k_z^2 + k_y^2 + k_x^2 = \omega^2 \epsilon \mu$ ergibt diskrete Werte für Wellenzahl k_z

9.6.4 TE - Wellen

Das Wellenfeld setzt sich zusammen aus: $\{E_x, E_y, H_x, H_y, H_z\} \hat{=} \text{TE - Wellen}$

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{-j\omega\mu}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ E_y &= \frac{j\omega\mu}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ H_x &= \frac{-jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ H_y &= \frac{-jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \end{aligned}$$

TE $\hat{=}$ transversal - elektrisch
d.h. keine longitudinale E_z - Komponente

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + (\omega^2\mu\epsilon - k_z^2)H_z = 0$$

Wellengleichung für H_z

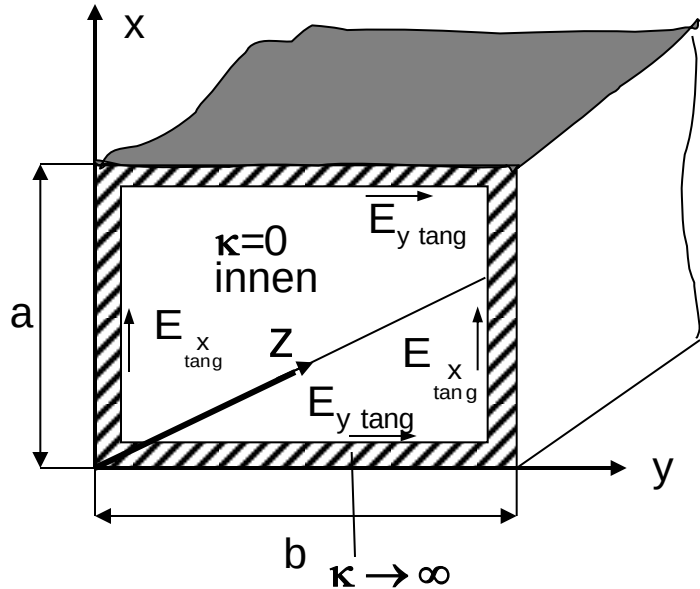
Lösung wie bei TM-Wellen durch
Separation der Variablen

H_z proportional zu

$\sin(k_x x)$ bzw. $\cos(k_x x)$

$\sin(k_y y)$ bzw. $\cos(k_y y)$

9.6.4.1 Randbedingungen für Rechteck - Hohlleiter



beliebig gute Leitfähigkeit κ
in metallischer Berandung

$$\rightarrow \vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$$

$$\downarrow$$

$$\vec{E}_{\text{tangential}} = 0$$

Randbedingungen:

$$E_y(0,y) = 0 \rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial x}(0,y) = 0$$

$$E_y(a,y) = 0 \rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial x}(a,y) = 0$$

$$E_x(x,0) = 0 \rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial y}(x,0) = 0$$

$$E_x(x,b) = 0 \rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial y}(x,b) = 0$$

Aus Separation der Variablen für H_z
und den Randbedingungen folgt:

$$H_z(x,y) = H_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y)$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad \text{und} \quad k_y = \frac{n\pi}{b}$$

m,n sind ganze Zahlen

9.6.4.2 Feldverteilung der TE-Wellen

$$\rightarrow E_x(x,y,z,t) = \frac{j\omega\mu}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} H_0 \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$\rightarrow E_y(x,y,z,t) = \frac{-j\omega\mu}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} H_0 \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$\rightarrow H_x(x,y,z,t) = \frac{jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} H_0 \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

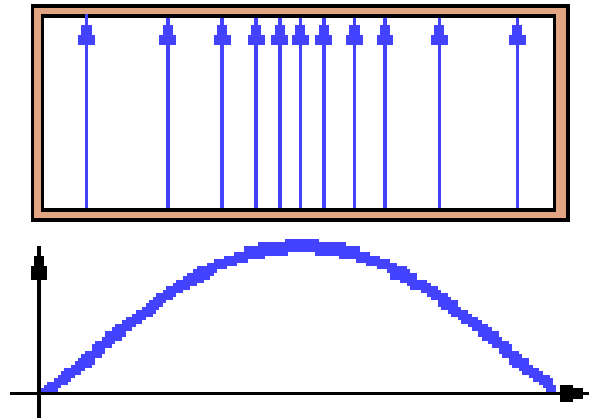
$$\rightarrow H_y(x,y,z,t) = \frac{jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} H_0 \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$\text{mit } H_z(x,y,z,t) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

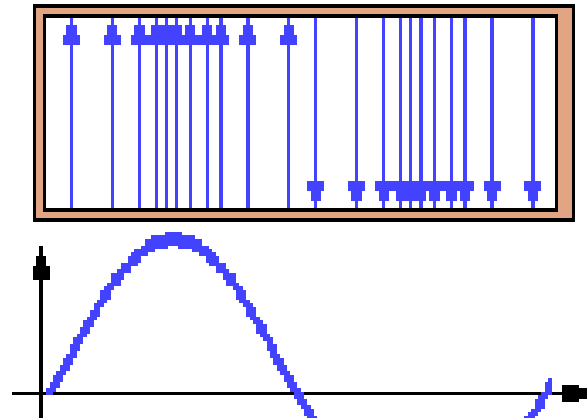
$$k_z^2 = \omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

Beispiel:

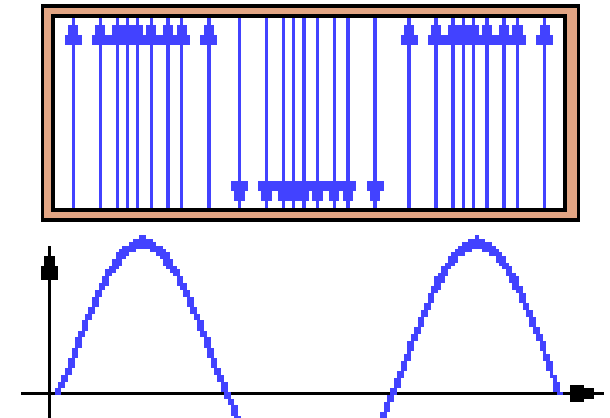
TE₀₁ bezeichnet den Mode mit $m=0, n=1$



TE10



TE20



TE30

Quelle: Wikipedia

9.6.5 Gesamtfeldverteilung der TM- und TE - Wellen

Gesamt - Wellenfeld in pos. x - Richtung ist die Überlagerung aller TM- und TE-Moden die vom Wellenleiter bei der Frequenz ω geführt werden können.

$$\vec{E}_{\text{ges}}(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^{m_{\text{max}}} \sum_{n=1}^{n_{\text{max}}} a_{mn} \cdot \vec{E}_{mn}(x, y) e^{j(\omega t - k_{znm} \cdot z)}$$

↑
Anregungskoeffizient des Einzelmodes,
abhängig von der „Einstrahlcharakteristik“
der Antenne am Wellenleiter - Eingang

Die Anzahl der Moden ist nach oben begrenzt durch

$$\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \leq \epsilon\mu\omega^2 \quad \leftarrow \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \epsilon\mu\omega^2$$

abhängig von Einstrahlfrequenz ω und den Abmessungen a und b des Rechteck - Hohlleiters

9.6.6 Wellenzahl und Wellengeschwindigkeit

Phasengeschwindigkeit

$$v_{mn} = \frac{\omega}{k_{zmn}}$$

$$\text{mit } k_{zmn} = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

$$\rightarrow v_{mn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 / c_0^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon = \epsilon_0 \\ \mu = \mu_0 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow v_{mn} = c_0 \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{c_0^2}{\omega^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \frac{c_0^2}{\omega^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} > c_0$$

minimal für
niedrige m,n

Gruppengeschwindigkeit

$$v_{\text{gmn}} = \frac{d\omega}{dk_{\text{zmn}}}$$

$$\text{mit } k_{\text{zmn}} = \sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

$$\rightarrow v_{\text{gmn}} = \frac{1}{\frac{dk_{\text{zmn}}}{d\omega}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} 2\omega \epsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{\frac{\omega}{k_{\text{zmn}}} \frac{1}{c_0^2}}$$

$$v_{\text{gmn}} = c_0^2 \frac{k_{\text{zmn}}}{\omega} = \left(\frac{c_0^2}{v_{\text{mn}}} \right) = c_0 \sqrt{1 - \frac{c_0^2}{\omega^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \frac{c_0^2}{\omega^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} < c_0 \quad \leftrightarrow \quad v_{\text{gmn}} \cdot v_{\text{mn}} = c_0^2$$

$$v_{\text{gmn}} = v_{\text{g}}(\omega, m, n) \quad \text{Gruppengeschwindigkeit ist frequenzabhängig.}$$

