

Schriftliche Prüfung im Fach

Grundlagen der Hochfrequenztechnik

- Bitte beachten Sie die Hinweise auf der folgenden Seite
- Beginnen Sie mit den Aufgaben, die Ihnen am leichtesten fallen

Einzelresultate

Aufgabe	1	2	3	4	5
erreichbare Punkte	17	17	17	17	17
erzielte Punkte					

Gesamtbewertung

Punkte maximal:	Gesamtpunkte:	Note:
85		



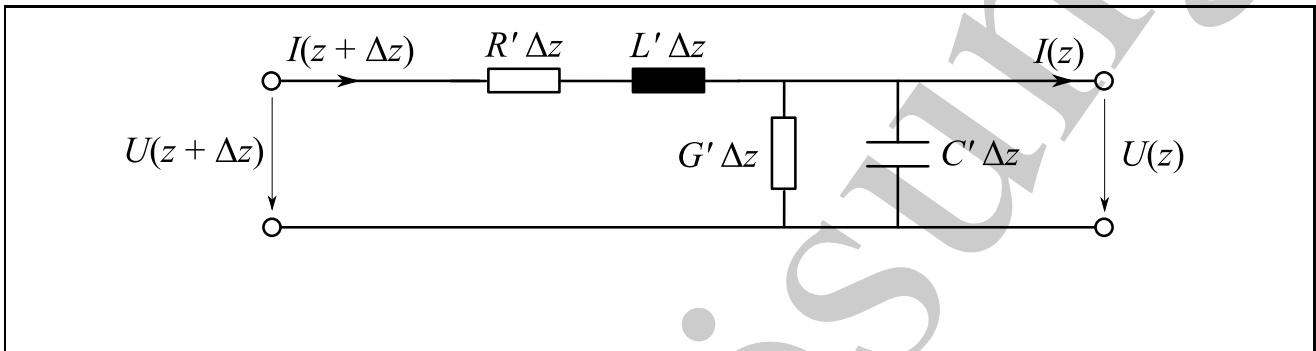
1. Die Prüfungsdauer beträgt 2 Stunden.
2. Zur Bearbeitung der Klausur sind **keine Hilfsmittel** zugelassen, ausser Schreibzeug, Zirkel, Lineal und ein **nicht-programmierbarer, komplexer** Taschenrechner.
3. Die Lösungen müssen auf den ausgegebenen Blättern in den dafür vorgesehenen **Lösungskästen** niedergeschrieben werden. Falls der Platz nicht ausreicht, muss auf dem Lösungsblatt ein Hinweis auf die Fortsetzung gegeben werden und von der Aufsicht ein gestempeltes Zusatzblatt angefordert werden. Alternativ darf auch die Rückseite der Lösungsblätter verwendet werden, wobei auch hier der zugehörige Aufgabenkontext eindeutig anzugeben ist. Bei zweifelhafter Zuordnung kann die Lösung nicht gewertet werden. Benutzen Sie **kein eigenes Papier**.
4. **Bei allen Aufgaben muss der Lösungsweg klar erkennbar und eindeutig dargestellt werden.** In einigen Aufgaben ist dies die wesentliche Prüfungsleistung. Lösungen ohne ausreichende Begründung werden nicht gewertet. Das Gleiche gilt für mehrdeutige Lösungen oder Formulierungen.
5. Diagramme werden nur gewertet, wenn der Datenteil mit Name und Aufgabennummer vollständig ausgefüllt ist. Bei Bedarf können von der Aufsicht zusätzliche Diagramme angefordert werden. **Ungültige Lösungen** müssen klar erkenntlich **durchgestrichen** werden. Liegt mehr als eine Lösung vor, erfolgt keine Wertung.
6. Verwenden Sie bei der Lösung der Aufgaben **weder rote Farbe noch Bleistift** und kennzeichnen Sie Ihre Ergebnisse deutlich. Lösungen in roter Farbe oder Bleistift können nicht gewertet werden. Zeichnungen in Diagrammen dürfen mit Bleistift gemacht werden.
7. Tragen Sie vor Beginn der Klausur Nachname, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein und **beschriften Sie jedes Lösungsblatt** mit Ihrem Namen. **Alle** Blätter, auch die Zusatzblätter, müssen den Namen des Kandidaten tragen. Wer diese Regeln, die einer raschen Bearbeitung dienen, nicht einhält, kann nicht erwarten, dass er kurzfristig über das Ergebnis seiner Prüfung informiert wird. Die Lösungsblätter müssen **vollständig**, also zusammen mit allen zusätzlich ausgeteilten Blättern abgegeben werden. Heften Sie alle Blätter mit der beiliegenden Faltklammer zusammen.
8. Legen Sie Ihren Studentenausweis und den Zulassungsschein bereit.
9. Der Umfang der gesamten Klausur beträgt 30 Seiten und besteht aus 5 Aufgaben. **Prüfen Sie** diese direkt nach Erhalt **auf Vollständigkeit**.
10. Die Ergebnisse der Klausur werden nach der Korrektur am schwarzen Brett des Instituts (Foyer, Geb. 30.10) veröffentlicht. Der Zeitpunkt der Veröffentlichung wird im Internet bekannt gegeben.

Aufgabe 1

(gesamt 17 Punkte)

Allgemeines

- a) Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild eines kurzen Abschnitts
- Δz
- einer verlustbehafteten Leitung. (2 P.)



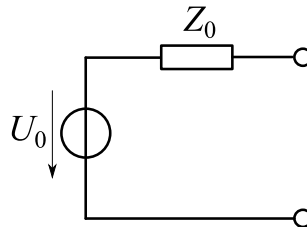
- b) Eine Antenne strahlt eine Leistung von
- $P_S = 100$
- W ab. In einer Entfernung von 2 km wird in der Hauptstrahlrichtung der Antenne eine Leistungsdichte von
- $2 \cdot 10^{-3}$
- W/m
- ²
- gemessen. Bestimmen Sie den Gewinn der Antenne in dBi. (2 P.)

$$S_{r,\max} = \frac{P_S G_A}{4\pi r^2} \Rightarrow G_A = \frac{4\pi r^2 S_{r,\max}}{P_S} = 1005,3 \hat{=} 30,0 \text{ dBi}$$

- c) Ein zylindrischer Kupferleiter wird von einem Wechselstrom der Frequenz 10 GHz durchflossen. Die Leitfähigkeit von Kupfer beträgt
- $\kappa = 5,8 \cdot 10^7$
- S/m. Wie groß ist die Eindringtiefe? (2 P.)

$$s = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}} = 660,9 \text{ nm}$$

Gegeben sei die unten abgebildete Quelle, die aus einer Wechselspannungsquelle mit Amplitude $U_0 = 1 \text{ V}$ und einem Innenwiderstand von $Z_0 = 50 \Omega$ besteht.



- d) Wie groß ist die Leistung P_0 in dBm, die die Quelle bei Leistungsanpassung maximal abgeben kann? (2 P.)

Bei Leistungsanpassung gilt $Z_L = Z_0$. Damit ergibt sich:

$$P_0 = \frac{\left(\frac{U_0}{2\sqrt{2}}\right)^2}{Z_0} = \frac{U_0^2}{8Z_0} = 2,5 \text{ mW} \hat{=} 4,0 \text{ dBm}$$

- e) Zur Impedanzbestimmung einer unbekannten reellen Last Z_x wird der Reflexionsfaktor gemessen. Dieser beträgt $r_x = 0,2$ mit einem Bezugswiderstand von $Z_0 = 50 \Omega$. Wie groß ist die Impedanz Z_x ? (2 P.)

$$Z_x = Z_0 \frac{1 + r_x}{1 - r_x} = 75 \Omega$$

- f) Die in Aufgabenteil e) beschriebene Lastimpedanz Z_x wird nun mit der oben gezeigten Quelle verbunden. Wie groß ist die von Z_x aufgenommene Leistung in dBm? (2 P.)
Hinweis: Wenn Sie im Aufgabenteil d) kein Ergebnis erzielt haben, rechnen Sie alternativ mit einer verfügbaren Quellenleistung $P_0 = 2 \text{ mW}$.

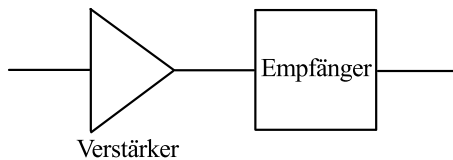
Mit dem in Aufgabenteil d) berechneten Wert ergibt sich:

$$P_x = P_0 (1 - |r_x|^2) = 2,4 \text{ mW} \hat{=} 3,8 \text{ dBm}$$

Mit der alternativ gegebenen Quellenleistung $P_0 = 2 \text{ mW}$ ergibt sich:

$$P_x = P_0 (1 - |r_x|^2) = 1,92 \text{ mW} \hat{=} 2,8 \text{ dBm}$$

Gegeben sei ein Empfänger mit einer Verstärkung von 15 dB und einer Rauschzahl von 8 dB. Zur Verbesserung des Signal-zu-Rausch-Abstandes soll dem Empfänger ein zusätzlicher Verstärker vorgeschaltet werden.



Verstärker	Verstärkung	Rauschzahl
A	18 dB	5 dB
B	18 dB	4 dB
C	23 dB	6 dB

- g) Wählen Sie aus der obigen Tabelle den für das Gesamtsystem am besten geeigneten Verstärker aus und begründen Sie Ihre Auswahl durch eine Rechnung.

