

Schriftliche Prüfung im Fach

Grundlagen der Hochfrequenztechnik

- Bitte beachten Sie die Hinweise auf der folgenden Seite
- Beginnen Sie mit den Aufgaben, die Ihnen am leichtesten fallen

Einzelresultate

Aufgabe	1	2	3	4	5
erreichbare Punkte	17	17	17	17	17
erzielte Punkte					

Gesamtbewertung

Punkte maximal:	Gesamtpunkte:	Bonus:	Note:
85		Ja: ☐ Nein: ☐	



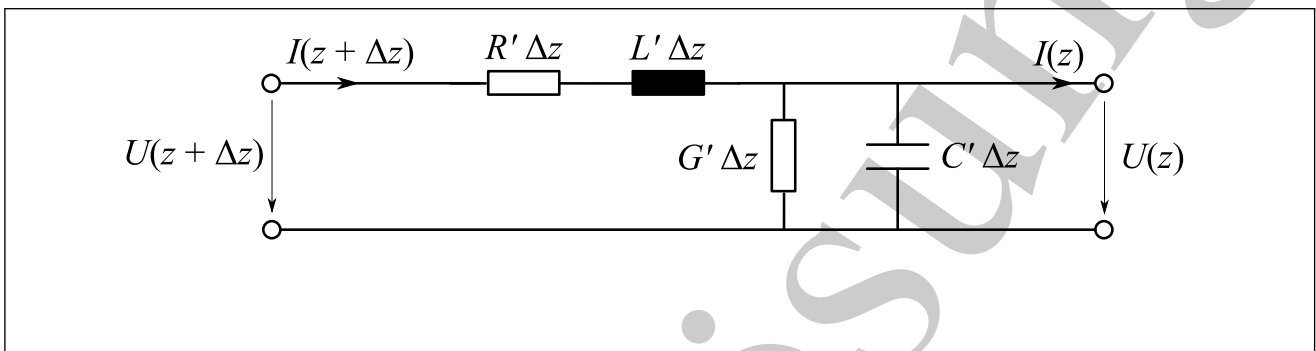
1. Die Prüfungsdauer beträgt 2 Stunden.
2. Zur Bearbeitung der Klausur sind **keine Hilfsmittel** zugelassen, ausser Schreibzeug, Zirkel, Lineal und ein **nicht-programmierbarer, komplexer** Taschenrechner.
3. Die Lösungen müssen auf den ausgegebenen Blättern in den dafür vorgesehenen **Lösungskästen** niedergeschrieben werden. Falls der Platz nicht ausreicht, muss auf dem Lösungsblatt ein Hinweis auf die Fortsetzung gegeben werden und von der Aufsicht ein gestempeltes Zusatzblatt angefordert werden. Alternativ darf auch die Rückseite der Lösungsblätter verwendet werden, wobei auch hier der zugehörige Aufgabenkontext eindeutig anzugeben ist. Bei zweifelhafter Zuordnung kann die Lösung nicht gewertet werden. Benutzen Sie **kein eigenes Papier**.
4. **Bei allen Aufgaben muss der Lösungsweg klar erkennbar und eindeutig dargestellt werden.** In einigen Aufgaben ist dies die wesentliche Prüfungsleistung. Lösungen ohne ausreichende Begründung werden nicht gewertet. Das Gleiche gilt für mehrdeutige Lösungen oder Formulierungen.
5. Diagramme werden nur gewertet, wenn der Datenteil mit Name und Aufgabennummer vollständig ausgefüllt ist. Bei Bedarf können von der Aufsicht zusätzliche Diagramme angefordert werden. **Ungültige Lösungen** müssen klar erkenntlich **durchgestrichen** werden. Liegt mehr als eine Lösung vor, erfolgt keine Wertung.
6. Verwenden Sie bei der Lösung der Aufgaben **weder rote Farbe noch Bleistift** und kennzeichnen Sie Ihre Ergebnisse deutlich. Lösungen in roter Farbe oder Bleistift können nicht gewertet werden. Zeichnungen in Diagrammen dürfen mit Bleistift gemacht werden.
7. Tragen Sie vor Beginn der Klausur Nachname, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein und **beschriften Sie jedes Lösungsblatt** mit Ihrem Namen. **Alle** Blätter, auch die Zusatzblätter, müssen den Namen des Kandidaten tragen. Wer diese Regeln, die einer raschen Bearbeitung dienen, nicht einhält, kann nicht erwarten, dass er kurzfristig über das Ergebnis seiner Prüfung informiert wird. Die Lösungsblätter müssen **vollständig**, also zusammen mit allen zusätzlich ausgeteilten Blättern abgegeben werden. Heften Sie alle Blätter mit der beiliegenden Faltklammer zusammen.
8. Legen Sie Ihren Studentenausweis und den Zulassungsschein bereit.
9. Der Umfang der gesamten Klausur beträgt 27 Seiten und besteht aus 5 Aufgaben. **Prüfen Sie** diese direkt nach Erhalt **auf Vollständigkeit**.
10. Die Ergebnisse der Klausur werden nach der Korrektur am schwarzen Brett des Instituts (Foyer, Geb. 30.10) veröffentlicht. Der Zeitpunkt der Veröffentlichung wird im Internet bekannt gegeben.

Aufgabe 1

(gesamt 17 Punkte)

Allgemeines

- a) Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild eines kurzen Abschnitts
- Δz
- einer verlustbehafteten Leitung. (2 P.)



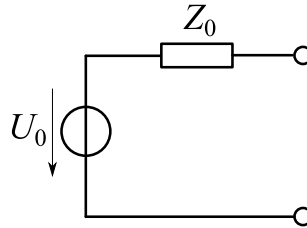
- b) Eine Antenne strahlt eine Leistung von
- $P_S = 10 \text{ W}$
- ab. In einer Entfernung von 500 m wird in der Hauptstrahlrichtung der Antenne eine Leistungsdichte von
- $1 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$
- gemessen. Bestimmen Sie den Gewinn der Antenne in dBi. (2 P.)

$$S_{r,\max} = \frac{P_S G_A}{4\pi r^2} \Rightarrow G_A = \frac{4\pi r^2 S_{r,\max}}{P_S} = 314,2 \hat{=} 25 \text{ dBi}$$

- c) Ein zylindrischer Kupferleiter wird von einem Wechselstrom der Frequenz 1 GHz durchflossen. Die Leitfähigkeit von Kupfer beträgt
- $\kappa = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S/m}$
- . Wie groß ist die Eindringtiefe? (2 P.)

$$s = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}} = 2,1 \text{ } \mu\text{m}$$

Gegeben sei die unten abgebildete Wechselspannungsquelle mit Amplitude $U_0 = 2\text{ V}$ und einem Innenwiderstand von $Z_0 = 25\ \Omega$.



- d) Wie groß ist die Leistung P_0 in mW, die die Quelle bei Leistungsanpassung maximal abgeben kann? (2 P.)

(2 P.)

Bei Leistungsanpassung gilt $Z_L = Z_0$. Damit ergibt sich:

$$P_0 = \frac{\left(\frac{U_0}{2\sqrt{2}}\right)^2}{Z_0} = \frac{U_0^2}{8Z_0} = 20\text{ mW}$$

- e) Zur Impedanzbestimmung einer unbekannten reellen Last Z_x wird der Reflexionsfaktor gemessen. Dieser beträgt $r_x = 0,5$ mit einem Bezugswiderstand von $Z_0 = 25\ \Omega$. Wie groß ist die Impedanz Z_x ? (2 P.)

(2 P.)

$$Z_x = Z_0 \frac{1 + r_x}{1 - r_x} = 75\ \Omega$$

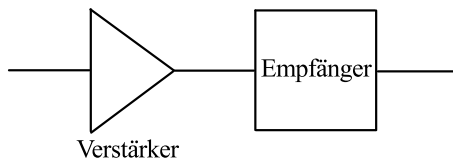
- f) Die in Aufgabenteil e) beschriebene Lastimpedanz Z_x wird nun mit der oben gezeigten Quelle verbunden. Wie groß ist die von Z_x aufgenommene Leistung in mW? (2 P.)

(2 P.)

Mit dem in Aufgabenteil d) berechneten Wert ergibt sich:

$$P_x = P_0 (1 - |r_x|^2) = 15\text{ mW}$$

Gegeben sei ein Empfänger mit einer Verstärkung von 10 dB und einer Rauschzahl von 7 dB. Zur Verbesserung des Signal-zu-Rausch-Abstandes soll dem Empfänger ein zusätzlicher Verstärker vorgeschaltet werden.



