

**Skriptum zur Vorlesung**

# **Grundlagen der Hochfrequenztechnik**

von

**Prof. Dr.-Ing. Thomas Zwick**

5. Auflage 2013

Skript überarbeitet von

S. Beer, U. Lewark

Postanschrift: Institut für Hochfrequenztechnik und Elektronik  
Kaiserstraße 12  
D-76131 Karlsruhe

Gebäude: Engesserstraße 5, Geb. 30.10

Tel.: +49 (0) 721 608 42522  
Fax.: +49 (0) 721 608 45027

E-Mail: [info@ihe.kit.edu](mailto:info@ihe.kit.edu)  
Web: [www.ihe.kit.edu](http://www.ihe.kit.edu)





# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>2. Leitungstheorie</b>	<b>13</b>
2.1. Ersatzschaltbild einer TEM-Leitung . . . . .	15
2.2. Telegraphengleichungen . . . . .	16
2.3. Wellenausbreitung auf Leitungen . . . . .	18
2.4. Leitung mit beliebigem Abschluss . . . . .	20
2.5. Die verlustfreie Leitung bei Anpassung . . . . .	23
2.6. Strom- und Spannungsverteilung . . . . .	25
2.7. Näherungslösung für Leitungen mit kleinen Verlusten . . . . .	33
2.8. Spezielle Leitungstypen . . . . .	39
2.8.1. Koaxialleitung . . . . .	39
2.8.2. Mikrostreifenleitung (Microstrip) . . . . .	45
<b>3. Leistungsanpassung und Impedanztransformation</b>	<b>51</b>
3.1. Wirkleistungsabgabe einer Quelle an den Verbraucher . . . . .	52
3.2. Graphische Lösungen der Leistungsanpassung . . . . .	53
3.2.1. Konforme Abbildung in die $r$ -Ebene (Smith-Diagramm) . . . . .	55
3.3. Impedanztransformation mit konzentrierten Elementen . . . . .	60
3.3.1. Serienschaltung eines Blindwiderstandes . . . . .	62
3.3.2. Parallelschaltung eines Blindwiderstandes . . . . .	63
3.3.3. Transformation mit zwei Blindwiderständen . . . . .	64
3.3.4. Frequenzabhängigkeit der Transformation . . . . .	66
<b>4. Anwendung von Leitungen bei höheren Frequenzen</b>	<b>69</b>
4.1. Leitungstransformation . . . . .	69
4.1.1. Eingangswiderstand und $m$ -Kreis . . . . .	69
4.1.2. Eingangsleitwert einer Schaltung . . . . .	71
4.1.3. Anwendung des Smithdiagramms zur Leitungstransformation . . . . .	73
4.1.4. Leitung mit beliebig komplexem Abschluss . . . . .	76
4.1.5. Spezielle Fälle der Transformation mit Leitungen . . . . .	79

4.1.6.	Die fehlangepasste Leitung mit Verlusten . . . . .	83
4.2.	Verwendung von Leitungen mit stehenden Wellen als Stichleitung . . . . .	86
4.2.1.	Die kurzgeschlossene Leitung . . . . .	88
4.2.2.	Die offene Leitung . . . . .	89
4.2.3.	Leitung mit beliebigem Blindwiderstand als Abschluss . . . . .	91
<b>5.</b>	<b>Dimensionierung von Anpassschaltungen mit Hilfe des Smith-Diagramms</b>	<b>93</b>
5.1.	Anpassung mit diskreten Elementen . . . . .	94
5.2.	Anpassung mit einer Stichleitung . . . . .	98
5.3.	Anpassung mit zwei Stichleitungen . . . . .	102
<b>6.</b>	<b>Mikrowellen-Netzwerkanalyse</b>	<b>107</b>
6.1.	Impedanz- und Admittanz-Matrizen . . . . .	107
6.2.	Streuvariable . . . . .	109
6.2.1.	Leistungswellen . . . . .	110
6.3.	Streumatrix . . . . .	112
6.4.	Spezielle Eigenschaften von Netzwerken . . . . .	115
6.5.	ABCD-Matrix und Transmissionsmatrix . . . . .	117
6.6.	Berechnungsmethoden für die Streumatrix . . . . .	122
6.6.1.	Streuparameterbestimmung aus Strom-Spannungsdefinition . . . . .	122
6.6.2.	Konversion zwischen Matrizen . . . . .	123
6.6.3.	Zusammenschaltung von Mehrtoeren . . . . .	123
<b>7.</b>	<b>Elektromagnetische Wellen und Antennen</b>	<b>127</b>
7.1.	Ebene Welle . . . . .	127
7.1.1.	Poynting-Vektor und Leistungsdichte . . . . .	128
7.1.2.	Polarisation . . . . .	129
7.2.	Antennen . . . . .	130
7.2.1.	Abgestrahlte Leistung . . . . .	133
7.2.2.	Antennengewinn und Richtwirkung . . . . .	134
7.2.3.	Richtcharakteristik . . . . .	135
7.2.4.	Halbwertsbreite und Halbwertswinkel . . . . .	136
7.2.5.	Zusammenhang zwischen Gewinn und Richtcharakteristik . . . . .	137
7.2.6.	Antennenwirkfläche . . . . .	137
7.3.	Wellenausbreitung . . . . .	139
7.3.1.	Freiraumausbreitung . . . . .	139
7.3.2.	Atmosphärische Effekte . . . . .	141

<b>8. Mikrowellenkomponenten</b>	<b>145</b>
8.1. Rauschen in Mikrowellenkomponenten . . . . .	145
8.1.1. Elektrisches Rauschen . . . . .	145
8.1.2. Äquivalente Rauschtemperatur . . . . .	148
8.1.3. Rauschtemperaturmessung durch die Y-Faktor-Methode . . . . .	149
8.1.4. Rauschzahl . . . . .	151
8.1.5. Rauschzahl eines kaskadierten Systems . . . . .	153
8.2. Komponenten von Mikrowellensystemen . . . . .	155
8.2.1. Nichtlineare Kennlinien . . . . .	155
8.2.2. Verstärkung hochfrequenter Signale . . . . .	159
8.2.3. Schwingungserzeugung . . . . .	161
8.2.4. Zusammenfassung der wichtigsten HF-Komponenten von Mikrowellensystemen	163
<b>9. Mikrowellensysteme</b>	<b>167</b>
9.1. Funkkommunikationssysteme . . . . .	167
9.1.1. Mikrowellensender und -empfänger . . . . .	167
9.1.2. Rauschcharakterisierung eines Mikrowellenempfängers . . . . .	169
9.2. Radarsysteme . . . . .	172
9.2.1. Radargleichung und Radarstreuquerschnitt . . . . .	173
9.2.2. Pulsradar . . . . .	174
9.2.3. Dopplerradar . . . . .	175
9.2.4. FMCW-Radar . . . . .	177
9.3. Radiometrie . . . . .	180
9.3.1. Grundlagen der Radiometrie . . . . .	180
9.3.2. Beispiel eines Radiometers . . . . .	182
9.4. Erwärmen mit Mikrowelle . . . . .	185
9.4.1. Grundlagen der Mikrowellenheizung . . . . .	187
<b>A. Schreibweise orts- und zeitabhängiger Größen</b>	<b>189</b>
A.1. Beliebige Orts- und Zeitabhängigkeit . . . . .	189
A.2. Bei harmonischer Zeitabhängigkeit . . . . .	190
<b>B. Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen</b>	<b>191</b>
<b>C. Leitungsdiagramme</b>	<b>195</b>



# 1. Einleitung

Der Begriff „Hochfrequenztechnik“ unterlag im Laufe der Zeit mehrfachen Änderungen. Es zeigte sich, dass die Angabe fester Frequenzen nicht sinnvoll ist. Die Hochfrequenztechnik wird am besten durch charakteristische Merkmale gekennzeichnet, die der theoretischen und praktischen Behandlung zugrunde gelegt werden. Hierzu gehören:

- verteilte Wirk- und Blindelemente
- Berücksichtigung der Wellenlänge
- Einbeziehung parasitärer Effekte bei Bauelementen
- Bauelemente in der Größenordnung der Wellenlänge (oder größer)
- Betrachtung von Verbindungsleitungen als eigenständige Bauelemente

Ist die Länge der Verbindungsleitung zwischen Bauelementen in der Größenordnung der Wellenlänge (oder größer), kann keine konstante Spannung über der Leitung angenommen werden. Dieser Effekt tritt zum Beispiel bei der Übertragung von elektrischer Energie über sehr weite Strecken (viele hundert Kilometer) bereits bei Frequenzen von 50 Hz auf.

