

Schriftliche Prüfung im Fach

Grundlagen der Hochfrequenztechnik

- Bitte beachten Sie die Hinweise auf der folgenden Seite
- Beginnen Sie mit den Aufgaben, die Ihnen am leichtesten fallen

Einzelresultate

Aufgabe	1	2	3	4	5
erreichbare Punkte	17	17	17	17	17
erzielte Punkte					

Gesamtbewertung

Punkte maximal:	Gesamtpunkte:	Bonus:	Note:
85		Ja: ☐ Nein: ☐	



1. Die Prüfungsdauer beträgt 2 Stunden.
2. Zur Bearbeitung der Klausur sind **keine Hilfsmittel** zugelassen, ausser Schreibzeug, Zirkel, Lineal und ein **nicht-programmierbarer, komplexer** Taschenrechner.
3. Die Lösungen müssen auf den ausgegebenen Blättern in den dafür vorgesehenen **Lösungskästen** niedergeschrieben werden. Falls der Platz nicht ausreicht, muss auf dem Lösungsblatt ein Hinweis auf die Fortsetzung gegeben werden und von der Aufsicht ein gestempeltes Zusatzblatt angefordert werden. Alternativ darf auch die Rückseite der Lösungsblätter verwendet werden, wobei auch hier der zugehörige Aufgabenkontext eindeutig anzugeben ist. Bei zweifelhafter Zuordnung kann die Lösung nicht gewertet werden. Benutzen Sie **kein eigenes Papier**.
4. **Bei allen Aufgaben muss der Lösungsweg klar erkennbar und eindeutig dargestellt werden.** In einigen Aufgaben ist dies die wesentliche Prüfungsleistung. Lösungen ohne ausreichende Begründung werden nicht gewertet. Das Gleiche gilt für mehrdeutige Lösungen oder Formulierungen.
5. Diagramme werden nur gewertet, wenn der Datenteil mit Name und Aufgabennummer vollständig ausgefüllt ist. Bei Bedarf können von der Aufsicht zusätzliche Diagramme angefordert werden. **Ungültige Lösungen** müssen klar erkenntlich **durchgestrichen** werden. Liegt mehr als eine Lösung vor, erfolgt keine Wertung.
6. Verwenden Sie bei der Lösung der Aufgaben **weder rote Farbe noch Bleistift** und kennzeichnen Sie Ihre Ergebnisse deutlich. Lösungen in roter Farbe oder Bleistift können nicht gewertet werden. Zeichnungen in Diagrammen dürfen mit Bleistift gemacht werden.
7. Tragen Sie vor Beginn der Klausur Nachname, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein und **beschriften Sie jedes Lösungsblatt** mit Ihrem Namen. **Alle** Blätter, auch die Zusatzblätter, müssen den Namen des Kandidaten tragen. Wer diese Regeln, die einer raschen Bearbeitung dienen, nicht einhält, kann nicht erwarten, dass er kurzfristig über das Ergebnis seiner Prüfung informiert wird. Die Lösungsblätter müssen **vollständig**, also zusammen mit allen zusätzlich ausgeteilten Blättern abgegeben werden. Heften Sie alle Blätter mit der beiliegenden Faltklammer zusammen.
8. Legen Sie Ihren Studentenausweis und den Zulassungsschein bereit.
9. Der Umfang der gesamten Klausur beträgt 28 Seiten und besteht aus 5 Aufgaben. **Prüfen Sie** diese direkt nach Erhalt **auf Vollständigkeit**.
10. Die Ergebnisse der Klausur werden nach der Korrektur am schwarzen Brett des Instituts (Foyer, Geb. 30.10) veröffentlicht. Der Zeitpunkt der Veröffentlichung wird im Internet bekannt gegeben.

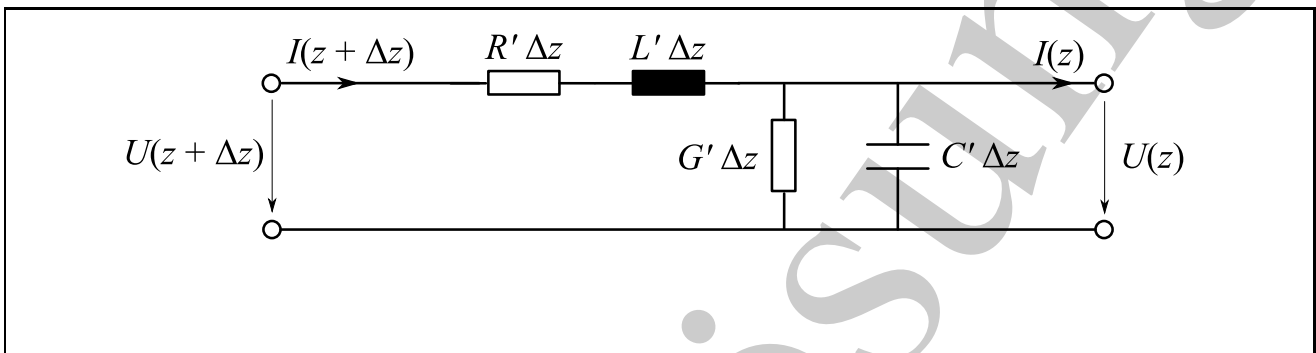
Aufgabe 1

(gesamt 17 Punkte)

Allgemeines

- a) Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild eines kurzen Abschnitts
- Δz
- einer verlustbehafteten Leitung.

(2 P.)



- b) Eine Antenne strahlt eine Leistung von
- $P_S = 10 \text{ W}$
- ab. In einer Entfernung von 500 m wird in der Hauptstrahlrichtung der Antenne eine Leistungsdichte von
- $1 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$
- gemessen. Bestimmen Sie den Gewinn der Antenne in dBi.

(2 P.)

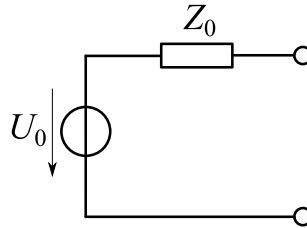
$$S_{r,\max} = \frac{P_S G_A}{4\pi r^2} \Rightarrow G_A = \frac{4\pi r^2 S_{r,\max}}{P_S} = 314,2 \hat{=} 25 \text{ dBi}$$

- c) Ein zylindrischer Kupferleiter wird von einem Wechselstrom der Frequenz 1 GHz durchflossen. Die Leitfähigkeit von Kupfer beträgt
- $\kappa = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S/m}$
- . Wie groß ist die Eindringtiefe?

(2 P.)

$$s = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}} = 2,1 \text{ } \mu\text{m}$$

Gegeben sei die unten abgebildete Wechselspannungsquelle mit Amplitude $U_0 = 2\text{ V}$ und einem Innenwiderstand von $Z_0 = 25\ \Omega$.



- d) Wie groß ist die Leistung P_0 in mW, die die Quelle bei Leistungsanpassung maximal abgeben kann? (2 P.)

Bei Leistungsanpassung gilt $Z_L = Z_0$. Damit ergibt sich:

$$P_0 = \frac{\left(\frac{U_0}{2\sqrt{2}}\right)^2}{Z_0} = \frac{U_0^2}{8Z_0} = 20\text{ mW}$$

- e) Zur Impedanzbestimmung einer unbekannten reellen Last Z_x wird der Reflexionsfaktor gemessen. Dieser beträgt $r_x = 0,5$ mit einem Bezugswiderstand von $Z_0 = 25\ \Omega$. Wie groß ist die Impedanz Z_x ? (2 P.)

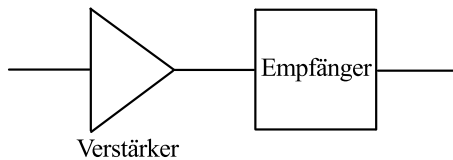
$$Z_x = Z_0 \frac{1 + r_x}{1 - r_x} = 75\ \Omega$$

- f) Die in Aufgabenteil e) beschriebene Lastimpedanz Z_x wird nun mit der oben gezeigten Quelle verbunden. Wie groß ist die von Z_x aufgenommene Leistung in mW? (2 P.)

Mit dem in Aufgabenteil d) berechneten Wert ergibt sich:

$$P_x = P_0 (1 - |r_x|^2) = 15\text{ mW}$$

Gegeben sei ein Empfänger mit einer Verstärkung von 10 dB und einer Rauschzahl von 7 dB. Zur Verbesserung des Signal-zu-Rausch-Abstandes soll dem Empfänger ein zusätzlicher Verstärker vorgeschaltet werden.



Verstärker	Verstärkung	Rauschzahl
A	18 dB	4 dB
B	18 dB	3 dB
C	25 dB	5 dB

- g) Wählen Sie aus der obigen Tabelle den für das Gesamtsystem am besten geeigneten Verstärker aus und begründen Sie Ihre Auswahl durch eine Rechnung.

(5 P.)

Verstärker A kann direkt ausgeschlossen werden, da er bei gleicher Verstärkung eine höhere Rauschzahl aufweist als Verstärker B.