Verstärker	Verstärkung	Rauschzahl
A	18 dB	4 dB
B	18 dB	3 dB
C	25 dB	5 dB

- g) Wählen Sie aus der obigen Tabelle den für das Gesamtsystem am besten geeigneten Verstärker aus und begründen Sie Ihre Auswahl durch eine Rechnung.

(5 P.)



Verstärker A kann direkt ausgeschlossen werden, da er bei gleicher Verstärkung eine höhere Rauschzahl aufweist als Verstärker B.

Um die Rauschzahlen für das kaskadierte System zu berechnen, müssen zunächst die gegebenen logarithmierten Werte umgerechnet werden:

$$\begin{aligned} G_B &= 63,1 & F_B &= 2,00 \\ G_C &= 316,2 & F_C &= 3,16 \\ G_{\text{sys}} &= 10 & F_{\text{sys}} &= 5,01 \end{aligned}$$

Mit Verstärker B ergibt sich eine Gesamttrauschzahl von

$$F_{\text{gesamt, B}} = F_B + \frac{F_{\text{sys}} - 1}{G_B} = 2,06$$

Mit Verstärker C ergibt sich eine Gesamttrauschzahl von

$$F_{\text{gesamt, C}} = F_C + \frac{F_{\text{sys}} - 1}{G_C} = 3,17$$

Dementsprechend fällt die Auswahl auf Verstärker B.

Aufgabe 2

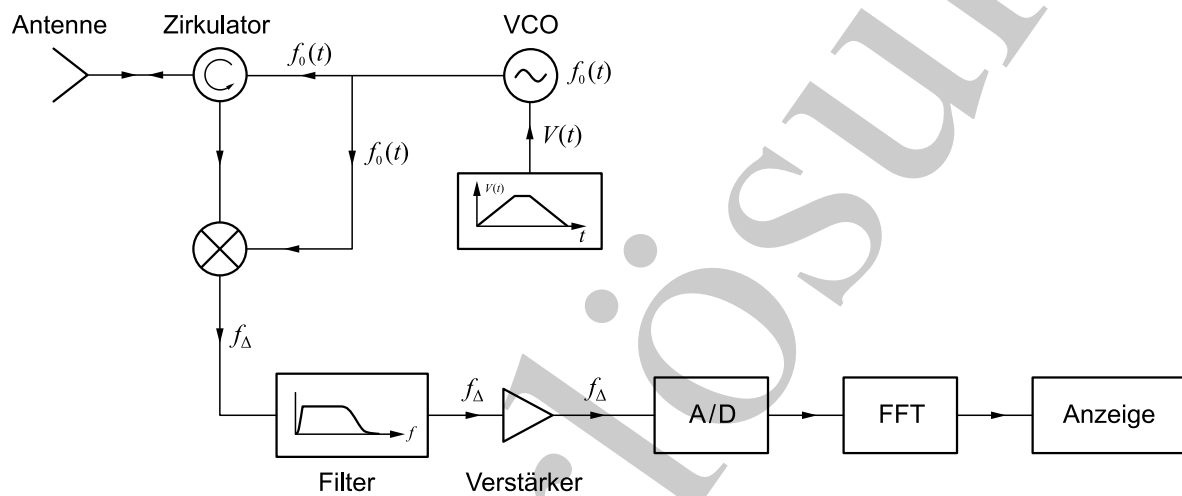
(gesamt 17 Punkte)

Radar

- a) Welches Radarprinzip wählen Sie für ein Automobilradar, mit dem möglichst günstig sowohl statische als auch sich bewegende Ziele detektiert werden sollen. Zeichnen Sie die wichtigsten Komponenten in ein Blockschaltbild und beschriften Sie diese.

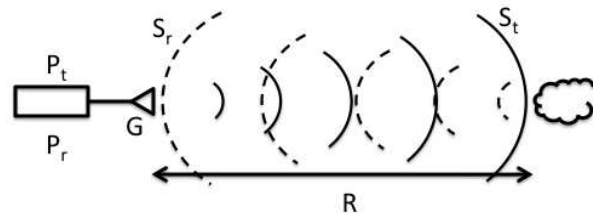
(3 P.)

Das einfachste Radar ist in diesem Fall ein FMCW-Radar.



- b) Leiten Sie die monostatische Radargleichung für das Radar aus Teilaufgabe a) her, ausgehend von einem Sender mit der Sendeleistung P_t , dem Antennengewinn G (identisch für Sender und Empfänger), sowie dem Abstand R und dem Radarrückstreuquerschnitt σ eines Zielobjekts. Beschreiben Sie dabei die einzelnen Herleitungsschritte mit Stichpunkten und fertigen Sie eine passende Skizze an. Nur die Angabe der fertigen Formel genügt nicht!

(4P.)



Strahlt ein Sender eine Leistung P_t durch eine Antenne mit dem Gewinn G ab, so beträgt die Leistungsdichte S_t an einem Ziel in der Entfernung R

$$S_t = \frac{P_t G}{4\pi R^2} \quad (1)$$

Das Ziel streut die eingestrahlte Leistung in alle Raumrichtungen. Die Leistungsdichte des zum Radarsystem zurückgestreuten Signals ergibt sich mit dem Radarrückstreuquerschnitt zu

$$S_r = \frac{S_t \sigma}{4\pi R^2} = \frac{P_t G \sigma}{(4\pi R^2)^2} \quad (2)$$

Mit der Antennenwirkfläche

$$A_W = \frac{\lambda^2}{4\pi} G \quad (3)$$

resultiert die Empfangsleistung zu

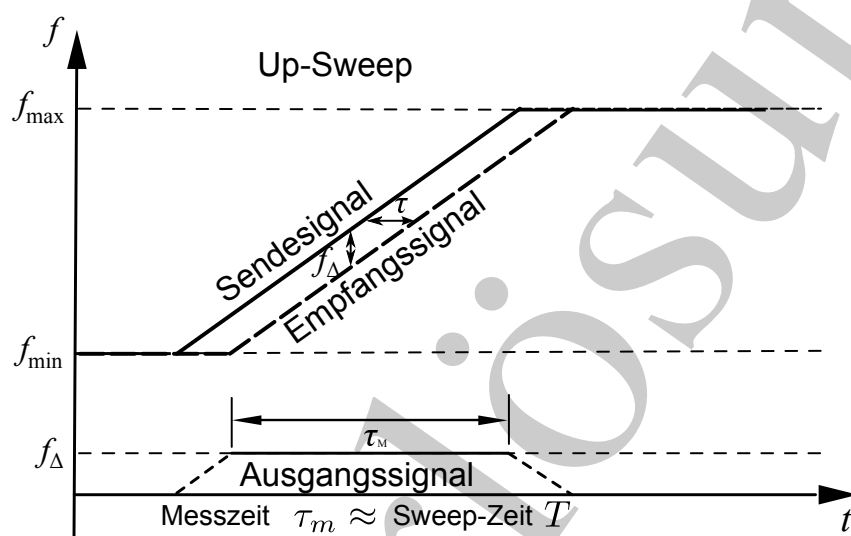
$$P_r = S_r A_W = \frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 R^4} \quad (4)$$

c) Ein 77 GHz FMCW-Radar mit einer Bandbreite von $B = 500$ MHz und einer Mess- bzw. Sweepdauer von $T = 10$ ms wird eingesetzt, um Messungen im Medium Luft ($\epsilon_r = 1$) durchzuführen.

(3 P.)



- Welche Beat-Frequenz f_Δ wird durch ein statisches Objekt in 50 m Entfernung hervorgerufen?
- Welche Dopplerfrequenz weist ein Auto auf, das sich mit $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf das Radar zu bewegt?
- Wie groß ist der maximale Eindeutigkeitsbereich $d_{\max}$ des Radars?



$$f_\Delta = \frac{B}{T} \cdot \tau = \frac{B}{T} \cdot \frac{2R}{c_0} = 16,67 \text{ kHz}$$

$$f_D = \frac{2 \cdot f_c \cdot v}{c_0} = \frac{2 \cdot 77 \text{ GHz} \cdot \frac{100}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 14,26 \text{ kHz}$$

$$d_{\max} = \frac{c_0 T}{2} = 1500000 \text{ m} = 1500 \text{ km}$$

- d) Ein monostatisches FMCW-Radar soll im Automobilbereich bei 77 GHz eingesetzt werden. Die Sendeleistung beträgt $P_{Tx} = 20 \text{ dBm}$ und die minimale Empfangsleistung $P_{Rx} = -125 \text{ dBm}$. Welcher Antennengewinn in dBi wird benötigt, damit ein Fußgänger mit einem RCS von $\sigma = 1 \text{ m}^2$ in 100 m Entfernung noch detektiert werden kann?