Zusätzlich wirken passive Bauelemente wie Widerstände, Kondensatoren und Spulen wirken bei steigender Frequenz nicht mehr wie erwartet als ideale Bauelemente, sondern beinhalten sogenannte parasitäre Elemente.

Die Einbeziehung dieser Elemente wird beispielhaft an Widerständen, Kondensatoren und Spulen in Form von Ersatzschaltbildern gezeigt.

Bei Widerständen treten folgende Effekte auf:

- Zunahme des Widerstandswertes mit wachsender Frequenz durch den Skineneffekt
- Induktiver Phasenwinkel durch die Eigeninduktivität des Widerstandes
- Kapazitiver Phasenwinkel durch die Eigenkapazität des Widerstandes

Durch geschickte Dimensionierung können Eigenkapazität und Eigeninduktivität kompensiert werden. Das vollständige Ersatzschaltbild eines Widerstands ist in Bild 1.1 gezeigt.

In Kondensatoren führen Ladeströme zu einer Eigeninduktivität ( $L_S$ ) und zu Verlusten im Kondensator ( $R_L$ ). Das wechselnde Feld im Kondensator führt zu Polarisationsverlusten im Dielektrikum ( $G_P$ ). Die Summe der Verlustmechanismen ist im Ersatzschaltbild( Bild 1.2) gezeigt.

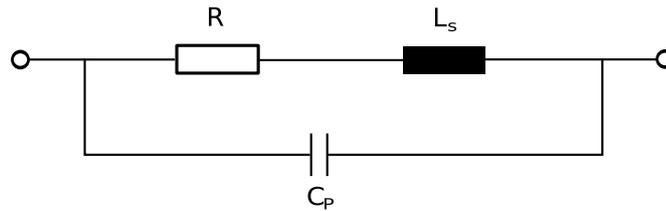


Bild 1.1.: Vollständiges HF-Ersatzschaltbild eines Widerstandes

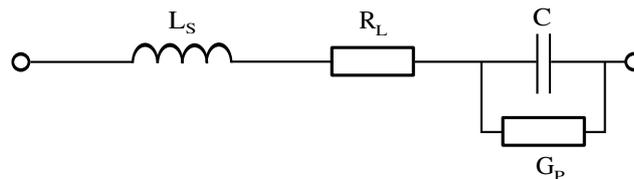


Bild 1.2.: Vollständiges Ersatzschaltbild eines Kondensators

In einer Spule sorgen Ströme in den Wicklungen zu Feldern in deren Umgebung, die kapazitive Wirkungen erzeugen. Für niedrige Frequenzen ist es möglich diese Kapazitäten zu einer einzigen Parallelkapazität  $C_P$  als Eigenkapazität der Spule zusammen zu fassen.

Verluste entstehen durch ohmsche Widerstände inkl. Skineneffekt, Feldverluste in einem evtl. vorhandenen Kern, erzeugte Wirkleistung durch Nachbarspulen und Wirbelströme im Kern und durch dielektrische Verluste in den Eigenkapazitäten der Spule. Alle Verluste werden in einem parasitären Widerstand  $R_S$  zusammengefasst.

Das vollständige Ersatzschaltbild einer Spule ergibt sich dann entsprechend Bild .

In Bild 1.4 sind die internationalen Vereinbarungen der Definition der Frequenzbereiche dargestellt. Danach umfasst der klassische Bereich der Hochfrequenztechnik (HF) die Frequenzen von 3 MHz bis 30 MHz. Im deutschen Sprachraum hat sich allerdings die Verwendung des Begriffs Hochfrequenztechnik stellvertretend für das gesamte Gebiet bis in den Bereich von mehreren hundert Gigahertz etabliert. Dies zeigt sich z.B. an der Bezeichnung von Universitätsinstituten, Bezeichnungen von und in Firmen. Im englischen Sprachraum (insbesondere

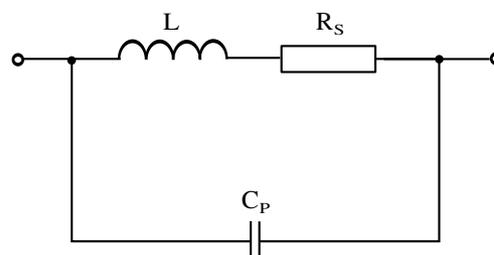


Bild 1.3.: Ersatzschaltbild einer Spule

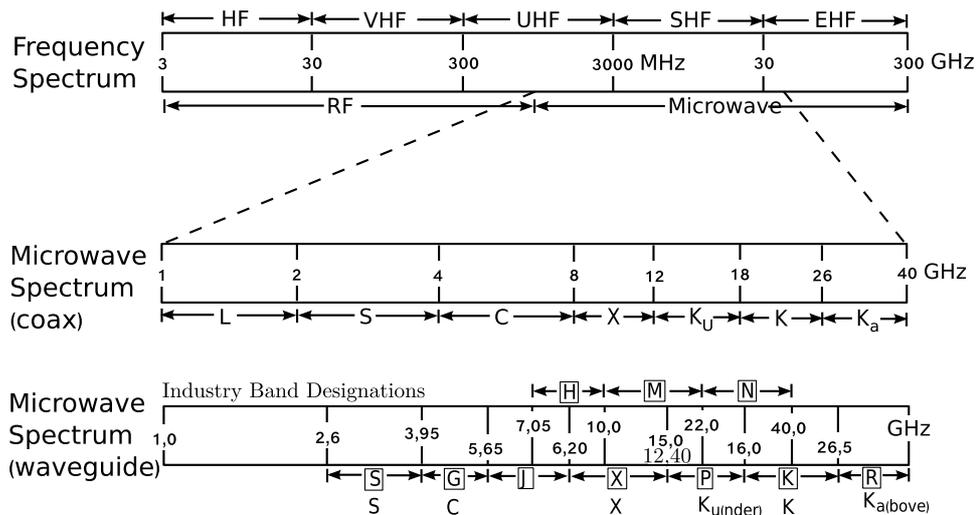


Bild 1.4.: Übersicht der internationalen Frequenzdefinitionen

den USA) wird der Begriff „High Frequency“ tatsächlich nur für den Frequenzbereich von 3 MHz bis 30 MHz benutzt. Für das gesamte Gebiet der Hochfrequenztechnik nutzt man dort die Begriffe „Radio Frequency Techniques“ oder „Microwave Engineering“. Wie aus Bild 1.4 ersichtlich ist, werden für bestimmte Frequenzbänder Buchstaben verwendet, die aber je nach Anwendung und normierender Stelle unterschiedlich sind.

Die Hochfrequenztechnik (HF) ist eine wesentliche Grundlage für alle Funksysteme wie Rundfunk, Mobilfunk, Satellitenfunk usw. sowie jegliche Sensorik basierend auf elektromagnetischen Wellen (z.B. Radar). Neuerdings werden allerdings auch bei der Entwicklung extrem schneller Digitalschaltungen (z.B. Prozessoren mit Taktraten über 1 GHz) HF-Experten gesucht (z.B. bei AMD und Intel).

Im Automobilbereich ist vor allem die rasante Entwicklung radarbasierter Fahrerassistenzsysteme ein Technologietreiber. Mittlerweile sind erste Produkte auf dem Markt erfolgreich, so dass in den nächsten Jahren ein immenses Wachstum in diesem Bereich erwartet wird. Hierbei werden Frequenzen verwendet, bei denen die Wellenlänge des Radars im Millimeterwellenbereich (ca. 30 – 300 GHz) liegt. Dies hat den Vorteil, dass das Radarsystem als ultrakompakte Baugruppe realisiert werden kann. Zukünftige Millimeterwellensysteme für Nachbereichs-Radar und Kommunikation werden sehr wahrscheinlich komplette System-on-Chip Lösungen sein, mit bereits auf dem Chip realisierter Antenne und Hochfrequenzarchitektur. Namhafte Unternehmen wie Bosch, Continental, Valeo, TRW, Delphi usw. haben als Automobilzulieferer ein ausgeprägtes Interesse an diesem Thema.