Um die Rauschzahlen für das kaskadierte System zu berechnen, müssen zunächst die gegebenen logarithmierten Werte umgerechnet werden:

$$G_B = 63,1 \quad F_B = 2,00$$

$$G_C = 316,2 \quad F_C = 3,16$$

$$G_{\text{sys}} = 10 \quad F_{\text{sys}} = 5,01$$

Mit Verstärker B ergibt sich eine Gesamtrauschzahl von

$$F_{\text{gesamt, B}} = F_B + \frac{F_{\text{sys}} - 1}{G_B} = 2,06$$

Mit Verstärker C ergibt sich eine Gesamtrauschzahl von

$$F_{\text{gesamt, C}} = F_C + \frac{F_{\text{sys}} - 1}{G_C} = 3,17$$

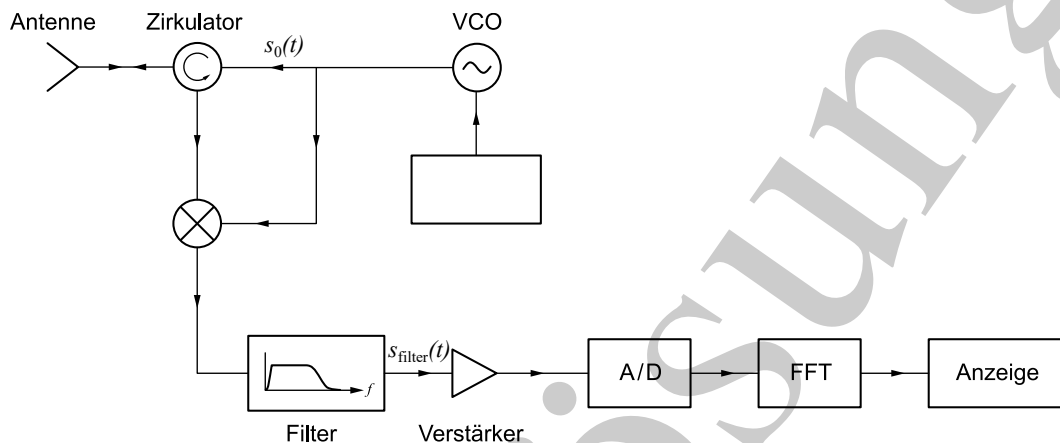
Dementsprechend fällt die Auswahl auf Verstärker B.

Aufgabe 2

(gesamt 17 Punkte)

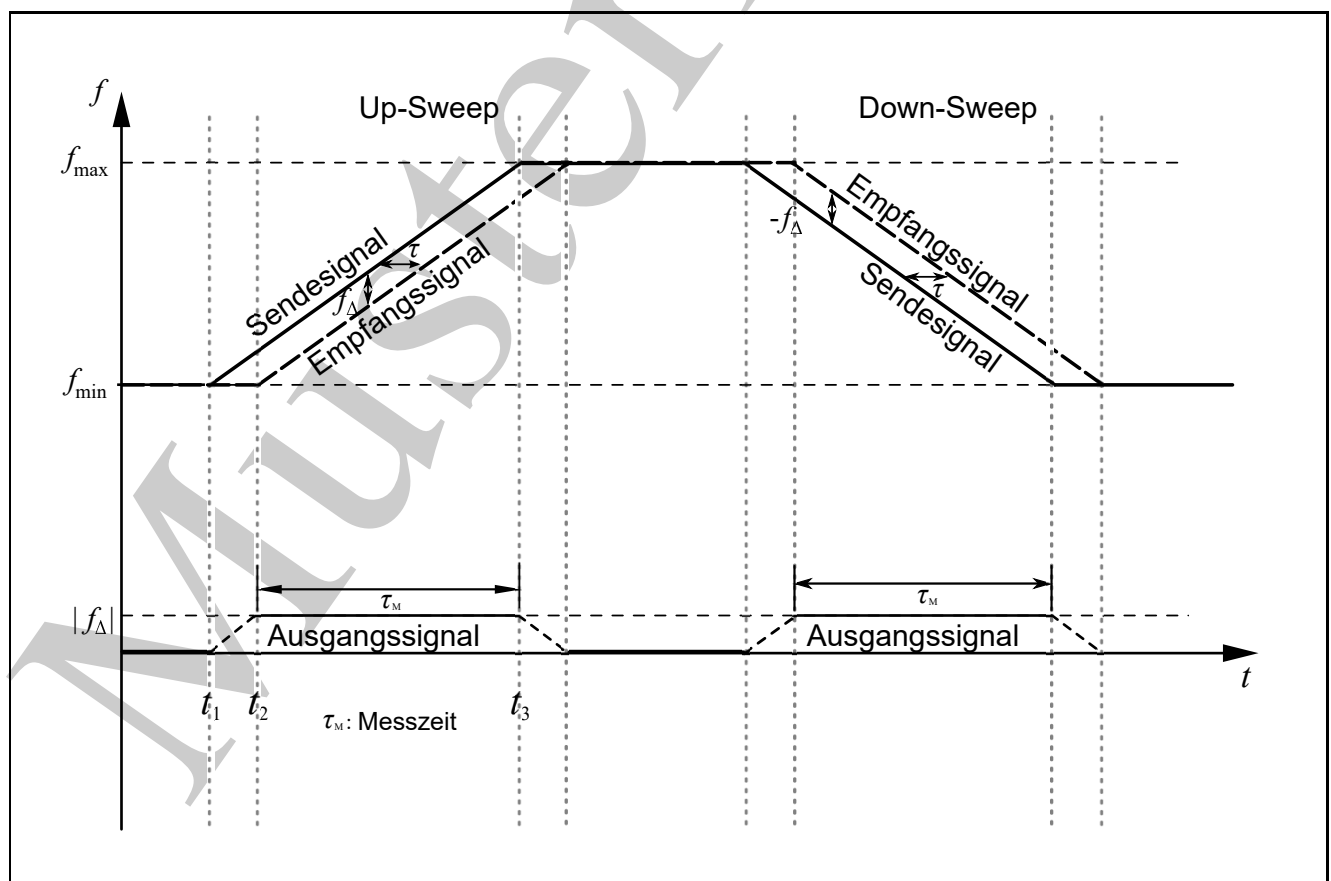
Radar

In heutigen Automobilradaren kommen FMCW-basierte Verfahren zur Anwendung. In der unten stehenden Zeichnung ist das Blockdiagramm eines solchen FMCW-Radars abgebildet.



- a) Die unten stehende Abbildung zeigt den zeitlichen Verlauf der Frequenz von Sende- und Empfangssignal. Zeichnen Sie ausgehend hiervon den zeitlichen Verlauf des Betrags der Beat-Frequenz $|f_{\Delta}|$, die sich durch Mischen des Empfangs- und Sendesignals im Empfänger ergibt.

(4P.)



b) Skizzieren Sie im Folgenden die Spannungssignale in Abhängigkeit der Zeit für

(2 P.)

1. das Sendesignal $s_0(t)$ zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_3 aus Aufgabenteil a).
2. das Ausgangssignal $s_{\text{filter}}(t)$ nach dem Filter zwischen den Zeitpunkten t_2 und t_3 aus Aufgabenteil a).

1. Sendesignal $s_0(t)$



2. Ausgangssignal $s_{\text{filter}}(t)$ nach dem Filter



Lösung: 1. Chirp, 2. sinusförmig

c) Ein 24 GHz FMCW-Radar weist eine theoretische Entfernungsauflösung von $\Delta R = 0,6 \text{ m}$ bei einer Mess- bzw. Sweepdauer von $T = 10 \text{ ms}$ auf. Die Radarmessungen finden im Medium Luft ($\epsilon_r = 1$) statt.

(3 P.)



- Wie groß ist die Bandbreite B des Radars in MHz?
- Wie groß ist die Dopplerauflösung Δf_D des Radars in Hz?
- Wie groß ist die Geschwindigkeitsauflösung des Radars in m/s?

$$B = \frac{c_0}{2 \cdot \Delta R} = 250 \text{ MHz}$$

$$\Delta f_D = \frac{1}{T} = 100 \text{ Hz}$$

$$\Delta v = \frac{\Delta f_D \cdot c_0}{2 \cdot f_c} = 0,625 \text{ m/s}$$

d) Auf Grund eines technischen Defekts wird die 24 GHz Radarantenne ($G = 15 \text{ dBi}$) des vorausfahrenden Fahrzeugs kurzgeschlossen. Hierdurch wird die komplette Leistung, die von dieser Radarantenne empfangen wurde, am Antennenport zurück reflektiert. Welchen RCS weist diese Radarantenne in Folge dessen auf?

(4 P.)



Der Radarrückstreuquerschnitt ist das Verhältnis aus der zurück reflektierten, von der Antenne fokussierten Leistung $P_t \cdot G$ und der am Objekt eintreffenden Leistungsdichte S_t :

$$\sigma = \frac{P_t \cdot G}{S_t}$$

Die am Kurzschluss reflektierte Leistung entspricht der aufgenommenen Leistung:

$$P_t = S_t \cdot A_{W, \text{eff}}$$

$$= S_t \cdot \frac{G \cdot \lambda^2}{4\pi}$$

Durch Einsetzen lässt sich der gesuchte RCS bestimmen zu:

$$\sigma = \frac{S_t \cdot \frac{G \cdot \lambda^2}{4\pi} \cdot G}{S_t}$$

$$= \frac{G^2 \cdot \lambda^2}{4\pi}$$

$$= 0,012 \text{ m}^2$$

- e) Ein monostatisches FMCW-Radar soll im Automobilbereich als Automatic Cruise Control (ACC) Radar bei 24 GHz eingesetzt werden. Die Sendeleistung beträgt $P_{Tx} = 12$ dBm und der Gewinn von Sende- und Empfangsantenne $G = 8$ dBi. Mit dem Radar sollen in 100 m Entfernung Objekte mit einem Radarrückstreuquerschnitt von 1 m^2 gerade noch detektiert werden. Welche minimale Empfangsleistung in dBm muss in Folge dessen das Radar mindestens noch empfangen können?

(4P.)



Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{c_0}{f_c} = 0,0125 \text{ m}$$

Sendeleistung in lineare Größe umrechnen:

$$P_{Tx} = \frac{10^{12/10}}{1000} \text{ W} = 1,58 \cdot 10^{-2} \text{ W}$$

Gewinn in lineare Größe umrechnen:

$$G = 10^{8/10} = 6,31$$

Für die Empfangsleistung P_{Rx} gilt die Radargleichung $P_{Rx} = \frac{P_{Tx} G^2 \sigma \lambda^2}{(4\pi)^3 R^4}$,
wobei $G_{Tx} = G_{Rx} = G$ gilt, da ein monostatisches Radar eingesetzt wird.

Einsetzen der Zahlenwerte liefert:

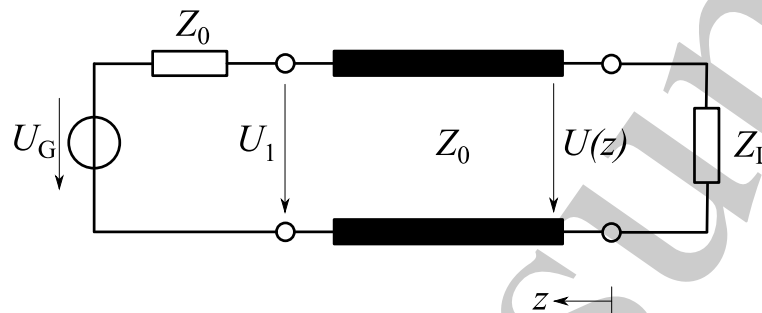
$$P_{Rx, \min} = \frac{0,0158 \text{ W} \cdot 6,31^2 \cdot (0,0125 \text{ m})^2}{(4\pi)^3 \cdot (100 \text{ m})^4} \approx 4,95 \cdot 10^{-16} \text{ W} = -123,05 \text{ dBm}$$

Aufgabe 3

(gesamt 17 Punkte)

Stehende Wellen und Leitungen

Gegeben sei die in der Skizze gezeigte verlustfreie Leitung mit Leitungswellenwiderstand $Z_0 = 50 \Omega$. Die Leitung wird von einer Wechselspannungsquelle gespeist, die eine Spannungsamplitude von $U_G = 2 \text{ V}$ aufweist. Der auf Z_0 bezogene Reflexionsfaktor der Lastimpedanz Z_L beträgt $r_L = 0,75e^{j\frac{\pi}{8}}$.



- a) Berechnen Sie den jeweils kleinsten Wert $\frac{z}{\lambda} > 0$, für den $|U(z)|$ minimal bzw. maximal wird.

(3 P.)

Minima:

$$\begin{aligned}\varphi_L - 2\beta z_{\min} &= \frac{\pi}{8} - 4\pi \frac{z_{\min}}{\lambda} \stackrel{!}{=} \pi + n \cdot 2\pi \quad n \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \frac{z_{\min}}{\lambda} &= -\frac{7}{32} - \frac{n}{2} \\ \text{1. Minimum: } \Rightarrow \frac{z_{\min,1}}{\lambda} &= \frac{9}{32}\end{aligned}$$

Maxima:

$$\begin{aligned}\varphi_L - 2\beta z_{\max} &= \frac{\pi}{8} - 4\pi \frac{z_{\max}}{\lambda} \stackrel{!}{=} n \cdot 2\pi \quad n \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \frac{z_{\max}}{\lambda} &= \frac{1}{32} - \frac{n}{2} \\ \text{1. Maximum: } \Rightarrow \frac{z_{\max,1}}{\lambda} &= \frac{1}{32}\end{aligned}$$

- b) Berechnen Sie das Minimum und Maximum von
- $|U(z)|$
- auf der Leitung.

(2 P.)

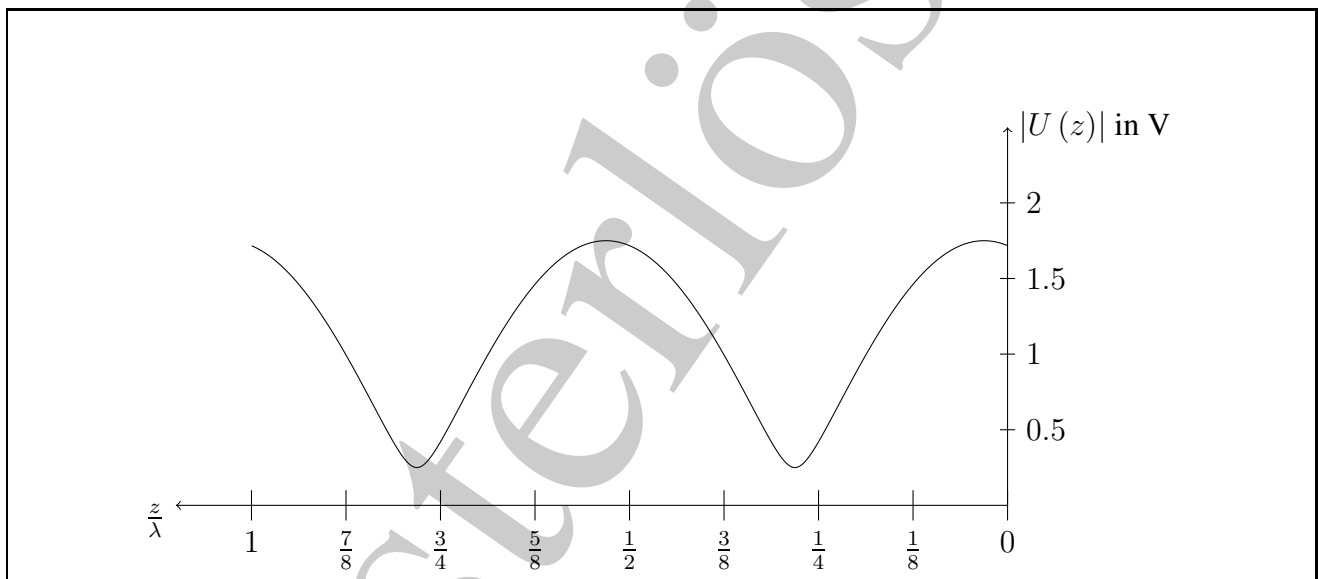


$$|U(z)|_{\max} = \frac{|U_G|}{2} \cdot (1 + |r_L|) = 1,75 \text{ V}$$

$$|U(z)|_{\min} = \frac{|U_G|}{2} \cdot (1 - |r_L|) = 0,25 \text{ V}$$

- c) Skizzieren Sie mithilfe Ihrer Ergebnisse aus a) und b) den Spannungsverlauf auf der Leitung. Achten Sie auf korrekte Achsenbeschriftungen inklusive Einheiten.

(2 P.)



- d) Für die Spannung
- U_1
- am Eingang der Leitung gilt
- $U_1 = U_{1,\text{Hin}} + U_{1,\text{Rück}}$
- . Leiten Sie allgemein die komplexe Amplitude der zur Lastimpedanz laufenden Spannungswelle
- $U_{1,\text{Hin}}$
- in Abhängigkeit der Generatorspannung
- U_G
- her.

(3 P.)

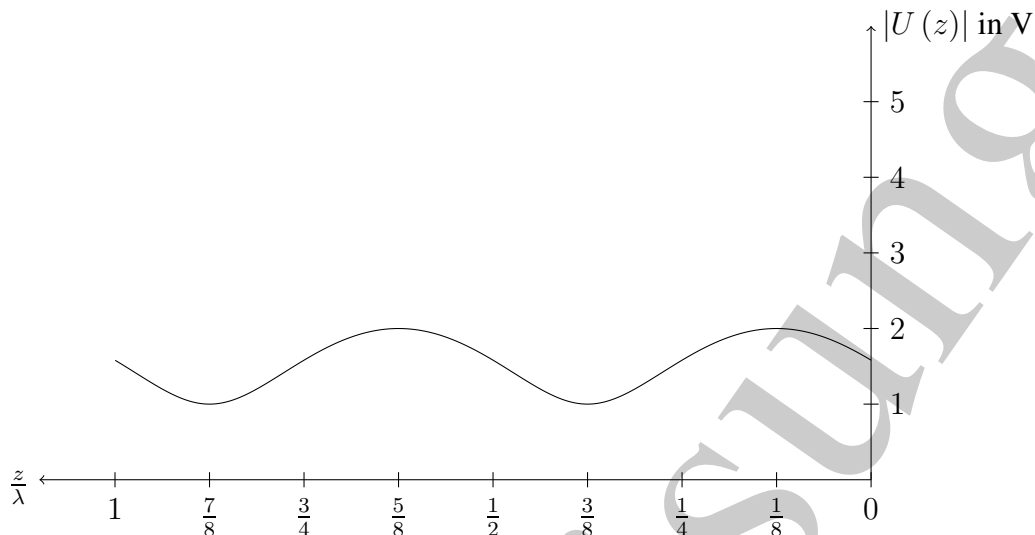


Maschengleichung am Eingang:

$$U_G = I_1 Z_0 + U_1 = \left(\frac{U_{1,\text{Hin}}}{Z_0} - \frac{U_{1,\text{Rück}}}{Z_0} \right) Z_0 + (U_{1,\text{Hin}} + U_{1,\text{Rück}}) = 2 U_{1,\text{Hin}}$$

$$\Rightarrow U_{1,\text{Hin}} = \frac{U_G}{2}$$

- e) Gegeben sei der folgende Spannungsverlauf auf einer verlustlosen Leitung mit Wellenwiderstand $Z_0 = 50 \Omega$. Ermitteln Sie Phase (im Bereich $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_L \leq \frac{\pi}{2}$) und Betrag des Reflexionsfaktors der Lastimpedanz, mit der die Leitung an der Stelle $\frac{z}{\lambda} = 0$ abgeschlossen ist. (3 P.)