(4P.)



Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{c_0}{f_c} = 3,90 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Sendeleistung in lineare Größe umrechnen:

$$P_{Tx} = \frac{10^{20/10}}{1000} \text{ W} = 0,1 \text{ W}$$

Minimale Empfangsleistung in lineare Größe umrechnen:

$$P_{Rx} = \frac{10^{-125/10}}{1000} \text{ W} = 3,16 \cdot 10^{-16} \text{ W}$$

Für die Empfangsleistung P_{Rx} gilt die Radargleichung $P_{Rx} = \frac{P_{Tx} G^2 \sigma \lambda^2}{(4\pi)^3 R^4}$.
Da das Radar monostatisch ist, gilt $G_{Tx} = G_{Rx} = G$.

Umstellen der Radargleichung nach dem gesuchten Gewinn G und Einsetzen der Zahlenwerte liefert:

$$G = \sqrt{\frac{P_{Rx} \cdot (4\pi)^3 \cdot R^4}{P_{Tx} \cdot \lambda^2 \cdot \sigma}} = \sqrt{\frac{3,16 \cdot 10^{-16} \text{ W} \cdot (4\pi)^3 \cdot (100 \text{ m})^4}{0,1 \text{ W} \cdot (3,90 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 \cdot 1 \text{ m}^2}} \approx 6,42 \hat{=} 8,08 \text{ dBi}$$

- e) Um welchen Faktor kann der Antennengewinn G verringert werden, wenn die maximale Reichweite $R_{\max}$ des Radars nur halb so groß wie ursprünglich sein muss? Alle anderen Parameter bleiben konstant.

(2 P.)



Da $G \propto \sqrt[2]{R_{\max}^4} = R_{\max}^2$ gilt, ergibt sich aus $R_{\max, \text{neu}} = 0,5 \cdot R_{\max}$ der neue Gewinn zu $G_{\text{neu}} = 0,25 \cdot G$. D.h. der neue Gewinn kann um den Faktor 4 kleiner sein ($G_{\text{neu}} = 1,61 \hat{=} 2,05 \text{ dBi}$).

- f) Wofür wird in einem monostatischen Radarsystem ein Zirkulator benötigt?

(1 P.)



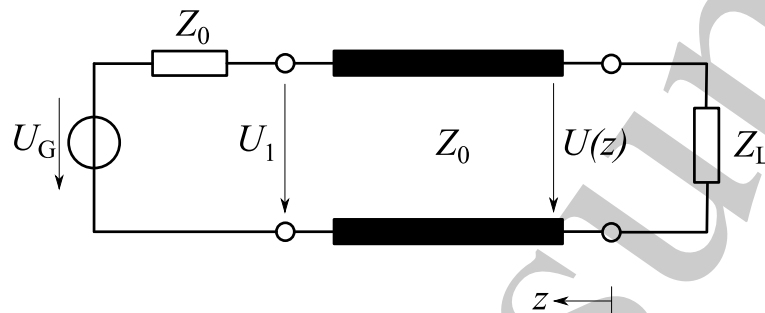
Der Zirkulator wird benötigt, um die abstrahlende Welle und die ankommende Welle zu separieren, da sonst auf Grund der hohen Leistung der abstrahlenden Welle der Empfänger übersteuern würde.

Aufgabe 3

(gesamt 17 Punkte)

Stehende Wellen und Leitungen

Gegeben sei die in der Skizze gezeigte verlustfreie Leitung mit Leitungswellenwiderstand $Z_0 = 50 \Omega$. Die Leitung wird von einer Wechselspannungsquelle gespeist, die eine Spannungsamplitude von $U_G = 2 \text{ V}$ aufweist. Der auf Z_0 bezogene Reflexionsfaktor der Lastimpedanz Z_L beträgt $r_L = 0,75e^{j\frac{\pi}{8}}$.



- a) Berechnen Sie den jeweils kleinsten Wert $\frac{z}{\lambda} > 0$, für den $|U(z)|$ minimal bzw. maximal wird.

(3 P.)

Minima:

$$\begin{aligned}\varphi_L - 2\beta z_{\min} &= \frac{\pi}{8} - 4\pi \frac{z_{\min}}{\lambda} \stackrel{!}{=} \pi + n \cdot 2\pi \quad n \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \frac{z_{\min}}{\lambda} &= -\frac{7}{32} - \frac{n}{2} \\ \text{1. Minimum: } \Rightarrow \frac{z_{\min,1}}{\lambda} &= \frac{9}{32}\end{aligned}$$

Maxima:

$$\begin{aligned}\varphi_L - 2\beta z_{\max} &= \frac{\pi}{8} - 4\pi \frac{z_{\max}}{\lambda} \stackrel{!}{=} n \cdot 2\pi \quad n \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \frac{z_{\max}}{\lambda} &= \frac{1}{32} - \frac{n}{2} \\ \text{1. Maximum: } \Rightarrow \frac{z_{\max,1}}{\lambda} &= \frac{1}{32}\end{aligned}$$

- b) Berechnen Sie das Minimum und Maximum von
- $|U(z)|$
- auf der Leitung.

(2 P.)

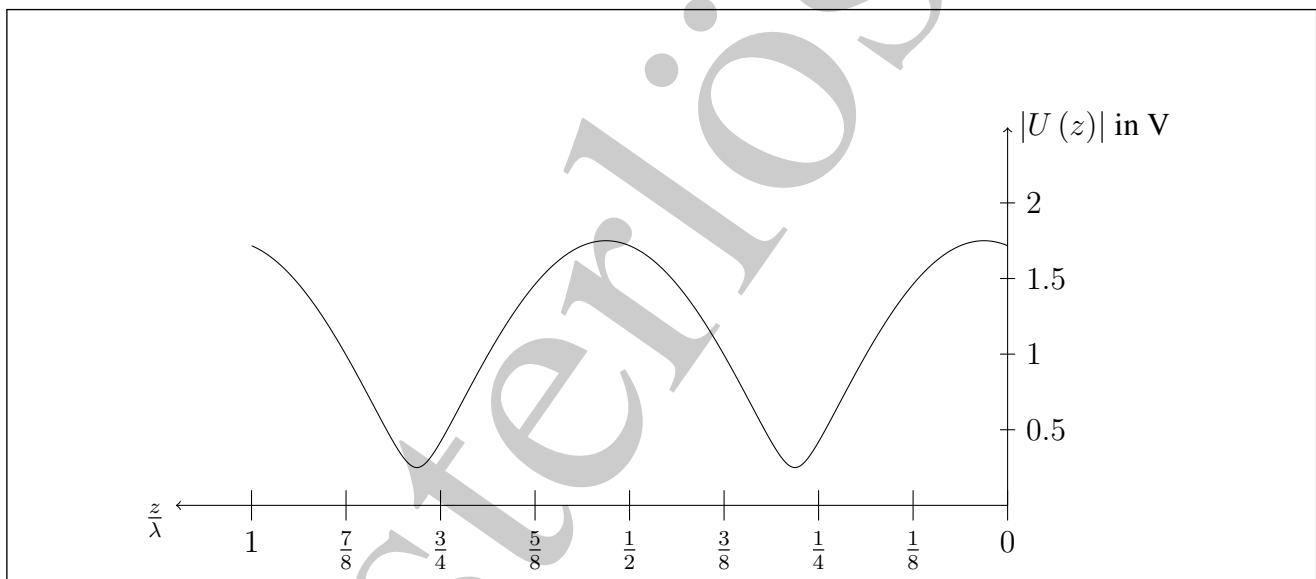


$$|U(z)|_{\max} = \frac{|U_G|}{2} \cdot (1 + |r_L|) = 1,75 \text{ V}$$

$$|U(z)|_{\min} = \frac{|U_G|}{2} \cdot (1 - |r_L|) = 0,25 \text{ V}$$

- c) Skizzieren Sie mithilfe Ihrer Ergebnisse aus a) und b) den Spannungsverlauf auf der Leitung. Achten Sie auf korrekte Achsenbeschriftungen inklusive Einheiten.

(2 P.)



- d) Für die Spannung
- U_1
- am Eingang der Leitung gilt
- $U_1 = U_{1,\text{Hin}} + U_{1,\text{Rück}}$
- . Leiten Sie allgemein die komplexe Amplitude der zur Lastimpedanz laufenden Spannungswelle
- $U_{1,\text{Hin}}$
- in Abhängigkeit der Generatorspannung
- U_G
- her.

(3 P.)