9.6.7 Cut - off - Frequenzen

Wir hatten für die Wellenzahl k_z :

$$k_z^2 = \epsilon\mu\omega^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad \text{mit} \quad \vec{E} = \vec{E}(x,y) \cdot e^{j(\omega t - k_z z)}$$

Je höher m und n werden (Anzahl der Knoten in der Querverteilung der Felder),
umso kleiner wird k_z , Phasengeschwindigkeit nimmt zu, Gruppengeschwindigkeit nimmt ab

Grenzfall $k_z = 0$ (keine Wellenausbreitung mehr) $\rightarrow \vec{E} = \vec{E}(x,y) \cdot e^{j\omega t}$

$$\rightarrow 0 = \epsilon\mu\omega^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} \omega_{c_{mn}} &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \\ f_{c_{mn}} &= \omega_{c_{mn}} / (2\pi) \end{aligned}}$$

Cut - off Frequenz des
 TM_{mn} - oder TE_{mn} - Modes

$$v_{mn} = \frac{\omega}{k_{zmn}} \rightarrow \infty$$

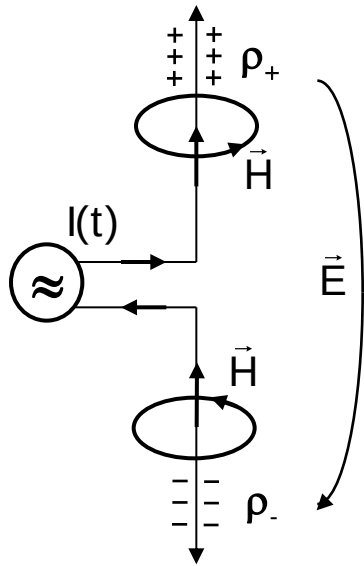
$$v_{gmn} = c_0^2 \frac{k_{zmn}}{\omega} \rightarrow 0$$

für Frequenzen $f < f_{c_{mn}}$ kann der
 TM_{mn} - oder TE_{mn} - Mode nicht mehr im
Wellenleiter geführt werden

Zusammenfassung:

- Transversal - Komponenten ($\sim j \cdot E_0$) sind untereinander in Phase
- Longitudinal - Komponente ($\sim E_0$) ist um 90° phasenverschoben
- jeder der Moden TM_{mn} hat eine andere Phasengeschwindigkeit v_{mn}
- für jeden Mode TM_{mn} gibt es eine charakteristische Cut - off - Frequenz, unterhalb von der er nicht mehr vom Wellenleiter geführt werden kann
- die Anzahl der möglichen Moden ist durch die Cut - off Bedingung nach oben begrenzt
- wie stark ein Mode tatsächlich angeregt ist, hängt von den Einstrahlbedingungen am Eingang des Wellenleiters ab
- durch die unterschiedlichen Gruppengeschwindigkeiten der Moden wird ein modulierter Wellenzug im Wellenleiter verbreitert = Begrenzung der maximal übertragbaren Datenrate
→ Ziel: Entwurf des Hohlleiters so, dass nur ein Mode ausbreitungsfähig ist

9.7 Wellenerzeugung durch eine Antenne



An der Antenne:

Durch die Ströme in die Antennenenden hinein entstehen an den Antennenspitzen Raumladungen.

Die Raumladungen erzeugen elektrische Felder (Quellenfelder).

Die Ströme erzeugen um die Antennenstäbe Magnetfelder.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Raumladungen} & \rightarrow \text{el. Potentiale} \\
 & \rightarrow \text{el. Felder } \vec{E}_Q(t) \\
 \text{Ströme} & \rightarrow \text{Magnetfelder } \vec{H}(t)
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Raumladungen} \\ \text{Ströme} \end{array}} \right\}$$

Fern von der Antenne:

Die zeitlich variablen Magnetfelder erzeugen elektrische (Wirbel-) Felder.

Die zeitlich variablen elektrischen Felder erzeugen Magnetfelder.

→ Wellenausbreitung im Raum jenseits der Antenne

$$\begin{array}{ll}
 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & \rightarrow \vec{E}_w \\
 \frac{\partial \vec{E}_{Q,w}}{\partial t} & \rightarrow \vec{H}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \frac{\partial \vec{E}_{Q,w}}{\partial t} \end{array}} \right\}$$

9.7.1 Wellengleichung des elektrischen und magn. Vektorpotentials

Aufgabenstellung: Berücksichtigung eingepprägter, freier Ströme

Lösungsversuch: Wellengleichung für diesen Fall herleiten:

$$\text{Maxwell:} \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\text{rot rot } \vec{H} = \text{rot } \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{D})$$

$$-\Delta \vec{H} + \text{grad div}_0 \vec{H} = \text{rot } \vec{J} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right)$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta \vec{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = - \text{rot } \vec{J}}$$

Bisher: $\vec{J} = \kappa \vec{E}$ durch Welle erzeugter Strom

Jetzt: eingepprägter, freier (Antennen-) Strom

inhomogene PDGL: schwierig zu lösen

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{rot} \left(-\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right)$$

$$-\Delta \vec{E} + \text{grad div } \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H}$$

$$-\Delta \vec{E} + \text{grad} \left(\frac{1}{\epsilon} \text{div } \vec{D} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad \leftarrow \text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$-\Delta \vec{E} + \text{grad} \left(\frac{\rho}{\epsilon} \right) = -\mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \leftarrow \text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \text{grad} \left(\frac{\rho}{\epsilon} \right) + \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}}$$

eingepägter, freier Strom

eingepägte Raumladungsdichte ρ

Ebenfalls schwierig zu lösen;

→ Einführung des Vektorpotentials als Rechenerleichterung

Elektrisches und magnetisches Vektorpotential:

Maxwell:
$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = -\text{rot } \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}$$
$$\Rightarrow \text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) = 0$$

$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ Def.: magnetisches Vektorpotential

Damit lässt sich $\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}$ als Gradient einer Potentialfunktion darstellen.

$$\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \stackrel{\text{Def}}{=} -\text{grad } \Phi \quad \text{da immer gilt: } \text{rot grad } \Phi \equiv 0$$

$\vec{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
--

$\vec{E}$ - Feld erzeugt aus Ladungen
und magn. Induktion

Quellenfeld
Ursache: Raumladungsdichte

Wirbelfeld
Ursache: Stromdichte

Einbeziehung von Quellen ρ

Maxwell: $\boxed{\text{div } \vec{D} = \rho}$ Ziel: DGI für Potential Φ

$$\epsilon \cdot \text{div } \vec{E} = \epsilon \cdot \text{div} \left(-\text{grad } \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \rho \quad \leftarrow \vec{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$-\epsilon \cdot \Delta \Phi - \epsilon \text{div } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \rho$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \Phi + \text{div } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon}}$$

gekoppelte DGI
für Φ und $\vec{A}$

↑
Wirkung der vorgegebenen
Raumladungsdichte

Erinnerung
Elektrostatik

}

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{Poisson - Gl.}$$

→ Lösung Coulomb Integral

Einbeziehung der Stromdichte $\vec{J}$

$$\boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu \cdot \vec{J} + \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = \mu \cdot \vec{J} + \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = \mu \cdot \vec{J} - \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{grad } \Phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu \cdot \vec{J} - \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \Phi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\Delta \vec{A} - \text{grad} \left(\text{div } \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \cdot \vec{J}}$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad \vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

Entkopplung $\vec{A}$, Φ noch nicht
vollständig erreicht $\Rightarrow$ Lorentz Eichung

↑ Wirkung der vorgegebenen Stromdichte $\vec{J}$ 358

9.7.1.1 Lorentz - Eichung

Warum ist es erlaubt, " $\text{div } \vec{A} + \epsilon\mu \partial\Phi/\partial t = 0$ " zu setzen?

Mehrdeutigkeit von $\vec{A} \leftrightarrow \vec{A}'$:

Es besteht der Freiheitsgrad der Hinzufügung einer Integrationskonstanten, da das physikalisch reale Magnetfeld $\vec{B}$ durch Differenzieren (Rotor-Bildung) des magnetischen Vektorpotentials beschrieben wird.