Bestimmung der Phase des Reflexionsfaktors aus der Phasenbedingung für Minima:

$$\varphi_L - 2\beta z_{\min} \stackrel{!}{=} \pi + n \cdot 2\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

Aus der Abbildung:

$$\frac{z_{\min}}{\lambda} = \frac{3}{8} + \frac{n}{2} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \varphi_L = \frac{\pi}{2}$$

Bestimmung des Betrags des Reflexionsfaktors:

$$\text{VSWR} = \frac{|U(z)|_{\max}}{|U(z)|_{\min}} = \frac{1 + |r_L|}{1 - |r_L|}$$

$$|r_L| = \frac{|U(z)|_{\max} - |U(z)|_{\min}}{|U(z)|_{\max} + |U(z)|_{\min}} = \frac{1}{3}$$

- f) Welche Bedingung gilt für den Realteil der Ausbreitungskonstante γ im Fall einer verlustlosen Leitung? (1 P.)



$$\alpha = \Re\{\gamma\} = 0$$

- g) Gegeben sei eine verlustfreie Leitung mit $Z_0 = 50 \Omega$ und Länge $l = \frac{\lambda}{4}$, die mit einer Lastimpedanz abgeschlossen ist, die durch den Reflexionsfaktor $r_L = 0,2 e^{j\frac{\pi}{4}}$ beschrieben wird (Bezug ebenfalls Z_0). Bestimmen Sie den Reflexionsfaktor am Eingang der Leitung. (2 P.)



Entweder direkt aus der Eigenschaft der $\frac{\lambda}{4}$ -Leitung: $r_{IN} = -r_L = 0,2 e^{-j\frac{3}{4}\pi}$ oder durch Berechnung:
 $r_{IN} = r_L e^{-2\gamma\frac{\lambda}{4}} = r_L e^{-j\pi} = 0,2 e^{-j\frac{3}{4}\pi}$

- h) Von einer unbekannten Lastimpedanz Z_L wird der Reflexionsfaktor $r_L = 0,25$ gemessen (Bezug $Z_0 = 100 \Omega$). Berechnen Sie den Wert der Lastimpedanz Z_L in Ω . (1 P.)



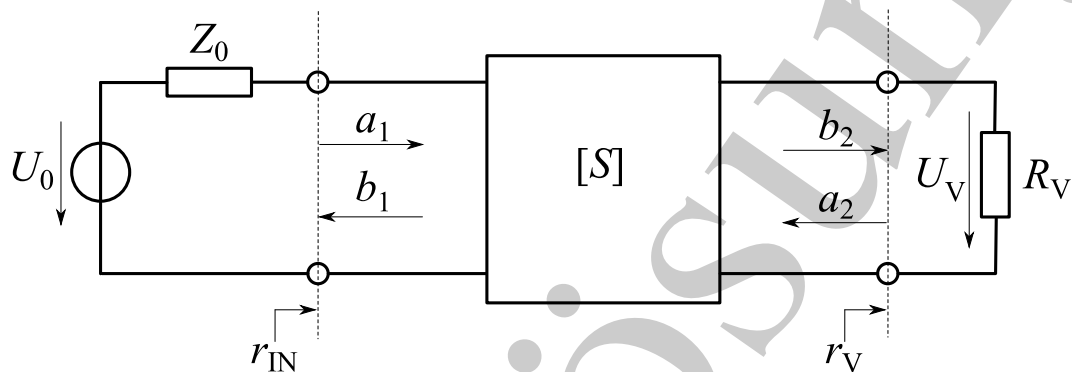
$$Z_L = \frac{1 + r_L}{1 - r_L} Z_0 = 166,7 \Omega \quad (1)$$

Aufgabe 4

(gesamt 17 Punkte)

Mikrowellen-Netzwerkanalyse

Das unten gezeigte Zweitor wird durch die Streumatrix $[S] = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,08 \\ 15 & 0,1 \end{pmatrix}$ beschrieben. Der Bezugswiderstand für die Streuparameter ist $Z_0 = 50 \Omega$. Das Zweitor wird so gespeist, dass sich $a_1 = 1 \sqrt{W}$ ergibt. Der Lastwiderstand beträgt $R_V = 10 \Omega$.



- a) Berechnen Sie den Wert der Streuvariablen b_2 in obiger Anordnung.

(3 P.)

$$r_V = \frac{a_2}{b_2} = \frac{R_V - Z_0}{R_V + Z_0} = -\frac{2}{3}$$

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 = S_{21}a_1 + S_{22}r_V b_2$$

$$b_2 (1 - S_{22}r_V) = S_{21}a_1$$

$$\Rightarrow b_2 = \frac{S_{21}}{1 - S_{22}r_V} a_1 = 14,1 \sqrt{W}$$

b) Ermitteln Sie die von R_V aufgenommene Wirkleistung (in W).

(2 P.)



$$P_V = \frac{1}{2} (|b_2|^2 - |a_2|^2) = \frac{1}{2} |b_2|^2 (1 - |r_V|^2) = 55,2 \text{ W}$$

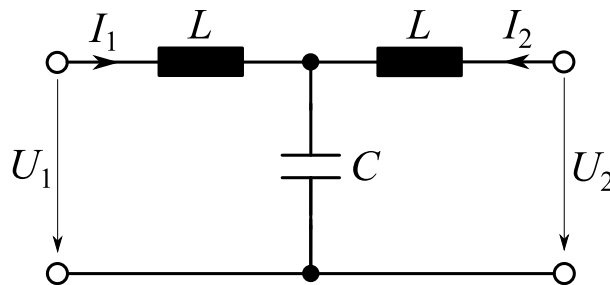
c) Berechnen Sie die komplexe Spannungsamplitude U_V , die in obiger Anordnung über dem Lastwiderstand R_V abfällt.

(2 P.)



$$U_V = \sqrt{Z_0} (b_2 + a_2) = \sqrt{Z_0} b_2 (1 + r_V) = 33,2 \text{ V}$$

Gegeben sei folgendes Zweitor.



d) Bestimmen Sie die Z -Parameter Z_{11} und Z_{12} des Zweitors.

(2 P.)



$$Z_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$
$$Z_{12} = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{1}{j\omega C}$$

e) Um welchen Filtertyp handelt es sich bei obigem Zweitor (Tiefpass, Hochpass, Bandpass, Bandstop)?

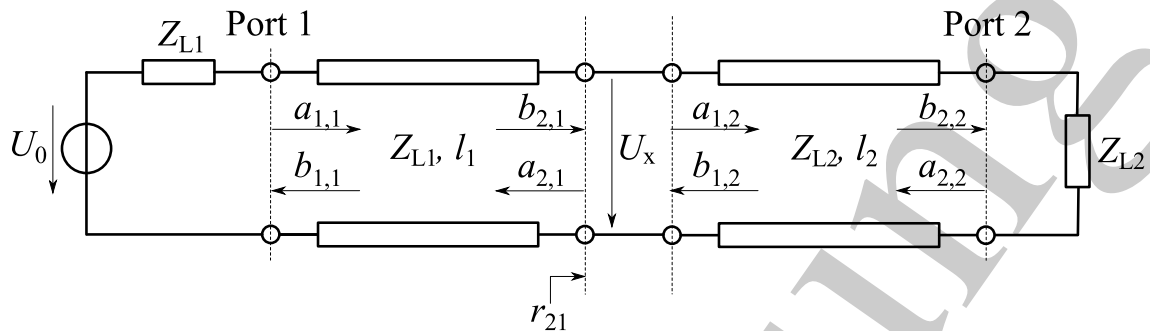
(1 P.)



Tiefpass-Filter

- f) Gegeben sei folgende Leitungsanordnung aus zwei verlustfreien Leitungen mit Leitungswellenwiderständen Z_{L1} und Z_{L2} und zugehörigen Längen l_1 bzw. l_2 . Der Bezugswiderstand zur Bestimmung der S -Parameter ist Z_{L1} für Port 1, und Z_{L2} für Port 2. Berechnen Sie für die gezeigte Leitungsanordnung den Streuparameter S_{11} in Abhängigkeit von Z_{L1} , Z_{L2} , l_1 und l_2 .

(3 P.)



Berechnung des Reflexionsfaktors an der Schnittstelle der beiden Leitungen, bezogen auf Z_{L1} :

$$r_{21} = \frac{a_{2,1}}{b_{2,1}} = \frac{Z_{L2} - Z_{L1}}{Z_{L2} + Z_{L1}}$$

Mithilfe der S -Parameter für eine verlustfreie Leitung ergibt sich:

$$\begin{aligned} b_{2,1} &= e^{-j\beta l_1} a_{1,1} \\ b_{1,1} &= e^{-j\beta l_1} a_{2,1} = e^{-j\beta l_1} r_{21} b_{2,1} = e^{-j2\beta l_1} r_{21} a_{1,1} \\ \Rightarrow S_{11} &= \left. \frac{b_{1,1}}{a_{1,1}} \right|_{a_{2,2}=0} = \frac{e^{-j2\beta l_1} r_{21} a_{1,1}}{a_{1,1}} = e^{-j2\beta l_1} r_{21} \end{aligned}$$

- g) Berechnen Sie für obige Leitungsanordnung den Streuparameter S_{21} in Abhängigkeit von Z_{L1} , Z_{L2} , l_1 und l_2 . Bezeichnen Sie die von Ihnen genutzten Streuvariablen gemäß obiger Skizze.