(5 P.)



Verstärker A kann direkt ausgeschlossen werden, da er bei gleicher Verstärkung eine höhere Rauschzahl aufweist als Verstärker B.

Um die Rauschzahlen für das kaskadierte System zu berechnen, müssen zunächst die gegebenen logarithmierten Werte umgerechnet werden:

$$\begin{aligned} G_B &= 63,1 & F_B &= 2,51 \\ G_C &= 199,5 & F_C &= 3,98 \\ G_{\text{sys}} &= 31,6 & F_{\text{sys}} &= 6,3 \end{aligned}$$

Mit Verstärker B ergibt sich eine Gesamtrauschzahl von

$$F_{\text{gesamt, B}} = F_B + \frac{F_{\text{sys}} - 1}{G_B} = 2,59$$

Mit Verstärker C ergibt sich eine Gesamtrauschzahl von

$$F_{\text{gesamt, C}} = F_C + \frac{F_{\text{sys}} - 1}{G_C} = 4,01$$

Dementsprechend fällt die Auswahl auf Verstärker B.

Aufgabe 2

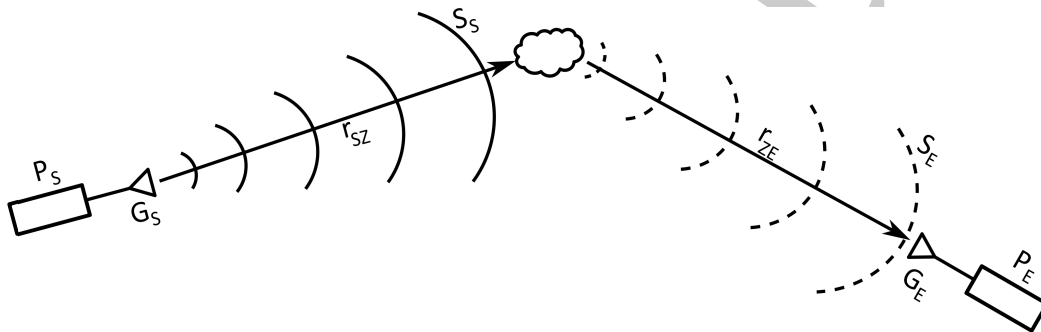
(gesamt 17 Punkte)

Radar

Es sei ein bistatisches Radarsystem gegeben, d.h. Sender und Empfänger sind nicht am gleichen Ort.

- a) Leiten Sie die allgemeine, bistatische Radargleichung für die empfangene Leistung P_E her, ausgehend von einem Sender mit der Sendeleistung P_S , den Antennengewinnen G_S und G_E , sowie den Abständen r_{SZ} (Sender-Ziel) und r_{ZE} (Ziel-Empfänger) und dem Radarrückstreuquerschnitt σ_Z eines Zielobjekts. Nehmen Sie an, dass die beiden Antennen perfekt auf das Ziel ausgerichtet sind. Beschreiben Sie dabei die einzelnen Herleitungspunkte mit Stichpunkten und fertigen Sie eine passende Skizze an.

(4P.)



Herleitung analog zu monostatischem Fall:

$$S_S = \frac{P_S G_S}{4\pi r_{SZ}^2}$$

$$S_E = S_{Ziel} \cdot \frac{1}{4\pi r_{ZE}^2} \cdot \sigma_Z$$

Die Empfangsantenne entnimmt gemäß ihrer Wirkfläche A_W dem Wellenfeld Energie:

$$P_E = S_E \cdot A_W = S_E \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} G_E$$

$$P_E = S_{Ziel} \cdot \frac{1}{4\pi r_{ZE}^2} \cdot \sigma_Z \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} G_E$$

$$P_E = \frac{P_S G_S}{4\pi r_{SZ}^2} \cdot \frac{1}{4\pi r_{ZE}^2} \cdot \sigma_Z \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} G_E$$

Schön sortieren:

$$P_E = \frac{P_S G_S G_E \lambda^2}{(4\pi)^3 r_{SZ}^2 r_{ZE}^2} \sigma_Z$$

- b) Das Ziel ist $r_{SZ} = 10$ km vom Sender und $r_{ZE} = 13$ km vom Empfänger entfernt. Das Ziel wird vom Sender unter einem Winkel von $\theta = 30^\circ$ angestrahlt und der Antennengewinn der Sendeantenne beträgt $G_S = 16$ dBi. Die Richtcharakteristik des Senders ist gegeben durch:

(4P.)



$$C(\theta) = \left| \sin(\theta) \cdot \frac{\sin(5,236 \cdot \cos(\theta))}{5,236 \cdot \cos(\theta)} \right|$$

Der Empfänger ist exakt auf das Ziel ausgerichtet und hat einen Gewinn G_E von 5 dBi. Das System arbeitet bei der Frequenz $f = 1$ GHz. Der Sender hat eine Leistung von $P_S = 10$ kW. Das Ziel hat einen Radarrückstreuquerschnitt von $\sigma_Z = 10$ m². Berechnen Sie den empfangenen Leistungspegel P_E in dBm.

Zunächst alles in den linearen Maßstab konvertieren und Sendegewinn berechnen:

$$G_{S,\theta} = C^2(30^\circ) \cdot G_S$$

$$G_S = 10^{\frac{16 \text{ dBi}}{10}} = 39,810$$

$$G_E = 10^{\frac{5 \text{ dBi}}{10}} = 3,162$$

$$C(\pi/6) = \left| \sin(\pi/6) \frac{\sin(5,236 \cos(\pi/6))}{5,236 \cos(\pi/6)} \right| = 0,1085$$

$$C^2 = 0,0118$$

$$\Rightarrow G_{S,\theta} = 0,469$$

Alles einsetzen und rechnen:

$$P_E = \frac{10 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot 0,469 \cdot 3,162 \cdot (0,3 \text{ m})^2}{(4\pi)^3 \cdot (10 \cdot 10^3 \text{ m})^2 \cdot (13 \cdot 10^3 \text{ m})^2} 10 \text{ m}^2$$

$$= 3,98 \cdot 10^{-16} \text{ W}$$

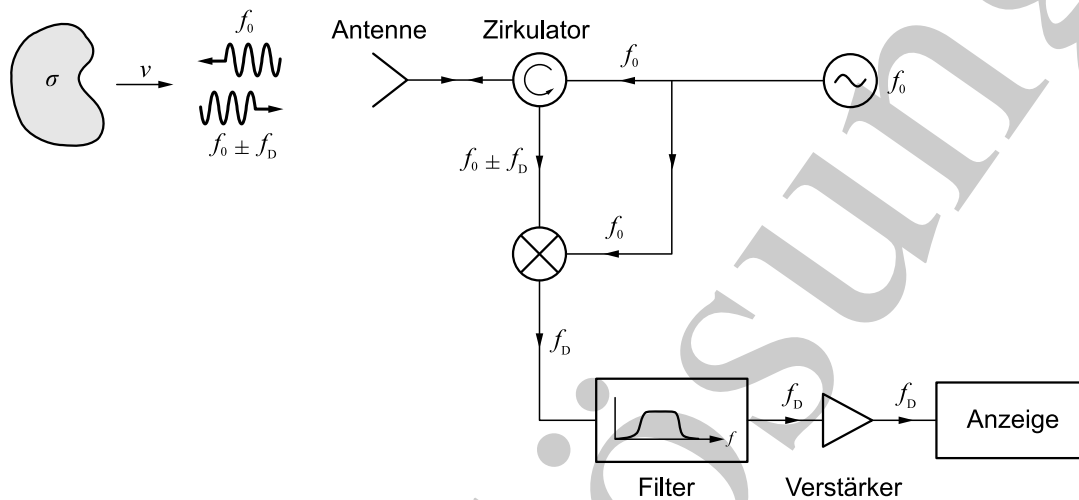
$$P_{E,\text{dBm}} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_E}{1 \text{ mW}} \right)$$

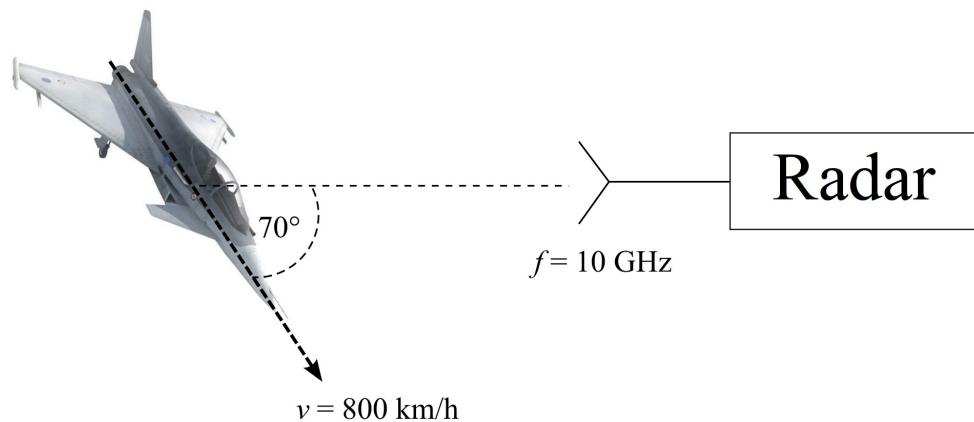
$$= -124 \text{ dBm}$$

Hinweis: Die folgenden Aufgabenteile sind unabhängig zu bearbeiten.