→ $\boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \psi}$ ψ frei wählbar

$$\left. \begin{array}{l} \vec{A} : \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \\ \vec{A}' : \vec{B} = \text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A} + \cancel{\text{rot grad } \psi} \end{array} \right\}$$

$\vec{A}$ und $\vec{A}'$ sind gleichberechtigte Repräsentanten für $\vec{B}$

Ziel: Rechnung möglichst einfach!
Wahl von ψ daher so, dass gilt:

$$\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

Lösung:

es sei zunächst $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}'$, jedoch mit $\operatorname{div} \vec{A}' \neq -\varepsilon \mu \partial \Phi / \partial t$

$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \psi$ ($\vec{A}$ und $\vec{A}'$ sind gleichwertig zur Beschreibung von $\vec{B}$)

$$\operatorname{div} \vec{A}' = \operatorname{div} \vec{A} + \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi$$

$\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div} \vec{A}' - \Delta \psi \rightarrow$ wähle ψ so, dass gilt

$$\Delta \psi = \varepsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A}'$$

↑
Lösung der Poisson DGL

$$\rightarrow \operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B}$$

Es existiert also immer ein $\vec{A}$,
welches das Magnetfeld $\vec{B}$ richtig
beschreibt, und für welches
 $\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon \mu \partial \Phi / \partial t = 0$
(Lorentz - Konvention) gilt

9.7.1.2 Wellengleichungen

Neue Festlegung für die Quellen von $\vec{A}$:

$$\operatorname{div} \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

 Lorentz - Eichung ← Verknüpfung von $\vec{A}$ und Φ

Diese Festlegung trennt die Differentialgleichungen für $\vec{A}$ und Φ :

$$\Delta \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \cdot \vec{J}$$

Wellengleichung für das magnetische Vektorpotential bei vorgegebener (eingepprägter) Stromdichte $\vec{J}$

Wir hatten:
$$\Delta \Phi + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \left(-\epsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \Phi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Wellengleichung für das elektrische Potential bei vorgegebener Raumladungsdichte ρ

9.7.1.3 Lösung der Wellengleichung: retardierte Potentiale

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

Coulomb-Integral für schnell bewegte Ladungsverteilungen

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

Vektorpotential für schnell veränderliche Ströme

Der Beitrag einer Ladung ρ bzw. Stromdichte $\vec{J}$ an den Orten $\vec{r}'$ zu den Potentialen Φ und $\vec{A}$ am Ort $\vec{r}$ muss zeitlich um $|\vec{r} - \vec{r}'|/c$ rückdatiert werden.

Wirkungen können sich nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen.

Die Potentiale am Ort $\vec{r}$ zum Zeitpunkt t hängen also ab von $\rho(\vec{r}')$ bzw. $\vec{J}(\vec{r}')$ zum früheren Zeitpunkt $t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$

Darstellung in kartesischen Koordinaten

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\rho \left(x', y', z', t - \frac{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}{c} \right)}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz'$$

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J} \left(x', y', z', t - \frac{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}{c} \right)}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz'$$

Beispiel zeitlicher Anregung:

$$\rho(x', y', z', t) = \rho(x', y', z') \cdot e^{j\omega t}$$

$$\rightarrow \Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\rho(x', y', z') \cdot e^{j\omega \left(t - \frac{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}{c} \right)}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz'$$

und

$$\vec{J}(x', y', z', t) = \vec{J}(x', y', z') \cdot e^{j\omega t}$$

$$\rightarrow \vec{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(x', y', z') \cdot e^{j\omega \left(t - \frac{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}{c} \right)}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz'$$

Zusammenfassung:

Potentiale

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

elektrisches Potential

$$\rightarrow \Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

Lorentz - Eichung

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \cdot \vec{J}$$

magnetisches Vektorpotential

$$\rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

Elektrische und magnetische Felder

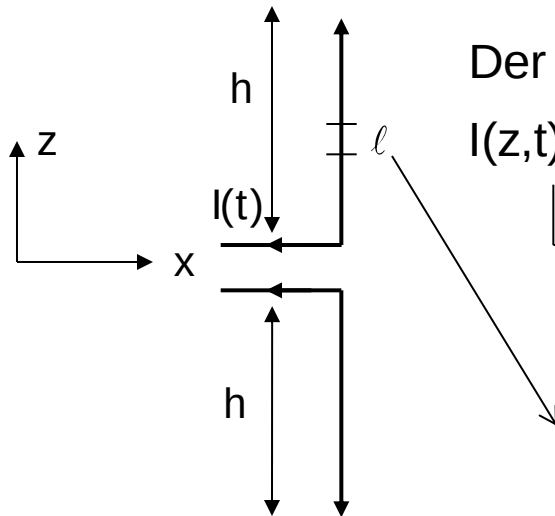
$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

elektrisches Feld

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

magnetisches Feld

9.7.2 Der Hertzsche Dipol



Der Strom entlang der Stäbe einer Antenne nimmt nach aussen zu ab mit

$$I(z,t) = I_0 \cdot f(z) \cdot e^{j\omega t}$$

max. am Ursprung $z = 0$

Null am Ende $z = \pm h$

Ein (infinitesimal) kleines Antennenelement innerhalb der Antenne, der sog. Hertzsche Dipol der Länge ℓ am Ort z_i mit

$I(z_i,t) \approx I(t) = \text{const.}$ liefert das Teil-Wellenfeld $\vec{E}_i(\vec{r},t)$

Das Wellenfeld der gesamten Antenne ergibt sich durch Überlagerung aller Teil-Felder $\vec{E}_i(\vec{r},t)$ der einzelnen Hertzschen Dipole an den Orten z_i

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r},t)$$

Vektorpotential des Hertzschen Dipols

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

$\vec{j} = j_z \vec{e}_z \Rightarrow$ nur z-Komponente von Vektorpotential $\vec{A} = A_z \vec{e}_z$ vorhanden

$$A_z(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \frac{I \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dz'$$

$$\vec{j} dv' = I \cdot d\vec{s}' = I dz' \cdot \vec{e}_z$$

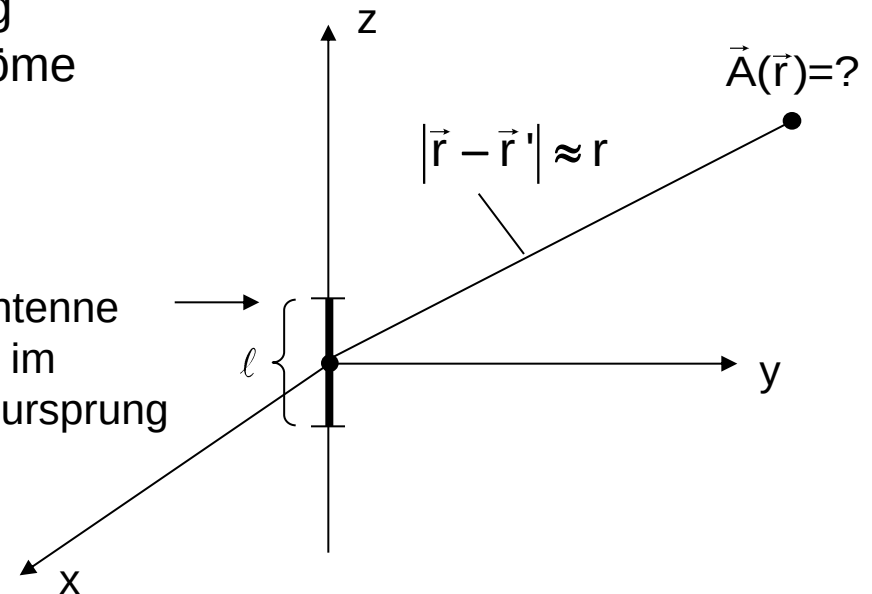
Näherung
Linienströme

Wenn $\ell \ll r$ gilt: $\triangleq$ kleines Linienstrom - Element

$\rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| \approx r$ konstant über Integrationsweg

$$\rightarrow A_z(r, t) \approx \frac{\mu}{4\pi r} \cdot \ell \cdot I \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

Ortsvektor nur abhängig vom Abstand r ist radiale Kugelkoordinate



9.7.2.1 Berechnung der Potentiale

Magnetisches Vektorpotential und elektrisches Potential für harmonische Zeitabhängigkeit

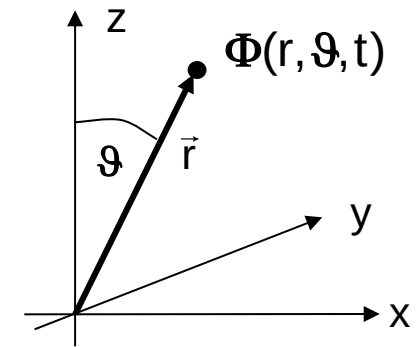
$$I\left(t - \frac{r}{c}\right) = \hat{I} \cdot \exp\left(j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \rightarrow \boxed{A_z(r, t) = \frac{\mu}{4\pi r} \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot \exp\left(j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)}$$

