

Schriftliche Prüfung im Fach

Grundlagen der Hochfrequenztechnik

- Bitte beachten Sie die Hinweise auf der folgenden Seite
- Beginnen Sie mit den Aufgaben, die Ihnen am leichtesten fallen

Einzelresultate

Aufgabe	1	2	3	4	5
erreichbare Punkte	17	17	16	18	17
erzielte Punkte					

Gesamtbewertung

Punkte maximal:	Gesamtpunkte:	Bonus:	Note:
85		Ja: ☐ Nein: ☐	



1. Die Prüfungsdauer beträgt 2 Stunden.
2. Zur Bearbeitung der Klausur sind **keine Hilfsmittel** zugelassen, ausser Schreibzeug, Zirkel, Lineal und ein **nicht-programmierbarer, komplexer** Taschenrechner.
3. Die Lösungen müssen auf den ausgegebenen Blättern in den dafür vorgesehenen **Lösungskästen** niedergeschrieben werden. Falls der Platz nicht ausreicht, muss auf dem Lösungsblatt ein Hinweis auf die Fortsetzung gegeben werden und von der Aufsicht ein gestempeltes Zusatzblatt angefordert werden. Alternativ darf auch die Rückseite der Lösungsblätter verwendet werden, wobei auch hier der zugehörige Aufgabenkontext eindeutig anzugeben ist. Bei zweifelhafter Zuordnung kann die Lösung nicht gewertet werden. Benutzen Sie **kein eigenes Papier**.
4. **Bei allen Aufgaben muss der Lösungsweg klar erkennbar und eindeutig dargestellt werden.** In einigen Aufgaben ist dies die wesentliche Prüfungsleistung. Lösungen ohne ausreichende Begründung werden nicht gewertet. Das Gleiche gilt für mehrdeutige Lösungen oder Formulierungen.
5. Diagramme werden nur gewertet, wenn der Datenteil mit Name und Aufgabennummer vollständig ausgefüllt ist. Bei Bedarf können von der Aufsicht zusätzliche Diagramme angefordert werden. **Ungültige Lösungen** müssen klar erkenntlich **durchgestrichen** werden. Liegt mehr als eine Lösung vor, erfolgt keine Wertung.
6. Verwenden Sie bei der Lösung der Aufgaben **weder rote oder grüne Farbe noch Bleistift** und kennzeichnen Sie Ihre Ergebnisse deutlich. Lösungen in roter Farbe oder Bleistift können nicht gewertet werden. Zeichnungen in Diagrammen dürfen mit Bleistift gemacht werden.
7. Tragen Sie vor Beginn der Klausur Nachname, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein und **beschriften Sie jedes Lösungsblatt** mit Ihrem Namen. **Alle** Blätter, auch die Zusatzblätter, müssen den Namen des Kandidaten tragen. Wer diese Regeln, die einer raschen Bearbeitung dienen, nicht einhält, kann nicht erwarten, dass er kurzfristig über das Ergebnis seiner Prüfung informiert wird. Die Lösungsblätter müssen **vollständig**, d.h. zusammen mit allen zusätzlich ausgeteilten Blättern, abgegeben werden. Heften Sie alle Blätter mit der beiliegenden Faltklammer zusammen.
8. Legen Sie Ihren Studentenausweis und den Zulassungsschein bereit.
9. Der Umfang der gesamten Klausur beträgt 28 Seiten und besteht aus 5 Aufgaben. **Prüfen Sie** diese direkt nach Erhalt **auf Vollständigkeit**.
10. Die Ergebnisse der Klausur werden nach der Korrektur am schwarzen Brett des Instituts (Foyer, Geb. 30.10) veröffentlicht. Der Zeitpunkt der Veröffentlichung wird im Internet bekannt gegeben.

Aufgabe 1

(gesamt 17 Punkte)

Allgemeines☐

- a) Welche Funktion erfüllt ein Zirkulator in einem monostatischen Radarsystem?
Handelt es sich bei einem Zirkulator um ein reziprokes oder nichtreziprokes Bauelement?
Begründen Sie kurz.

(2 P.)

☐

In einem monostatischen Radarsystem separiert ein Zirkulator das abzustrahlende und das empfangene Signal, da ansonsten der hohe Signalpegel des Sendesignals den Empfänger übersteuern würde.

Der Zirkulator ist ein nichtreziprokes Bauelement, da ein an Port 1 eingespeistes Signal den Zirkulator an Port 2 verlässt, ein an Port 2 eingespeistes Signal den Zirkulator jedoch nicht umgekehrt an Port 1 sondern an Port 3 verlässt.

- b) Einem Mischer werden die beiden Signale $s_1(t) = A_1 \cdot \cos(2\pi \cdot 2,5 \text{ GHz} \cdot t - \frac{\pi}{4})$ und $s_2(t) = A_2 \cdot \sin(2\pi \cdot 2,4 \text{ GHz} \cdot t)$ zugeführt. Bei welchen Frequenzen befinden sich die Intermodulations- bzw. Mischprodukte 3. Ordnung (Hinweis: Es sind 4 Frequenzen einschließlich Rechenweg gesucht.)?

(4 P.)

☐

Intermodulations- bzw. Mischprodukte 3. Ordnung:

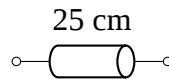
$$2f_1 - f_2 = 2,6 \text{ GHz}$$

$$2f_2 - f_1 = 2,3 \text{ MHz}$$

$$2f_1 + f_2 = 7,4 \text{ GHz}$$

$$2f_2 + f_1 = 7,3 \text{ GHz}$$

- c) Geben Sie die S-Matrix einer verlustlosen Leitung ($\epsilon_r = 1$) an, die eine Länge von $l = 25 \text{ cm}$ aufweist und bei einer Frequenz von $f = 4 \text{ GHz}$ betrieben wird. Der Wellenwiderstand der Leitung entspricht dabei dem Bezugswiderstand der S-Parameter. (2 P.)



- $\lambda = \frac{c_0}{f} = 0,075 \text{ m}$

- Phasendrehung: $e^{-j2\pi \frac{l}{\lambda}} = e^{-j2\pi \frac{0,25 \text{ m}}{0,075 \text{ m}}} = e^{-j\frac{20}{3}\pi} = e^{-j\frac{2}{3}\pi} = e^{-j120^\circ}$

$$S_{\text{Leitung}} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\frac{2}{3}\pi} \\ e^{-j\frac{2}{3}\pi} & 0 \end{bmatrix}$$

- d) Gegeben ist folgender Schaltkreis: (3 P.)