Ein weiterer sehr kapitalintensiver Bereich, in welchem ständig anspruchsvolle Lösungen für Hochfrequenzsysteme zu entwickeln sind, ist die Satellitentechnik. Die Satelliten werden hierbei entweder für Kommunikationssysteme oder zur Fernerkundung der Erdoberfläche oder aber

des Weltalls benötigt. Die wichtigsten Komponenten der Satelliten sind hierbei die Leistungsendstufen und die Antennen, welche die meist bei mehreren Gigahertz liegenden Signale abstrahlen. Extreme Anforderungen an die Funktionalität solcher Antennensysteme können nur basierend auf einer genauen Kenntnis theoretischer Zusammenhänge erfüllt werden.

Obwohl in letzter Zeit durch negative Schlagzeilen belastet, ist auch die mobile Funkkommunikation (Handy, Laptop, Car-Entertainment) nach wie vor ein wichtiges Feld der Hochfrequenztechnik. Hier wird die technologische Entwicklung hauptsächlich durch einen enormen Kostendruck voran getrieben, welcher auf den Herstellern der Mobilkommunikationsendgeräte (Basisstationen, Handys, etc.) liegt. So müssen beispielsweise zu einer effizienteren Ausnutzung der vorhandenen Frequenzspektren alte Techniken erweitert und neue Methoden entwickelt werden. Für moderne Kommunikationsendgeräte werden immer mehr Standards definiert (WLAN, WiMax, UMTS, GSM, Bluetooth, GPS etc.), welche möglichst alle von einem kleinen Gerät beherrscht werden sollen. Hierzu bedarf es nicht nur der Miniaturisierung der Antennen, sondern auch fortschrittlicher Signalverarbeitung, welche z.B. auf den Eigenschaften mehrerer verteilter Antennen beruht, sog. „Intelligente Antennen“. Ein aktuelles Forschungsgebiet ist ein weiterer Kommunikationsstandard für ultrakurze Abstände ( $<7$  m), welcher auf der Abstrahlung ultrabreitbandiger Impulse im Frequenzbereich von 3,1 – 10,6 GHz (Ultra-Wide-Band) basiert. Dies soll die Verbindung unterschiedlicher technischer Geräte mit sehr hohen Datenraten und einer hohen Störsicherheit gewährleisten.

Das Thema Störsicherheit hat unter der Überschrift EMV (Elektromagnetische Verträglichkeit) einen eigenen Stellenwert in der Hochfrequenztechnik. Nicht nur die Tatsache, dass alle möglichen Geräte zur Kommunikation „strahlen“, sondern auch Schaltnetzteile etc., erfordert einen hohen Aufwand zur Abschirmung von elektronischen Baugruppen, um eine Einkopplung der hochfrequenten Störungen zu vermeiden.

Viele weitere Themengebiete können genannt werden. So z.B. die Hochleistungsmikrowelle zur Prozessierung von Materialien, oder aber die Erzeugung hoher Leistungen bei Frequenzen über 100 GHz für die Kernfusion, welche alle ein tiefes Verständnis der Wechselwirkung hochfrequenter Felder erfordern. Auch in der Medizintechnik spielen hochfrequenztechnische Fragestellungen eine immer stärkere Rolle, sei es die echtzeitfähige Videoübertragung von Operationen, die Verbesserung der Magnetresonanztomographie oder bildgebende Verfahren mit Terahertzstrahlung.

Die theoretischen Grundlagen, die in den folgenden Abschnitten abgeleitet werden, sind in den Bereichen

- Hochfrequenztechnik
- Mikrowellentechnik und
- Millimeterwellentechnik

sinngemäß anwendbar, so dass von diesen Grundlagen her keine Einschränkungen bestehen.

Das Skriptum basiert in manchen Teilen auf den Werken [25] und [22], die auch zur zusätzlichen Lektüre empfohlen werden.



## 2. Leitungstheorie

Die Energieübertragung zwischen Generator und Verbraucher findet bei höheren Frequenzen in der Regel über Leitungen statt. Eine Leitung im engeren Sinn besteht aus zwei voneinander isolierten Leitern und evtl. einer Abschirmung. Die Abschirmung ist häufig mit einem der beiden Leiter identisch, z.B. bei der coaxialen Leitung.

Die Leitung wird als *homogen* bezeichnet, wenn sie eine über die Leitungslänge völlig gleichmäßige Querschnittsstruktur sowohl der Leiter als auch des Dielektrikums besitzt; sie gilt als *quasi homogen*, wenn gewisse Querschnittsabweichungen, z.B. Stützisolatoren, sich in kurzen Abständen periodisch wiederholen. Wann diese Abstände als kurz zu bezeichnen sind, kann erst nach Entwicklung der Theorie definiert werden.

Der Anwendungsbereich von Leitungen umfasst allgemein

- Energie- und Signalübertragung,
- Mess- oder Abtastleitungen,
- Erzeugung von Blindelementen in der HF-Schaltungstechnik.

In der Praxis existiert eine große Vielfalt von Leitungen, die auf die jeweilige Anwendung optimiert sind. Beispiele sind in Bild 2.1 dargestellt.