(4P.)



Die Streuvariablen sind auf die jeweiligen Wellenwiderstände der beiden Leitungen bezogen, und gehen deshalb an der Schnittstelle nicht identisch ineinander über. Zur Berechnung der Streuvariablen am Eingang der zweiten Leitung wird die Spannung an der Schnittstelle berechnet:

$$U_x = \sqrt{Z_{L1}} (b_{2,1} + a_{2,1}) = \sqrt{Z_{L2}} (a_{1,2} + b_{1,2})$$

Da die zweite Leitung reflexionsfrei abgeschlossen ist ($a_{2,2} = 0$), gilt $b_{1,2} = 0$ und damit

$$\begin{aligned} U_x &= \sqrt{Z_{L1}} (b_{2,1} + a_{2,1}) = \sqrt{Z_{L2}} a_{1,2} \\ \Rightarrow a_{1,2} &= \sqrt{\frac{Z_{L1}}{Z_{L2}}} (b_{2,1} + a_{2,1}) \end{aligned}$$

Mit den in Aufgabenteil f) hergeleiteten Beziehungen ergibt sich:

$$a_{1,2} = \sqrt{\frac{Z_{L1}}{Z_{L2}}} (b_{2,1} + a_{2,1}) = \sqrt{\frac{Z_{L1}}{Z_{L2}}} b_{2,1} (1 + r_{21}) = \sqrt{\frac{Z_{L1}}{Z_{L2}}} (1 + r_{21}) e^{-j\beta l_1} a_{1,1}$$

Mithilfe der S -Parameter für Leitung 2 ergibt sich:

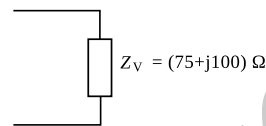
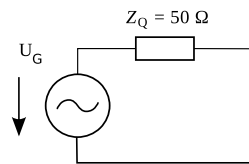
$$\begin{aligned} b_{2,2} &= e^{-j\beta l_2} a_{1,2} \\ \Rightarrow S_{21} &= \left. \frac{b_{2,2}}{a_{1,1}} \right|_{a_{2,2}=0} = \sqrt{\frac{Z_{L1}}{Z_{L2}}} (1 + r_{21}) e^{-j\beta l_1} e^{-j\beta l_2} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(gesamt 17 Punkte)

Smithdiagramm

a)

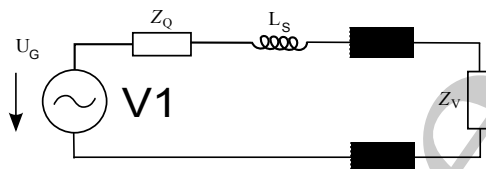


(5 P.)

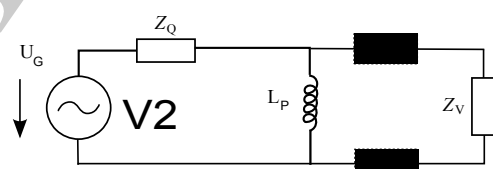
Ein Verbraucher mit der Impedanz $Z_V = (75 + j100) \Omega$ soll an eine Quelle mit der Impedanz $Z_Q = 50 \Omega$ reflexionsfrei angeschlossen werden. Zur Verfügung stehen Ihnen folgende Elemente:

- eine Spule mit beliebiger Induktivität
- eine serielle Leitung beliebiger Länge mit Wellenwiderstand $Z_L = 50 \Omega$

Zeichnen Sie eine möglichst einfache Anpassschaltung mit genau zwei Elementen in obiges Schaltbild. Zeichnen Sie den Transformationsweg in ein Smith Diagramm ein und geben Sie die Werte bzw. Leitungslängen der verwendeten Elemente an, für die bei einer Frequenz von 2 GHz Anpassung herrscht. Alle Leitungen sind verlustfrei und besitzen eine relative Dielektrizitätszahl von $\epsilon_r = 2$.



oder



Auswahl der Bezugsimpedanz $Z_B = 50 \Omega \Rightarrow \frac{Z_V}{Z_B} = 1,5 + j2, \frac{Z_Q^*}{Z_B} = 1,0$

Beispiel 1:

Vorgeschaltete Leitung nach $Z_1/Z_B = 1,0 - j1,75$

Ablesen an der äußeren Skala liefert $\frac{l}{\lambda} = 0,318 - 0,198 = 0,12$

$$\Rightarrow l = 0,12 \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{2} \cdot 2 \text{ GHz}} = 1,27 \text{ cm}$$

Serielle Spule nach $Z_Q^*/Z_B = 1,0 \Rightarrow j\omega L_S = Z_Q^* - Z_1 = (1,0 - (1,0 - j1,75)) \cdot 50 \Omega = 87,5 \Omega$
 $\Rightarrow L_S = 6,96 \text{ nH}$

Beispiel 2:

Vorgeschaltete Leitung nach $Z_2/Z_B = 0,26 - j0,43$

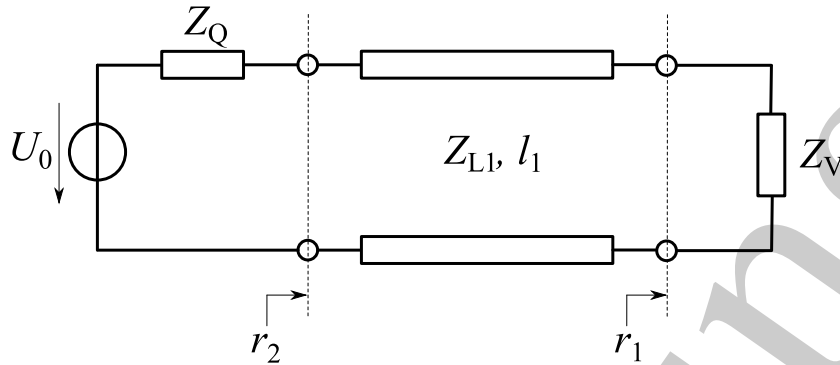
Ablesen an der äußeren Skala liefert $\frac{l}{\lambda} = 0,431 - 0,198 = 0,233$

$$\rightarrow l = 0,233 \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{2} \cdot 2 \text{ GHz}} = 2,47 \text{ cm}$$

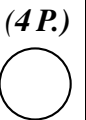
Parallele Spule nach $Z_Q^*/Z_B = 1,0 \Rightarrow j\omega L_P = \frac{Z_B}{\frac{1}{Z_Q^*/Z_B} - \frac{1}{Z_2/Z_B}} = \frac{50 \Omega}{\frac{1}{1,0} - \frac{1}{0,26 - j0,43}} \approx 29,35 \Omega$

$$\Rightarrow L_P = 2,34 \text{ nH}$$

Gegeben sei das abgebildete Netzwerk, das aus einer Lastimpedanz $Z_V = 250 \Omega$, einer Quellimpedanz $Z_Q = 10 \Omega$ und einer Anpassleitung mit $Z_{L1} = 50 \Omega$ und $l_1 = \lambda/4$ besteht.



- b) Zeichnen Sie die Impedanztransformation durch die Anpassleitung in ein Smith-Diagramm ein. Bestimmen Sie aus dem Smith-Diagramm die Reflexionsfaktoren r_1 und r_2 . (4P.)

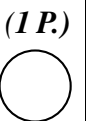


Durch Ablesen aus dem Smith-Chart ergibt sich

$$r_1 = \frac{2}{3}$$

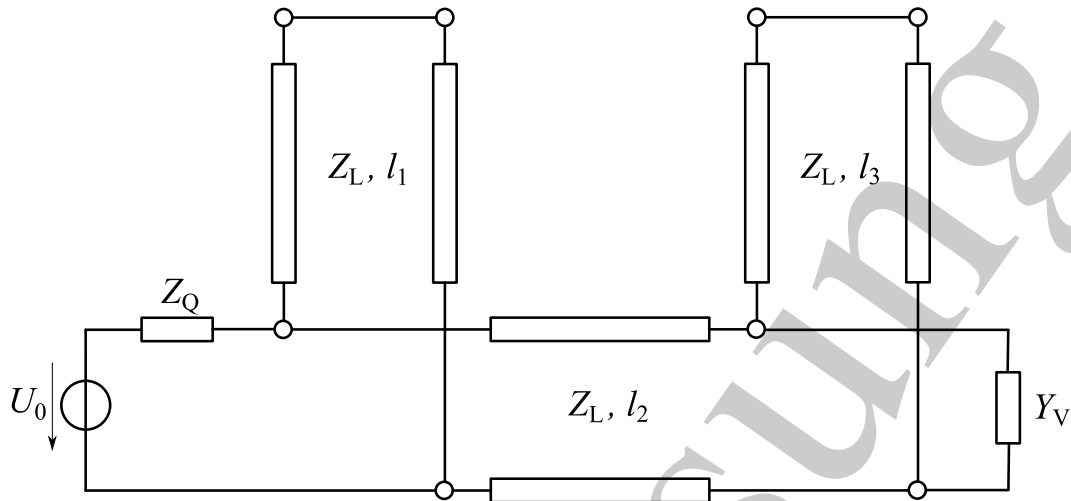
$$r_2 = -\frac{2}{3}$$

- c) Entsteht auf der $\lambda/4$ -Leitung eine stehende Welle? Begründen Sie Ihre Antwort. (1P.)



Die Leitung ist nicht mit ihrem Leitungswellenwiderstand abgeschlossen ($Z_V \neq Z_{L1}$), deshalb entsteht auf der Leitung eine stehende Welle.