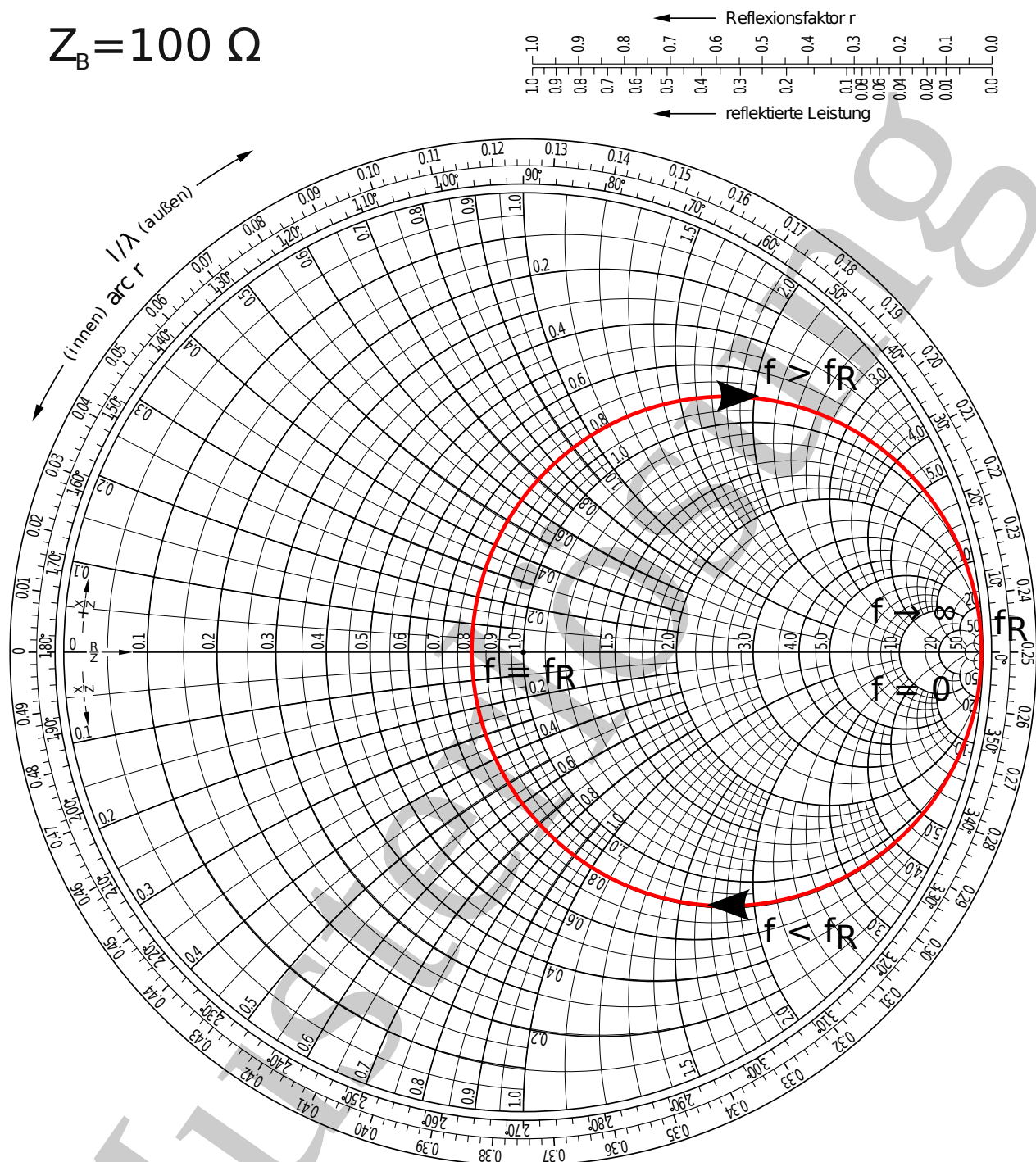


$$C = 5 \text{ pF}, L = 10 \text{ nH}, R = 80 \Omega$$

Zeichnen Sie den Verlauf des Reflexionsfaktors von $f = 0$ bis $f \rightarrow \infty$ in das gegebene Smithdiagramm für einen Bezugswiderstand von $Z_B = 100 \Omega$ ein und kennzeichnen Sie die Umlaufrichtung für zunehmende Frequenzen.

Bei welcher Frequenz schneidet der Reflexionsfaktor die reelle Achse?

$$Z_B = 100 \, \Omega$$



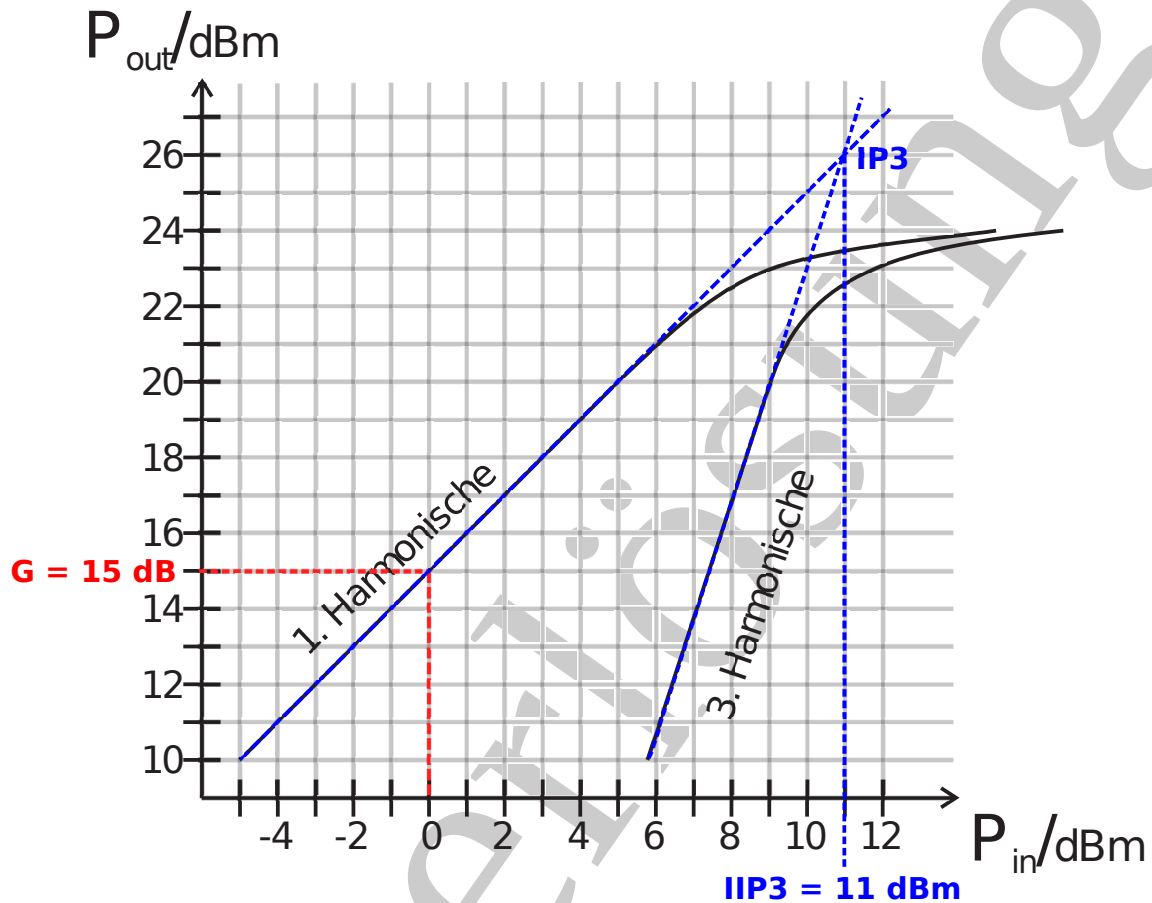
Bei 0 Hz startet der Reflexionsfaktor im Leerlaufpunkt. Mit steigender Frequenz transformiert der Reflexionsfaktor auf einem $R=\text{const.}$ Kreis.

Bei der Resonanzfrequenz $f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 712 \text{ MHz}$ schneidet r die Achse bei $\frac{R}{Z_B} = 0,8$. Hierbei gilt:

$$\frac{1}{j2\pi f_R C} + j2\pi f_R L = 0$$

$$f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 712 \text{ MHz}$$

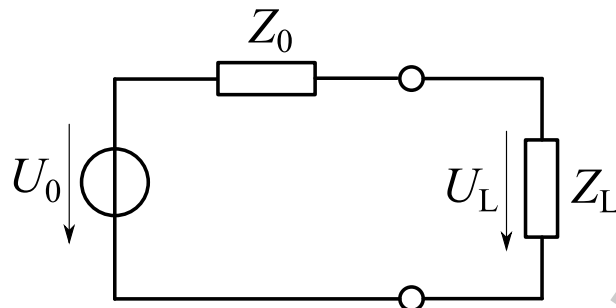
- e) Gegeben ist die folgende Verstärkerkennlinie. Geben Sie die Verstärkung im linearen Bereich und den „Third Input Intercept Point (IIP3)“ an. Ergänzen Sie dazu die Grafik und zeichnen Sie den IIP3 ein. (3 P.)



- Ablesen Verstärkung. Bei 0 dBm Eingangsleistung werden 15 dBm Ausgangsleistung erreicht. Daher beträgt die lineare Verstärkung $G = 15 \text{ dB}$.
- Lineare Bereiche der 1. und 3. Harmonischen verlängern. Schnittpunkt ergibt IP3.
- Zum IP3 gehörige Eingangsleistung ablesen: Der IIP3 beträgt 11 dBm.

- f) Gegeben sei die unten abgebildete Schaltung, die aus einer Wechselspannungsquelle mit Amplitude $U_0 = 4 \text{ V}$ und einem Innenwiderstand von $Z_0 = 50 \Omega$ sowie einer Lastimpedanz Z_L besteht.

(3 P.)



Welche Bedingung muss für Z_L erfüllt sein, damit Leistungsanpassung herrscht? Wie groß ist die Leistung P_L in dBm, die die Quelle bei Leistungsanpassung an die Lastimpedanz abgibt?