Lorentz - Eichung: Bestimmung von Φ aus $\vec{A}$:

$$\boxed{\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0} \rightarrow \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial A_z}{\partial z} = -c^2 \frac{\partial A_z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z}$$

$$= -c^2 \frac{\mu}{4\pi} \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \left(-j\frac{\omega}{c} \right) \right] \exp\left(j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \cdot \cos \vartheta$$

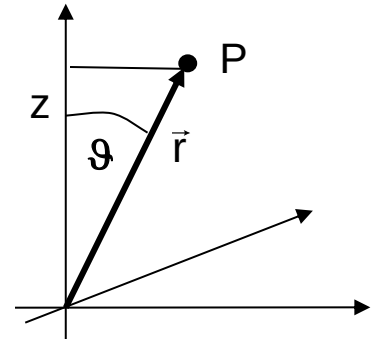


$$\Phi(r, \vartheta, t) = -\frac{j}{\omega} \frac{\partial \Phi(r, \vartheta, t)}{\partial t} \rightarrow \boxed{\Phi(r, \vartheta, t) = c^2 \cdot \frac{\mu}{4\pi} \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot \cos \vartheta \cdot \left[-\frac{j}{\omega \cdot r^2} + \frac{1}{c \cdot r} \right] \exp\left(j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)}$$

Nebenrechnung

$$A_z \vec{e}_z = (A_z \cos \vartheta) \vec{e}_r - (A_z \sin \vartheta) \vec{e}_\vartheta + 0 \cdot \vec{e}_\varphi \quad \text{Kartesisch} \longrightarrow \text{Polar-Koordinaten}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\vartheta \sin \vartheta) + 0 \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_z(r) \cos \vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (-A_z \sin^2 \vartheta) \\ &= \frac{1}{r^2} 2r A_z(r) \cos \vartheta + \frac{\partial A_z(r)}{\partial r} \cos \vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} (-A_z(r) 2 \sin \vartheta \cos \vartheta) \\ &= \frac{2}{r} A_z(r) \cos \vartheta + \frac{\partial A_z(r)}{\partial r} \cos \vartheta + \left(-\frac{2}{r} A_z(r) \cos \vartheta \right) \\ &= \frac{\partial A_z(r)}{\partial r} \cdot \cos \vartheta \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$



Einfacher:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{\partial A_z(r)}{\partial z} + 0 + 0 = \frac{\partial A_z(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} \\ &= \frac{\partial A_z(r)}{\partial r} \cdot \cos \vartheta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{dr}{dz} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2z = \frac{z}{r} = \cos \vartheta \end{aligned}$$

Umformung der Vektorfelder A von kartesischen in Kugel-Koordinaten:

$$\rightarrow A_r(r, \vartheta, t) = A_z \cdot \cos \vartheta = \frac{\mu}{4\pi r} \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot \cos \vartheta \cdot \exp\left(j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)$$

$$\rightarrow A_\vartheta(r, \vartheta, t) = -A_z \cdot \sin \vartheta = -\frac{\mu}{4\pi r} \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot \sin \vartheta \cdot \exp\left(j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)$$

$$\rightarrow A_\phi = 0$$

$$\rightarrow \Phi(r, \vartheta, t) = c^2 \cdot \frac{\mu}{4\pi} \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot \cos \vartheta \cdot \left[-\frac{j}{\omega \cdot r^2} + \frac{1}{c \cdot r} \right] \exp\left(j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)$$

Daraus Berechnung des elektrischen und magnetischen Feldes möglich:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{grad } \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \text{rot } \vec{A} \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} \end{aligned}$$

hier differenzieren mittels
grad und *rot*
in Kugelkoordinaten

9.7.2.2 Lösung für das elektrische und magnetische Feld

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \Phi} \quad \rightarrow E_r = -\frac{\partial A_r}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad \underline{\text{Berechnung der r - Komponente}}$$

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\mu}{4\pi r} \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot \cos \delta \cdot (j\omega) \cdot \exp\left(j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \\ &\quad - c^2 \cdot \frac{\mu}{4\pi} \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot \cos \vartheta \left[\left(\frac{2j}{\omega r^3} - \frac{1}{cr^2}\right) + \left(\frac{-j}{\omega r^2} + \frac{1}{cr}\right) \cdot \left(\frac{-j\omega}{c}\right) \right] \exp\left(j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \cdot c^2 \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot \cos \vartheta \cdot 2 \left[\frac{-j}{\omega r^3} + \frac{1}{cr^2} \right] \exp\left(j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \quad \text{und } c^2 = \frac{1}{\epsilon\mu} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{E_r(r, \vartheta, t) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot \cos \vartheta \cdot \left[\frac{-j}{\omega r^3} + \frac{1}{cr^2} \right] \exp\left(j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \Phi$$

$$\rightarrow E_{\vartheta} = -\frac{\partial A_{\vartheta}}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}$$

Berechnung der
 ϑ - Komponente

$$E_{\vartheta} = +\frac{\mu}{4\pi r} \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot \sin \vartheta \cdot (j\omega) \cdot \exp\left(j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)$$

$$- \frac{1}{r} c^2 \frac{\mu}{4\pi} \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot (-\sin \vartheta) \cdot \left[\frac{-j}{\omega \cdot r^2} + \frac{1}{c \cdot r} \right] \cdot \exp\left(j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \quad \text{und } c^2 = \frac{1}{\epsilon \mu}$$

$$\rightarrow E_{\vartheta}(r, \vartheta, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon} \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot \sin \vartheta \cdot \left[\frac{-j}{\omega \cdot r^3} + \frac{1}{c \cdot r^2} + \frac{j\omega}{c^2 \cdot r} \right] \cdot \exp\left(j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)$$

$$E_{\varphi} = -\frac{\partial A_{\varphi}}{\partial t} - \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$$

Berechnung der
 φ - Komponente

$$\rightarrow \boxed{E_{\varphi} = 0} \quad \underline{\varphi - \text{Komponente}} \\ \underline{\text{ist Null}}$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A}}$$
 Berechnung des Magnetfeldes aus magn. Vektorpotential

$$H_r = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\varphi \cdot \sin \vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \rightarrow \boxed{H_r = 0} \quad \underline{\underline{r - Komponente ist Null}}$$

$$H_\vartheta = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_\varphi) \right] \rightarrow \boxed{H_\vartheta = 0} \quad \underline{\underline{\vartheta - Komponente ist Null}}$$

$$\begin{aligned} H_\varphi &= \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right] \\ &= \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left[A_\vartheta + r \frac{\partial A_\vartheta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right] \\ &= \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left[- \left[\frac{\mu}{4\pi} \cdot \ell \cdot \hat{I} \right] \cdot \left\{ \frac{1}{r} + r \cdot \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{-j\omega}{c} \right) \right) \right\} \sin \vartheta - \left[\frac{\mu}{4\pi} \cdot \ell \cdot \hat{I} \right] \cdot \frac{1}{r} \cdot (-\sin \vartheta) \right] \cdot \exp \left(j\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{H_\varphi(r, \vartheta, t) = \frac{1}{4\pi} \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot \sin \vartheta \left[\frac{j\omega}{r \cdot c} + \frac{1}{r^2} \right] \cdot \exp \left(j\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)}$$