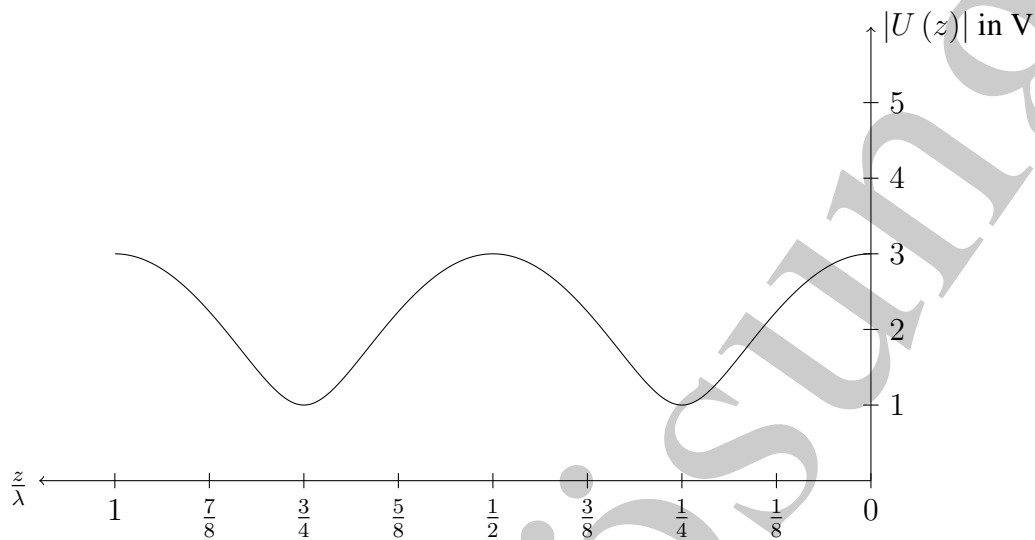
Maschengleichung am Eingang:

$$U_G = I_1 Z_0 + U_1 = \left(\frac{U_{1,\text{Hin}}}{Z_0} - \frac{U_{1,\text{Rück}}}{Z_0} \right) Z_0 + (U_{1,\text{Hin}} + U_{1,\text{Rück}}) = 2 U_{1,\text{Hin}}$$

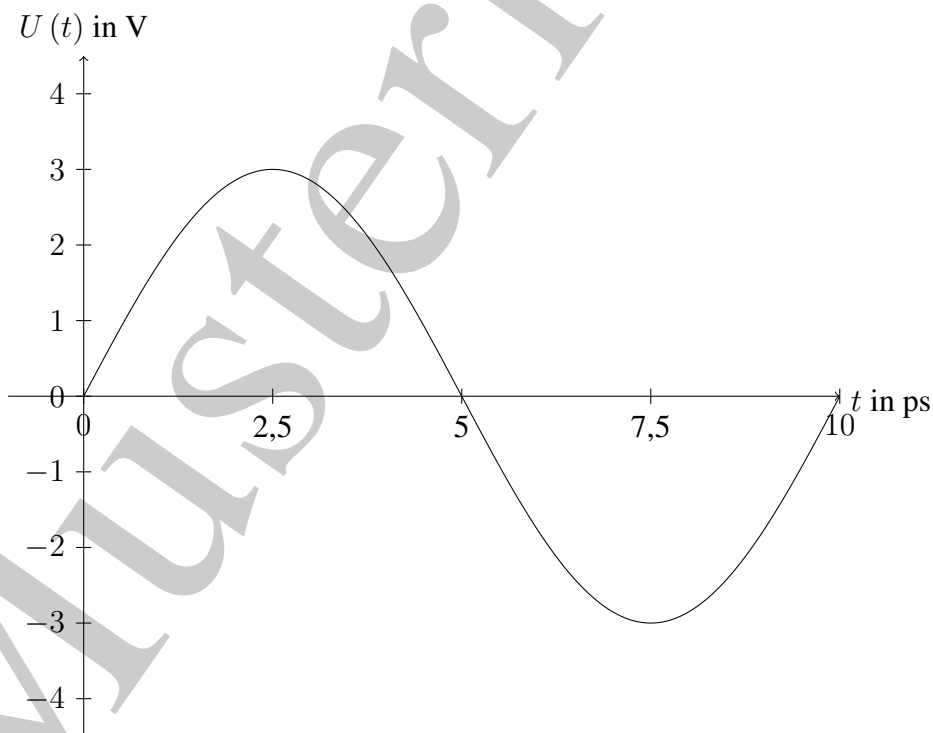
$$\Rightarrow U_{1,\text{Hin}} = \frac{U_G}{2}$$

- e) Gegeben sei der folgende Spannungsverlauf auf einer verlustlosen Leitung. Zeichnen Sie eine Periode des **zeitlichen** Spannungsverlaufs $U(t)$ an der Stelle $\frac{z}{\lambda} = 0$. Die Wellenlänge auf der Leitung beträgt $\lambda = 3 \text{ mm}$ und die Leitung weist eine effektive relative Dielektrizitätszahl von $\epsilon_{r,\text{eff}} = 1$ auf. Achten Sie auf korrekte Achsenbeschriftungen inklusive Einheiten.

(2 P.)

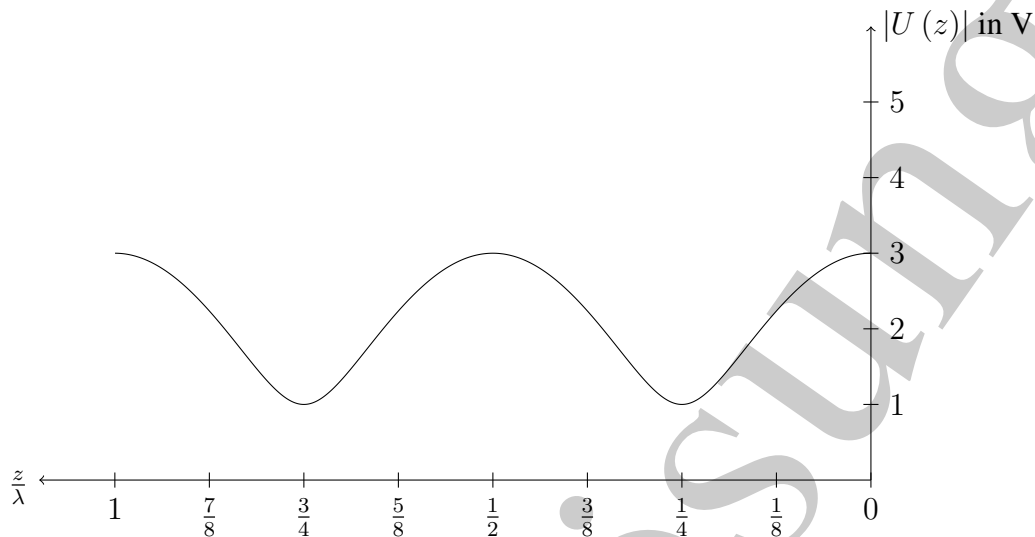


$$T = \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c_0} = 10 \text{ ps}$$



- f) Gegeben sei der folgende Spannungsverlauf auf einer verlustlosen Leitung mit Wellenwiderstand $Z_0 = 50 \Omega$. Ermitteln Sie Phase und Betrag des Reflexionsfaktors der Lastimpedanz, mit der die Leitung an der Stelle $\frac{z}{\lambda} = 0$ abgeschlossen ist. Berechnen Sie anschließend den Wert der Lastimpedanz in Ohm.

(4P.)



Bestimmung der Phase des Reflexionsfaktors aus der Phasenbedingung für Minima:

$$\varphi_L - 2\beta z_{\min} \stackrel{!}{=} \pi + n \cdot 2\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

Aus der Abbildung:

$$\frac{z_{\min}}{\lambda} = \frac{1}{4} + \frac{n}{2} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \varphi_L = n \cdot 2\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ rein ohm'sche Last

Bestimmung des Betrags des Reflexionsfaktors:

$$\text{VSWR} = \frac{|U(z)|_{\max}}{|U(z)|_{\min}} = \frac{1 + |r_L|}{1 - |r_L|}$$

$$|r_L| = \frac{|U(z)|_{\max} - |U(z)|_{\min}}{|U(z)|_{\max} + |U(z)|_{\min}} = 0,5$$

Berechnung der Lastimpedanz:

$$Z_L = Z_0 \frac{1 + r_L}{1 - r_L} = 150 \Omega$$

g) Welche Frequenzabhängigkeit weist die Längsdämpfung einer Leitung auf?

(1P.)