Leistungsanpassung: $Z_L = Z_0$

$$U_L = \frac{Z_L}{Z_0 + Z_L} U_0 = \frac{U_0}{2} \quad P_L = \frac{U_L^2}{2Z_L} = \frac{U_0^2}{8Z_L} = 40 \text{ mW} \hat{=} 16 \text{ dBm}$$

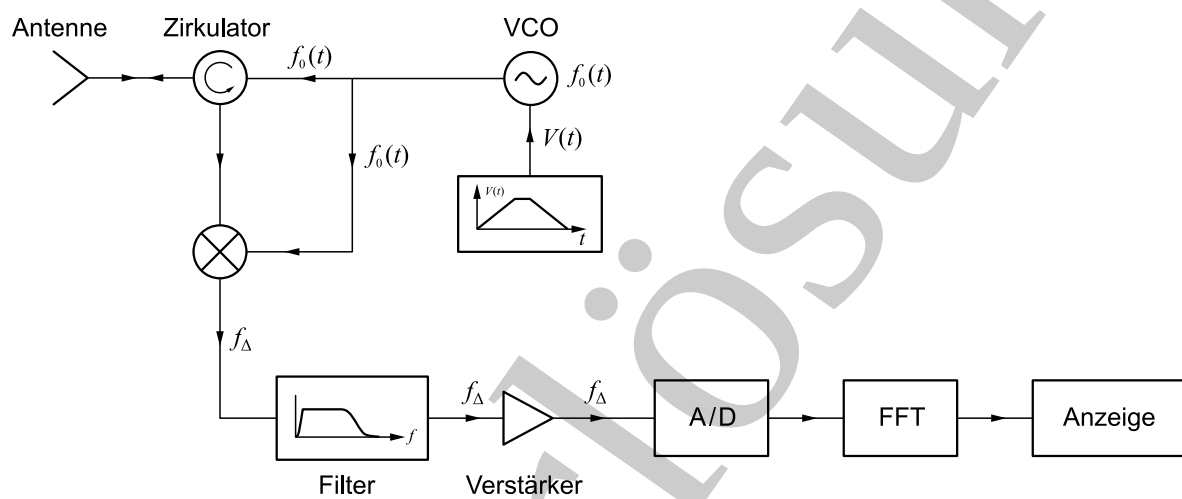
Aufgabe 2

(gesamt 17 Punkte)

Radar

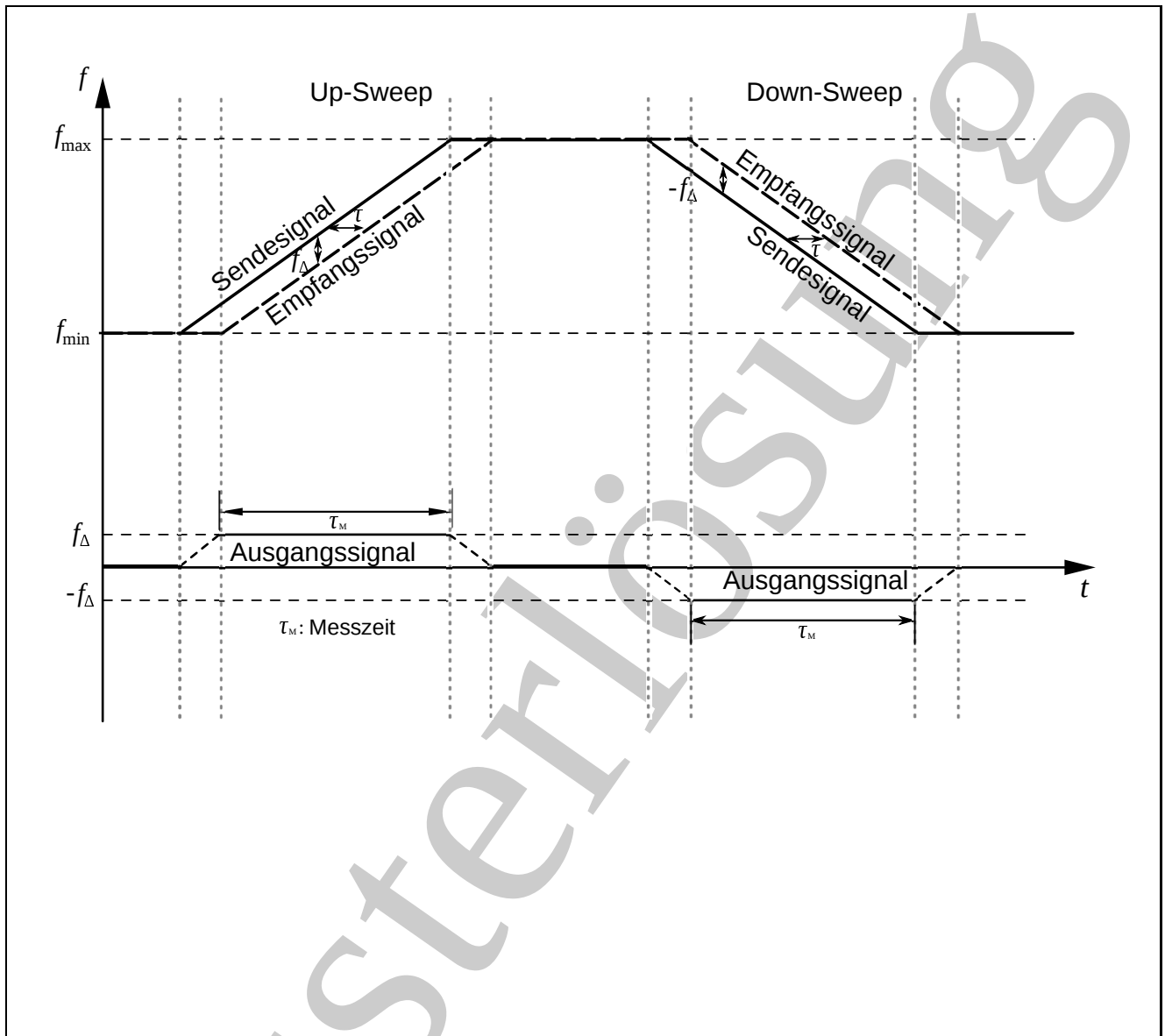
- a) In heutigen Automobilradaren kommen FMCW-basierte Verfahren zur Anwendung. Zeichnen Sie die wichtigsten Komponenten eines solchen FMCW-Radars in ein Blockschaltbild und beschriften Sie diese. (4 P.)

FMCW-Radar



- b) Die unten stehende Abbildung zeigt den zeitlichen Verlauf der Frequenz von Sende- und Empfangssignal. Zeichnen Sie ausgehend hiervon den zeitlichen Verlauf der Beat-Frequenz f_{Δ} , die sich durch Mischen des Empfangs- und Sendesignals im Empfänger ergibt.

(4 P.)



c) Ein 24 GHz FMCW-Radar mit einer Bandbreite von $B = 200$ MHz und einer Mess- bzw. Sweepdauer von $T = 5$ ms wird eingesetzt, um Messungen im Medium Luft ($\epsilon_r = 1$) durchzuführen.

(3 P.)



- Wie groß ist die Entfernungsauflösung ΔR des Radars in m?
- Wie groß ist die Dopplerauflösung Δf_D des Radars in Hz?
- Wie lang ist die Laufzeit τ vom Sender zum Empfänger für ein Objekt in 50 m Entfernung?

$$\Delta R = \frac{c_0}{2 \cdot B} = 0,75 \text{ m}$$
$$\Delta f_D = \frac{1}{T} = 200 \text{ Hz}$$
$$\tau = \frac{2R}{c_0} = 333 \text{ ns}$$

d) Wofür steht die Abkürzung „EIRP“? Wie ist diese definiert?

(2 P.)



Die Abkürzung EIRP steht für „Equivalent Isotropically Radiated Power“.

$$EIRP = P_{Tx} \cdot G_{Tx}$$

- e) Ein monostatisches FMCW-Radar soll im Automobilbereich als Automatic Cruise Control (ACC) Radar bei 24 GHz eingesetzt werden. Die Sendeleistung beträgt $P_{Tx} = 12$ dBm und der Gewinn von Sende- und Empfangsantenne $G = 8$ dBi. Welchen Radarrückstreuquerschnitt (RCS) σ muss ein Objekt in einer Entfernung von 100 m mindestens aufweisen, wenn das Radar eine minimale Empfangsleistung von $P_{Rx} = -125$ dBm benötigt?

(4 P.)



Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{c_0}{f} = 0,0125 \text{ m}$$

Sendeleistung in lineare Größe umrechnen:

$$P_{Tx} = \frac{10^{12/10}}{1000} \text{ W} = 1,58 \cdot 10^{-2} \text{ W}$$

Empfangsleistung in lineare Größe umrechnen:

$$P_{Rx} = \frac{10^{-125/10}}{1000} \text{ W} = 3,16 \cdot 10^{-16} \text{ W}$$

Gewinn in lineare Größe umrechnen:

$$G = 10^{8/10} = 6,31$$

Für die Empfangsleistung P_{Rx} gilt die Radargleichung $P_{Rx} = \frac{P_{Tx} G^2 \sigma \lambda^2}{(4\pi)^3 R^4}$, wobei $G_{Tx} = G_{Rx} = G$ gilt, da ein monostatisches Radar eingesetzt wird.