Lösung für
 φ - Komponente

Gesamtfeld

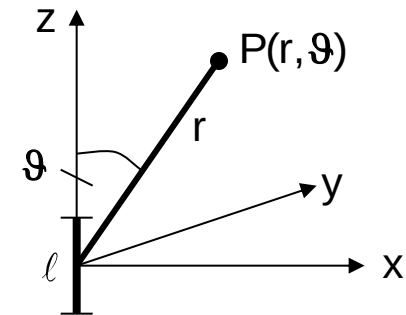
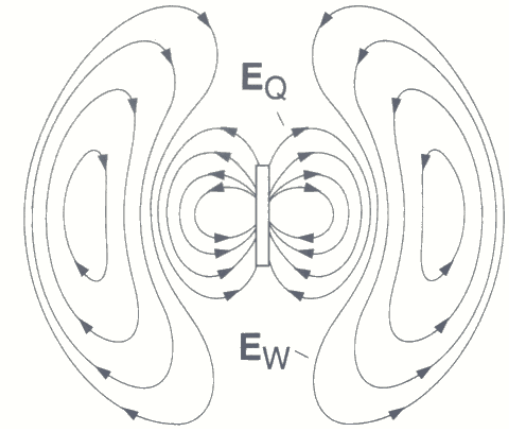
$$E_r(r, \vartheta, t) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ell \hat{1} \cos \vartheta \left(\frac{-j}{\omega r^3} + \frac{1}{c r^2} \right) \cdot \exp(j(\omega t - kr))$$

$$E_\vartheta(r, \vartheta, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \ell \hat{1} \sin \vartheta \left(\frac{-j}{\omega r^3} + \frac{1}{c r^2} + \frac{j\omega}{c^2 r} \right) \cdot \exp(j(\omega t - kr))$$

$$H_\varphi(r, \vartheta, t) = \frac{1}{4\pi} \ell \hat{1} \sin \vartheta \left(+\frac{1}{r^2} + \frac{j\omega}{c r} \right) \cdot \exp(j(\omega t - kr))$$

$$E_\varphi = 0 \quad H_r = 0 \quad H_\vartheta = 0$$

wobei $\omega(t - r/c) = \omega t - kr$
wegen $\omega/k = c$



Nahfeld: r klein $\rightarrow \frac{1}{r} \ll \frac{1}{r^2} \ll \frac{1}{r^3} \rightarrow$ Berücksichtigung von $\frac{1}{r^3}$ bzw. $\frac{1}{r^2}$

Fernfeld: r groß $\rightarrow \frac{1}{r} \gg \frac{1}{r^2} \gg \frac{1}{r^3} \rightarrow$ Berücksichtigung von $\frac{1}{r}$

Fernfeld - Nahfeld

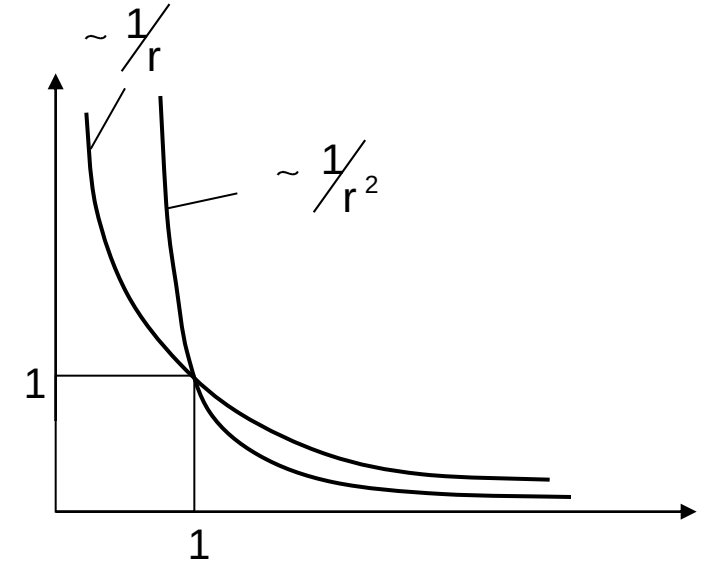
wann ist Anteil des Nahfeldes ($\sim \frac{1}{r}$) gleich dem des Fernfeldes ($\sim \frac{1}{r^2}$)

$$H_\phi : \frac{\omega}{c r} = \frac{1}{r^2} \rightarrow \boxed{r = \frac{c}{\omega}} \quad r = \frac{\lambda}{2\pi}$$

$$E_\theta : \frac{\omega}{c^2 r} = \frac{1}{c r^2} \rightarrow r = \frac{c}{\omega} \quad r = \frac{\lambda}{2\pi}$$

$$\frac{\omega}{c^2 r} = \frac{1}{\omega r^3} \rightarrow r^2 = \frac{c^2}{\omega^2} \quad r = \frac{\lambda}{2\pi}$$

$$E_r : \frac{1}{\omega r^3} = \frac{1}{c r^2} \rightarrow r = \frac{c}{\omega} \quad r = \frac{\lambda}{2\pi}$$



→ An der Stelle $r_0 = \frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi}$ sind alle Terme $\left(\sim \frac{1}{r}, \sim \frac{1}{r^2}, \sim \frac{1}{r^3} \right)$ gleich groß

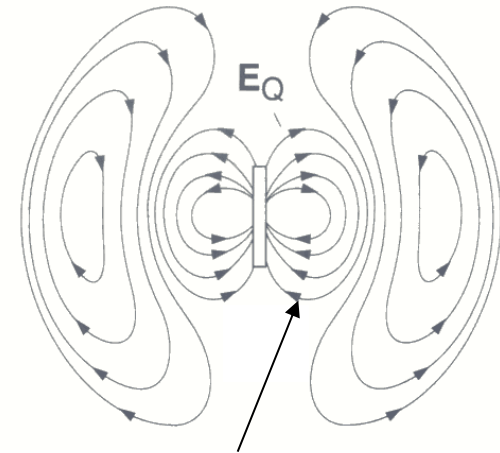
9.7.2.3 Nahfelder

(nur Komponenten mit $\frac{1}{r^3}$ bzw. $\frac{1}{r^2}$)

$$E_r(r, \vartheta, t) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot \cos \vartheta \frac{-j}{\omega \cdot r^3} \cdot \exp(j(\omega t - kr))$$

$$E_\vartheta(r, \vartheta, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot \sin \vartheta \frac{-j}{\omega \cdot r^3} \cdot \exp(j(\omega t - kr))$$

$$H_\varphi(r, \vartheta, t) = \frac{1}{4\pi} \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot \sin \vartheta \frac{1}{r^2} \cdot \exp(j(\omega t - kr))$$



Nahfeld
(Quellenfeld)

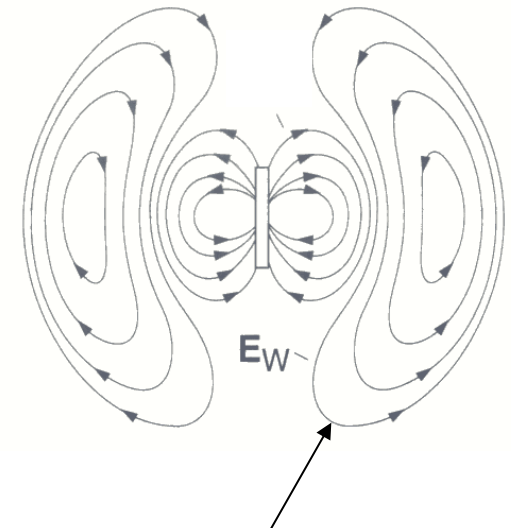
Poynting – Vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^*$ rein imaginär

Kein Energietransport, Quellenfeld E pumpt nur,
dehnt sich aus, zieht sich wieder zusammen, entfernt sich nicht von der Antenne

9.7.2.4 Fernfelder

(dominant nur Komponenten mit $\frac{1}{r}$)