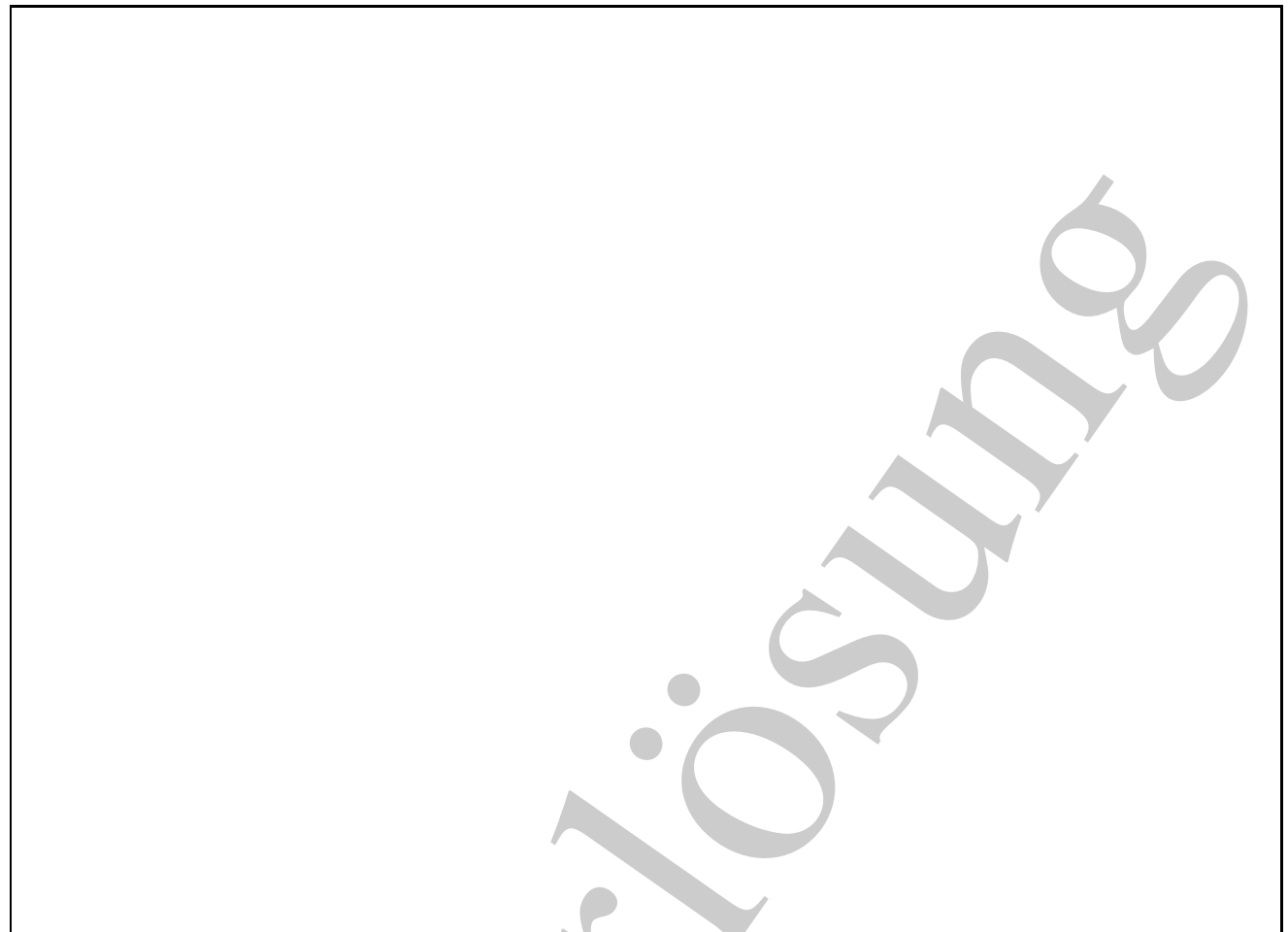
Die unten gezeigte Leitungsanordnung wird dazu genutzt, die Lastadmittanz $Y_V = (0,01 - j0,006) \text{ S}$ an den Quellwiderstand $Z_Q = 250 \Omega$ anzupassen. Die kurzgeschlossenen Stichleitungen besitzen die Längen $l_1/\lambda = 0,3475$ und $l_3/\lambda = 0,134$. Alle drei Leitungen weisen einen Wellenwiderstand $Z_L = 100 \Omega$ auf.



- d) Bestimmen Sie mithilfe des Smith-Charts die Länge l_2/λ so, dass die Lastadmittanz optimal an den Quellwiderstand angepasst ist. Markieren und beschriften Sie die einzelnen Transformationsschritte sowie Zwischenimpedanzen/-admittanzen in einem Smith-Chart, und begründen Sie Ihr Vorgehen. Die Zuordnung der einzelnen Transformationsschritte zu den Transformationselementen muss klar erkennbar sein.

(7P.)





Musterlösung

Für die Lösungsskizze wird aufgrund der parallelen Stichleitungen das Smith-Chart in Leitwertform gewählt. Aufgrund des Wellenwiderstands $Z_L = 100 \Omega$ der Leitungen wird eine Bezugsimpedanz von $Z_B = 100 \Omega$ gewählt. Dementsprechend ergibt sich

$$Y_V Z_B = 1 - j 0,6$$

$$Y_Q^* Z_B = 0,4$$

1. Transformation durch Leitung 3

- Leitung 3 ist eine kurzgeschlossene parallele Stichleitung, und erzeugt deshalb einen Blindleitwert. Durch Bewegung vom Kurzschlusspunkt entlang des $|r| = 1$ -Kreises im Uhrzeigersinn entsprechend der Länge $l_3/\lambda = 0,134$, ergibt sich $B_{L3} Z_B \approx -0,89$.
- Die Lastadmittanz Y_V wird dementsprechend auf dem $G Z_B = 1$ -Kreis gegen den Uhrzeigersinn transformiert

2. Transformation durch Leitung 1

- Leitung 1 ist eine kurzgeschlossene, parallele Stichleitung, und erzeugt deshalb einen Blindleitwert. Durch Bewegung vom Kurzschlusspunkt entlang des $|r| = 1$ -Kreises im Uhrzeigersinn entsprechend der Länge $l_1/\lambda = 0,3475$, erhält man $B_{L1} Z_B \approx 0,7$
- Durch Bewegung entlang des $G Z_B = 0,4$ -Kreises kann auf diese Weise die Admittanz am Eingang von Leitung 2 ermittelt werden.

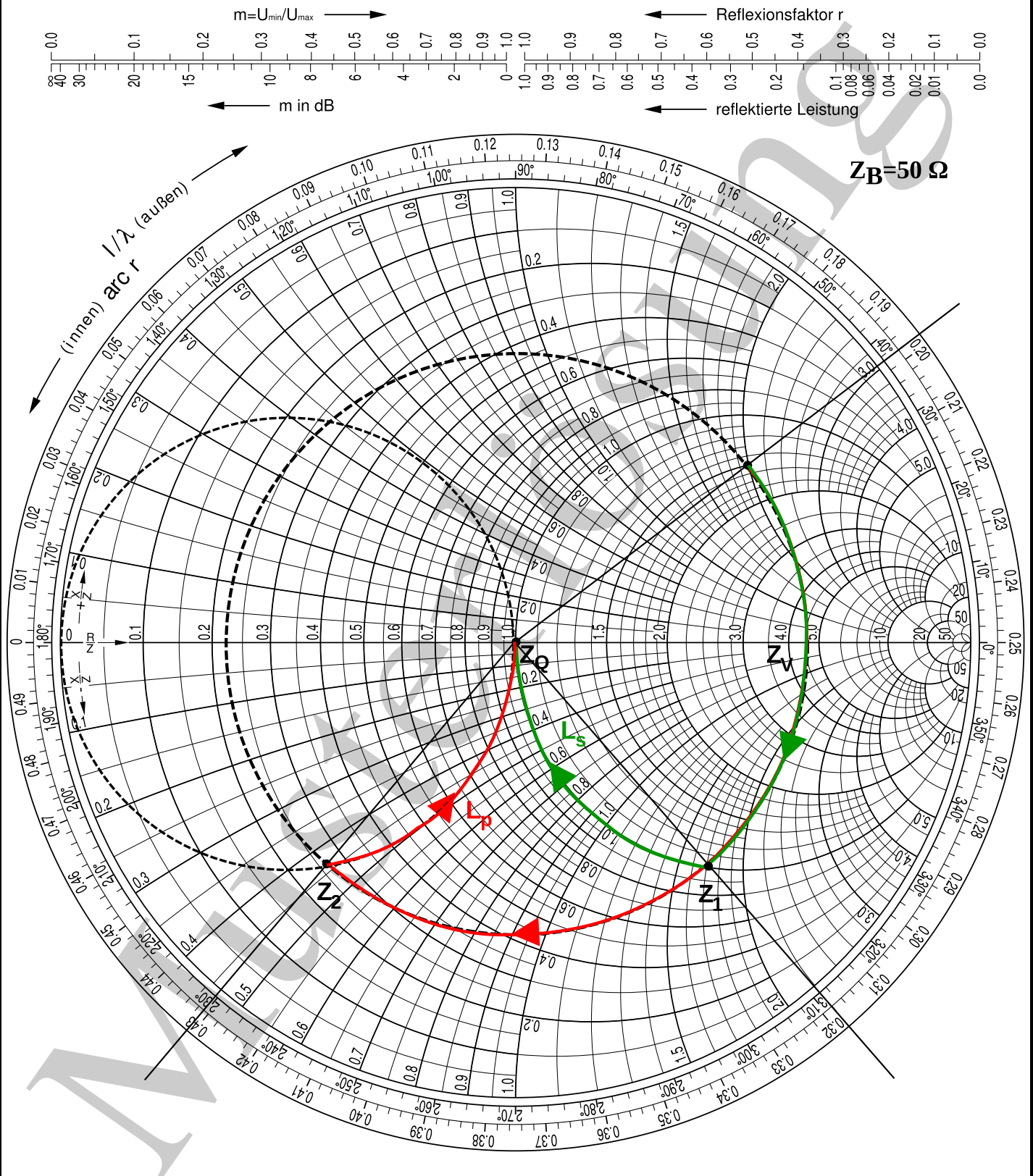
3. Transformation durch Leitung 2

- Die beiden in den vorherigen Schritten ermittelten Admittanzen werden durch eine Leitungstransformation auf dem $|r| = 0,59$ -Kreis ineinander überführt
- Auf der äußeren Skala des Smith-Charts kann die zugehörige Leitungslänge $l_2/\lambda \approx 0,144 - 0,075 = 0,069$ abgelesen werden.