Umstellen der Radargleichung nach dem gesuchten Radarrückstreuquerschnitt σ und Einsetzen der Zahlenwerte liefert:

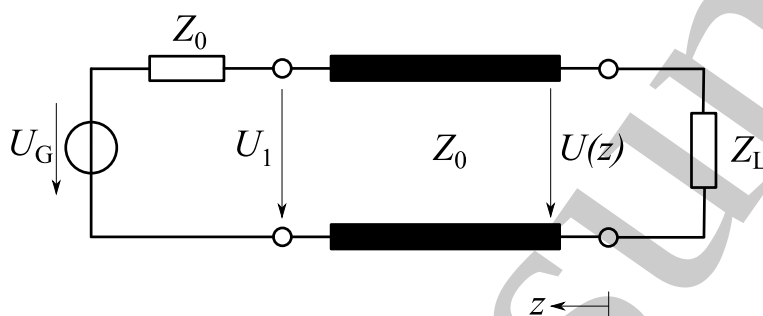
$$\sigma_{\min} = \frac{P_{Rx} \cdot (4\pi)^3 \cdot R^4}{P_{Tx} \cdot G^2 \cdot \lambda^2} = \frac{3,16 \cdot 10^{-16} \text{ W} \cdot (4\pi)^3 \cdot (100 \text{ m})^4}{0,0158 \text{ W} \cdot 6,31^2 \cdot (0,0125 \text{ m})^2} \approx 0,64 \text{ m}^2$$

Aufgabe 3

(gesamt 16 Punkte)

Stehende Wellen und Leitungen

Gegeben sei die in der Skizze gezeigte verlustfreie Leitung mit Leitungswellenwiderstand $Z_0 = 100 \Omega$. Die Leitung wird von einer Wechselspannungsquelle gespeist, die eine Spannungsamplitude von $U_G = 2 \text{ V}$ aufweist. Der auf Z_0 bezogene Reflexionsfaktor der Lastimpedanz Z_L beträgt $r_L = 0,25$.



- a) Berechnen Sie den jeweils kleinsten Wert $\frac{z}{\lambda} > 0$, für den $|U(z)|$ minimal bzw. maximal wird.

(3 P.)

Minima:

$$\varphi_L - 2\beta z_{\min} = -4\pi \frac{z_{\min}}{\lambda} \stackrel{!}{=} \pi + n \cdot 2\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{z_{\min}}{\lambda} = -\frac{1}{4} - \frac{n}{2}$$

$$\text{1. Minimum: } \Rightarrow \frac{z_{\min,1}}{\lambda} = \frac{1}{4}$$

Maxima:

$$\varphi_L - 2\beta z_{\max} = -4\pi \frac{z_{\max}}{\lambda} \stackrel{!}{=} n \cdot 2\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{z_{\max}}{\lambda} = -\frac{n}{2}$$

$$\text{1. Maximum: } \Rightarrow \frac{z_{\max,1}}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

b) Berechnen Sie das Minimum und Maximum von $|U(z)|$ auf der Leitung.

(2 P.)



$$|U(z)|_{\max} = \frac{|U_G|}{2} \cdot (1 + |r_L|) = 1,25 \text{ V}$$

$$|U(z)|_{\min} = \frac{|U_G|}{2} \cdot (1 - |r_L|) = 0,75 \text{ V}$$

c) Berechnen Sie den Wert für $|U(z)|$ an der Stelle $z = 0$.

(1 P.)

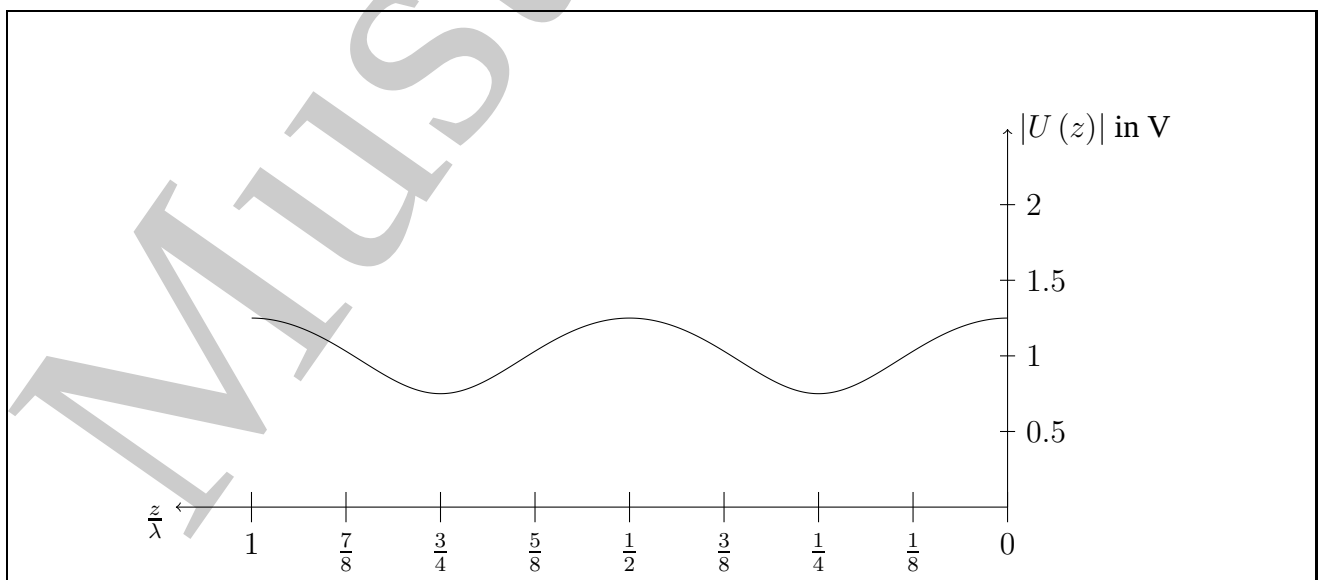
Wert für $z = 0$ entweder direkt aus a) und b) oder durch Berechnung:

$$|U(z)| = \frac{|U_G|}{2} \cdot |1 + |r_L| e^{j(\varphi_L - 2\beta z)}|$$

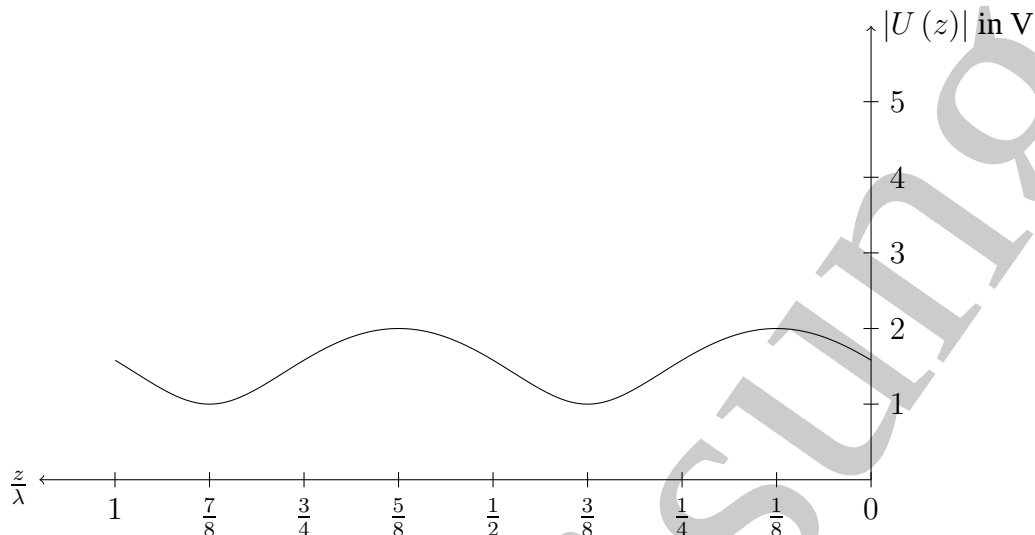
$$\Rightarrow |U(0)| = \frac{|U_G|}{2} \cdot |1 + 0,25| = 1,25 \text{ V}$$

d) Skizzieren Sie mithilfe Ihrer Ergebnisse aus a) bis c) den Spannungsverlauf auf der Leitung. Achten Sie auf korrekte Achsenbeschriftungen inklusive Einheiten.

(2 P.)



- e) Gegeben sei der folgende Spannungsverlauf auf einer verlustlosen Leitung mit Wellenwiderstand $Z_0 = 50 \Omega$. Ermitteln Sie Phase (im Bereich $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_L \leq \frac{\pi}{2}$) und Betrag des Reflexionsfaktors der Lastimpedanz, mit der die Leitung an der Stelle $\frac{z}{\lambda} = 0$ abgeschlossen ist. (3 P.)