- c) Welches Radarprinzip wählen Sie, um ein Radar zur Geschwindigkeitsüberwachung zu entwickeln? Wählen Sie ein möglichst einfaches und günstiges Prinzip. Zeichnen Sie die wichtigsten Komponenten in ein Blockschaltbild. (4P.)

Das einfachste Radar ist in diesem Fall ein CW-Radar.





- d) Das Radar aus c) soll die Geschwindigkeit des vorbei fliegenden Flugzeugs messen (siehe Bild). Der Winkel zwischen der Flugbahn und der Hauptrahlrichtung des Radars beträgt hierbei 70° . Das Radar arbeitet bei $f = 10 \text{ GHz}$. Wie groß ist die gemessene Dopplerfrequenz? (3 P.)

Die Radialkomponente des Geschwindigkeitsvektors $v_{\parallel}$ führt zu einer Dopplerfrequenz f_D .

$$\begin{aligned}
 f_D &= \frac{2v_{\parallel}f}{c_0} \\
 &= \frac{2v \cos(70^\circ) 10 \text{ GHz}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \\
 &= 5,06 \text{ kHz}
 \end{aligned}$$

- e) Das Ziel bewegt sich auf einer kreisförmigen Bahn um das Radar und reduziert seine Geschwindigkeit auf $v = 700 \text{ km/h}$. Welche Frequenz messen Sie mit Ihrem Radar? (2 P.)

Da keine radiale Komponente besteht, misst man stets $f_D = 0 \text{ Hz}$.

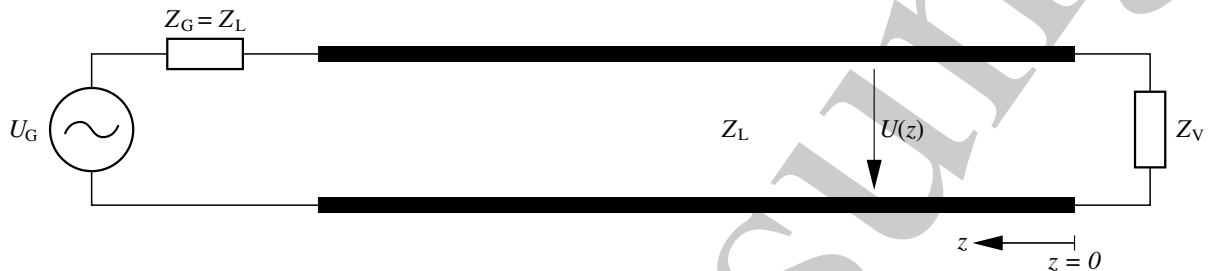
Aufgabe 3

(gesamt 17 Punkte)

Stehende Wellen und Leitungen

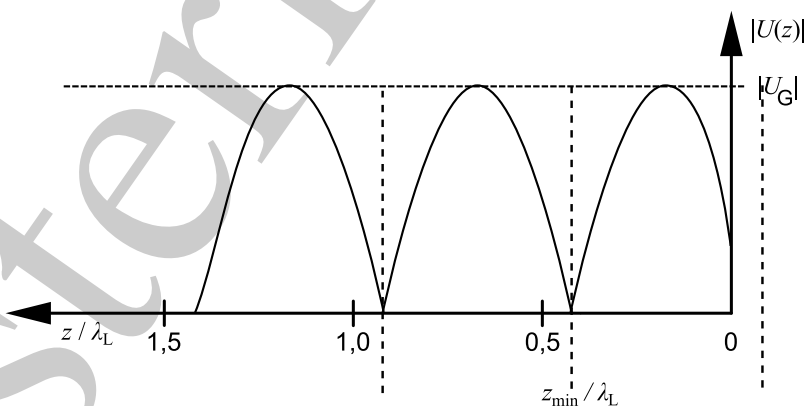
Zeichnen Sie die Verteilung des Betrages $|U(z)|$ der komplexen Spannungsamplitude $U(z)$ auf der skizzierten verlustfreien Messleitung (Wellenwiderstand $Z_L = \text{reell}$) für die Lastimpedanzen Z_V nach den Teilaufgaben a) und b) in die dafür vorgesehenen Diagramme ein. Die Generatorimpedanz sei $Z_G = Z_L$.

Benennen Sie die wesentlichen Punkte (Minima, Maxima) an den Achsen.



a) Lastfall $Z_V = j\frac{Z_L}{2}$:

(3 P.)



$$r(0) = \frac{Z_V - Z_L}{Z_V + Z_L} = \frac{j\frac{1}{2} - 1}{j\frac{1}{2} + 1} = -0,6 + j0,8$$

$$\Rightarrow |r(0)| = 1$$

$$\arg\{r(0)\} = 0,7048\pi = 2,2143$$

Da die Leitung verlustfrei ist gilt: $r(z) = e^{-j2\beta z}r(0) \Rightarrow |r(z)| = 1$

Da $Z_G = Z_L$ gilt allgemein:

$$|U_H(z)| = \frac{|U_G|}{2} \Rightarrow |U_R(z)| = |U_H(z)| |r(z)| = \frac{|U_G|}{2}$$

$$\Rightarrow U_{\max} = |U_H(z)| + |U_R(z)| = |U_G|$$

$$U_{\min} = |U_H(z)| - |U_R(z)| = 0$$

Minima:

$$0,7048\pi - 4\pi \frac{z_{\min}}{\lambda} = \pi$$

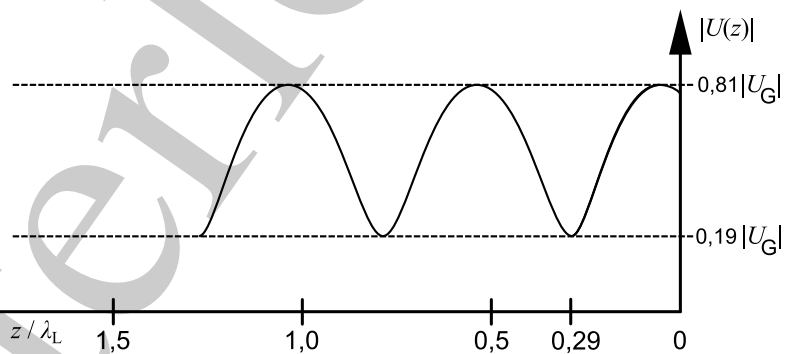
$$\Rightarrow \frac{z_{\min}}{\lambda} = -0,0738$$

$$\text{Bereich : } 0 \leq z_{\min} \leq \frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{z_{\min}}{\lambda} = -0,0738 + 0,5 = 0,4262$$

b) Lastfall $Z_V = (2 + j2)Z_L$:

(4P.)



$$r(0) = \frac{2 + j2 - 1}{2 + j2 + 1} = \frac{1 + j2}{3 + j2}$$

$$|r(0)| = 0,62 \quad \arg\{r(0)\} = 0,17\pi = 0,519$$

Analog zu Aufgabenteil a): $|U_R(z)| = |U_H(z)| |r(z)| = \frac{|U_G|}{2} \cdot 0,62$

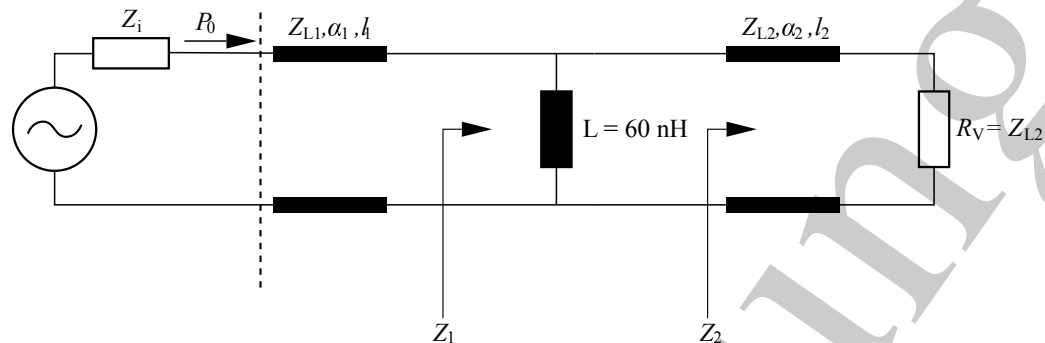
$$\Rightarrow U_{\max} = |U_H(z)| + |U_R(z)| = 0,81 |U_G|$$

$$U_{\min} = |U_H(z)| - |U_R(z)| = 0,19 |U_G|$$

$$\text{Minima: } 4\pi \frac{z_{\min}}{\lambda} - 0,17\pi \stackrel{!}{=} \pi$$

$$\Rightarrow \frac{z_{\min}}{\lambda} = 0,29$$

Ein Generator mit $Z_i = 50 \, \Omega$ speist die unten abgebildete Leitungskonfiguration mit einer verfügbaren Leistung P_0 ($P_0 = P_{1h}(0)$ am Generator). Über zwei schwach verlustbehaftete Luftleitungen der Längen l_1 und l_2 wird ein reeller Verbraucher R_V angeschlossen. An der Verbindung der beiden Leitungen ist eine Induktivität L parallel geschaltet.