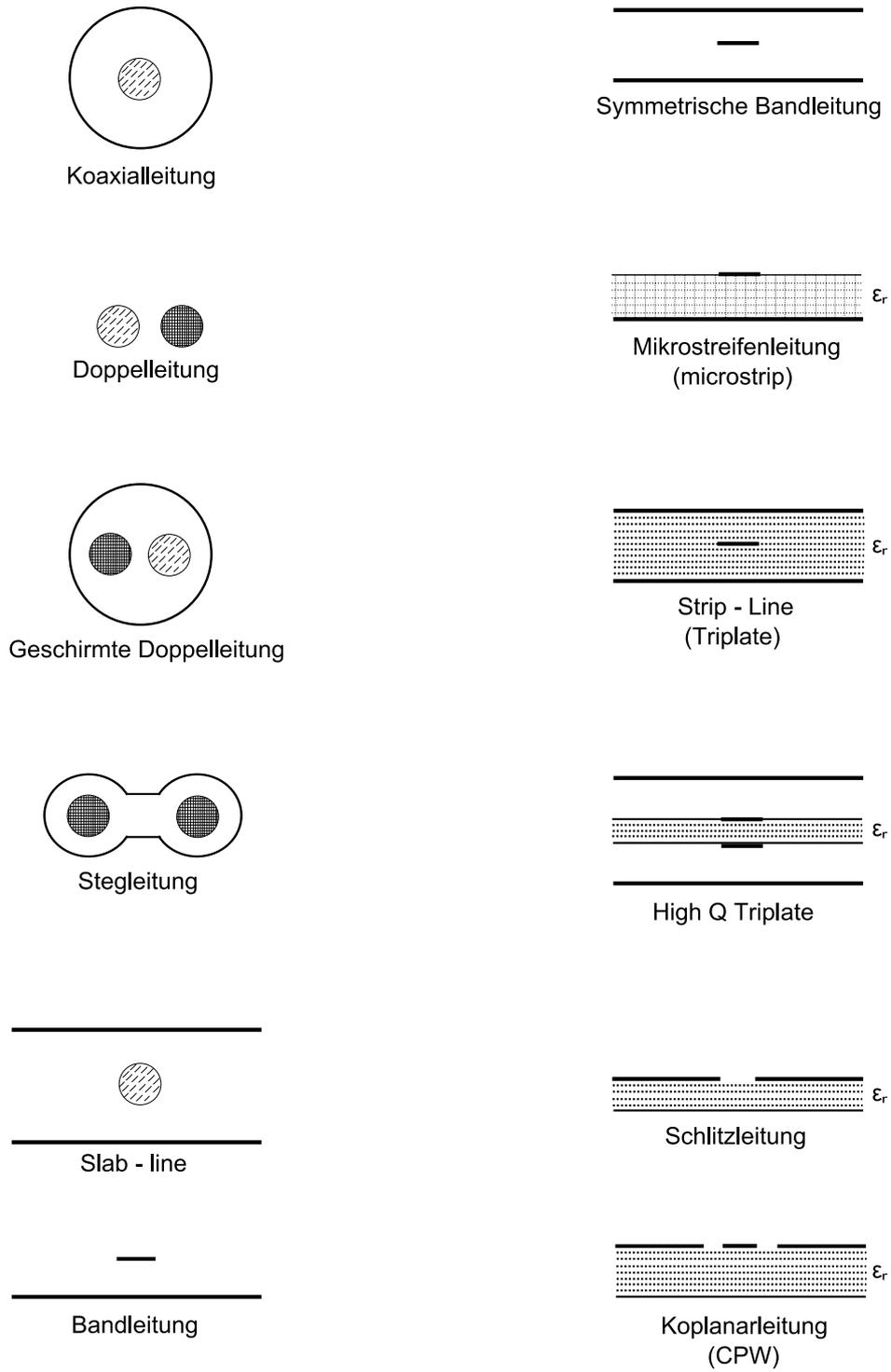


Bild 2.1.: Querschnitte durch verschiedene HF-Leitungstypen

## 2.1. Ersatzschaltbild einer TEM-Leitung

Die Leiter der Leitungen sind bei Stromfluss von magnetischen Feldern umgeben. Die entstehende magnetische Feldenergie führt zu induktiven Wirkungen. Zwischen den beiden Leitern bestehen Spannungen und elektrische Felder. Die elektrische Feldenergie führt zu kapazitiven Wirkungen. Induktive und kapazitive Wirkungen sind längs der Leitung stetig verteilt, so dass ein Ersatzschaltbild aus unendlich vielen, unendlich kleinen Spulen und Kondensatoren besteht, die wie in Bild 2.2 hintereinander geschaltet sind.

Man kann die Wirkung einer solchen verlustlos angenommenen Leitung auch schon durch Unterteilung des Ersatzschaltbildes in endlich viele  $\Delta L$  und  $\Delta C$  näherungsweise beschreiben, solange die  $\Delta L$  und  $\Delta C$  dabei hinreichend klein bleiben, d.h. wenn für das Produkt  $\omega\Delta L \cdot \omega\Delta C < 0,01$  gilt (Tiefpass weit unter der Grenzfrequenz). Je höher die Frequenz ist, desto feiner muss man die Leitung in  $\Delta L$  und  $\Delta C$  aufteilen, um ausreichend genaue Rechnungen durchführen zu können.

Wenn die beiden Leiter der Leitung wechselnden Querschnitt haben und beliebig verlegt werden, werden auch die  $\Delta L$  und  $\Delta C$  des Ersatzbildes längs der Leitung überall verschieden sein. Man nennt dies auch eine *inhomogene* Leitung. Da längere Leitungen sehr erhebliche Wirkungen haben, müssen die Eigenschaften der verwendeten Leitungen exakt bekannt und berechenbar sein. Die mathematische Behandlung inhomogener Leitungen ist jedoch sehr schwierig. Ein einfaches und genau berechenbares Verhalten zeigen dagegen die homogenen Leitungen, bei denen die  $\Delta L$  und  $\Delta C$  längs der Leitung konstant sind. Daher verwendet man für längere Leitungen nur homogene Leitungen, zumal die Herstellung dieser im Allgemeinen auch wesentlich einfacher ist als die Herstellung von nicht homogenen Leitungen, wenn man definierte Eigenschaften der Leitungen vorschreiben muss.

Bei einer realen Leitung entstehen durch den Stromfluss in Verbindung mit dem ohmschen Widerstand in den Leitern Verluste, für die im Ersatzschaltbild ein Längswiderstand  $\Delta R$  in Serie zu  $\Delta L$  eingesetzt wird. Ebenso wird das Auftreten dielektrischer Verluste durch einen zum Kondensator  $\Delta C$  parallelen Leitwert  $\Delta G$  berücksichtigt. Man erhält damit das vollständige Ersatzschaltbild eines Leitungsabschnittes gemäß Bild 2.3. Die Leitung selbst kann dann durch Kettenschaltung vieler solcher Leitungsabschnitte dargestellt werden.

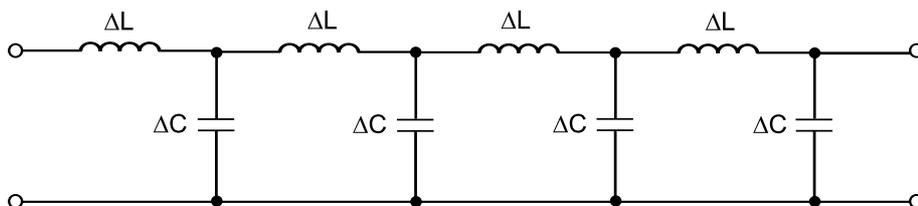


Bild 2.2.: Leitungs-Ersatzschaltung einer verlustlosen Leitung

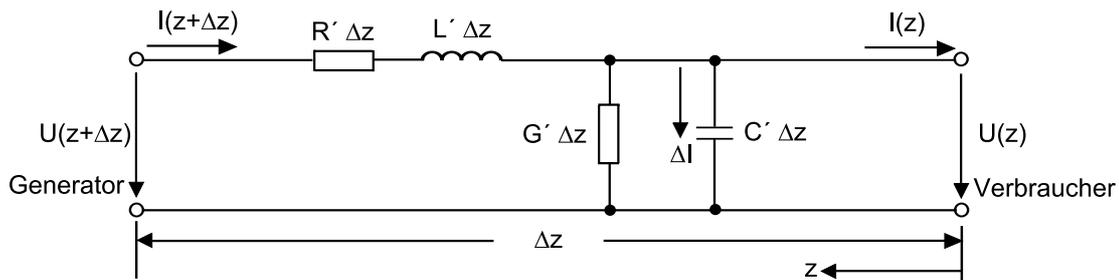


Bild 2.3.: Vollständiges Ersatzschaltbild eines kurzen Leitungsabschnittes einer verlustbehafteten Leitung

Die vier Größen  $\Delta R$ ,  $\Delta L$ ,  $\Delta C$  und  $\Delta G$  sind der Länge des Leitungsstücks proportional. Daher werden die vier Leitungskenngrößen definiert durch die sogenannten Leitungsbeläge, d.h. durch die auf die Länge des Leitungsabschnittes  $\Delta z$  bezogenen Kapazitäts- bzw. Induktivitätswerte. Diese ergeben sich zu:

$$\begin{array}{l}
 L' = \frac{\Delta L}{\Delta z} \quad \text{Induktivitätsbelag} \\
 R' = \frac{\Delta R}{\Delta z} \quad \text{Widerstandsbelag}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} L' \\ R' \end{array}} \right\} \text{Längsbeläge}$$

$$\begin{array}{l}
 C' = \frac{\Delta C}{\Delta z} \quad \text{Kapazitätsbelag} \\
 G' = \frac{\Delta G}{\Delta z} \quad \text{Leitwertbelag}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} C' \\ G' \end{array}} \right\} \text{Querbeläge}$$
(2.1)

## 2.2. Telegraphengleichungen

Zur Berechnung des Übertragungsverhaltens einer Leitung dient das vollständige Ersatzschaltbild eines Leitungsabschnittes gemäß Bild 2.3 als Grundlage. Die Ortskoordinate  $z$  entlang der Leitung wird dabei von rechts nach links positiv gezählt, da dies für die spätere Darstellung zweckmäßig ist. Für eine infinitesimal kleine Leitungslänge  $\Delta z$  können Strom und Spannung als stationär angenommen werden und somit die Kirchhoffschen Regeln angewandt werden.