zugehörige
Aufgabennummer:

5a

Widerstandsform

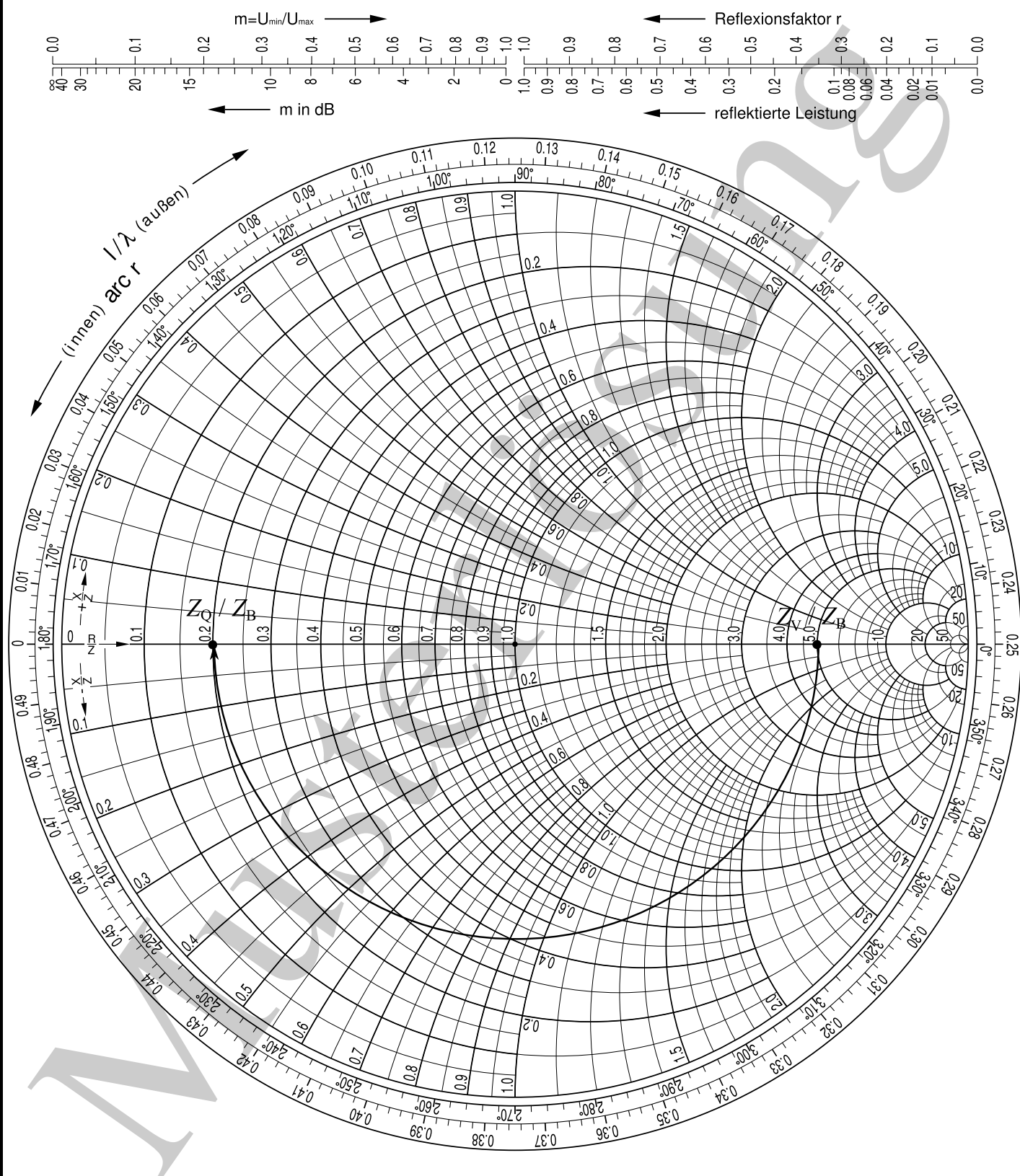
Bezugswiderstand $Z_B = 50 \Omega$ 

Wichtig: Diagramm wird nur gewertet, wenn der obenstehende Datenteil mit Name und Aufgabennummer korrekt ausgefüllt ist. Bezugswiderstand nicht vergessen!

zugehörige
Aufgabennummer:

5b

Widerstandsform

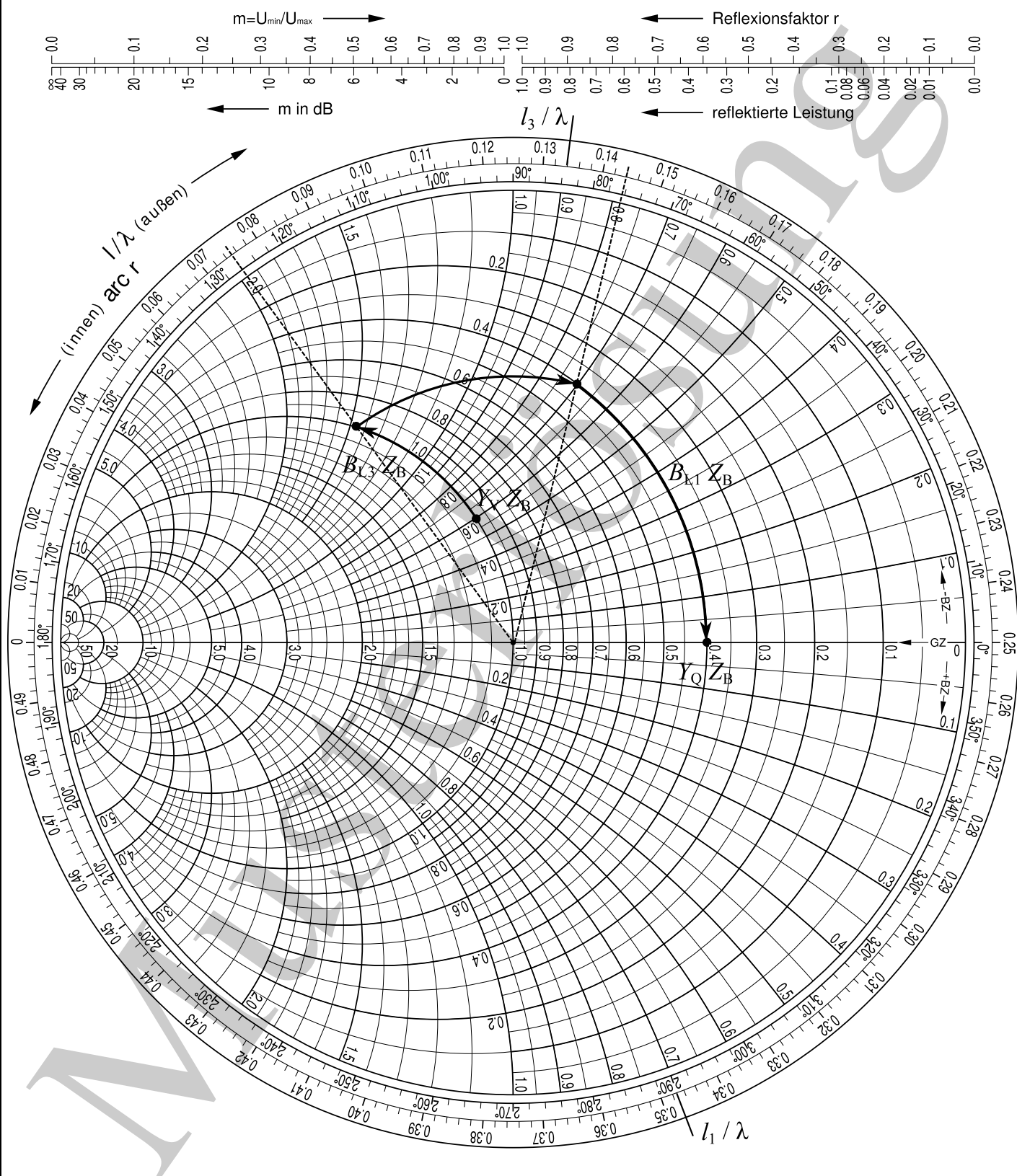
Bezugswiderstand $Z_B = 50\Omega$ 

Wichtig: Diagramm wird nur gewertet, wenn der obenstehende Datenteil mit Name und Aufgabennummer korrekt ausgefüllt ist. Bezugswiderstand nicht vergessen!

zugehörige
Aufgabennummer:

5d

Leitwertform

Bezugswiderstand $Z_B = 100\Omega$ 

Wichtig: Diagramm wird nur gewertet, wenn der obenstehende Datenteil mit Name und Aufgabennummer korrekt ausgefüllt ist. Bezugswiderstand nicht vergessen!