Bestimmung der Phase des Reflexionsfaktors aus der Phasenbedingung für Minima:

$$\varphi_L - 2\beta z_{\min} \stackrel{!}{=} \pi + n \cdot 2\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

Aus der Abbildung:

$$\frac{z_{\min}}{\lambda} = \frac{3}{8} + \frac{n}{2} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \varphi_L = \frac{\pi}{2}$$

Bestimmung des Betrags des Reflexionsfaktors:

$$\text{VSWR} = \frac{|U(z)|_{\max}}{|U(z)|_{\min}} = \frac{1 + |r_L|}{1 - |r_L|}$$

$$|r_L| = \frac{|U(z)|_{\max} - |U(z)|_{\min}}{|U(z)|_{\max} + |U(z)|_{\min}} = \frac{1}{3}$$

- f) Welche Bedingung gilt für den Realteil der Ausbreitungskonstante γ im Fall einer verlustlosen Leitung? (1 P.)

☐

$$\alpha = \Re\{\gamma\} = 0$$

- g) Wie ist die Übernahmefrequenz definiert? (1 P.)

☐

Bei der Übernahmefrequenz stimmen Längs- und Querdämpfung überein.

- h) Gegeben sei eine Leitung mit $Z_0 = 50 \Omega$ und Länge $l = \frac{\lambda}{4}$, die mit einer Lastimpedanz abgeschlossen ist, die durch den Reflexionsfaktor $r_L = 0,2 e^{j\frac{\pi}{4}}$ beschrieben wird (Bezug ebenfalls Z_0). Bestimmen Sie den Reflexionsfaktor am Eingang der Leitung. (2 P.)

☐

Entweder direkt aus der Eigenschaft der $\frac{\lambda}{4}$ -Leitung: $r_{IN} = -r_L = 0,2 e^{-j\frac{3}{4}\pi}$ oder durch Berechnung:
 $r_{IN} = r_L e^{-2\gamma\frac{\lambda}{4}} = r_L e^{-j\pi} = 0,2 e^{-j\frac{3}{4}\pi}$

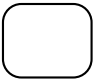
- i) Von einer unbekannten Lastimpedanz Z_L wird der Reflexionsfaktor $r_L = 0,25$ gemessen (Bezug $Z_0 = 100 \Omega$). Berechnen Sie den Wert der Lastimpedanz Z_L in Ω . (1 P.)

☐

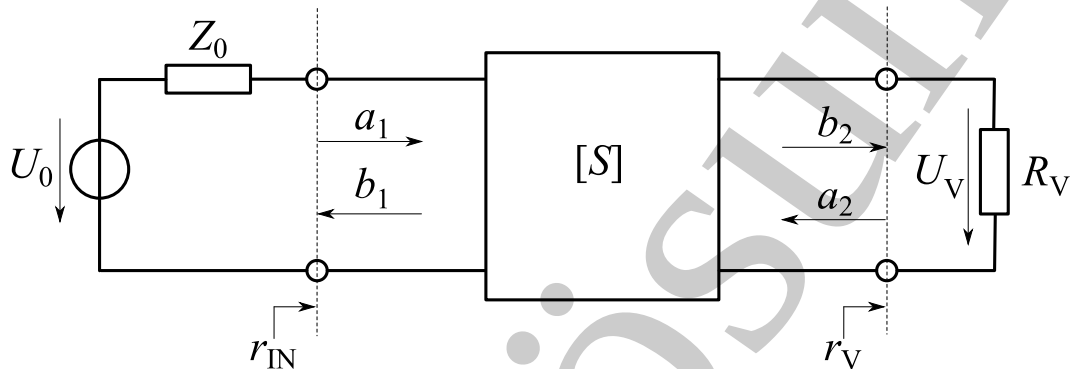
$$Z_L = \frac{1 + r_L}{1 - r_L} Z_0 = 166,7 \Omega \quad (1)$$

Aufgabe 4

(gesamt 18 Punkte)

Mikrowellen-Netzwerkanalyse

Das unten gezeigte Zweitor wird durch die Streumatrix $[S] = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,05 \\ 10 & 0,2 \end{pmatrix}$ beschrieben. Der Bezugswiderstand für die Streuparameter ist $Z_0 = 50 \Omega$. Das Zweitor wird so gespeist, dass sich $a_1 = 1 \sqrt{W}$ ergibt. Der Eingangsreflexionsfaktor (bezogen auf Z_0) beträgt $r_{IN} = 0,3$.



a) Berechnen Sie den Wert des Reflexionsfaktors r_V in obiger Anordnung (bezogen auf Z_0).

(4 P.)



$$\begin{aligned}
 r_V &= \frac{a_2}{b_2} \\
 r_{IN} &= \frac{b_1}{a_1} \\
 b_1 &= r_{IN} a_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2 \\
 \Rightarrow a_1 &= \frac{S_{12} a_2}{r_{IN} - S_{11}} \\
 b_2 &= S_{21} a_1 + S_{22} a_2 = S_{21} \frac{S_{12} a_2}{r_{IN} - S_{11}} + S_{22} a_2 \\
 r_V &= \frac{a_2}{b_2} = \frac{r_{IN} - S_{11}}{S_{12} S_{21} + S_{22} (r_{IN} - S_{11})} = 0,37
 \end{aligned}$$

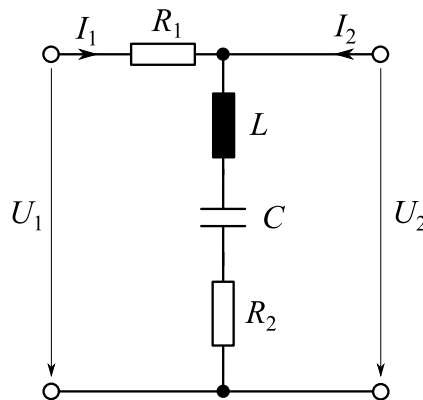
- b) Leiten Sie allgemein den Reflexionsfaktor r_{IN} als Funktion von r_{V} und den S -Parametern des Zweitors her.

(3 P.)



$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{a_2}{r_{\text{V}}} = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{S_{21}a_1}{\frac{1}{r_{\text{V}}} - S_{22}} \\ b_1 &= S_{11}a_1 + S_{12}a_2 = S_{11}a_1 + S_{12} \frac{S_{21}a_1}{\frac{1}{r_{\text{V}}} - S_{22}} \\ \Rightarrow r_{\text{IN}} &= \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}r_{\text{V}}}{1 - S_{22}r_{\text{V}}} \end{aligned}$$

Gegeben sei folgendes Zweitor.



c) Bestimmen Sie die Z -Parameter Z_{11} und Z_{12} des Zweitors.

(2 P.)

$$Z_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = R_1 + R_2 + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

$$Z_{12} = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = R_2 + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

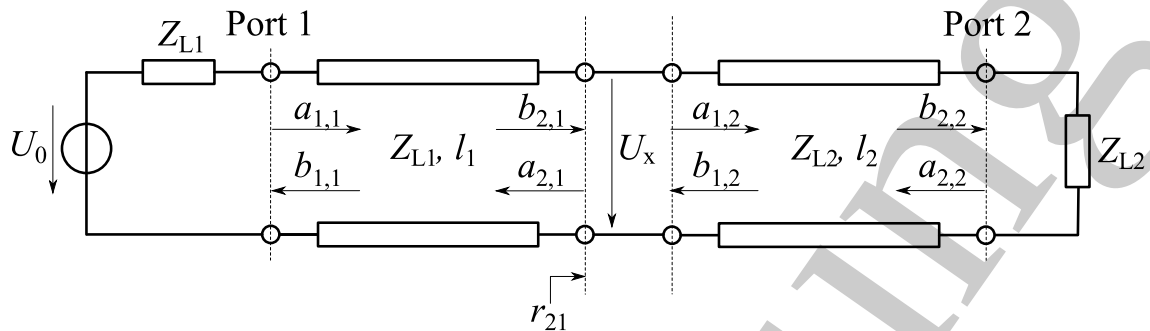
d) Für obiges Zweitor gelte nun $R_1 = 25 \, \Omega$, $R_2 = 50 \, \Omega$. Welcher Wert (lineare Angabe) ergibt sich für den Streuparameter S_{11} bei der Resonanzfrequenz des Schwingkreises? Der Bezugswiderstand für die Streuparameter ist $Z_0 = 50 \, \Omega$.

(2 P.)