$$Z_{L1} = 50 \, \Omega \quad \alpha_1 = 0,3 \, \text{dB/m} \quad l_1 = 10 \, \text{m} \quad P_0 = 2 \, \text{W}$$

$$Z_{L2} = 120 \, \Omega \quad \alpha_2 = 1 \, \text{dB/m} \quad l_2 = 9 \, \text{m} \quad f = 300 \, \text{MHz}$$

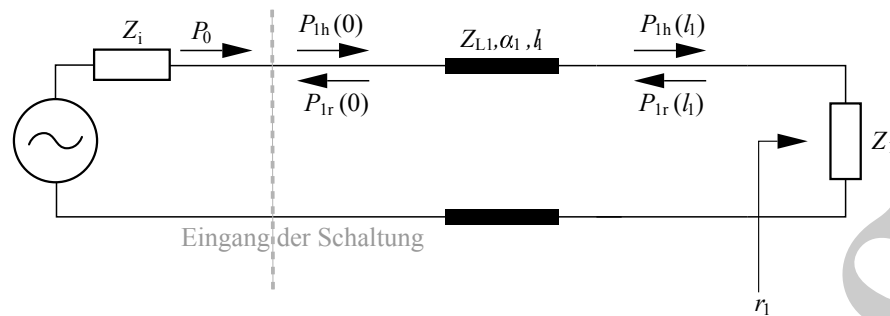
- c) Bestimmen Sie Z_1 , um das auf der nächsten Seite gezeigte vereinfachte Schaltbild zu erhalten.

(3 P.)



Es erfolgt keine Transformation durch die Leitung mit $l_2 \Rightarrow Z_{L2} = R_V$

$$Z_1 = \frac{R_V \cdot j\omega L}{R_V + j\omega L} = (56,45 + j59,9) \, \Omega$$



d) Bestimmen Sie die Verlustleistung $P_{\text{Verl},1}$ in Leitung 1.

(5 P.)

$$r_1 = \frac{Z_1 - Z_{L1}}{Z_1 + Z_{L1}} \Rightarrow |r_1| = 0,4932 \Rightarrow |r_1|^2 = 0,243$$

Verluste in Leitung 1 betragen 3 dB, d.h. 50 %

$$P_{1h}(0) = P_0 = 2 \text{ W}$$

$$P_{1h}(l_1) = \frac{1}{2} \cdot P_{1h}(0) = 1 \text{ W}$$

$$P_{1r}(l_1) = |r_1|^2 \cdot P_{1h}(l_1) = 0,2433 \text{ W}$$

$$P_{1r}(0) = \frac{1}{2} \cdot P_{1r}(l_1) = 0,12165 \text{ W}$$

$$\Rightarrow \text{Verlustleistung in Leitung 1: } P_{\text{Verl},1} = 1,12165 \text{ W}$$

alternativ:

$$P_{1h}(l_1) = P_{1h}(0)e^{-2\alpha_1 l_1} = 1 \text{ W mit } \alpha_1 = \frac{0,3}{8,69 \text{ m}}$$

$$P_{1r}(0) = P_{1r}(l_1)e^{-2\alpha_1 l_1} = 0,12165 \text{ W}$$

e) Bestimmen Sie das Stehwellenverhältnis am Eingang der Schaltung.

(2 P.)



$$|r_0| = |r_1|e^{-2\alpha_1 l_1} = 0,247$$

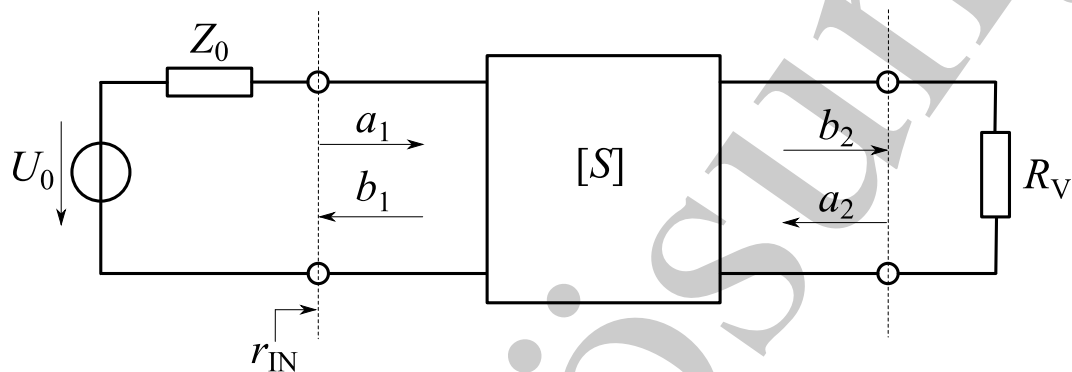
$$\text{VSWR} = \frac{1 + |r_0|}{1 - |r_0|} = 1,66$$

Aufgabe 4

(gesamt 17 Punkte)

Mikrowellen-Netzwerkanalyse

Das unten gezeigte Zweitor wird durch die Streumatrix $[S] = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,001 \\ 3 & 0,1 \end{pmatrix}$ beschrieben. Der Bezugswiderstand für die Streuparameter ist $Z_0 = 50 \Omega$. Das Zweitor wird durch eine Quelle mit $a_1 = 0,5 \sqrt{W}$ gespeist. Der Lastwiderstand beträgt $R_V = Z_0/2$.



- a) Berechnen Sie den Wert der Streuvariablen b_2 .

(2 P.)

Reflexionsfaktor am Übergang Zweitor - Lastimpedanz:

$$r_V = \frac{a_2}{b_2} = \frac{R_V - Z_0}{R_V + Z_0} = -\frac{1}{3}$$

Definition der S -Parameter nutzen, um b_2 zu berechnen:

$$\begin{aligned} b_2 &= S_{21}a_1 + S_{22}a_2 = S_{21}a_1 + S_{22}r_V b_2 \\ b_2(1 - S_{22}r_V) &= S_{21}a_1 \\ \Rightarrow b_2 &= \frac{S_{21}}{1 - S_{22}r_V}a_1 = 1,45 \sqrt{W} \end{aligned}$$

b) Wieviel Leistung wird von R_V aufgenommen (Angabe in W)?

(2 P.)



$$P_V = \frac{1}{2} (|b_2|^2 - |a_2|^2) = \frac{1}{2} |b_2|^2 (1 - |r_V|^2) = 0,93 \text{ W}$$

c) Wie groß ist der Reflexionsfaktor r_{IN} in dB?

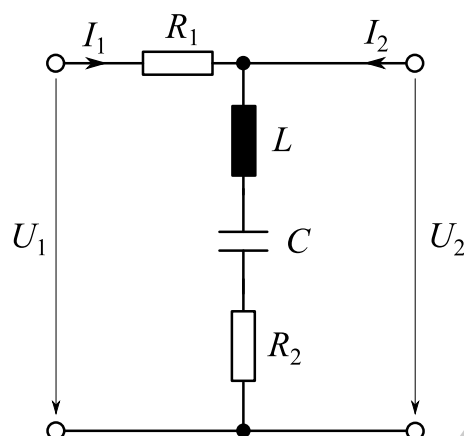
(2 P.)

Hinweis: Die Formel für den Reflexionsfaktor muss nicht hergeleitet werden.



$$r_{IN,dB} = 20 \log \left(S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} r_V}{1 - S_{22} r_V} \right) = -14,0 \text{ dB}$$

Gegeben sei folgendes Zweitor.



d) Bestimmen Sie die Z -Parameter Z_{11} und Z_{12} des Zweitors.

(2 P.)



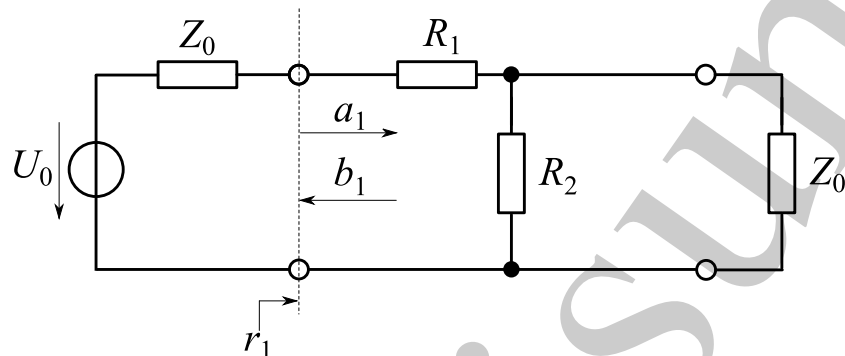
$$Z_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = R_1 + R_2 + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$
$$Z_{12} = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = R_2 + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

- e) Für obiges Zweitor gelte nun $R_1 = 10 \, \Omega$, $R_2 = 50 \, \Omega$, $L = 1 \, \text{nH}$ und $C = 1 \, \text{fF}$. Die Frequenz f_0 bezeichne die Frequenz, bei der sich der Schwingkreis aus den Elementen L und C in Resonanz befindet. Welcher Wert (lineare Angabe) ergibt sich für den Streuparameter S_{11} bei der Frequenz f_0 ? Der Bezugswiderstand für die Streuparameter ist $Z_0 = 50 \, \Omega$.
Hinweis: Es ist nicht erforderlich, S_{11} für beliebige Frequenzen zu berechnen.

(2 P.)