Impedanz $\xleftrightarrow{Z=1/Y}$ Admittanz

$$\underline{Z} = \frac{R}{G^2 + B^2} + j \frac{X}{G^2 + B^2} \quad \underline{Y} = \frac{G}{R^2 + X^2} + j \frac{B}{R^2 + X^2}$$

$$\underline{Z} = \frac{G}{G^2 + B^2} - j \frac{B}{G^2 + B^2} \quad \underline{Y} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2}$$

Kompensation mit dualen Elementen

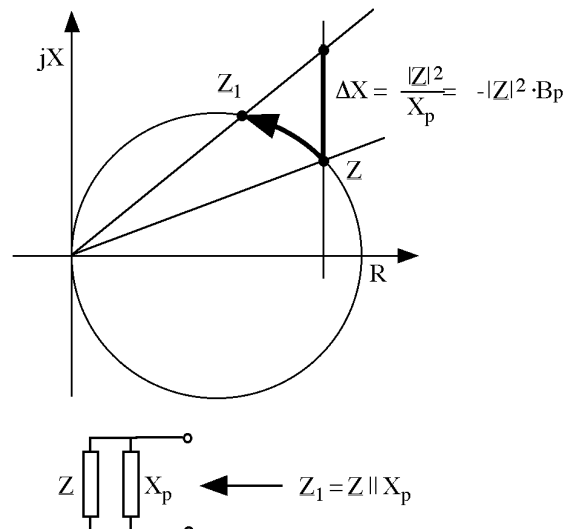


Bedingungen für Kompensation: $X_s = R^2 \cdot B_p$

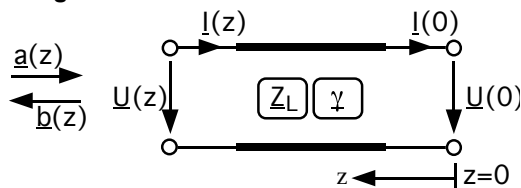
Frequenzfaktor: $F(f) = \sqrt{X_s \cdot B_p}$

krit. Frequenz, Grenzfrequenz: $|F(f_k)| = 1$

Hilfskonstruktion zur Transformation



Leitungen



$$\underline{U}(z) = \underline{U}_H(0)e^{\gamma z} + \underline{U}_R(0)e^{-\gamma z} = \sqrt{Z_L}(\underline{a}(z) + \underline{b}(z))$$

$$\underline{I}(z) = \frac{\underline{U}_H(0)}{Z_L}e^{\gamma z} - \frac{\underline{U}_R(0)}{Z_L}e^{-\gamma z} = \frac{1}{\sqrt{Z_L}}(\underline{a}(z) - \underline{b}(z))$$

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}; \quad Z_L = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

Koaxialleitung

$$Z_L = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

ungedämpfte Leitung (homogenes Dielektrikum und konst. Querschnitt)

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{L'C'} = \omega \cdot \sqrt{\mu\epsilon}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}; \quad C' = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{Z_L}; \quad L' = Z_L \cdot \sqrt{\mu\epsilon}; \quad v_\varphi = \frac{\omega}{\beta}$$

schwach gedämpfte Leitungen ($R' \ll \omega L'; G' \ll \omega C'$)

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \left(\frac{R'}{Z_L} + G' \cdot Z_L \right); \quad G' = \omega C' \cdot \tan(\delta_c); \quad R' \sim \frac{1}{k \cdot s}$$

Dämpfung einer Leitung der Länge l (für hinlaufende Welle a)

$$D/\text{dB} = 10 \cdot \log\left(\frac{P_a(l)}{P_a(0)}\right) = 10 \cdot \log(e^{2\alpha l})$$

Eindringtiefe s

$$s = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

Reflexionsfaktor r

$$\underline{r}(z) = \frac{\underline{U}_R(z)}{\underline{U}_H(z)} = \frac{\underline{b}(z)}{\underline{a}(z)} = \frac{\underline{b}(0)}{\underline{a}(0)} \cdot e^{-2\gamma z}$$

Reflexionsfaktor $\rightarrow$ Impedanz

$$\underline{r}(l) = \frac{\underline{Z}(l) - Z_L}{\underline{Z}(l) + Z_L}; \quad \underline{Z}(l) = \frac{\underline{U}(l)}{\underline{I}(l)} = \frac{1 + \underline{r}(l)}{1 - \underline{r}(l)} \cdot Z_L$$

Anpassungsfaktor, Stehwellenverhältnis

$$m = \frac{1}{VSWR} = \frac{1 - |\underline{r}|}{1 + |\underline{r}|} = \frac{U_{\min}}{U_{\max}}$$

Dem Verbraucher zugeführte Wirkleistung P_w

$$\text{mit: } \underline{a}(z) = \frac{\underline{U}_H(z)}{\sqrt{Z_L}} = \sqrt{Z_L} \cdot \underline{I}_H(z)$$

$$P_w = P_a(0) - P_b(0) = \frac{1}{2} (|\underline{a}(0)|^2 - |\underline{b}(0)|^2)$$

$$= \frac{1}{2} |\underline{a}(0)|^2 \cdot (1 - |\underline{r}(0)|^2)$$

Transformation durch Kettenschaltung einer Leitung

$$\underline{Z}(l) = Z_L \cdot \frac{\underline{Z}(0) + Z_L \tanh(\gamma l)}{Z_L + \underline{Z}(0) \tanh(\gamma l)} = \underline{Z}(0) \cdot \frac{1 + j \frac{Z_L}{\underline{Z}(0)} \tan(\beta l)}{1 + j \frac{\underline{Z}(0)}{Z_L} \tan(\beta l)} \quad \alpha=0$$

Konstanten

$$Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} = 120\pi \Omega$$

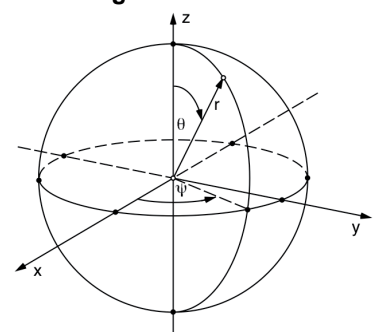
$$c_o = 2,997925 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

$$k = 1,38065 \cdot 10^{-23} \frac{Ws}{K}$$

$$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

$$\epsilon_o = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

Kugelkoordinaten

Azimuth: ψ Elevation: θ

$$\text{Volumen: } V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{Oberfläche: } F = 4\pi r^2$$

	[S]	[Z]	[Y]	[A] (ABCD)	[T]
S_{11}	S_{11}	$\frac{(Z_{11} - Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}$	$\frac{(Y_0 - Y_{11})(Y_0 + Y_{22}) + Y_{12}Y_{21}}{(Y_{11} + Y_0)(Y_{22} + Y_0) - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{A + B/Z_0 - CZ_0 - D}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$	$\frac{T_{12}}{T_{22}}$
S_{12}	S_{12}	$\frac{2Z_{12}Z_0}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}$	$\frac{-2Y_{12}Y_0}{(Y_{11} + Y_0)(Y_{22} + Y_0) - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{2(AD - BC)}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$	$\frac{T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}}{T_{22}}$
S_{21}	S_{21}	$\frac{2Z_{21}Z_0}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}$	$\frac{-2Y_{21}Y_0}{(Y_{11} + Y_0)(Y_{22} + Y_0) - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{2}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$	$\frac{1}{T_{22}}$
S_{22}	S_{22}	$\frac{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} - Z_0) - Z_{12}Z_{21}}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}$	$\frac{(Y_0 + Y_{11})(Y_0 - Y_{22}) + Y_{12}Y_{21}}{(Y_{11} + Y_0)(Y_{22} + Y_0) - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{-A + B/Z_0 - CZ_0 + D}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$	$\frac{-T_{21}}{T_{22}}$
Z_{11}	$Z_0 \frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	Z_{11}	$\frac{Y_{22}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{A}{C}$	
Z_{12}	$Z_0 \frac{2S_{12}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	Z_{12}	$\frac{-Y_{12}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{AD - BC}{C}$	
Z_{21}	$Z_0 \frac{2S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	Z_{21}	$\frac{-Y_{21}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{1}{C}$	
Z_{22}	$Z_0 \frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	Z_{22}	$\frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{D}{C}$	
Y_{11}	$Y_0 \frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$	Y_{11}	$\frac{D}{B}$	
Y_{12}	$Y_0 \frac{-2S_{12}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$\frac{-Z_{12}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$	Y_{12}	$\frac{BC - AD}{B}$	
Y_{21}	$Y_0 \frac{-2S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$\frac{-Z_{21}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$	Y_{21}	$\frac{-1}{B}$	
Y_{22}	$Y_0 \frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$	Y_{22}	$\frac{A}{B}$	
A	$\frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}}$	A	
B	$Z_0 \frac{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}}$	$\frac{-1}{Y_{21}}$	B	
C	$\frac{1}{Z_0} \frac{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{1}{Z_{21}}$	$\frac{Y_{12}Y_{21} - Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}}$	C	
D	$\frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	D	
T_{11}	$\frac{S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22}}{S_{21}}$				T_{11}
T_{12}	$\frac{S_{11}}{S_{21}}$				T_{12}
T_{21}	$\frac{-S_{22}}{S_{21}}$				T_{21}
T_{22}	$\frac{1}{S_{21}}$				T_{22}