Längsdämpfung: $\propto \sqrt{\omega}$

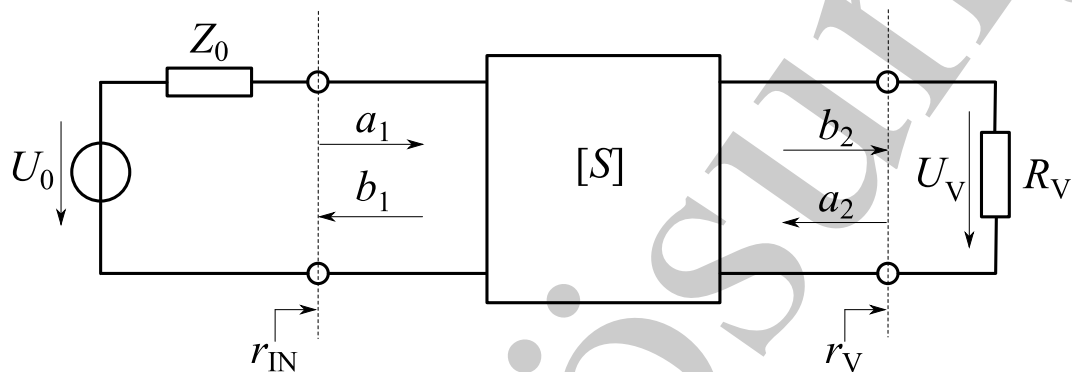
Musterlösung

Aufgabe 4

(gesamt 17 Punkte)

Mikrowellen-Netzwerkanalyse

Das unten gezeigte Zweitor wird durch die Streumatrix $[S] = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,08 \\ 15 & 0,1 \end{pmatrix}$ beschrieben. Der Bezugswiderstand für die Streuparameter ist $Z_0 = 50 \Omega$. Das Zweitor wird so gespeist, dass sich $a_1 = 1 \sqrt{W}$ ergibt. Der Lastwiderstand beträgt $R_V = 10 \Omega$.



- a) Berechnen Sie den Wert der Streuvariablen b_2 in obiger Anordnung.

(4P.)

$$r_V = \frac{a_2}{b_2} = \frac{R_V - Z_0}{R_V + Z_0} = -\frac{2}{3}$$

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 = S_{21}a_1 + S_{22}r_V b_2$$

$$b_2(1 - S_{22}r_V) = S_{21}a_1$$

$$\Rightarrow b_2 = \frac{S_{21}}{1 - S_{22}r_V} a_1 = 14,1 \sqrt{W}$$

b) Ermitteln Sie die von R_V aufgenommene Wirkleistung (in W).

(2 P.)



$$P_V = \frac{1}{2} (|b_2|^2 - |a_2|^2) = \frac{1}{2} |b_2|^2 (1 - |r_V|^2) = 55,2 \text{ W}$$

c) Berechnen Sie die komplexe Spannungsamplitude U_V , die in obiger Anordnung über dem Lastwiderstand R_V abfällt.

(2 P.)



$$U_V = \sqrt{Z_0} (b_2 + a_2) = \sqrt{Z_0} b_2 (1 + r_V) = 33,2 \text{ V}$$

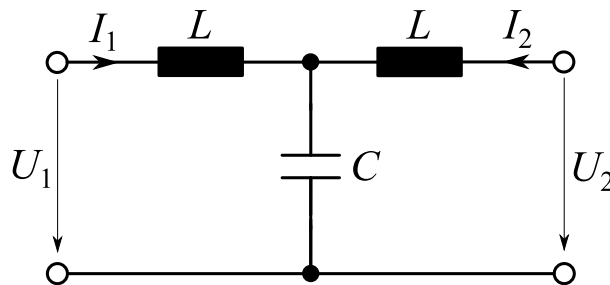
d) Leiten Sie allgemein den Reflexionsfaktor r_{IN} als Funktion von r_V und den S -Parametern des Zweitports her.

(3 P.)



$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{a_2}{r_V} = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{S_{21}a_1}{\frac{1}{r_V} - S_{22}} \\ b_1 &= S_{11}a_1 + S_{12}a_2 = S_{11}a_1 + S_{12} \frac{S_{21}a_1}{\frac{1}{r_V} - S_{22}} \\ \Rightarrow r_{IN} &= \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}r_V}{1 - S_{22}r_V} \end{aligned}$$

Gegeben sei folgendes Zweitor.



e) Bestimmen Sie die Z -Parameter Z_{11} und Z_{12} des Zweitors.

(2P.)



$$Z_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$
$$Z_{12} = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{1}{j\omega C}$$

f) Um welchen Filtertyp handelt es sich bei obigem Zweitor (Tiefpass, Hochpass, Bandpass, Bandstop)?

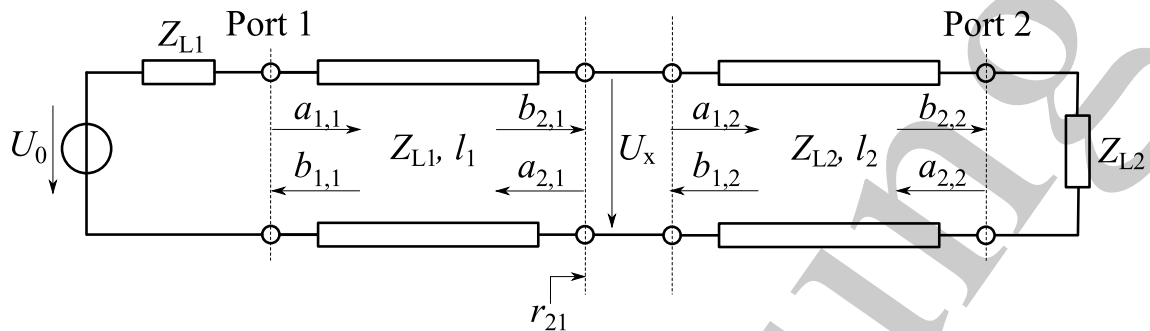
(1P.)



Tiefpass-Filter

- g) Gegeben sei folgende Leitungsanordnung aus zwei verlustfreien Leitungen mit Leitungswellenwiderständen Z_{L1} und Z_{L2} und zugehörigen Längen l_1 bzw. l_2 . Der Bezugswiderstand zur Bestimmung der S -Parameter ist Z_{L1} für Port 1, und Z_{L2} für Port 2. Berechnen Sie für die gezeigte Leitungsanordnung den Streuparameter S_{11} in Abhängigkeit von Z_{L1} , Z_{L2} , l_1 und l_2 .

(3 P.)



Berechnung des Reflexionsfaktors an der Schnittstelle der beiden Leitungen, bezogen auf Z_{L1} :

$$r_{21} = \frac{a_{2,1}}{b_{2,1}} = \frac{Z_{L2} - Z_{L1}}{Z_{L2} + Z_{L1}}$$

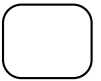
Mithilfe der S -Parameter für eine verlustfreie Leitung ergibt sich:

$$\begin{aligned} b_{2,1} &= e^{-j\beta l_1} a_{1,1} \\ b_{1,1} &= e^{-j\beta l_1} a_{2,1} = e^{-j\beta l_1} r_{21} b_{2,1} = e^{-j2\beta l_1} r_{21} a_{1,1} \\ \Rightarrow S_{11} &= \left. \frac{b_{1,1}}{a_{1,1}} \right|_{a_{2,2}=0} = \frac{e^{-j2\beta l_1} r_{21} a_{1,1}}{a_{1,1}} = e^{-j2\beta l_1} r_{21} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(gesamt 17 Punkte)

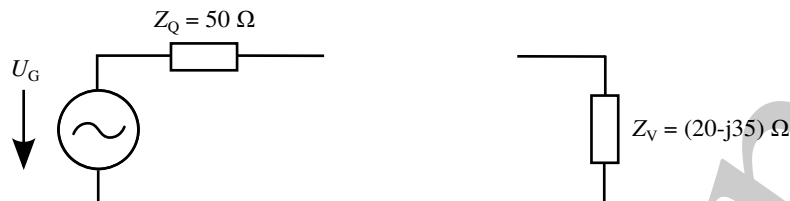
Smithdiagramm



(5 P.)



a)



Ein Verbraucher mit der Impedanz $Z_V = (20 - j35) \Omega$ soll an eine Quelle mit der Impedanz $Z_Q = 50 \Omega$ reflexionsfrei angeschlossen werden. Zur Verfügung stehen Ihnen folgende Elemente:

- Spulen mit beliebiger Induktivität

Zeichnen Sie eine möglichst einfache Anpassschaltung mit genau zwei Elementen in obiges Schaltbild. Zeichnen Sie den Transformationsweg in ein Smith Diagramm ein und geben Sie die Werte der verwendeten Elemente an, für die bei einer Frequenz von $f = 4 \text{ GHz}$ Anpassung herrscht. Alle Leitungen sind verlustfrei und besitzen eine relative Dielektrizitätszahl von $\epsilon_r = 1$.