Damit folgt aus der Maschenregel ( $\sum U = 0$ ):

$$\begin{aligned}
 U(z + \Delta z) - U(z) &= (j\omega L' + R')\Delta z \cdot I(z + \Delta z) \\
 \Leftrightarrow \frac{U(z + \Delta z) - U(z)}{\Delta z} &= (j\omega L' + R') \cdot I(z + \Delta z)
 \end{aligned}$$
(2.2)

Aus der Knotenregel ( $\sum I = 0$ ) erhält man:

$$\begin{aligned} I(z + \Delta z) - I(z) &= (j\omega C' + G')\Delta z \cdot U(z) \\ \Leftrightarrow \frac{I(z + \Delta z) - I(z)}{\Delta z} &= (j\omega C' + G') \cdot U(z) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Bei dem Grenzübergang  $\Delta z \rightarrow 0$ , für eine infinitesimal kurze Länge des Leitungsabschnittes, gehen die Gleichungen (2.2) und (2.3) in ein System von gekoppelten Differentialgleichungen über, die als die *Leitungsgleichungen* oder *Telegraphengleichungen* bezeichnet werden:

$$\frac{\partial U(z)}{\partial z} = (j\omega L' + R') \cdot I(z) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial I(z)}{\partial z} = (j\omega C' + G') \cdot U(z) \quad (2.5)$$

Diese beschreiben den Verlauf von Spannung und Strom auf der Leitung über der Ortskoordinate  $z$ . Zur Lösung dieses Differentialgleichungssystems ist es günstig die Gleichung (2.4) zu differenzieren und (2.5) darin einzusetzen:

$$\frac{\partial^2 U(z)}{\partial z^2} = (j\omega L' + R') \cdot \frac{\partial I(z)}{\partial z} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial^2 U(z)}{\partial z^2} = (j\omega L' + R')(j\omega C' + G') \cdot U(z)$$

Dies ist eine lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die sich auf die Form

$$\frac{\partial^2 U(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 \cdot U(z) \quad (2.7)$$

$$\text{mit } \gamma := \sqrt{(j\omega L' + R')(j\omega C' + G')} \quad (2.8)$$

bringen läßt. Eine analoge Beziehung läßt sich auch für den Strom ableiten.

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ergibt sich mit Hilfe des Exponentialansatzes nach d'Alembert zu

$$U(z) = C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z} \quad , \quad (2.9)$$

wobei  $C_1$  und  $C_2$  beliebige komplexe Konstanten sind, die später aus den gegebenen Randbedingungen bestimmt werden können. Um den Strom  $I(z)$  zu bestimmen, wird (2.9) in (2.4)

eingesetzt, woraus sich

$$I(z) = \frac{\gamma}{j\omega L' + R'} (C_1 e^{\gamma z} - C_2 e^{-\gamma z}) \quad (2.10)$$

ergibt.

## 2.3. Wellenausbreitung auf Leitungen

Zur Interpretation von (2.9) ist es zweckmäßig, die beiden Summanden  $C_1 e^{\gamma z}$  und  $C_2 e^{-\gamma z}$  getrennt zu betrachten. Dazu wird zunächst die komplexe Konstante  $\gamma$  gemäß (2.8) in ihren Realteil  $\alpha$  und den Imaginärteil  $\beta$  zerlegt:

$$\gamma =: \alpha + j\beta \quad \text{mit} \quad \alpha \geq 0 \text{ und } \beta > 0 \quad (2.11)$$

Für den komplexen zeitabhängigen Momentanwert der Spannung  $u_1(z,t)$  des ersten Summanden in (2.9) ergibt sich somit für eine Schwingung mit der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$

$$u(z,t) = C_1 e^{\gamma z} e^{j\omega t} = C_1 e^{\alpha z} e^{j(\beta z + \omega t)} = C_1 e^{\alpha z} e^{j\beta(z + \frac{\omega}{\beta}t)} \quad (2.12)$$

Der letzte Exponentialterm beschreibt eine Welle, die sich für  $\beta > 0$  in  $-z$ -Richtung mit der Geschwindigkeit

$$v_P = \frac{\omega}{\beta} \quad (2.13)$$

ausbreitet, die auch *Phasengeschwindigkeit* genannt wird. Aufgrund des Exponentialterms  $e^{\alpha z}$  ist diese Welle für  $\alpha > 0$  in  $-z$ -Richtung gedämpft. Daher wird  $\alpha$  auch als Dämpfungskonstante bezeichnet. Während einer Periodendauer  $T = 1/f$  der harmonischen Schwingung hat sich die Welle um die Strecke einer Wellenlänge

$$\lambda = v_P T = \frac{\omega}{\beta} T = \frac{2\pi f}{\beta} \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\beta} \quad (2.14)$$

fortbewegt. Damit ergibt sich für die *Wellenzahl*

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.15)$$

die auch als *Phasenbelag* oder *Phasenkonstante* bezeichnet wird, da sich wegen des Terms  $\beta z$  in (2.12) die Phase der Spannung entlang der Leitung proportional zu  $\beta$  verändert.  $\gamma$  selbst wird als *Fortpflanzungsbelag* oder *Ausbreitungskonstante* bezeichnet.

Insgesamt beschreibt der Term  $C_1 e^{\gamma z}$  somit eine einzelne in  $-z$ -Richtung fortschreitende (für  $\alpha > 0$  gedämpfte) Welle mit der komplexen Amplitude  $C_1$ . Die Welle, welche sich in  $-z$ -Richtung, also von links nach rechts in Bild 2.3 ausbreitet, wird in der vorliegenden Konvention als *hinlaufende* Welle bezeichnet, da sie in Richtung des am rechten Ende der Leitung angeschlossenen Verbrauchers hinläuft.

Analog stellt der Term  $C_2 e^{-\gamma z}$  in (2.9) eine sich in  $+z$ -Richtung ausbreitende (gedämpfte) Welle dar. Sie läuft also von rechts nach links, zurück in den auf der linken Seite angenommenen Generator und wird daher als *rücklaufende* Welle bezeichnet. Ganz entsprechend stellen die beiden Summanden in (2.10) jeweils eine hin- bzw. rücklaufende Welle des Stromes dar.

Die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  bestimmen sich aus der Spannung an der Stelle  $z = 0$  (am Verbraucher) zu

$$C_1 = U_H(0) \quad \text{und} \quad C_2 = U_R(0) \quad . \quad (2.16)$$

Damit lassen sich die beiden Gleichungen (2.9) und (2.10) schreiben als

$$U(z) = U_H(z) + U_R(z) = U_H(0)e^{\gamma z} + U_R(0)e^{-\gamma z} \quad \text{und} \quad (2.17)$$

$$I(z) = I_H(z) - I_R(z) = I_H(0)e^{\gamma z} - I_R(0)e^{-\gamma z} \quad . \quad (2.18)$$

Das bedeutet, die am Ort  $z$  der Leitung messbare Spannung ergibt sich im allgemeinen Fall immer aus der Überlagerung der Spannung einer hinlaufenden Welle  $U_H(z)$  und der Spannung einer rücklaufenden Welle  $U_R(z)$ . Ebenso ergibt sich der gesamte tatsächlich fließende Strom aus der Überlagerung von  $I_H(z)$  und  $I_R(z)$ . Das negative Vorzeichen vor  $I_R(z)$  invertiert die Zählrichtung für den Strom der rücklaufenden Welle und berücksichtigt damit, dass die transportierte Wirkleistung der rücklaufenden Welle in entgegengesetzter Richtung zur hinlaufenden Welle, also vom Verbraucher zur Quelle, erfolgt.