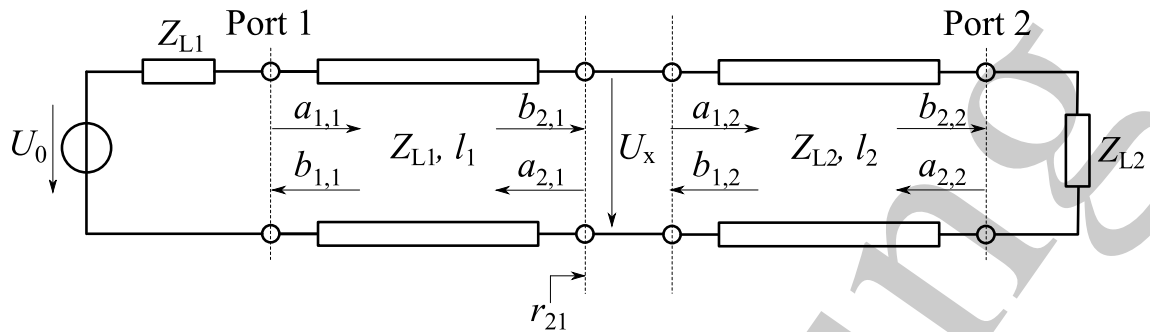


Ersatzschaltbild des Zweitors für den Resonanzfall mit zugehörigen Abschlusswiderständen für die Messung der S -Parameter:

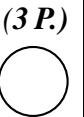


$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} \Big|_{a_2=0} = r_1 = \frac{\left(R_1 + \frac{Z_0}{2}\right) - Z_0}{\left(R_1 + \frac{Z_0}{2}\right) + Z_0} = -0,18$$

Gegeben sei folgende Leitungsanordnung aus zwei verlustfreien Leitungen mit Leitungswellenwiderständen Z_{L1} und Z_{L2} und zugehörigen Längen l_1 bzw. l_2 . Der Bezugswiderstand zur Bestimmung der S -Parameter ist Z_{L1} für Port 1, und Z_{L2} für Port 2.



- f) Berechnen Sie für obige Leitungsanordnung den Streuparameter S_{11} in Abhängigkeit von Z_{L1} , Z_{L2} , l_1 und l_2 . Bezeichnen Sie die von Ihnen genutzten Streuvariablen gemäß obiger Skizze. (3 P.)



Berechnung des Reflexionsfaktors an der Schnittstelle der beiden Leitungen, bezogen auf Z_{L1} :

$$r_{21} = \frac{a_{2,1}}{b_{2,1}} = \frac{Z_{L2} - Z_{L1}}{Z_{L2} + Z_{L1}}$$

Mithilfe der S -Parameter für eine verlustfreie Leitung ergibt sich:

$$\begin{aligned} b_{2,1} &= e^{-j\beta l_1} a_{1,1} \\ b_{1,1} &= e^{-j\beta l_1} a_{2,1} = e^{-j\beta l_1} r_{21} b_{2,1} = e^{-j2\beta l_1} r_{21} a_{1,1} \\ \Rightarrow S_{11} &= \left. \frac{b_{1,1}}{a_{1,1}} \right|_{a_{2,2}=0} = \frac{e^{-j2\beta l_1} r_{21} a_{1,1}}{a_{1,1}} = e^{-j2\beta l_1} r_{21} \end{aligned}$$

- g) Berechnen Sie für obige Leitungsanordnung den Streuparameter S_{21} in Abhängigkeit von Z_{L1} , Z_{L2} , l_1 und l_2 . Bezeichnen Sie die von Ihnen genutzten Streuvariablen gemäß obiger Skizze.

(4P.)



Die Streuvariablen sind auf die jeweiligen Wellenwiderstände der beiden Leitungen bezogen, und gehen deshalb an der Schnittstelle nicht identisch ineinander über. Zur Berechnung der Streuvariablen am Eingang der zweiten Leitung wird die Spannung an der Schnittstelle berechnet:

$$U_x = \sqrt{Z_{L1}} (b_{2,1} + a_{2,1}) = \sqrt{Z_{L2}} (a_{1,2} + b_{1,2})$$

Da die zweite Leitung reflexionsfrei abgeschlossen ist ($a_{2,2} = 0$), gilt $b_{1,2} = 0$ und damit

$$\begin{aligned} U_x &= \sqrt{Z_{L1}} (b_{2,1} + a_{2,1}) = \sqrt{Z_{L2}} a_{1,2} \\ \Rightarrow a_{1,2} &= \sqrt{\frac{Z_{L1}}{Z_{L2}}} (b_{2,1} + a_{2,1}) \end{aligned}$$

Mit den in Aufgabenteil f) hergeleiteten Beziehungen ergibt sich:

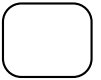
$$a_{1,2} = \sqrt{\frac{Z_{L1}}{Z_{L2}}} (b_{2,1} + a_{2,1}) = \sqrt{\frac{Z_{L1}}{Z_{L2}}} b_{2,1} (1 + r_{21}) = \sqrt{\frac{Z_{L1}}{Z_{L2}}} (1 + r_{21}) e^{-j\beta l_1} a_{1,1}$$

Mithilfe der S -Parameter für Leitung 2 ergibt sich:

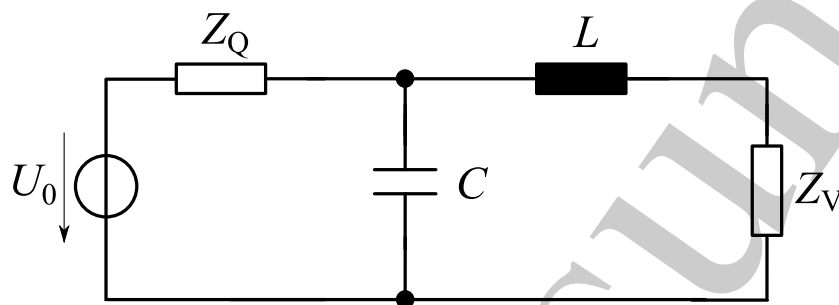
$$\begin{aligned} b_{2,2} &= e^{-j\beta l_2} a_{1,2} \\ \Rightarrow S_{21} &= \left. \frac{b_{2,2}}{a_{1,1}} \right|_{a_{2,2}=0} = \sqrt{\frac{Z_{L1}}{Z_{L2}}} (1 + r_{21}) e^{-j\beta l_1} e^{-j\beta l_2} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(gesamt 17 Punkte)

Smithdiagramm

Mithilfe des unten gezeigten Netzwerks soll die Lastimpedanz $Z_V = (37,5 + j 25) \Omega$ so an die Quellimpedanz $Z_Q = (25 + j 60) \Omega$ angepasst werden, dass die maximal mögliche Leistung von der Quelle zur Last übertragen wird.



- a) Bestimmen Sie für eine Speisefrequenz von $f = 1 \text{ MHz}$ die Werte für die Elemente L und C des Anpassnetzwerks.

(5 P.)

Markieren Sie die einzelnen Transformationsschritte in einem Smithchart, und begründen Sie Ihr Vorgehen. Die Zuordnung der einzelnen Transformationsschritte zu den Transformations-elementen muss klar erkennbar sein.



Für die Lösungsskizze wird eine Bezugsimpedanz von $Z_B = 25 \Omega$ und das Smithchart in Widerstandsform gewählt. Dementsprechend ergibt sich

$$Z_V/Z_B = 1,5 + j1$$

$$Z_Q/Z_B = 1 + j2,4$$

Um maximale Leistungsübertragung zu erreichen, muss die Lastimpedanz konjugiert komplex angepasst werden, d.h. die Zielimpedanz der Transformation ist $Z_Q^*/Z_B = 1 - j2,4$.

Zunächst werden im Smith-Chart die möglichen Impedanztransformationen durch die beiden Elemente eingezeichnet:

Induktivität L

- Transformation der Lastimpedanz entlang des $R/Z_B = 1,5$ -Kreises im Uhrzeigersinn

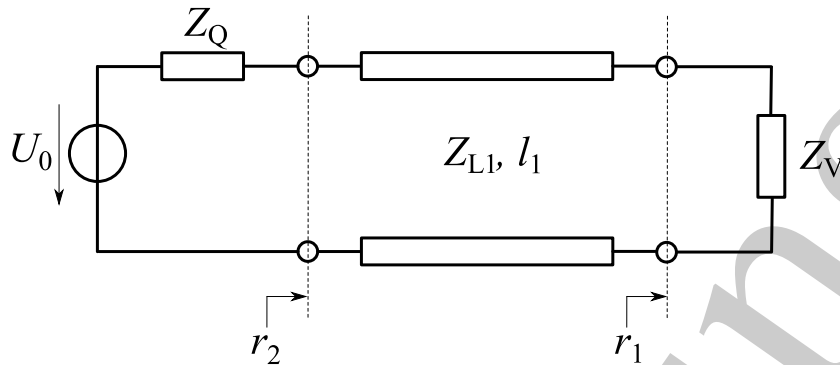
Kapazität C

- Transformation entlang des $G/Z_B = 0,14$ -Kreises im Uhrzeigersinn

Aus dem Schnittpunkt der beiden Kreise ergibt sich:

- aus dem Diagramm lässt sich $X_L/Z_B \approx 1,9$ ablesen
- damit ergibt sich: $X_L/Z_B = \omega L/Z_B \approx 1,9 \Rightarrow L \approx 7,6 \mu\text{H}$
- aufgrund der Widerstandsform des Smith-Charts muss der Wert für B_C über eine Hilfskonstruktion durch Spiegelung am Ursprung abgelesen werden: $B_C Z_B \approx 0,635$
- es ergibt sich: $B_C Z_B = \omega C Z_B \approx 0,635 \Rightarrow C \approx 4,0 \text{ nF}$

Gegeben sei das abgebildete Netzwerk, das aus einer Lastimpedanz $Z_V = 250 \, \Omega$, einer Quellimpedanz $Z_Q = 10 \, \Omega$ und einer Anpassleitung mit $Z_{L1} = 50 \, \Omega$ und $l_1 = \lambda/4$ besteht.