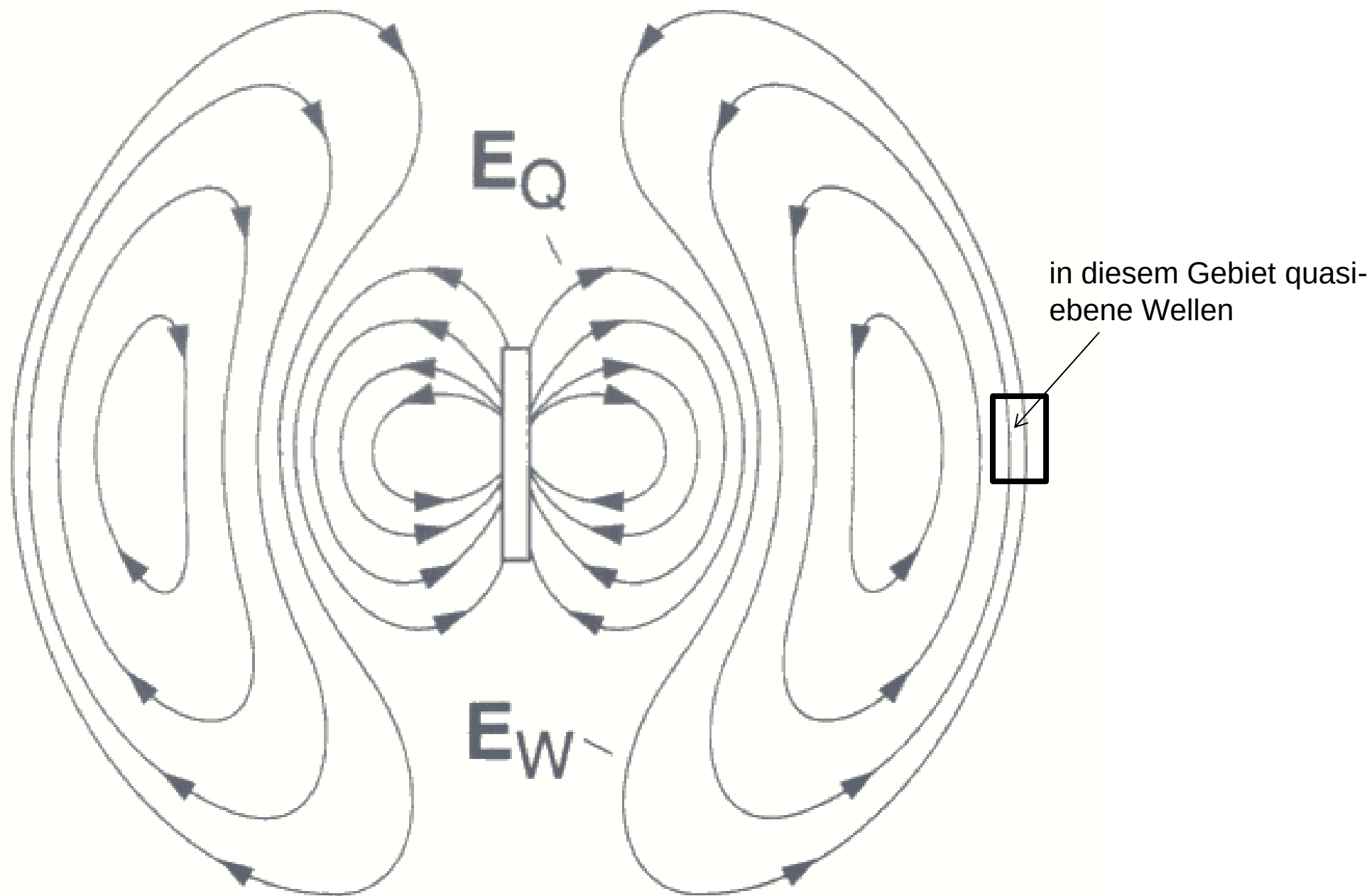
$$\left(\begin{aligned} E_r(r, \vartheta, t) &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{1}{c r^2} \cdot \exp(j(\omega t - kr)) \approx 0 \\ E_\vartheta(r, \vartheta, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot \sin \vartheta \cdot \frac{j\omega}{r \cdot c^2} \cdot \exp(j(\omega t - kr)) \\ H_\varphi(r, \vartheta, t) &= \frac{1}{4\pi} \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot \sin \vartheta \cdot \frac{j\omega}{r \cdot c} \cdot \exp(j(\omega t - kr)) \end{aligned} \right) \quad \text{"Kugelwelle"}$$



Fernfeld
(Wirbelfeld)

* E_ϑ und H_φ stehen senkrecht aufeinander.

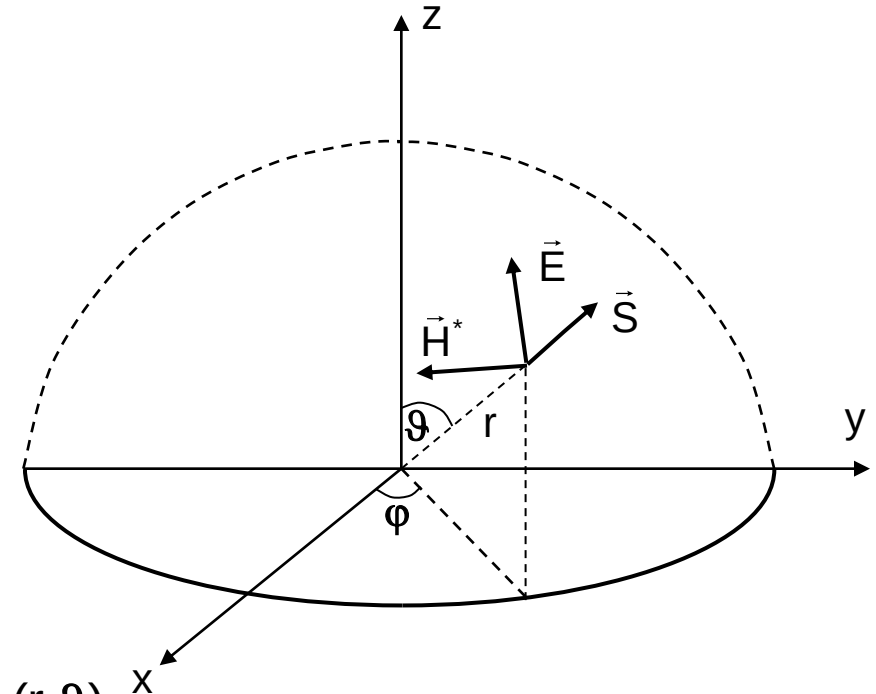
* $E_\vartheta = \frac{1}{c \cdot \epsilon} \cdot H_\varphi = \frac{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}}{\epsilon} H_\varphi = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot H_\varphi$ wie bei ebenen Wellen.



9.7.2.5 Poynting - Vektor und Energieabstrahlung im Fernfeld

$$\begin{aligned}
 \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H}^* \\
 &= E_r \cdot H_\varphi^* \vec{e}_\vartheta + E_\vartheta \cdot H_\varphi^* \vec{e}_r \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi\epsilon} \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{1}{c r^2} \right) \cdot \left(\frac{-j}{4\pi} \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot \sin \vartheta \cdot \frac{\omega}{r \cdot c} \right) \cdot \vec{e}_\vartheta \\
 &\quad + \left(j \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot \sin \vartheta \cdot \frac{\omega}{r \cdot c^2} \right) \cdot \left(\frac{-j}{4\pi} \cdot \ell \cdot \hat{I} \cdot \sin \vartheta \cdot \frac{\omega}{r \cdot c} \right) \cdot \vec{e}_r
 \end{aligned}$$

↙ imaginär
↘ reell



$$\vec{S}(r, \vartheta) = S_{R\vartheta}(r, \vartheta) \cdot \vec{e}_r + j \vec{S}_{lr}(r, \vartheta) \cdot \vec{e}_\vartheta \quad \text{mit} \quad \vec{S}_l(r, \vartheta) \ll \vec{S}_R(r, \vartheta)$$

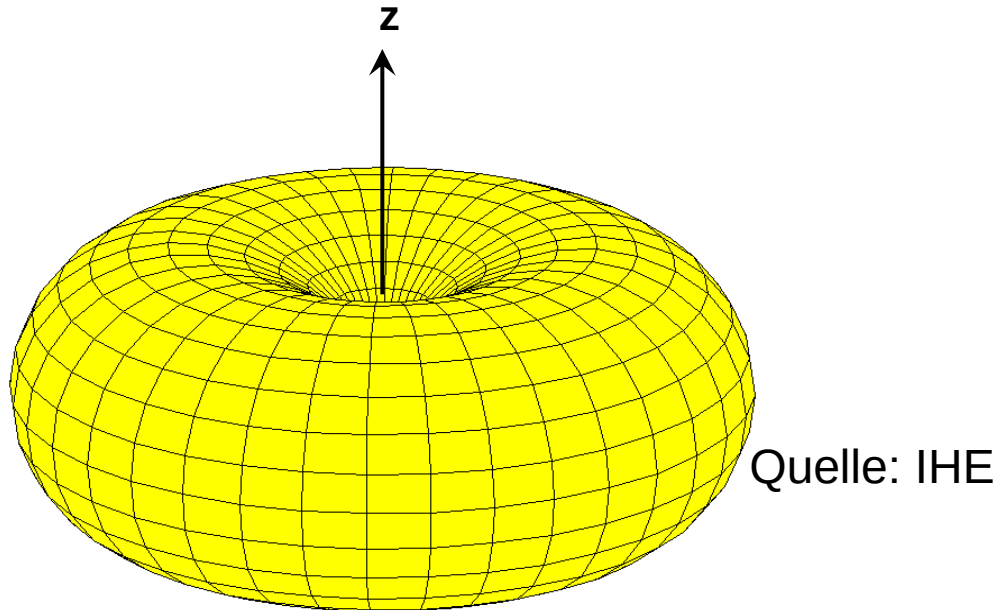
$$\langle \vec{S}_R(r, \vartheta) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{S}(r, \vartheta) \} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi} \right)^2 \cdot \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \cdot \left(\frac{\ell \cdot \hat{I}}{r} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\epsilon \cdot c} \right) \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \vec{e}_r = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \hat{I}^2 \vec{e}_r$$