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} \Big|_{a_2=0} = \frac{\left(R_1 + \frac{Z_0 R_2}{Z_0 + R_2} \right) - Z_0}{\left(R_1 + \frac{Z_0 R_2}{Z_0 + R_2} \right) + Z_0} = 0$$

- e) Gegeben sei folgende Leitungsanordnung aus zwei verlustfreien Leitungen mit Leitungswellenwiderständen Z_{L1} und Z_{L2} und zugehörigen Längen l_1 bzw. l_2 . Der Bezugswiderstand zur Bestimmung der S -Parameter ist Z_{L1} für Port 1, und Z_{L2} für Port 2. Berechnen Sie für die gezeigte Leitungsanordnung den Streuparameter S_{11} in Abhängigkeit von Z_{L1} , Z_{L2} , l_1 und l_2 .

(3 P.)



Berechnung des Reflexionsfaktors an der Schnittstelle der beiden Leitungen, bezogen auf Z_{L1} :

$$r_{21} = \frac{a_{2,1}}{b_{2,1}} = \frac{Z_{L2} - Z_{L1}}{Z_{L2} + Z_{L1}}$$

Mithilfe der S -Parameter für eine verlustfreie Leitung ergibt sich:

$$\begin{aligned} b_{2,1} &= e^{-j\beta l_1} a_{1,1} \\ b_{1,1} &= e^{-j\beta l_1} a_{2,1} = e^{-j\beta l_1} r_{21} b_{2,1} = e^{-j2\beta l_1} r_{21} a_{1,1} \\ \Rightarrow S_{11} &= \left. \frac{b_{1,1}}{a_{1,1}} \right|_{a_{2,2}=0} = \frac{e^{-j2\beta l_1} r_{21} a_{1,1}}{a_{1,1}} = e^{-j2\beta l_1} r_{21} \end{aligned}$$

- f) Berechnen Sie für obige Leitungsanordnung den Streuparameter S_{21} in Abhängigkeit von Z_{L1} , Z_{L2} , l_1 und l_2 . Bezeichnen Sie die von Ihnen genutzten Streuvariablen gemäß obiger Skizze.

(4 P.)



Die Streuvariablen sind auf die jeweiligen Wellenwiderstände der beiden Leitungen bezogen, und gehen deshalb an der Schnittstelle nicht identisch ineinander über. Zur Berechnung der Streuvariablen am Eingang der zweiten Leitung wird die Spannung an der Schnittstelle berechnet:

$$U_x = \sqrt{Z_{L1}} (b_{2,1} + a_{2,1}) = \sqrt{Z_{L2}} (a_{1,2} + b_{1,2})$$

Da die zweite Leitung reflexionsfrei abgeschlossen ist ($a_{2,2} = 0$), gilt $b_{1,2} = 0$ und damit

$$\begin{aligned} U_x &= \sqrt{Z_{L1}} (b_{2,1} + a_{2,1}) = \sqrt{Z_{L2}} a_{1,2} \\ \Rightarrow a_{1,2} &= \sqrt{\frac{Z_{L1}}{Z_{L2}}} (b_{2,1} + a_{2,1}) \end{aligned}$$

Mit den in Aufgabenteil f) hergeleiteten Beziehungen ergibt sich:

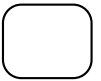
$$a_{1,2} = \sqrt{\frac{Z_{L1}}{Z_{L2}}} (b_{2,1} + a_{2,1}) = \sqrt{\frac{Z_{L1}}{Z_{L2}}} b_{2,1} (1 + r_{21}) = \sqrt{\frac{Z_{L1}}{Z_{L2}}} (1 + r_{21}) e^{-j\beta l_1} a_{1,1}$$

Mithilfe der S -Parameter für Leitung 2 ergibt sich:

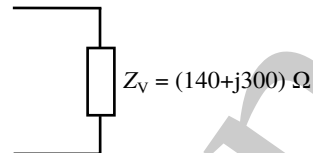
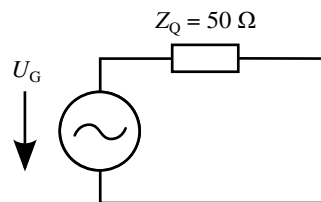
$$\begin{aligned} b_{2,2} &= e^{-j\beta l_2} a_{1,2} \\ \Rightarrow S_{21} &= \left. \frac{b_{2,2}}{a_{1,1}} \right|_{a_{2,2}=0} = \sqrt{\frac{Z_{L1}}{Z_{L2}}} (1 + r_{21}) e^{-j\beta l_1} e^{-j\beta l_2} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(gesamt 17 Punkte)

Smithdiagramm

(5 P.)



a)

Ein Verbraucher mit der Impedanz $Z_V = (140 + j300) \Omega$ soll an eine Quelle mit der Impedanz $Z_Q = 50 \Omega$ reflexionsfrei angeschlossen werden. Zur Verfügung stehen Ihnen folgende Elemente:

- einen seriellen Kondensatoren mit beliebiger Kapazität
- eine Leitung beliebiger Länge mit Wellenwiderstand $Z_L = 200 \Omega$

Zeichnen Sie eine möglichst einfache Anpassschaltung mit genau zwei Elementen in obiges Schaltbild. Zeichnen Sie den Transformationsweg in ein Smith Diagramm ein und geben Sie die Werte bzw. Leitungslängen der verwendeten Elemente an, für die bei einer Frequenz von $f = 5 \text{ GHz}$ Anpassung herrscht. Alle Leitungen sind verlustfrei und besitzen eine relative Dielektrizitätszahl von $\epsilon_r = 1$.



Auswahl der Bezugsimpedanz $Z_B = 200 \Omega \Rightarrow \frac{Z_V}{Z_B} = 0,7 + j1,5, \frac{Z_Q^*}{Z_B} = 0,25$
 $\lambda = \frac{c_0}{f} = 6 \text{ cm}$

- Beispiel 1 (V1):

Vorgeschaltete Leitung l_{V1} nach $Z_{1,V1}/Z_B = 0,25 + j0,5$

$$\Rightarrow l_{V1}/\lambda = 0,077 - 0,167 + 0,5 = 0,410$$

$$\Rightarrow l_{V1} = 0,41 \cdot 6 \text{ cm} = 2,46 \text{ cm}$$

Serielle Kapazität $C_{s,V1}$ nach $Z_Q^*/Z_B = 0,25$

$$\Rightarrow \frac{1}{j\omega C_s} = Z_Q^* - Z_{1,V1} = (0,25 - (0,25 + j0,5)) \cdot 200 \Omega = -j100 \Omega$$

$$\Rightarrow C_{s,V1} = 318.31 \text{ fF}$$

• Beispiel 2 (V2):

Vorgeschaltete serielle Kapazität C_s nach $Z_{1,V2}/Z_B = 0,7 + j1,21$

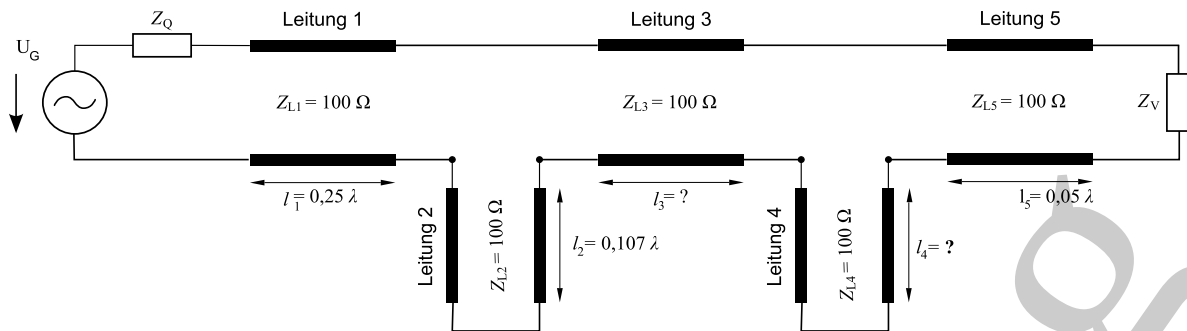
$$\Rightarrow \frac{1}{j\omega C_{s,V2}} = Z_1 - Z_V = ((0,7 + j1,2) - (0,7 + j1,5)) \cdot 200 \Omega = -j60 \Omega$$

$$\Rightarrow C_{s,V2} = 530.52 \text{ fF}$$

Vorgeschaltete Leitung l_{V2} nach $Z_Q^*/Z_B = 0,25$

$$\Rightarrow l_{V2}/\lambda = 0 - 0,156 + 0,5 = 0,344$$

$$\Rightarrow l_{V2} = 0,344 \cdot 6 \text{ cm} = 2,06 \text{ cm}$$



Der Verbraucher mit der Impedanz $Z_V = 300 \Omega$ soll nun mit der dargestellten Schaltung an die Quelle mit der Impedanz $Z_Q = 100 \Omega$ reflexionsfrei angeschlossen werden. Bestimmen Sie die Längen l_3/λ und l_4/λ für Leistungsanpassung so, dass l_3 möglichst kurz wird. Zeichnen Sie den zugehörigen Transformationsweg beginnend bei der Verbraucherimpedanz Z_V in ein geeignet normiertes Smithdiagramm ein und bestimmen Sie daraus die benötigten Leitungslängen, so dass Anpassung besteht. Alle Transformationsschritte sind aufzuführen und zu begründen, wobei Zwischenimpedanzen klar erkennbar sein müssen. Die Zuordnung der Leitungen zu den einzelnen Transformationsschritten muss nachvollziehbar sein.