Aus (2.9) und (2.10) folgt mit (2.17) und (2.18)

$$\frac{U_H(z)}{I_H(z)} = \frac{U_H(0)}{I_H(0)} = \frac{U_R(z)}{I_R(z)} = \frac{U_R(0)}{I_R(0)} = \frac{j\omega L' + R'}{\gamma} = \sqrt{\frac{j\omega L' + R'}{j\omega C' + G'}} =: Z_L \quad . \quad (2.19)$$

Diese Gleichung besagt, dass das Verhältnis von Spannung zu Strom der beiden hin- und rücklaufenden Teilwellen entlang der Leitung konstant, d.h. ortsunabhängig ist. Darüber hinaus ist dieses Verhältnis für diese beiden Teilwellen das gleiche. Dieses Verhältnis wird *Leitungswellenwiderstand*  $Z_L$  genannt und ist neben  $\gamma$  die zweite wichtige Größe zur Beschreibung der Wellenausbreitung auf einer Leitung.  $Z_L$  ist im Allgemeinen komplex und ergibt sich wie  $\gamma$  aus den vier Leitungsbelägen  $L'$ ,  $C'$ ,  $R'$  sowie  $G'$  und ist damit charakteristisch für die Leitung,

d.h. nur abhängig von der Geometrie des Leitungsquerschnittes und den Eigenschaften des Dielektrikums (Substrat, Isolierung). Zu beachten ist, dass  $Z_L$  im Allgemeinen *nicht* das Verhältnis der Gesamtspannung  $U(z)$  zum Gesamtstrom  $I(z)$  auf der Leitung angibt.  $Z_L$  bezieht sich nur auf das Verhältnis von Spannung zu Strom der beiden einzelnen (hin- und rücklaufenden) Teilwellen. Ebenso hängt  $Z_L$  nicht von der Beschaltung der Leitung oder der Impedanz des Verbrauchers ab.

Aus (2.17) und (2.18) kann mit Hilfe von (2.19) die ortsabhängige Verteilung von Spannung  $U(z)$  und Strom  $I(z)$  berechnet werden, wenn  $U(0)$  und  $I(0)$  am Leitungsende  $z = 0$  (Ort des Verbrauchers) bekannt sind:

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{1}{2} (U(0) + I(0)Z_L) e^{+\gamma z} + \frac{1}{2} (U(0) - I(0)Z_L) e^{-\gamma z} & (2.20) \\ &= U(0) \cosh(\gamma z) + I(0)Z_L \sinh(\gamma z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{1}{2} \left( I(0) + \frac{U(0)}{Z_L} \right) e^{+\gamma z} + \frac{1}{2} \left( I(0) - \frac{U(0)}{Z_L} \right) e^{-\gamma z} & (2.21) \\ &= I(0) \cosh(\gamma z) + \frac{U(0)}{Z_L} \sinh(\gamma z) \end{aligned}$$

## 2.4. Leitung mit beliebigem Abschluss

Es sei eine Leitung mit dem Leitungswellenwiderstand  $Z_L$  gegeben, die an ihrem rechten Ende bei  $z = 0$  mit einer beliebigen komplexen Impedanz eines Verbrauchers  $Z_V$  abgeschlossen ist, wie in Bild 2.4 dargestellt. Entlang der Leitung breiten sich eine hinlaufende Welle (in  $-z$ -Richtung zum Verbraucher) und eine rücklaufende Welle (in  $+z$ -Richtung zum Generator) aus. Die Gesamtspannung und der Gesamtstrom ergebend sich gemäß (2.17) und (2.18) durch Überlagerung dieser Wellen. Löst man diese beiden Gleichungen unter Berücksichtigung von

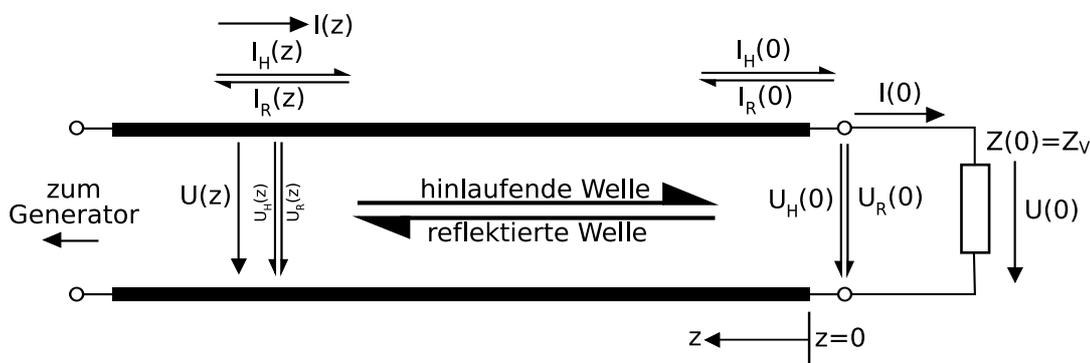


Bild 2.4.: Leitung mit beliebiger komplexer Abschlussimpedanz  $Z_V$

(2.19) nach den einzelnen Teilwellen für Spannung und Strom auf, ergibt sich

$$U_{\text{H}}(z) = \frac{1}{2} (U(z) + Z_{\text{L}} I(z)) \quad (2.22)$$

$$U_{\text{R}}(z) = \frac{1}{2} (U(z) - Z_{\text{L}} I(z)) \quad (2.23)$$

und

$$I_{\text{H}}(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{U(z)}{Z_{\text{L}}} + I(z) \right) \quad (2.24)$$

$$I_{\text{R}}(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{U(z)}{Z_{\text{L}}} - I(z) \right) \quad (2.25)$$

Damit lassen sich die Spannungen und Ströme der einzelnen Teilwellen an jedem Ort berechnen, wenn die Gesamtspannung  $U(z)$  und der Gesamtstrom  $I(z)$  bekannt sind. Für eine gegebene Leitung, und damit ein gegebenes  $Z_{\text{L}}$ , läßt sich der Zustand auf der Leitung am Ort  $z$  damit stets durch genau zwei komplexe Größen definieren: Entweder  $U(z)$  und  $I(z)$  oder  $U_{\text{H}}(z)$  und  $U_{\text{R}}(z)$  oder  $I_{\text{H}}(z)$  und  $I_{\text{R}}(z)$ . Die einzelnen Größen sind dabei stets über die Beziehungen (2.17), (2.18) und (2.22) bis (2.25) miteinander verknüpft und lassen sich ineinander umrechnen.

Bildet man das Verhältnis von rücklaufenden Wellen zu hinlaufenden Wellen erhält man als weitere wichtige Beschreibungsgröße den *Reflexionsfaktor*  $r$ . Dividiert man (2.23) durch (2.22) bzw. (2.25) durch (2.24) und bezeichnet die am Ort  $z$  wirksame Impedanz mit

$$Z(z) := \frac{U(z)}{I(z)} \quad , \quad (2.26)$$

so ergibt sich

$$r(z) := \frac{U_{\text{R}}(z)}{U_{\text{H}}(z)} = \frac{I_{\text{R}}(z)}{I_{\text{H}}(z)} = \frac{\frac{U(z)}{I(z)} - Z_{\text{L}}}{\frac{U(z)}{I(z)} + Z_{\text{L}}} = \frac{Z(z) - Z_{\text{L}}}{Z(z) + Z_{\text{L}}} \quad (2.27)$$

Gleichung (2.27) liefert somit einen eindeutigen Zusammenhang zwischen der Impedanz  $Z(z)$ , also dem Verhältnis von gesamter Spannung zum gesamten Strom und dem Reflexionsfaktor, also dem Verhältnis der Amplitude der hinlaufenden Welle zur Amplitude der rücklaufenden Welle. Die zugehörige Umkehrabbildung zur Berechnung der Impedanz  $Z$  aus dem Reflexionsfaktor  $r$  ergibt sich direkt aus (2.27) zu

$$Z(z) = Z_{\text{L}} \frac{1 + r(z)}{1 - r(z)} \quad (2.28)$$

Direkt am Ort des Verbrauchers bei  $z = 0$  ist

$$Z(z) = Z(0) = \frac{U(0)}{I(0)} = Z_V \quad (2.29)$$

und damit ergibt sich für den zugehörigen Reflexionsfaktor

$$r_V = r(0) = \frac{Z(0) - Z_L}{Z(0) + Z_L} = \frac{Z_V - Z_L}{Z_V + Z_L} \quad (2.30)$$

Um den Reflexionsfaktor an einem beliebigen Ort zu berechnen, läßt sich direkt aus (2.27) und (2.17) eine einfache Vorschrift ableiten:

$$r(z) = \frac{U_R(z)}{U_H(z)} = \frac{U_R(0) e^{-\gamma z}}{U_H(0) e^{\gamma z}} = \frac{U_R(0)}{U_H(0)} e^{-2\gamma z} = r(0) e^{-2\gamma z} = r_V e^{-2\gamma z} \quad (2.31)$$