Räumliche Richtcharakteristik des Hertzschen Dipols

$$\langle \vec{S}(r, \vartheta) \rangle = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \hat{I}^2 \vec{e}_r$$

Auftragung der Richtcharakteristik der Antenne in Kugelkoordinaten als relative Länge $\vec{S}_{\text{rel}}(\vartheta, \varphi)$ des Poyntingvektors für festen Radius r abhängig von den Koordinaten ϑ und φ

$$\rightarrow \vec{S}_{\text{rel}}(\vartheta) \sim \sin^2 \vartheta \quad \text{hier unabhängig vom Winkel } \varphi$$



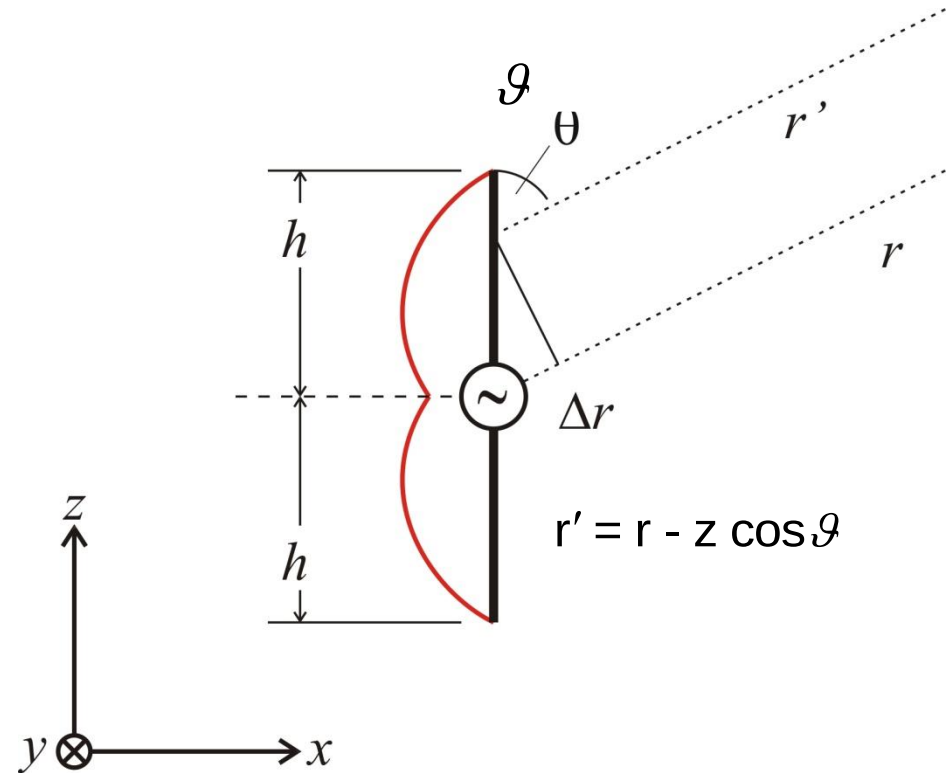
9.7.3 Reale ausgedehnte Dipolantenne

Stromverteilung entlang der Antenne
(Strom Null an Enden):

$$\hat{I}(z) = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(h-|z|)\right) = I_0 \sin(k(h-|z|))$$

Das Fernfeld eines infinitesimal kleinen Dipols
der Länge $d\ell$ ist:

$$dE_\vartheta = \frac{1}{4\pi\epsilon} \hat{I}(z) \sin\vartheta \frac{\omega}{rc_0^2} e^{j(\omega t - kr)} d\ell$$



Berechnung des Fernfeldes für große r durch Integration der einzelnen Dipolbeiträge
über die Höhe $2h$. Da der Dipol in z -Richtung zeigt, gilt folgender Ansatz:

$$E_\vartheta = \int_{z=-h}^h \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\omega}{r'c_0^2} I_0 \sin(k(h-|z|)) e^{j(\omega t - kr')} \sin\vartheta dz$$

Für große r gilt: $\frac{1}{r} \approx \frac{1}{r'}$

Beim Phasenterm in der e-Funktion jedoch muss der Wegunterschied genau beachtet werden.

Für große r sind die Strahlen r und r' parallel und es gilt $r' = r - z \cos \vartheta$

Damit lässt sich das Integral umformen zu:

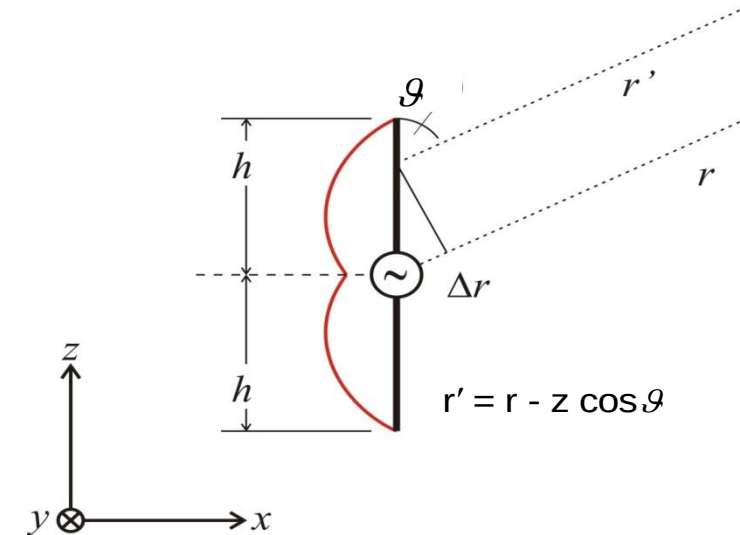
$$E_{\vartheta} = \frac{I_0}{4\pi\epsilon} \frac{\omega}{c_0^2 r} \sin \vartheta \int_{z=-h}^h \sin(k(h-|z|)) e^{j(\omega t - kr + kz \cos \vartheta)} dz$$

$$= \frac{I_0}{4\pi\epsilon} \frac{\omega}{c_0^2 r} \sin \vartheta e^{j(\omega t - kr)} \int_{z=-h}^h \sin(k(h-|z|)) e^{jkz \cos \vartheta} dz$$

$$= \frac{I_0}{4\pi\epsilon} \frac{\omega}{c_0^2 r} \sin \vartheta e^{j(\omega t - kr)} \int_{z=-h}^h \sin(k(h-|z|)) (\cos(kz \cos \vartheta) + j \sin(kz \cos \vartheta)) dz$$

gerade
gerade
ungerade

$$\int_{-h}^h (\text{gerade} \cdot \text{ungerade}) dz = 0$$



$$\rightarrow E_{\vartheta} = \frac{I_0}{4\pi\epsilon} \frac{\omega}{c_0^2 r} \sin\vartheta e^{j(\omega t - kr)} 2 \underbrace{\int_{z=0}^h \sin(k(h-z)) \cos(kz \cos\vartheta) dz}$$

$$= \frac{I_0}{2\pi\epsilon} \frac{\omega}{c_0^2 r} \sin\vartheta e^{j(\omega t - kr)} \frac{\cos(kh \cos\vartheta) - \cos(kh)}{\sin^2\vartheta}$$

$$\begin{aligned} & \int_{z=0}^h \sin(k(h-z)) \cos(kz \cos\theta) dz \\ &= \frac{\cos(kh \cos\theta) - \cos kh}{\sin^2\theta} \quad \text{Bronstein} \end{aligned}$$

$$\rightarrow E_{\vartheta}(r, \vartheta) = \frac{I_0}{2\pi\epsilon} \frac{\omega}{c_0^2 r} e^{j(\omega t - kr)} \frac{\cos(kh \cos\vartheta) - \cos(kh)}{\sin\vartheta}$$

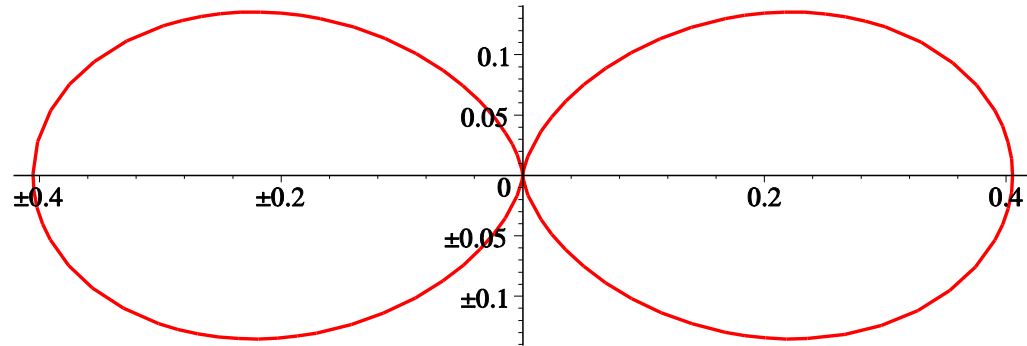
Die Richtcharakteristik der linearen Dipolantenne ist durch den Pointingvektor