Auswahl der Bezugsimpedanz $Z_B = 50 \Omega \Rightarrow \frac{Z_V}{Z_B} = 0,4 - j0,7, \frac{Z_Q^*}{Z_B} = 1,0$

- Beispiel 1 (V1):

Vorgeschaltete parallele Spule $L_{p,V1}$ nach $Z_{1,V1}/Z_B = 1,0 - j0,8$

$$\Rightarrow \frac{1}{j\omega L_{p,V1}} = \frac{1}{Z_{1,V1}} - \frac{1}{Z_V} = \left(\frac{1}{1,0 - j0,8} - \frac{1}{0,4 - j0,7} \right) \cdot \frac{1}{50 \Omega} \approx -j0,0118 \text{ S}$$

$$\Rightarrow L_{p,V1} = \frac{1}{2\pi \cdot 4 \text{ GHz} \cdot 0,0118 \text{ S}} = 3,37 \text{ nH}$$

Serielle Spule $L_{s,V1}$ nach $Z_Q^*/Z_B = 1,0$

$$\Rightarrow j\omega L_{s,V1} = Z_Q^* - Z_{1,V1} = (1,0 - (1,0 - j0,8)) \cdot 50 \Omega = j40 \Omega$$

$$\Rightarrow L_{s,V1} = \frac{40 \Omega}{2\pi \cdot 4 \text{ GHz}} = 1,59 \text{ nH}$$

• Beispiel 2 (V2):

Vorgeschaltete serielle Spule $L_{s,V2}$ nach $Z_{1,V2}/Z_B = 0,4 - j0,48$

$$\Rightarrow j\omega L_{s,V2} = Z_{1,V2} - Z_V = ((0,4 - j0,48) - (0,4 - j0,7)) \cdot 50 \Omega = j11 \Omega$$

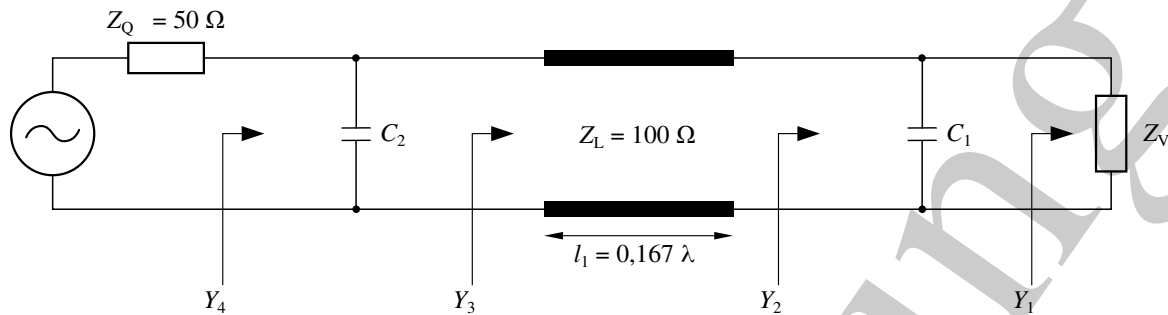
$$\Rightarrow L_s = \frac{11 \Omega}{2\pi \cdot 4 \text{ GHz}} = 437,7 \text{ pH}$$

Parallel Spule $L_{p,V2}$ nach $Z_Q^*/Z_B = 1,0$

$$\Rightarrow \frac{1}{j\omega L_{p,V2}} = \frac{1}{Z_Q^*} - \frac{1}{Z_{1,V2}} = \left(\frac{1}{1,0} - \frac{1}{0,4 - j0,48} \right) \cdot \frac{1}{50 \Omega} = -j0,0246 \text{ S}$$

$$\Rightarrow L_{p,V2} = \frac{1}{2\pi \cdot 4 \text{ GHz} \cdot 0,0246 \text{ S}} = 1,62 \text{ nH}$$

- b) Die Impedanz $Z_V = (200 - j100) \Omega$ soll bei der Frequenz $f = 5 \text{ GHz}$ an eine Quelle mit dem Innenwiderstand $Z_Q = 50 \Omega$ reflexionsfrei angeschlossen werden. Dazu dienen zwei parallele Kapazitäten C_1 und C_2 sowie eine Leitung mit der festen Länge $l_1 = 0,167\lambda$ und der relativen Dielektrizitätszahl $\epsilon_r = 1$. Alle Leitungen haben einen Wellenwiderstand von $Z_L = 100 \Omega$. (12 P.)



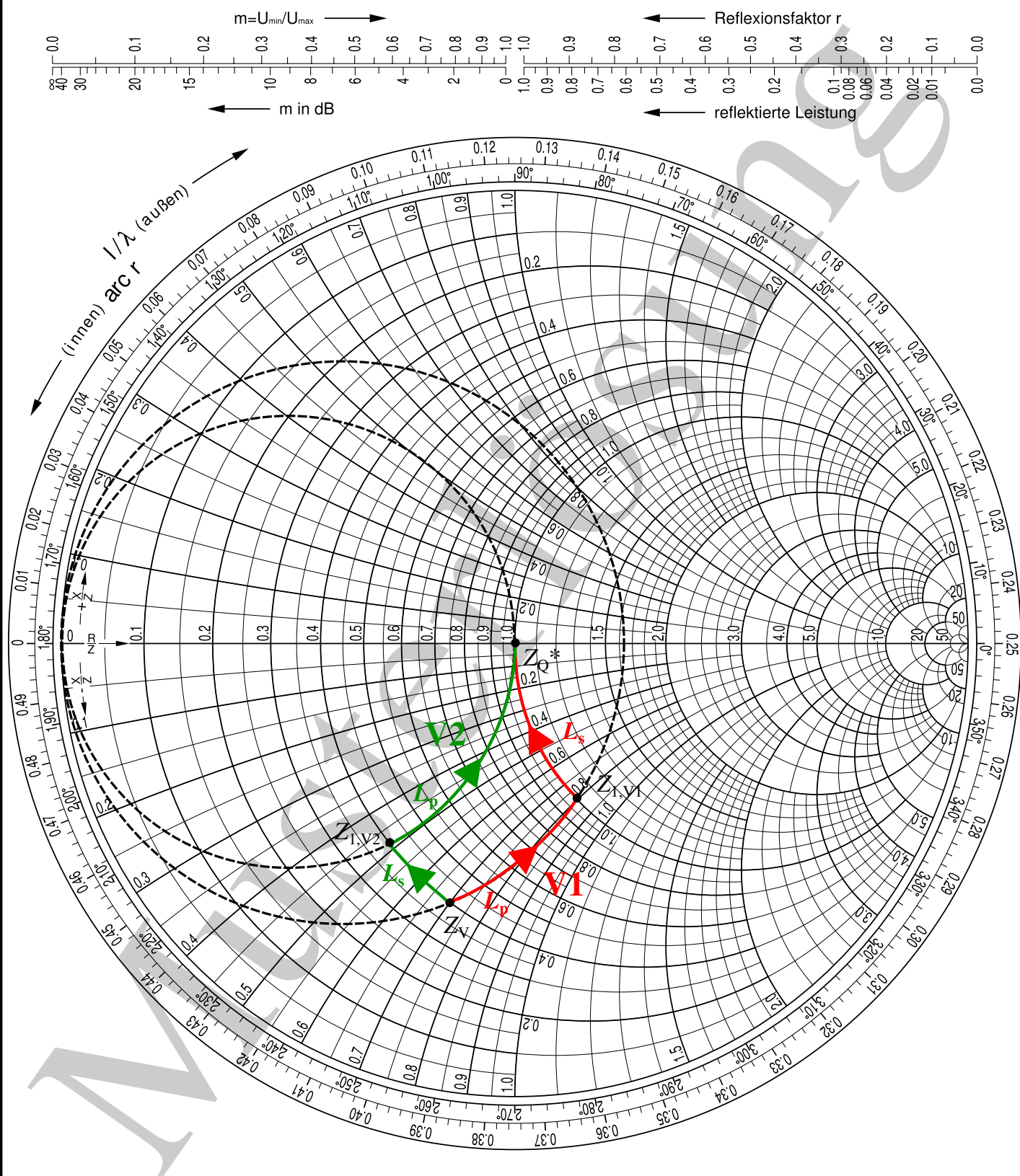
Zeichnen Sie den zugehörigen Transformationsweg in ein Smith-Diagramm ein und bestimmen Sie daraus die Werte für die benötigten Kapazitäten C_1 und C_2 so, dass Sie Anpassung erhalten. Alle Transformationsschritte sind aufzuführen und zu begründen. Die Zuordnung der Bauelemente zu den einzelnen Transformationsschritten muss nachvollziehbar sein. Begründen Sie, welche Diagrammart und welchen Bezugswiderstand Sie wählen.