Der Reflexionsfaktor an einem beliebigen Ort der Leitung ergibt sich damit einfach durch Multiplikation des Reflexionsfaktors  $r(0)$  am Leitungsende mit dem Term  $e^{-2\gamma z}$ , was in der komplexen Zahlenebene ( $r$ -Ebene) einer Drehstreckung entspricht. Für eine dämpfungsfreie Leitung, also  $\alpha = 0$  geht (2.31) in

$$r(z) = r(0) e^{-2j\beta z} = r_V e^{-2j\beta z} = r_V e^{-j4\pi \frac{z}{\lambda}} \quad (2.32)$$

über, was einer reinen Drehung des Reflexionsfaktors in der  $r$ -Ebene um den Winkel  $4\pi \frac{z}{\lambda}$  entspricht. Aufgrund dieses einfachen Zusammenhangs spielt der Reflexionsfaktor eine entscheidende Rolle bei der Betrachtung von Leitungen. Da sich der Reflexionsfaktor  $r(z)$  entlang der Leitung ändert, ändert sich im Allgemeinen auch die Impedanz  $Z(z)$  gemäß (2.28) entlang der Leitung. Dies kann dazu benutzt werden, Impedanzen zu transformieren. Aus den Gleichungen (2.20) und (2.21) folgt für die ortsabhängige Impedanz

$$\begin{aligned} Z(z) &= \frac{U(z)}{I(z)} = \frac{U(0) \cosh(\gamma z) + I(0) Z_L \sinh(\gamma z)}{I(0) \cosh(\gamma z) + \frac{U(0)}{Z_L} \sinh(\gamma z)} \\ &= Z_L \frac{Z_V \cosh(\gamma z) + Z_L \sinh(\gamma z)}{Z_L \cosh(\gamma z) + Z_V \sinh(\gamma z)} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Diese Beziehung ist deutlich komplizierter als (2.31) bzw. (2.32), d.h. die Transformation von Leitungen läßt sich durch Einführung des Reflexionsfaktors einfacher beschreiben als nur durch die Impedanz. Ein wichtiger Sonderfall ergibt sich, wenn die Abschlussimpedanz  $Z_V$  gleich dem Wellenwiderstand  $Z_L$  der Leitung gewählt wird. Dann folgt aus (2.33)

$$Z(z) = Z_V = Z_L \quad (2.34)$$

d.h. die Impedanz auf der Leitung ist ortsunabhängig durch  $Z_L$  gegeben. Das heißt in diesem Fall findet keine Transformation der Impedanz durch die Leitung statt. Aufgrund von (2.30) ist dann  $r(z) = 0$ , d.h. es findet keine Reflexion am Verbraucher  $Z_V$  statt und es gibt keine rücklaufende Welle  $U_R(z)$ . In diesem Fall spricht man davon, dass  $Z_V$  an den Wellenwiderstand  $Z_L$  der Leitung angepasst ist.

Mit den bisher behandelten Gleichungen läßt sich die Wellenausbreitung auf TEM-Leitungen bereits vollständig beschreiben. In der Praxis treten dabei sehr häufig Spezialfälle auf, die bestimmte Vereinfachungen erlauben. In den folgenden Abschnitten werden diese detailliert behandelt.

## 2.5. Die verlustfreie Leitung bei Anpassung

Der Regelfall bzw. das Ziel des Einsatzes von Leitungen ist es, Energie verlustlos und angepasst dem Verbraucher zuzuführen. Daraus folgen die Randbedingungen:

- $R' = 0$
- $G' = 0$
- Welle nur zum Verbraucher (in  $-z$ -Richtung)  $U_R = 0$  und  $I_R = 0$

Das Ersatzschaltbild aus Bild 2.3 vereinfacht sich zur Schaltung in Bild 2.5.

Die relevanten Gleichungen vereinfachen sich damit zu:

$$\gamma = j\beta \quad \alpha = 0 \quad \beta = \omega\sqrt{L'C'} \quad (2.35)$$

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (2.36)$$

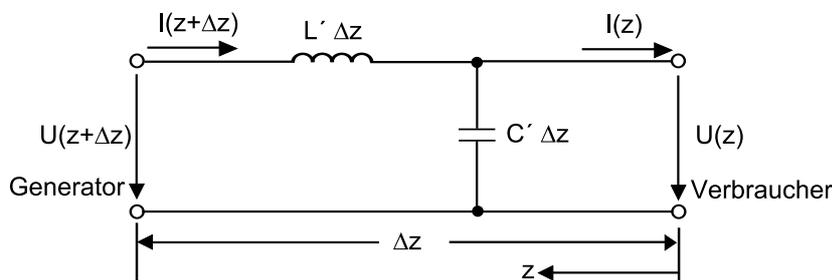


Bild 2.5.: Verlustfreie Leitung

$$U(z) = U(0) \cdot e^{j\beta z} \quad (2.37)$$

$$I(z) = I(0) \cdot e^{j\beta z} \quad (2.38)$$

Die Phasengeschwindigkeit  $v_P$  ergibt sich daraus zu

$$v_P = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = c_0 = \text{Lichtgeschwindigkeit für } \varepsilon_r = \mu_r = 1 \quad (2.39)$$

Bei Anwesenheit eines Materials mit einer Dielektrizitätszahl  $\varepsilon_r > 1$  bzw. einer Permeabilitätszahl  $\mu_r > 1$  gilt

$$v_P = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \quad (2.40)$$

Hiermit berechnet sich die Wellenlänge zu

$$\lambda = \frac{v_P}{f} = \frac{\omega}{f \cdot \beta} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c_0}{f \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \quad (2.41)$$

Der Wert  $\beta$  ist also die Wellenzahl, die sich aus  $\beta = 2\pi/\lambda$  herleitet.

Da in diesem Abschnitt Verlust- und Reflexionsfreiheit vorausgesetzt wurde, berechnet man die transportierte Leistung, welche rein reell und konstant ist, längs der Leitung zu

$$P(z) = P(0) = \frac{1}{2} U_0 I_0 = \frac{1}{2} I_0^2 Z_L = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{Z_L}, \quad (2.42)$$

wobei  $U_0$  und  $I_0$  die reellen Amplituden (Scheitelwerte) der Spannung bzw. des Stromes bedeuten. Die orts- und zeitabhängigen Größen für Spannung und Strom ergeben sich zu

$$u(z, t) = U(0) e^{j\beta z} e^{j\omega t} \quad i(z, t) = I(0) e^{j\beta z} e^{j\omega t} \quad (2.43)$$

mit den reellen Momentanwerten

$$\text{Re}\{u(z, t)\} = U_0 \cos(\omega t + \beta z) = U_0 \cos \left[ \omega \left( t + \sqrt{L'C'} \cdot z \right) \right] \quad (2.44)$$

$$\text{Re}\{i(z, t)\} = I_0 \cos(\omega t + \beta z) = I_0 \cos \left[ \omega \left( t + \sqrt{L'C'} \cdot z \right) \right] \quad (2.45)$$

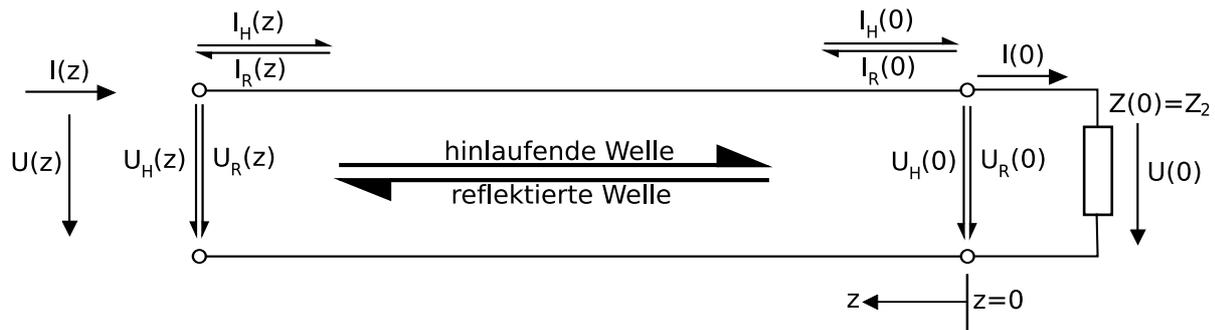


Bild 2.6.: Leitung mit Fehlanpassung

## 2.6. Strom- und Spannungsverteilung auf einer Leitung in Abhängigkeit vom Abschlusswiderstand

Zur Berechnung des Verlaufs von Strom und Spannung werden zunächst *verlustfreie Leitungen* betrachtet. Die Zählrichtungen zur Festlegung der Phasenbeziehungen sind in Bild 2.6 dargestellt.