$\vec{S}(r, \vartheta) = E_{\vartheta} H_{\varphi} \vec{e}_r$ gegeben. Für diesen gilt mit $H_{\varphi} \sim E_{\vartheta}$

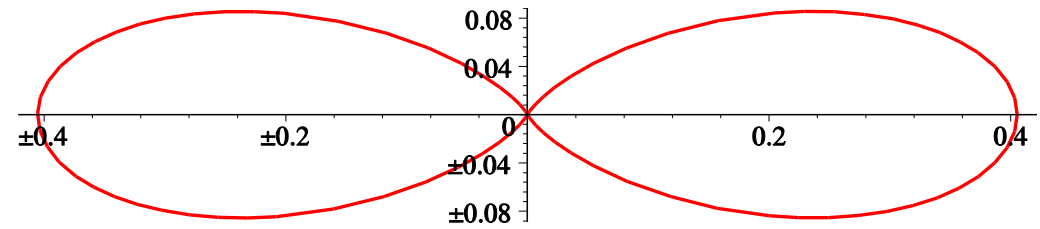
$$\rightarrow \vec{S}(r, \vartheta) \sim \left(\frac{I_0 \omega}{r} \right)^2 \left(\frac{\cos(kh \cos\vartheta) - \cos(kh)}{\sin\vartheta} \right)^2 \vec{e}_r$$

$$\rightarrow \vec{S}_{\text{rel}}(\vartheta) \sim \left(\frac{\cos(kh \cos\vartheta) - \cos(kh)}{\sin\vartheta} \right)^2 \vec{e}_r$$

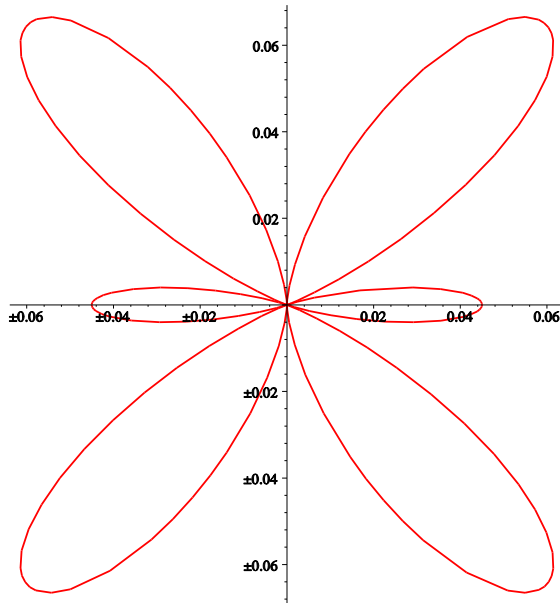
Polardiagramm der Richtcharakteristik um Winkel ϑ



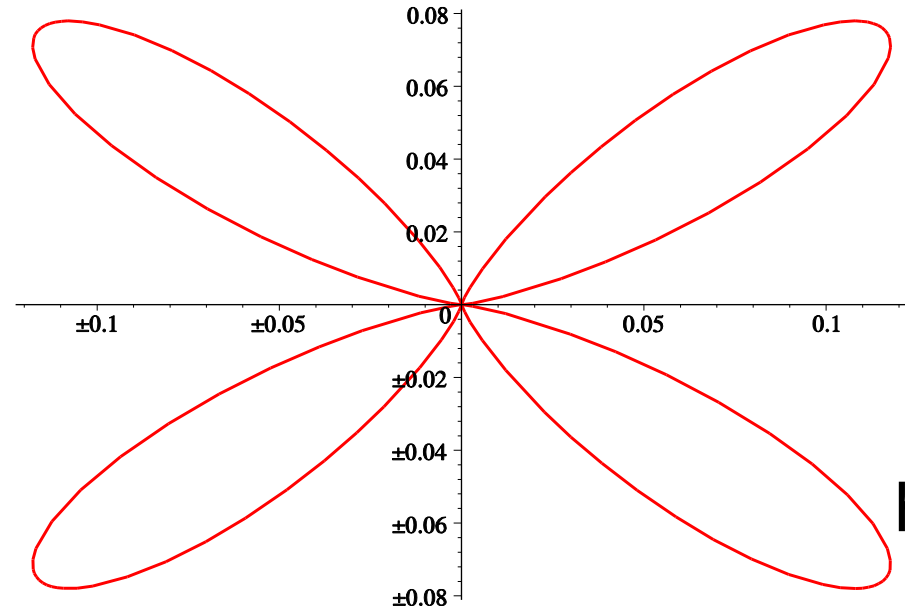
$$h = \frac{1}{4} \lambda$$



$$h = \frac{1}{2} \lambda$$

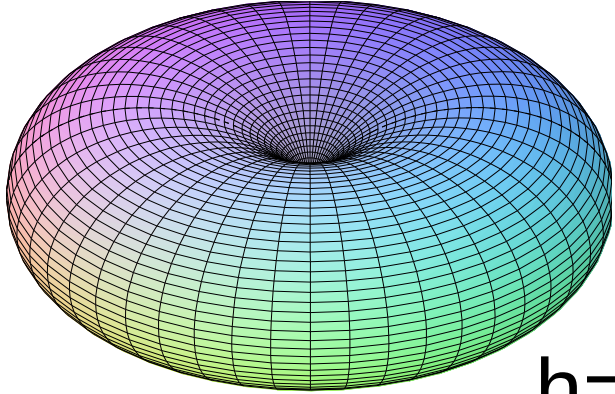


$$h = \frac{3}{4} \lambda$$

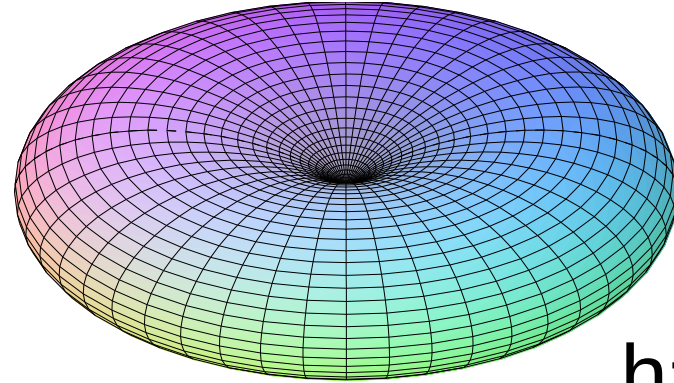


$$h = \lambda$$

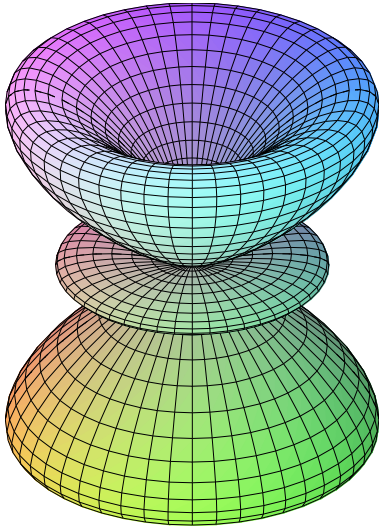
Räumliche Richtcharakteristik der linearen Antenne



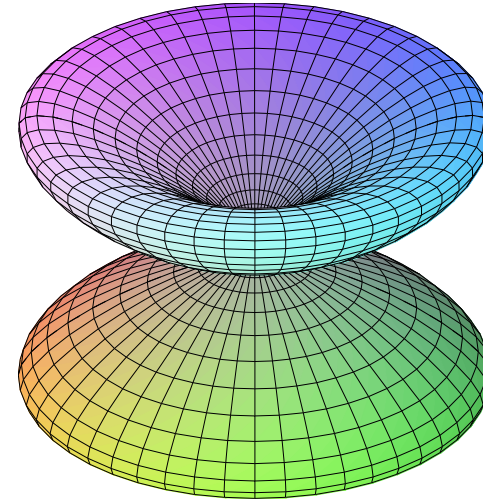
$$h = \frac{1}{4} \lambda$$



$$h = \frac{1}{2} \lambda$$



$$h = \frac{3}{4} \lambda$$



$$h = \lambda$$