- b) Zeichnen Sie die Impedanztransformation durch die Anpassleitung in ein Smithdiagramm ein. Bestimmen Sie aus dem Smithdiagramm die Reflexionsfaktoren r_1 und r_2 . (4P.)

Durch Ablesen aus dem Smithchart ergibt sich

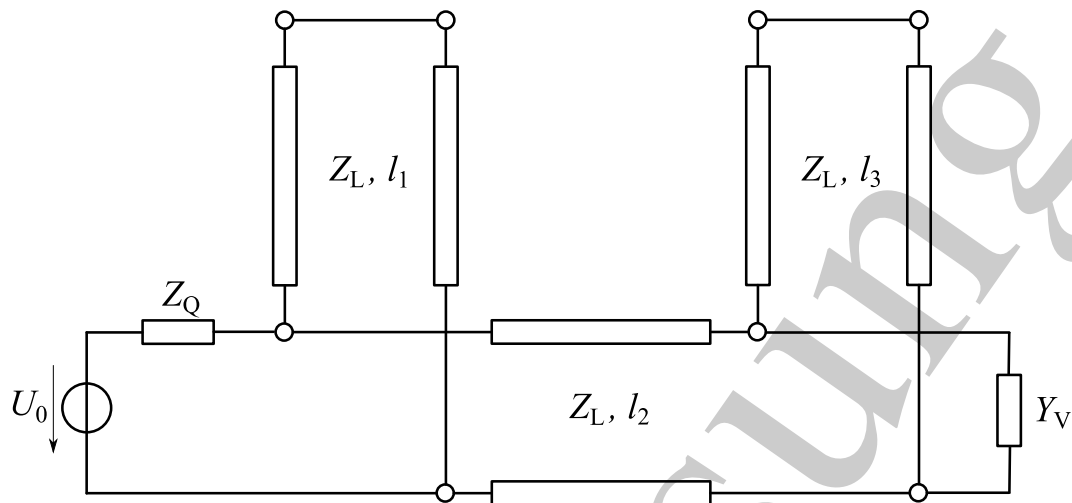
$$r_1 = \frac{2}{3}$$

$$r_2 = -\frac{2}{3}$$

- c) Entsteht auf der $\lambda/4$ -Leitung eine stehende Welle? Begründen Sie Ihre Antwort. (1P.)

Die Leitung ist nicht mit ihrem Leitungswellenwiderstand abgeschlossen ($Z_V \neq Z_{L1}$), deshalb entsteht auf der Leitung eine stehende Welle.

Die unten gezeigte Leitungsanordnung wird dazu genutzt, die Lastadmittanz $Y_V = (0,01 - j 0,006) \text{ S}$ an den Quellwiderstand $Z_Q = 250 \, \Omega$ anzupassen. Die kurzgeschlossenen Stichleitungen besitzen die Längen $l_1/\lambda = 0,3475$ und $l_3/\lambda = 0,134$. Alle drei Leitungen weisen einen Wellenwiderstand $Z_L = 100 \, \Omega$ auf.



- d) Bestimmen Sie mithilfe des Smithcharts die Länge l_2/λ , sodass die Lastadmittanz optimal an den Quellwiderstand angepasst ist. Markieren Sie die einzelnen Transformationsschritte in einem Smithchart, und begründen Sie Ihr Vorgehen. Die Zuordnung der einzelnen Transformationsschritte zu den Transformations-elementen muss klar erkennbar sein.

(7P.)



Für die Lösungsskizze wird aufgrund der parallelen Stichleitungen das Smithchart in Leitwertform gewählt. Aufgrund des Wellenwiderstands $Z_L = 100 \, \Omega$ der Leitungen wird eine Bezugsimpedanz von $Z_B = 100 \, \Omega$ gewählt. Dementsprechend ergibt sich

$$Y_V Z_B = 1 - j 0,6$$

$$Y_Q Z_B = 0,4$$

1. Transformation durch Leitung 3

- Leitung 3 ist eine kurzgeschlossene parallele Stichleitung, und erzeugt deshalb einen Blindleitwert
- durch Bewegung vom Kurzschlusspunkt entlang des $|r| = 1$ -Kreises im Uhrzeigersinn entsprechend der Länge $l_3/\lambda = 0,134$, erhält man $B_{L3} Z_B \approx -0,89$
- die Lastadmittanz Y_V wird dementsprechend auf dem $G Z_B = 1$ -Kreis gegen den Uhrzeigersinn transformiert

2. Transformation durch Leitung 1

- Leitung 1 ist eine kurzgeschlossene parallele Stichleitung, und erzeugt deshalb einen Blindleitwert
- durch Bewegung vom Kurzschlusspunkt entlang des $|r| = 1$ -Kreises im Uhrzeigersinn entsprechend der Länge $l_1/\lambda = 0,3475$, erhält man $B_{L1} Z_B \approx 0,7$
- durch Bewegung entlang des $G Z_B = 0,4$ -Kreises kann auf diese Weise die Admittanz am Eingang von Leitung 2 ermittelt werden

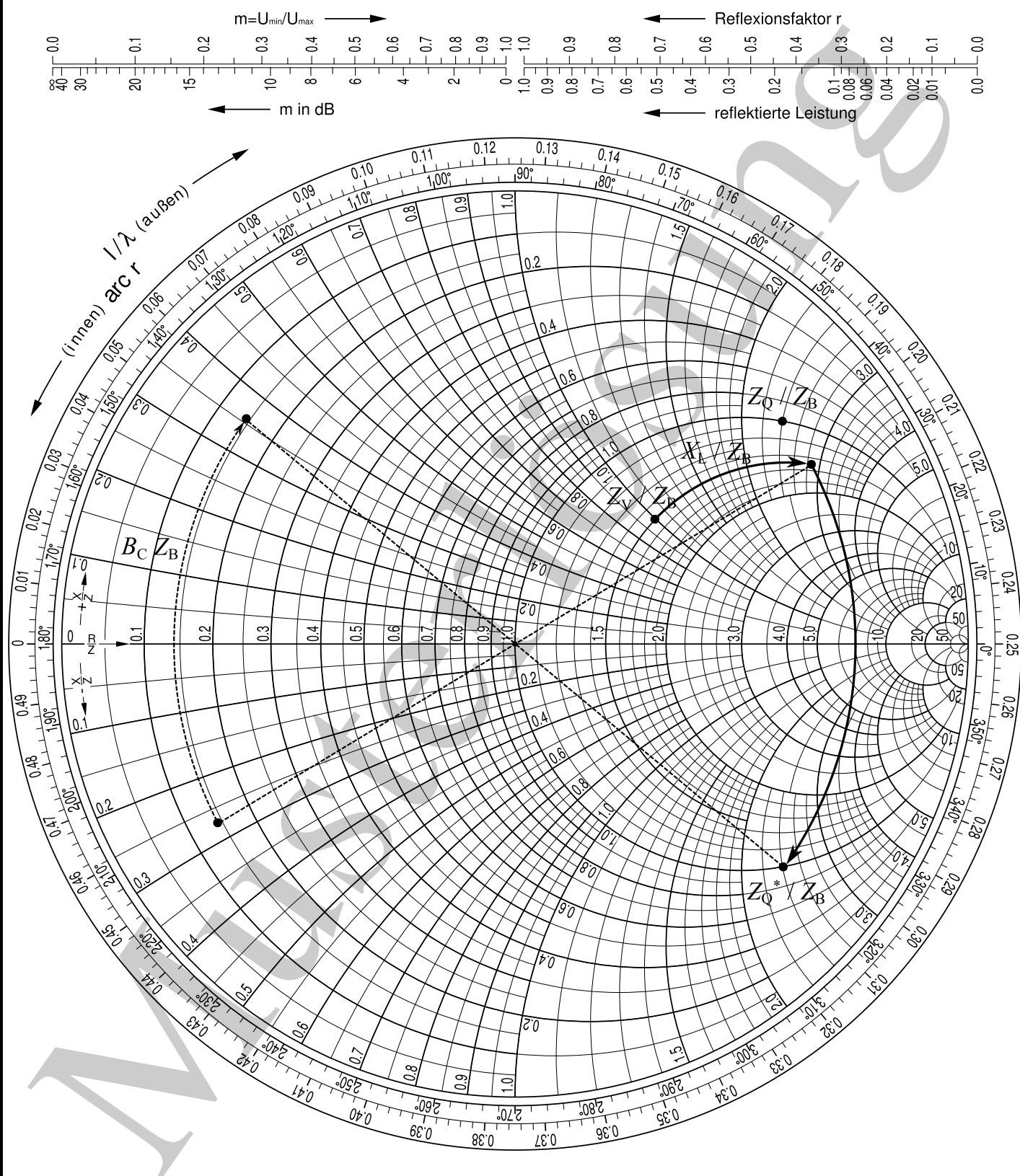
3. Transformation durch Leitung 2

- die beiden in den vorherigen Schritten ermittelten Admittanzen werden durch eine Leitungstransformation auf dem $|r| = 0,59$ -Kreis ineinander überführt
- auf der äußeren Skala des Smithcharts kann die zugehörige Leitungslänge $l_2/\lambda \approx 0,069$ abgelesen werden

zugehörige
Aufgabennummer:

5a

Widerstandsform

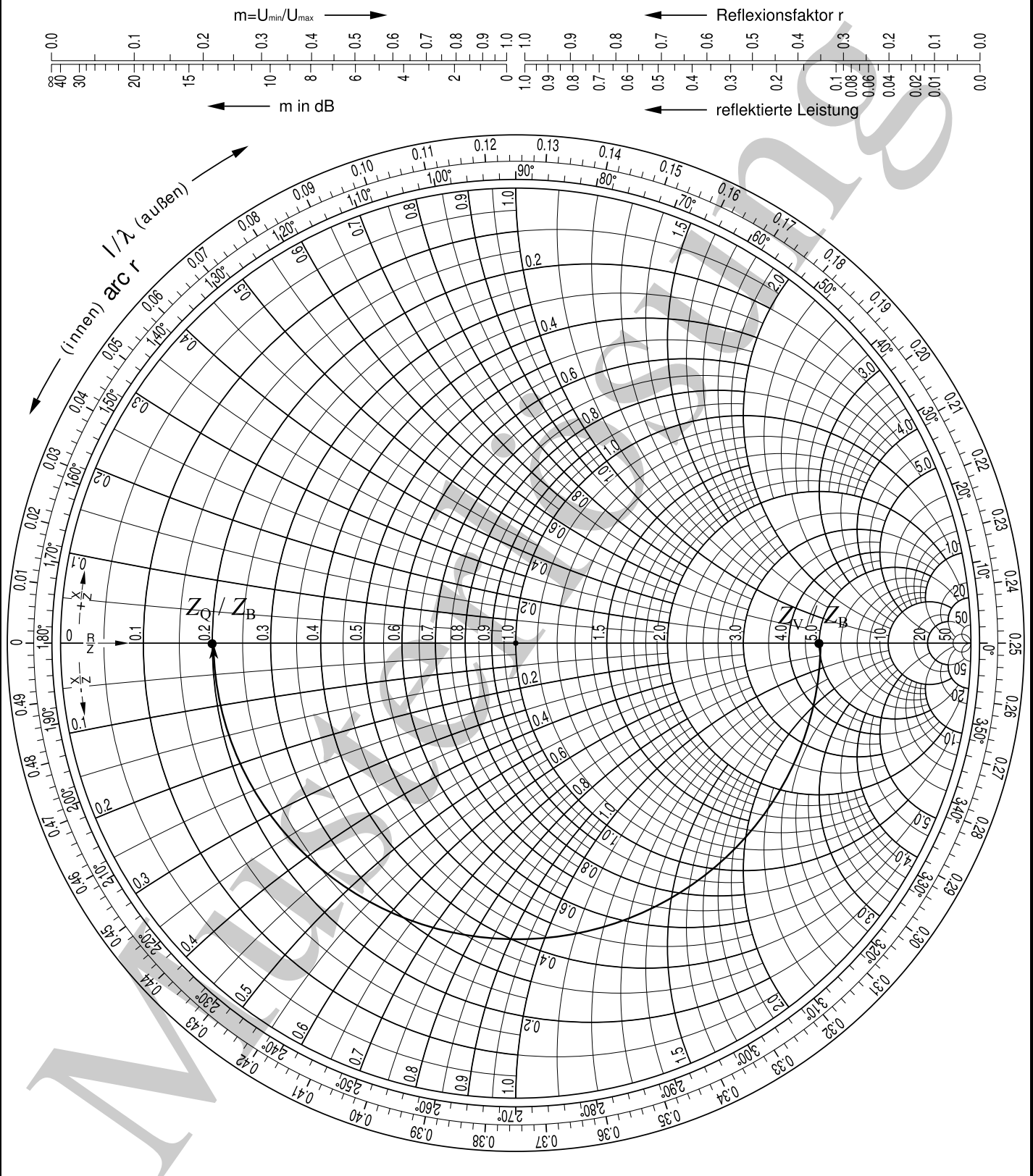
Bezugswiderstand $Z_B = 25 \Omega$ 

Wichtig: Diagramm wird nur gewertet, wenn der obenstehende Datenteil mit Name und Aufgabennummer korrekt ausgefüllt ist. Bezugswiderstand nicht vergessen!

zugehörige
Aufgabennummer:

5b

Widerstandsform

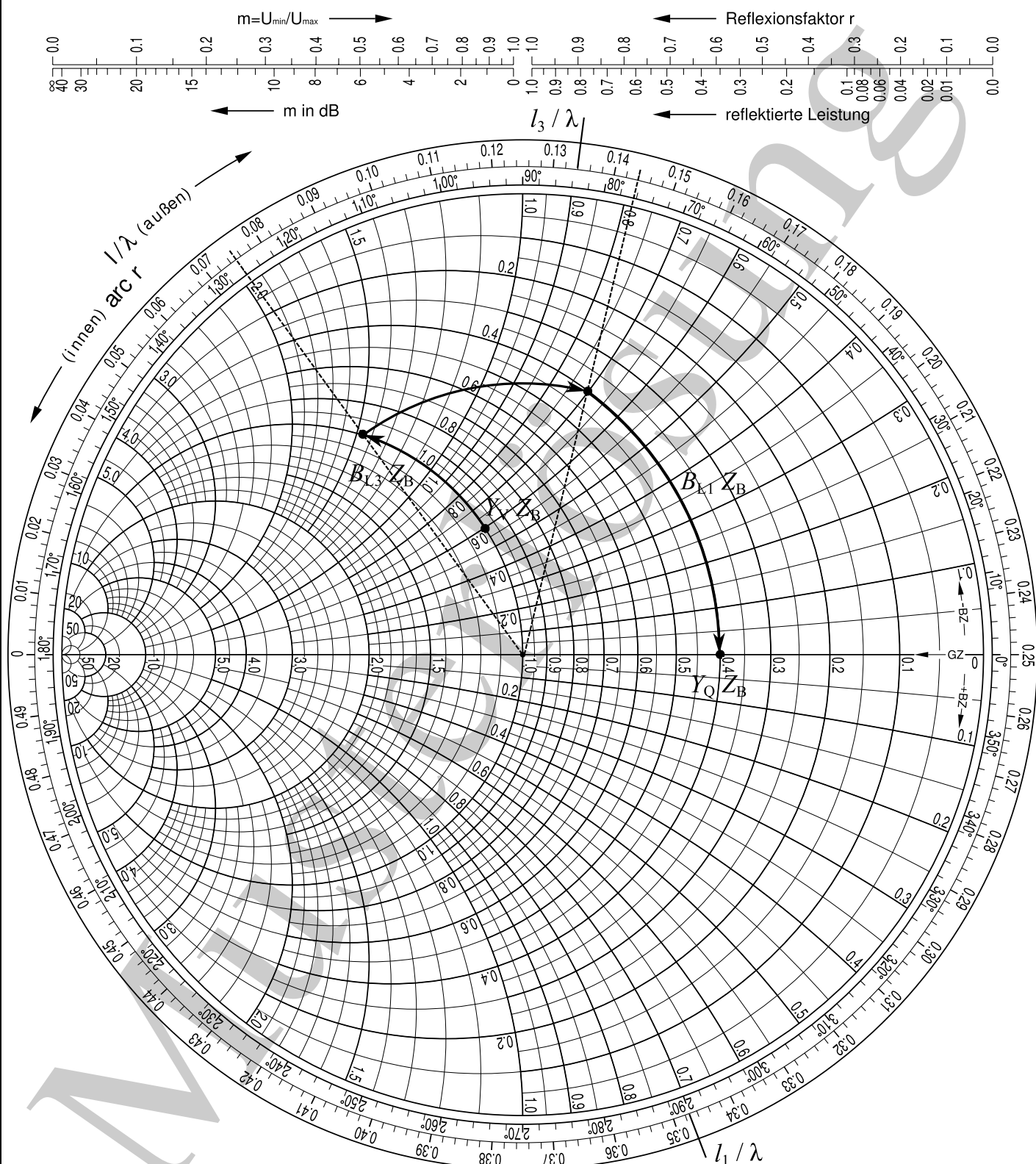
Bezugswiderstand $Z_B = 50 \Omega$ 

Wichtig: Diagramm wird nur gewertet, wenn der obenstehende Datenteil mit Name und Aufgabennummer korrekt ausgefüllt ist. Bezugswiderstand nicht vergessen!

zugehörige
Aufgabennummer:

5d

Leitwertform

Bezugswiderstand $Z_B = 100 \Omega$ 

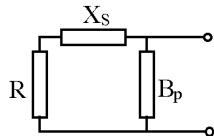
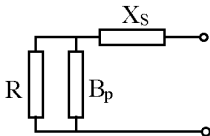
Wichtig: Diagramm wird nur gewertet, wenn der obenstehende Datenteil mit Name und Aufgabennummer korrekt ausgefüllt ist. Bezugswiderstand nicht vergessen!