- Smith-Diagramm in Leitwertform wegen paralleler Kapazitäten
- Der Bezugswiderstand wird wegen der Leitungstransformation mit $Z_L = 100 \Omega$ zu $Z_B = Z_L = 100 \Omega$ gesetzt.
- Startpunkt: $Y_1 Z_B = \frac{Z_B}{Z_V} = \frac{100 \Omega}{(200 - j100) \Omega} = 0,4 + j0,2$
- Zielpunkt: $Y_4 Z_B = \frac{Z_B}{Z_Q^*} = \frac{100 \Omega}{50 \Omega} = 2,0$
- Parallelschaltung des Kondensators C_1
 $\Rightarrow$ Transformation auf $G \cdot Z_B = 0,4 = \text{const-Kreis}$, wobei nur der kapazitive Teil (untere Hälfte) erreicht werden kann. Auf diesem Kreissegment muss Y_2 liegen.
- Drehung des $G \cdot Z_B = 0,4 = \text{const-Kreises}$ um den Ursprung durch Leitung 2 um $l_1/\lambda = 0,167 \hat{=} 120^\circ$ im Uhrzeigersinn. Auf dem gedrehten Kreis liegt Y_3 .
- Mit der parallelen Kapazität C_2 wird Y_3 auf dem $G \cdot Z_B = 2,0 = \text{const-Kreis}$ in den Zielpunkt $Y_4 \cdot Z_B = 2,0$ transformiert. Y_3 muss daher auf dem Schnittpunkt des $G \cdot Z_B = 2,0 = \text{const-Kreises}$ mit dem um 120° gedrehten $G \cdot Z_B = 0,4 = \text{const-Kreis}$ liegen.
- Hierbei muss der Schnittpunkt in der oberen Halbebene gewählt werden, da mit C_2 der Zielpunkt nur von der oberen Halbebene aus erreicht werden kann. $\Rightarrow Y_3 \cdot Z_B = 2,0 - j2,2$
- $Y_2 \cdot Z_B$ ergibt sich durch Zurückdrehen von Y_3 um -120° auf den $G \cdot Z_B = 0,4 = \text{const-Kreis}$.
 $\Rightarrow Y_2 \cdot Z_B = 0,4 + j0,9$
- Berechnung der Kapazität C_1 :
 $j\omega C_1 = Y_2 - Y_1 = ((0,4 + j0,9) - (0,4 + j0,2)) \cdot \frac{1}{100 \Omega} = j7 \text{ mS}$
 $\Rightarrow C_1 = \frac{7 \text{ mS}}{2\pi \cdot 5 \text{ GHz}} = 222,8 \text{ fF}$
- Berechnung der Kapazität C_2 :
 $j\omega C_2 = Y_4 - Y_3 = (2,0 - (2,0 - j2,2)) \cdot \frac{1}{100 \Omega} = j22 \text{ mS}$
 $\Rightarrow C_2 = \frac{22 \text{ mS}}{2\pi \cdot 5 \text{ GHz}} = 700,3 \text{ fF}$

zugehörige
Aufgabennummer:

5a

Widerstandsform

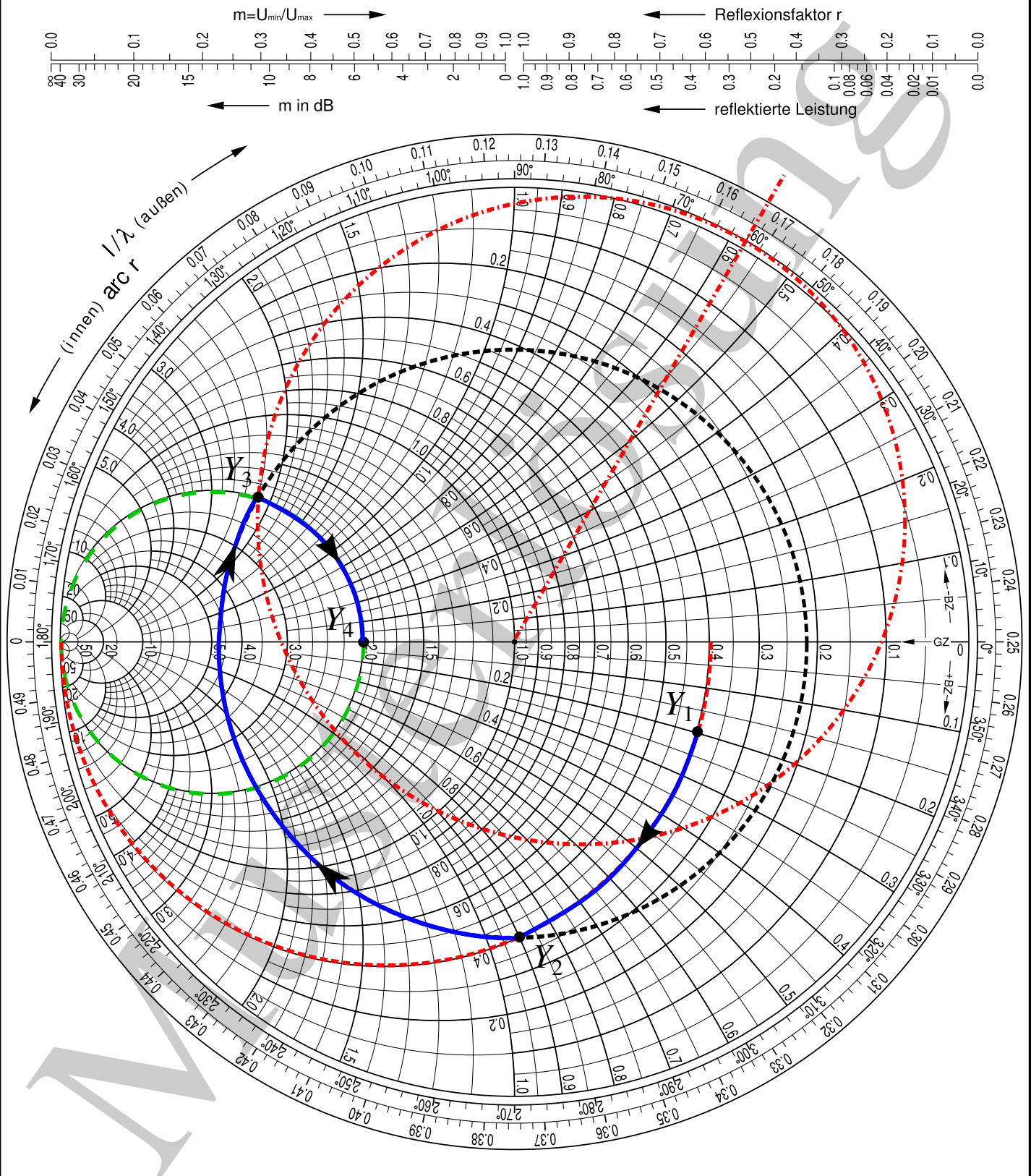
Bezugswiderstand $Z_B = 50 \Omega$ 

Wichtig: Diagramm wird nur gewertet, wenn der obenstehende Datenteil mit Name und Aufgabennummer korrekt ausgefüllt ist. Bezugswiderstand nicht vergessen!

zugehörige
Aufgabennummer:

5b

Leitwertform

Bezugswiderstand $Z_B = 100 \Omega$ 

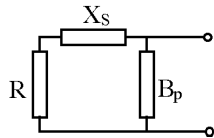
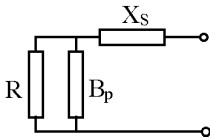
Wichtig: Diagramm wird nur gewertet, wenn der obenstehende Datenteil mit Name und Aufgabennummer korrekt ausgefüllt ist. Bezugswiderstand nicht vergessen!