- Widerstandsform wegen serieller Stichleitungen
- $Z_B = 100 \Omega$ wegen Leitungstransformation
- Startpunkt: $Z_V/Z_B = 3$
- Zielpunkt: $Z_Q^*/Z_B = 1$
- Leitung 1 kann ignoriert werden, da ihr Wellenwiderstand der Quellimpedanz entspricht
- m-Kreis um Z_V/Z_B einzeichnen. $\Rightarrow$ Leitung 5 transformiert mit $l_5/\lambda = 0,05$ im Uhrzeigersinn zu $Z_1/Z_B = 1,7 - j1,35$.
- Serieller Stichleitung 4 kann beliebigen seriellen Blindwiderstand erzeugen. $\Rightarrow Z_2$ liegt auf R -const-Kreis mit $R_2/Z_B = 1,7$
- Die serielle Stichleitung 2 wirkt als serieller Blindwiderstand. Dessen Wert lässt sich bestimmen durch einen m-Kreis mit l_2/λ vom Kurzschlusspunkt aus. Der Wert lautet $j0,8Z_B$.
- Die serielle Induktivität, die durch Leitung 2 erzeugt wird, muss in Transformationsrichtung den letzten Weg zum Zielpunkt zurücklegen. Vor Leitung 2 muss sich die Impedanz Z_3/Z_B folglich beim Punkt $Z_3/Z_B = 1 - j0,8$ befinden.
- Der m-Kreis von Leitung 3 muss durch $Z_3/Z_L = 1 - j0,8$ gehen. Diesen m-Kreis einzeichnen.

- Die Schnittpunkte dieses m-Kreises mit dem R -const-Kreis mit $R_4/Z_B = 1,7$ legen Z_2/Z_B fest, und folglich die möglichen Transformationswege.
⇒ Die beiden Schnittpunkte befinden sich bei $Z_2/Z_B = 1,7 \pm j0,78$. Der Punkt in der unteren Halbebene ermöglicht dabei die kürzere Leitung 3. ⇒ Einzeichnen des Transformationswegs
- Die Länge l_3 von Leitung 3 kann nun auf der l/λ -Skala abgelesen werden zu $l_3/\lambda = (0,344 - 0,294) = 0,05$.
- Leitung 4 erzeugt eine Impedanz mit $B/Z_B = 0,52$
⇒ Den Punkt $Z/Z_B = j0,52$ eintragen und die Leitungslänge l_4 vom Kurzschlusspunkt ausgehend ablesen zu $l_4/\lambda = 0,065$.

- c) Wie ändern sich die Längen der Leitungen 2 und 4 wenn diese aus technischen Gründen mit einem Leerlauf abgeschlossen werden müssen?

(1 P.)

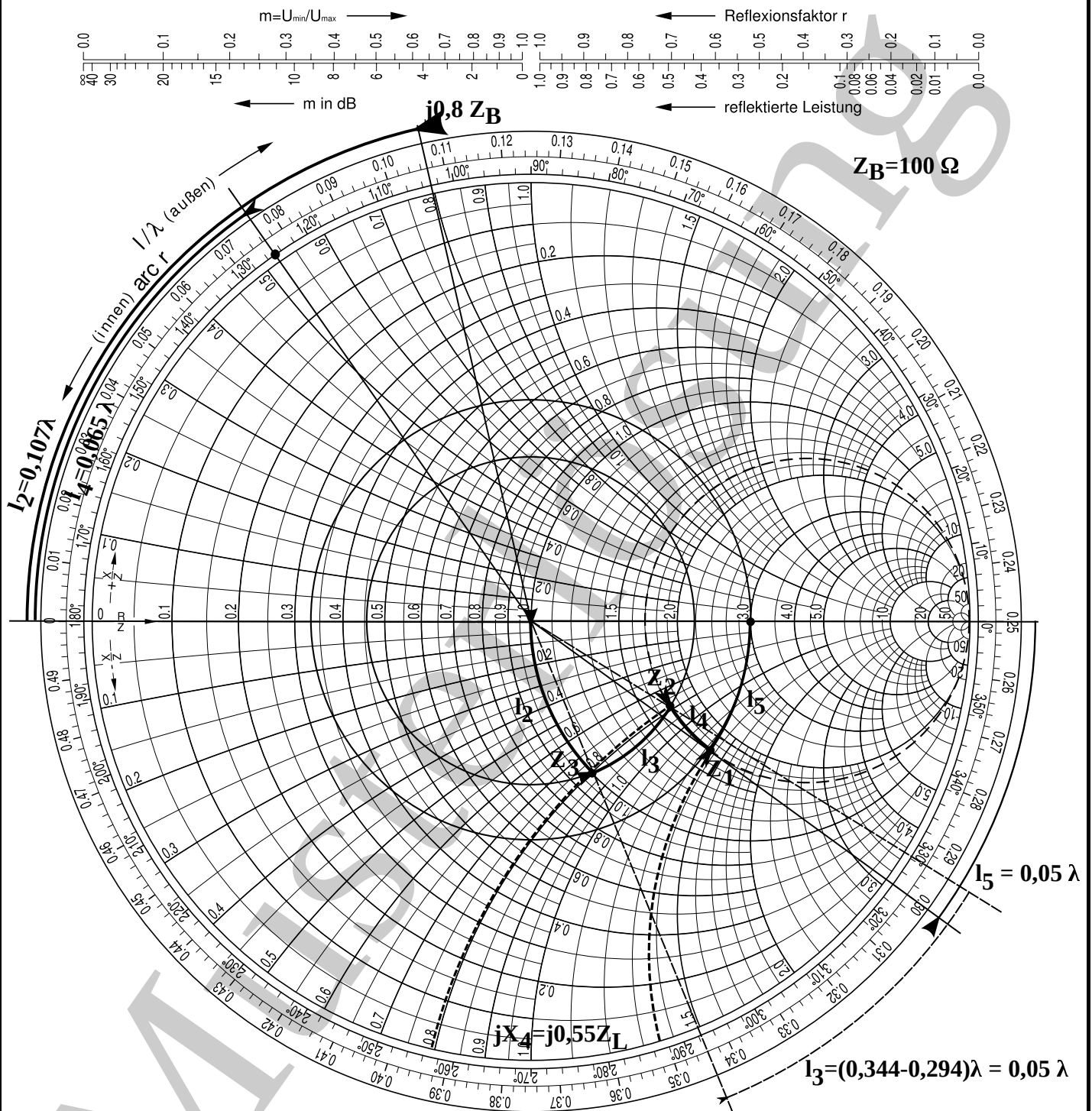


Um die selbe Impedanz an den Anschlussklemmen der Leitungen zu erzeugen, müssen die Leitungen nun um $\lambda/4$ länger werden.

zugehörige
Aufgabennummer:

5b

Leitwertform

Bezugswiderstand $Z_B = 100 \Omega$ 

Wichtig: Diagramm wird nur gewertet, wenn der obenstehende Datenteil mit Name und Aufgabennummer korrekt ausgefüllt ist. Bezugswiderstand nicht vergessen!