Impedanz $\longleftrightarrow \frac{Z=1/Y}{Y}$ Admittanz

$$\underline{Z} = \frac{R}{G^2 + B^2} + j \frac{X}{G^2 + B^2} \quad \underline{Y} = \frac{G}{R^2 + X^2} + j \frac{B}{R^2 + X^2}$$

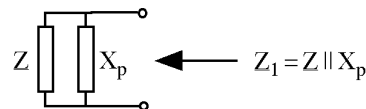
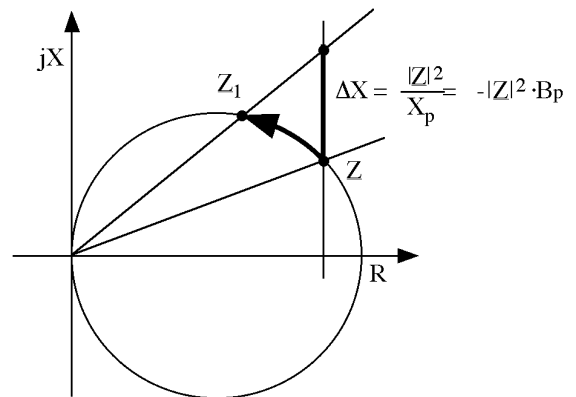
$$\underline{Z} = \frac{G}{G^2 + B^2} - j \frac{B}{G^2 + B^2} \quad \underline{Y} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2}$$

Kompensation mit dualen Elementen

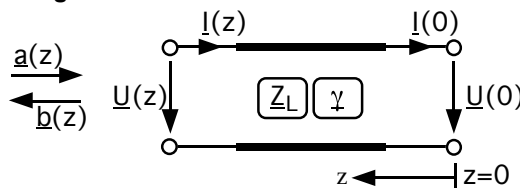


Bedingungen für Kompensation: $X_s = R^2 \cdot B_p$
 Frequenzfaktor: $F(f) = \sqrt{X_s \cdot B_p}$
 krit. Frequenz, Grenzfrequenz: $|F(f_k)| = 1$

Hilfskonstruktion zur Transformation



Leitungen



$$\underline{U}(z) = \underline{U}_H(0)e^{\gamma z} + \underline{U}_R(0)e^{-\gamma z} = \sqrt{Z_L}(\underline{a}(z) + \underline{b}(z))$$

$$\underline{I}(z) = \frac{\underline{U}_H(0)}{Z_L}e^{\gamma z} - \frac{\underline{U}_R(0)}{Z_L}e^{-\gamma z} = \frac{1}{\sqrt{Z_L}}(\underline{a}(z) - \underline{b}(z))$$

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}; \quad Z_L = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

Koaxialleitung

$$Z_L = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

ungedämpfte Leitung (homogenes Dielektrikum und konst. Querschnitt)

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{L'C'} = \omega \cdot \sqrt{\mu\epsilon}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}; \quad C' = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{Z_L}; \quad L' = Z_L \cdot \sqrt{\mu\epsilon}; \quad v_\varphi = \frac{\omega}{\beta}$$

schwach gedämpfte Leitungen ($R' \ll \omega L'; G' \ll \omega C'$)

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \left(\frac{R'}{Z_L} + G' \cdot Z_L \right); \quad G' = \omega C' \cdot \tan(\delta_c); \quad R' \sim \frac{1}{k \cdot s}$$

Dämpfung einer Leitung der Länge l (für hinlaufende Welle a)

$$D/\text{dB} = 10 \cdot \log\left(\frac{P_a(l)}{P_a(0)}\right) = 10 \cdot \log(e^{2\alpha l})$$

Eindringtiefe s

$$s = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

Reflexionsfaktor r

$$\underline{r}(z) = \frac{\underline{U}_R(z)}{\underline{U}_H(z)} = \frac{\underline{b}(z)}{\underline{a}(z)} = \frac{\underline{b}(0)}{\underline{a}(0)} \cdot e^{-2\gamma z}$$

Reflexionsfaktor $\rightarrow$ Impedanz

$$\underline{r}(l) = \frac{\underline{Z}(l) - Z_L}{\underline{Z}(l) + Z_L}; \quad \underline{Z}(l) = \frac{\underline{U}(l)}{\underline{I}(l)} = \frac{1 + \underline{r}(l)}{1 - \underline{r}(l)} \cdot Z_L$$

Anpassungsfaktor, Stehwellenverhältnis

$$m = \frac{1}{VSWR} = \frac{1 - |\underline{r}|}{1 + |\underline{r}|} = \frac{U_{\min}}{U_{\max}}$$

Dem Verbraucher zugeführte Wirkleistung P_w

$$\text{mit: } \underline{a}(z) = \frac{\underline{U}_H(z)}{\sqrt{Z_L}} = \sqrt{Z_L} \cdot \underline{I}_H(z)$$

$$P_w = P_a(0) - P_b(0) = \frac{1}{2} (|\underline{a}(0)|^2 - |\underline{b}(0)|^2)$$

$$= \frac{1}{2} |\underline{a}(0)|^2 \cdot (1 - |\underline{r}(0)|^2)$$

Transformation durch Kettenschaltung einer Leitung

$$\underline{Z}(l) = Z_L \cdot \frac{\underline{Z}(0) + Z_L \tanh(\gamma l)}{Z_L + \underline{Z}(0) \tanh(\gamma l)} = \underline{Z}(0) \cdot \frac{1 + j \frac{Z_L}{\underline{Z}(0)} \tan(\beta l)}{1 + j \frac{\underline{Z}(0)}{Z_L} \tan(\beta l)} \bigg|_{\alpha=0}$$

Konstanten

$$Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} = 120\pi \Omega$$

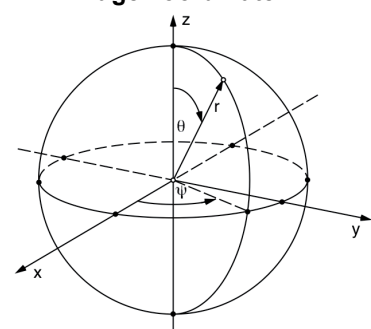
$$c_o = 2,997925 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

$$k = 1,38065 \cdot 10^{-23} \frac{Ws}{K}$$

$$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

$$\epsilon_o = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

Kugelkoordinaten

Azimuth: ψ Elevation: θ

$$\text{Volumen: } V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{Oberfläche: } F = 4\pi r^2$$

	[S]	[Z]	[Y]	[A] (ABCD)	[T]
S_{11}	S_{11}	$\frac{(Z_{11} - Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}$	$\frac{(Y_0 - Y_{11})(Y_0 + Y_{22}) + Y_{12}Y_{21}}{(Y_{11} + Y_0)(Y_{22} + Y_0) - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{A + B/Z_0 - CZ_0 - D}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$	$\frac{T_{12}}{T_{22}}$
S_{12}	S_{12}	$\frac{2Z_{12}Z_0}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}$	$\frac{-2Y_{12}Y_0}{(Y_{11} + Y_0)(Y_{22} + Y_0) - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{2(AD - BC)}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$	$\frac{T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}}{T_{22}}$
S_{21}	S_{21}	$\frac{2Z_{21}Z_0}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}$	$\frac{-2Y_{21}Y_0}{(Y_{11} + Y_0)(Y_{22} + Y_0) - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{2}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$	$\frac{1}{T_{22}}$
S_{22}	S_{22}	$\frac{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} - Z_0) - Z_{12}Z_{21}}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}$	$\frac{(Y_{11} + Y_0)(Y_{22} + Y_0) - Y_{12}Y_{21}}{(Y_0 + Y_{11})(Y_0 - Y_{22}) + Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{-A + B/Z_0 - CZ_0 + D}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$	$\frac{-T_{21}}{T_{22}}$
Z_{11}	$Z_0 \frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	Z_{11}	$\frac{Y_{22}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{A}{C}$	
Z_{12}	$Z_0 \frac{2S_{12}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	Z_{12}	$\frac{-Y_{12}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{AD - BC}{C}$	
Z_{21}	$Z_0 \frac{2S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	Z_{21}	$\frac{-Y_{21}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{1}{C}$	
Z_{22}	$Z_0 \frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	Z_{22}	$\frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{D}{C}$	
Y_{11}	$Y_0 \frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$	Y_{11}	$\frac{D}{B}$	
Y_{12}	$Y_0 \frac{-2S_{12}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$\frac{-Z_{12}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$	Y_{12}	$\frac{BC - AD}{B}$	
Y_{21}	$Y_0 \frac{-2S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$\frac{-Z_{21}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$	Y_{21}	$\frac{-1}{B}$	
Y_{22}	$Y_0 \frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$	Y_{22}	$\frac{A}{B}$	
A	$\frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}}$	A	
B	$Z_0 \frac{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}}$	$\frac{-1}{Y_{21}}$	B	
C	$\frac{1}{Z_0} \frac{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{1}{Z_{21}}$	$\frac{Y_{12}Y_{21} - Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}}$	C	
D	$\frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	D	
T_{11}	$\frac{S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22}}{S_{21}}$				T_{11}
T_{12}	$\frac{S_{11}}{S_{21}}$				T_{12}
T_{21}	$\frac{-S_{22}}{S_{21}}$				T_{21}
T_{22}	$\frac{1}{S_{21}}$				T_{22}