Impedanz $\longleftrightarrow Z=1/Y$ Admittanz

$$\underline{Z} = \frac{R}{G^2 + B^2} + j \frac{X}{G^2 + B^2} \quad \underline{Y} = \frac{G}{R^2 + X^2} + j \frac{B}{R^2 + X^2}$$

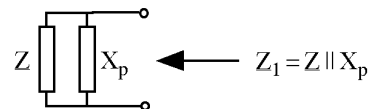
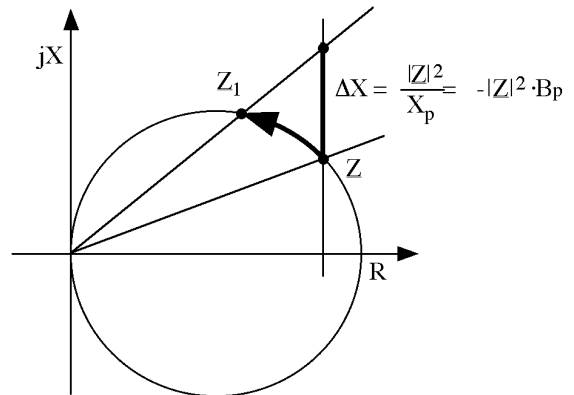
$$\underline{Z} = \frac{G}{G^2 + B^2} - j \frac{B}{G^2 + B^2} \quad \underline{Y} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2}$$

Kompensation mit dualen Elementen

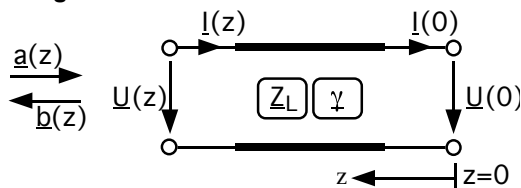


Bedingungen für Kompensation: $X_s = R^2 \cdot B_p$
 Frequenzfaktor: $F(f) = \sqrt{X_s \cdot B_p}$
 krit. Frequenz, Grenzfrequenz: $|F(f_k)| = 1$

Hilfskonstruktion zur Transformation



Leitungen



$$\underline{U}(z) = \underline{U}_H(0)e^{\gamma z} + \underline{U}_R(0)e^{-\gamma z} = \sqrt{Z_L}(\underline{a}(z) + \underline{b}(z))$$

$$\underline{I}(z) = \frac{\underline{U}_H(0)}{Z_L}e^{\gamma z} - \frac{\underline{U}_R(0)}{Z_L}e^{-\gamma z} = \frac{1}{\sqrt{Z_L}}(\underline{a}(z) - \underline{b}(z))$$

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}; \quad Z_L = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

Koaxialleitung

$$Z_L = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

ungedämpfte Leitung (homogenes Dielektrikum und konst. Querschnitt)

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{L'C'} = \omega \cdot \sqrt{\mu\epsilon}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}; \quad C' = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{Z_L}; \quad L' = Z_L \cdot \sqrt{\mu\epsilon}; \quad v_\varphi = \frac{\omega}{\beta}$$

schwach gedämpfte Leitungen ($R' \ll \omega L'; G' \ll \omega C'$)

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \left(\frac{R'}{Z_L} + G' \cdot Z_L \right); \quad G' = \omega C' \cdot \tan(\delta_c); \quad R' \sim \frac{1}{k \cdot s}$$

Dämpfung einer Leitung der Länge l (für hinlaufende Welle a)

$$D/\text{dB} = 10 \cdot \log\left(\frac{P_a(l)}{P_a(0)}\right) = 10 \cdot \log(e^{2\alpha l})$$

Eindringtiefe s

$$s = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

Reflexionsfaktor r

$$\underline{r}(z) = \frac{\underline{U}_R(z)}{\underline{U}_H(z)} = \frac{\underline{b}(z)}{\underline{a}(z)} = \frac{\underline{b}(0)}{\underline{a}(0)} \cdot e^{-2\gamma z}$$

Reflexionsfaktor $\rightarrow$ Impedanz

$$\underline{r}(l) = \frac{\underline{Z}(l) - Z_L}{\underline{Z}(l) + Z_L}; \quad \underline{Z}(l) = \frac{\underline{U}(l)}{\underline{I}(l)} = \frac{1 + \underline{r}(l)}{1 - \underline{r}(l)} \cdot Z_L$$

Anpassungsfaktor, Stehwellenverhältnis

$$m = \frac{1}{VSWR} = \frac{1 - |\underline{r}|}{1 + |\underline{r}|} = \frac{U_{\min}}{U_{\max}}$$

Dem Verbraucher zugeführte Wirkleistung P_w

$$\text{mit: } \underline{a}(z) = \frac{\underline{U}_H(z)}{\sqrt{Z_L}} = \sqrt{Z_L} \cdot \underline{I}_H(z)$$

$$P_w = P_a(0) - P_b(0) = \frac{1}{2} (|\underline{a}(0)|^2 - |\underline{b}(0)|^2)$$

$$= \frac{1}{2} |\underline{a}(0)|^2 \cdot (1 - |\underline{r}(0)|^2)$$

Transformation durch Kettenschaltung einer Leitung

$$\underline{Z}(l) = Z_L \cdot \frac{\underline{Z}(0) + Z_L \tanh(\underline{\gamma} l)}{Z_L + \underline{Z}(0) \tanh(\underline{\gamma} l)} = \underline{Z}(0) \cdot \frac{1 + j \frac{Z_L}{\underline{Z}(0)} \tan(\beta l)}{1 + j \frac{\underline{Z}(0)}{Z_L} \tan(\beta l)} \quad \alpha=0$$

Konstanten

$$Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} = 120\pi \Omega$$

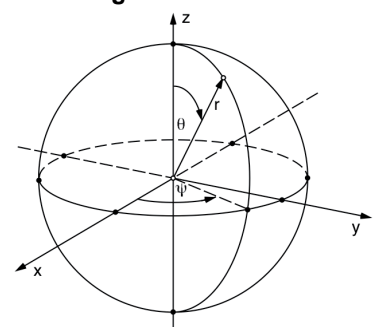
$$c_o = 2,997925 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

$$k = 1,38065 \cdot 10^{-23} \frac{Ws}{K}$$

$$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

$$\epsilon_o = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

Kugelkoordinaten

Azimuth: ψ Elevation: θ

$$\text{Volumen: } V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{Oberfläche: } F = 4\pi r^2$$

	[S]	[Z]	[Y]	[A] (ABCD)	[T]
S_{11}	S_{11}	$\frac{(Z_{11} - Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}$	$\frac{(Y_0 - Y_{11})(Y_0 + Y_{22}) + Y_{12}Y_{21}}{(Y_{11} + Y_0)(Y_{22} + Y_0) - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{A + B/Z_0 - CZ_0 - D}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$	$\frac{T_{12}}{T_{22}}$
S_{12}	S_{12}	$\frac{2Z_{12}Z_0}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}$	$\frac{-2Y_{12}Y_0}{(Y_{11} + Y_0)(Y_{22} + Y_0) - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{2(AD - BC)}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$	$\frac{T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}}{T_{22}}$
S_{21}	S_{21}	$\frac{2Z_{21}Z_0}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}$	$\frac{-2Y_{21}Y_0}{(Y_{11} + Y_0)(Y_{22} + Y_0) - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{2}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$	$\frac{1}{T_{22}}$
S_{22}	S_{22}	$\frac{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} - Z_0) - Z_{12}Z_{21}}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}$	$\frac{(Y_0 + Y_{11})(Y_0 - Y_{22}) + Y_{12}Y_{21}}{(Y_{11} + Y_0)(Y_{22} + Y_0) - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{-A + B/Z_0 - CZ_0 + D}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$	$\frac{-T_{21}}{T_{22}}$
Z_{11}	$Z_0 \frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	Z_{11}	$\frac{Y_{22}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{A}{C}$	
Z_{12}	$Z_0 \frac{2S_{12}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	Z_{12}	$\frac{-Y_{12}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{AD - BC}{C}$	
Z_{21}	$Z_0 \frac{2S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	Z_{21}	$\frac{-Y_{21}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{1}{C}$	
Z_{22}	$Z_0 \frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	Z_{22}	$\frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{D}{C}$	
Y_{11}	$Y_0 \frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$	Y_{11}	$\frac{D}{B}$	
Y_{12}	$Y_0 \frac{-2S_{12}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$\frac{-Z_{12}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$	Y_{12}	$\frac{BC - AD}{B}$	
Y_{21}	$Y_0 \frac{-2S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$\frac{-Z_{21}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$	Y_{21}	$\frac{-1}{B}$	
Y_{22}	$Y_0 \frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$	Y_{22}	$\frac{A}{B}$	
A	$\frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}}$	A	
B	$Z_0 \frac{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}}$	$\frac{-1}{Y_{21}}$	B	
C	$\frac{1}{Z_0} \frac{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{1}{Z_{21}}$	$\frac{Y_{12}Y_{21} - Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}}$	C	
D	$\frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	D	
T_{11}	$\frac{S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22}}{S_{21}}$				T_{11}
T_{12}	$\frac{S_{11}}{S_{21}}$				T_{12}
T_{21}	$\frac{-S_{22}}{S_{21}}$				T_{21}
T_{22}	$\frac{1}{S_{21}}$				T_{22}