Impedanz $\longleftrightarrow Z=1/Y$ Admittanz

$$\underline{Z} = \frac{R}{G^2 + B^2} + j \frac{X}{G^2 + B^2} \quad \underline{Y} = \frac{G}{R^2 + X^2} + j \frac{B}{R^2 + X^2}$$

$$\underline{Z} = \frac{G}{G^2 + B^2} - j \frac{B}{G^2 + B^2} \quad \underline{Y} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2}$$

Kompensation mit dualen Elementen

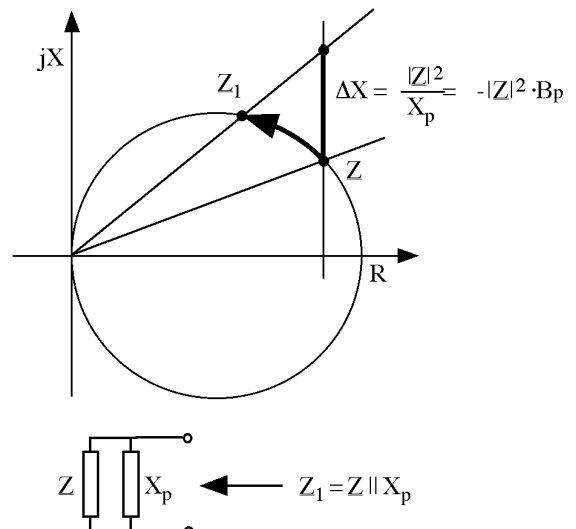


Bedingungen für Kompensation: $X_s = R^2 \cdot B_p$

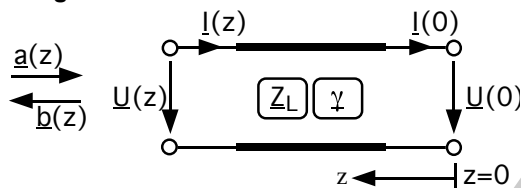
Frequenzfaktor: $F(f) = \sqrt{X_s \cdot B_p}$

krit. Frequenz, Grenzfrequenz: $|F(f_k)| = 1$

Hilfskonstruktion zur Transformation



Leitungen



$$\underline{U}(z) = \underline{U}_H(0)e^{\gamma z} + \underline{U}_R(0)e^{-\gamma z} = \sqrt{Z_L}(\underline{a}(z) + \underline{b}(z))$$

$$\underline{I}(z) = \frac{\underline{U}_H(0)}{Z_L}e^{\gamma z} - \frac{\underline{U}_R(0)}{Z_L}e^{-\gamma z} = \frac{1}{\sqrt{Z_L}}(\underline{a}(z) - \underline{b}(z))$$

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}; \quad Z_L = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

Koaxialleitung

$$Z_L = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

ungedämpfte Leitung (homogenes Dielektrikum und konst. Querschnitt)

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{L'C'} = \omega \cdot \sqrt{\mu\epsilon}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}; \quad C' = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{Z_L}; \quad L' = Z_L \cdot \sqrt{\mu\epsilon}; \quad v_\varphi = \frac{\omega}{\beta}$$

schwach gedämpfte Leitungen ($R' \ll \omega L'; G' \ll \omega C'$)

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \left(\frac{R'}{Z_L} + G' \cdot Z_L \right); \quad G' = \omega C' \cdot \tan(\delta_c); \quad R' \sim \frac{1}{\kappa \cdot s}$$

Dämpfung einer Leitung der Länge l (für hinlaufende Welle a)

$$D/\text{dB} = 10 \cdot \log\left(\frac{P_a(l)}{P_a(0)}\right) = 10 \cdot \log(e^{2\alpha l})$$

Eindringtiefe s

$$s = \sqrt{\frac{2}{\omega \kappa \mu}}$$

Reflexionsfaktor r

$$\underline{r}(z) = \frac{\underline{U}_R(z)}{\underline{U}_H(z)} = \frac{\underline{b}(z)}{\underline{a}(z)} = \frac{\underline{b}(0)}{\underline{a}(0)} \cdot e^{-2\gamma z}$$

Reflexionsfaktor $\rightarrow$ Impedanz

$$\underline{r}(l) = \frac{\underline{Z}(l) - Z_L}{\underline{Z}(l) + Z_L}; \quad \underline{Z}(l) = \frac{\underline{U}(l)}{\underline{I}(l)} = \frac{1 + \underline{r}(l)}{1 - \underline{r}(l)} \cdot Z_L$$

Anpassungsfaktor, Stehwellenverhältnis

$$m = \frac{1}{VSWR} = \frac{1 - |\underline{r}|}{1 + |\underline{r}|} = \frac{U_{\min}}{U_{\max}}$$

Dem Verbraucher zugeführte Wirkleistung P_W

$$\text{mit: } \underline{a}(z) = \frac{\underline{U}_H(z)}{\sqrt{Z_L}} = \sqrt{Z_L} \cdot \underline{I}_H(z)$$

$$P_W = P_a(0) - P_b(0) = \frac{1}{2} (|\underline{a}(0)|^2 - |\underline{b}(0)|^2)$$

$$= \frac{1}{2} |\underline{a}(0)|^2 \cdot (1 - |\underline{r}(0)|^2)$$

Transformation durch Kettenschaltung einer Leitung

$$\underline{Z}(l) = Z_L \cdot \frac{\underline{Z}(0) + Z_L \tanh(\underline{\gamma} l)}{Z_L + \underline{Z}(0) \tanh(\underline{\gamma} l)} = \underline{Z}(0) \cdot \frac{1 + j \frac{Z_L}{\underline{Z}(0)} \tan(\beta l)}{1 + j \frac{\underline{Z}(0)}{Z_L} \tan(\beta l)} \bigg|_{\alpha=0}$$

Konstanten

$$Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} = 120\pi \Omega$$

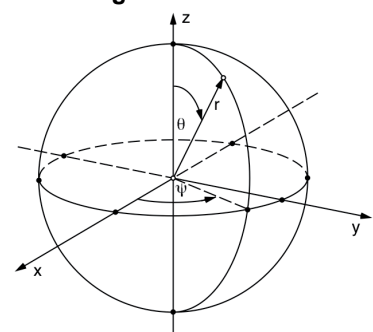
$$c_o = 2,997925 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

$$k = 1,38065 \cdot 10^{-23} \frac{Ws}{K}$$

$$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

$$\epsilon_o = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

Kugelkoordinaten

Azimuth: ψ Elevation: θ

$$\text{Volumen: } V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{Oberfläche: } F = 4\pi r^2$$

	[S]	[Z]	[Y]	[A] (ABCD)	[T]
S_{11}	S_{11}	$\frac{(Z_{11} - Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}$	$\frac{(Y_0 - Y_{11})(Y_0 + Y_{22}) + Y_{12}Y_{21}}{(Y_{11} + Y_0)(Y_{22} + Y_0) - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{A + B/Z_0 - CZ_0 - D}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$	$\frac{T_{12}}{T_{22}}$
S_{12}	S_{12}	$\frac{2Z_{12}Z_0}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}$	$\frac{-2Y_{12}Y_0}{(Y_{11} + Y_0)(Y_{22} + Y_0) - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{2(AD - BC)}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$	$\frac{T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}}{T_{22}}$
S_{21}	S_{21}	$\frac{2Z_{21}Z_0}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}$	$\frac{-2Y_{21}Y_0}{(Y_{11} + Y_0)(Y_{22} + Y_0) - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{2}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$	$\frac{1}{T_{22}}$
S_{22}	S_{22}	$\frac{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} - Z_0) - Z_{12}Z_{21}}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}$	$\frac{(Y_0 + Y_{11})(Y_0 - Y_{22}) + Y_{12}Y_{21}}{(Y_{11} + Y_0)(Y_{22} + Y_0) - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{-A + B/Z_0 - CZ_0 + D}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$	$\frac{-T_{21}}{T_{22}}$
Z_{11}	$Z_0 \frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	Z_{11}	$\frac{Y_{22}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{A}{C}$	
Z_{12}	$Z_0 \frac{2S_{12}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	Z_{12}	$\frac{-Y_{12}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{AD - BC}{C}$	
Z_{21}	$Z_0 \frac{2S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	Z_{21}	$\frac{-Y_{21}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{1}{C}$	
Z_{22}	$Z_0 \frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	Z_{22}	$\frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{D}{C}$	
Y_{11}	$Y_0 \frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$	Y_{11}	$\frac{D}{B}$	
Y_{12}	$Y_0 \frac{-2S_{12}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$\frac{-Z_{12}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$	Y_{12}	$\frac{BC - AD}{B}$	
Y_{21}	$Y_0 \frac{-2S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$\frac{-Z_{21}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$	Y_{21}	$\frac{-1}{B}$	
Y_{22}	$Y_0 \frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$	Y_{22}	$\frac{A}{B}$	
A	$\frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}}$	A	
B	$Z_0 \frac{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}}$	$\frac{-1}{Y_{21}}$	B	
C	$\frac{1}{Z_0} \frac{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{1}{Z_{21}}$	$\frac{Y_{12}Y_{21} - Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}}$	C	
D	$\frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	D	
T_{11}	$\frac{S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22}}{S_{21}}$				T_{11}
T_{12}	$\frac{S_{11}}{S_{21}}$				T_{12}
T_{21}	$\frac{-S_{22}}{S_{21}}$				T_{21}
T_{22}	$\frac{1}{S_{21}}$				T_{22}