Ein wesentliches Merkmal einer Leitung ist, dass sie Energie nur in Form von so genannten Wellen transportieren kann und dass diese Wellen stets in einem vorgeschriebenen Verhältnis von Strom und Spannung auftreten, wobei gilt:

$$\frac{U_H}{I_H} = \frac{U_R}{I_R} = Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (2.46)$$

Diese Bedingung ist identisch mit der allgemein für fortschreitende Wellen geltenden Bedingung, dass in der Welle im zeitlichen Mittel gleichviel Energie im elektrischen Feld und im magnetischen Feld übertragen wird.

$$dW_e = \frac{1}{2} U_H^2 \Delta C = \frac{1}{2} U_H^2 C' dz \quad (2.47)$$

$$dW_m = \frac{1}{2} I_H^2 \Delta L = \frac{1}{2} I_H^2 L' dz \quad (2.48)$$

Setzt man (2.46) in eine dieser Gleichungen ein, so zeigt sich, dass folgendes gilt:

$$dW_e = dW_m \quad (2.49)$$

Die von einer Welle transportierte Energie kann am Ende der Leitung nur ein solcher Verbraucher aufnehmen, der das gleiche Verhältnis  $U/I = Z_L$  hat.

Der Verbraucher muss also ein reeller Widerstand  $R = Z_L$  sein. Wenn der Verbraucher nicht gleich dem Wellenwiderstand der Leitung ist, kann er die von der Welle angebotene Energie nicht voll aufnehmen. Hat der Verbraucher z.B. einen größeren Widerstand, so kann er bei der von der Welle angebotenen Spannung  $U$  nur den Teil des angebotenen Stromes aufnehmen, der seinem Quotienten  $U/I = R$  entspricht. Die vom Verbraucher nicht aufgenommene Energie läuft auf der Leitung als reflektierte Welle zur speisenden Quelle zurück. Man hat somit auf einer Leitung mit Fehlanpassung, d.h. einem Abschlusswiderstand  $Z(0) \neq Z_L$ , zwei sich überlagernde Wellen. Die komplexe Amplitude der reflektierten Spannung  $U_R(z)$  an einer beliebigen Stelle  $z$ , setzt sich zusammen aus:

$$\begin{aligned} U_R(z) &= U_R(0) \cdot e^{-j\beta z} \\ &= |U_R(0)| e^{j\varphi_R} e^{-j\beta z} \end{aligned} \quad (2.50)$$

wobei  $\varphi_R$  die Phase der reflektierten Spannung ist.

Der Lösungsansatz (2.9) für die Wellengleichung stellt den allgemeinsten Wellenzustand auf einer Leitung dar. Da die Wellengleichung sowohl für Ströme als auch für Spannungen gelöst werden kann, erhält man folgendes Gleichungspaar (siehe Bild 2.6):

$$U(z) = U_H(z) + U_R(z) = U_H(0) \cdot e^{j\beta z} + U_R(0) \cdot e^{-j\beta z} \quad (2.51)$$

$$I(z) = I_H(z) - I_R(z) = I_H(0) \cdot e^{j\beta z} - I_R(0) \cdot e^{-j\beta z} \quad (2.52)$$

Die Maschengleichung (2.2) kann für den Strom für jede Teilwelle getrennt gelöst werden, woraus mit (2.4) und (2.19) folgt

$$I_R(z) = \frac{1}{j\omega L'} \frac{dU_R(z)}{dz} = j\beta \frac{1}{j\omega L'} U_R(z) = + \frac{U_R(z)}{Z_L} \quad (2.53)$$

$$I_H(z) = \frac{1}{j\omega L'} \frac{dU_H(z)}{dz} = j\beta \frac{1}{j\omega L'} U_H(z) = + \frac{U_H(z)}{Z_L}, \quad (2.54)$$

Gleichung (2.53) und (2.54) in (2.52) eingesetzt und diese wiederum in (2.51) ergibt:

$$U_H(z) = \frac{1}{2}(U(z) + Z_L I(z)) \quad (2.55)$$

$$U_R(z) = \frac{1}{2}(U(z) - Z_L I(z)) \quad (2.56)$$

Das Verhältnis von rücklaufender Spannung  $U_R$  zu hinlaufender Spannung  $U_H$  ergibt den Re-

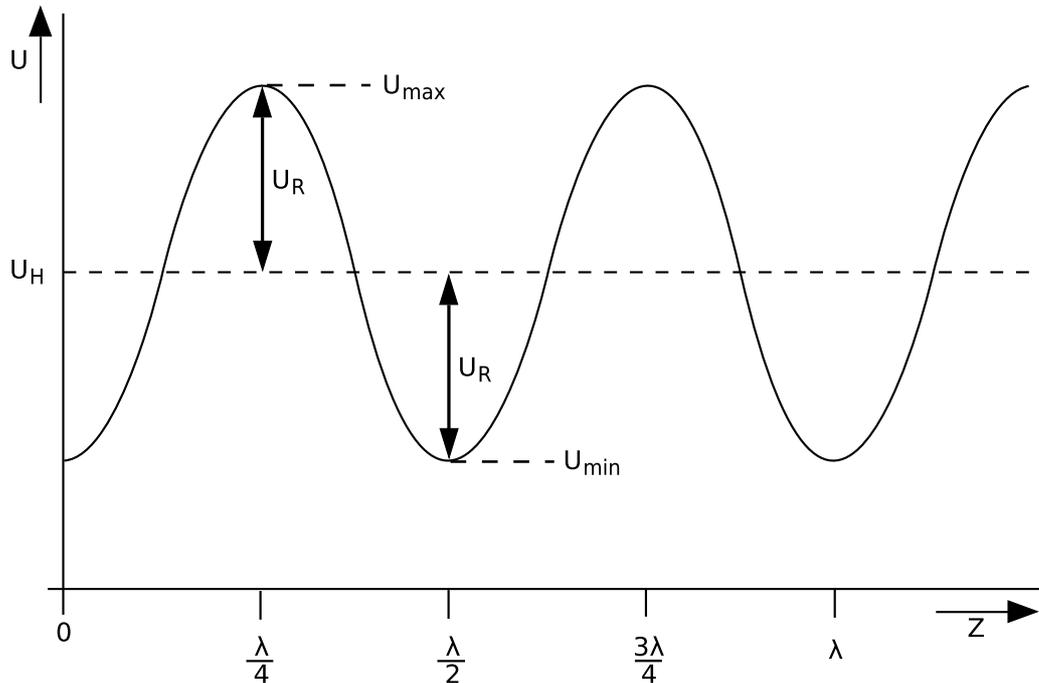


Bild 2.7.: Amplitudenverlauf der Spannung längs einer Leitung mit reflektierter Welle

flexionsfaktor  $r$ . Da  $Z_L = U_H/I_H$  bzw.  $Z_L = U_R/I_R$ , gilt entsprechendes auch für die Ströme.

$$r(z) = \frac{U_R(z)}{U_H(z)} = \frac{I_R(z)}{I_H(z)} \quad (2.57)$$

$$r(z) = |r(z)| \cdot e^{j\varphi} \quad (2.58)$$

Der Betrag  $|U(z)|$  der Spannung nach (2.51) längs der Leitung zeigt den charakteristischen Verlauf nach Bild 2.7. Dem  $U_H$  überlagert sich der Einfluss des  $U_R$ . Es gibt Punkte  $z$ , in denen  $U_R$  und  $U_H$  gleichphasig sind und sich zum Maximalwert  $U_{\max} = |U_H| + |U_R|$  addieren. Im Abstand einer Viertelwellenlänge von diesem Ort hat sich die Phase der einen Welle um  $\pi/2$ , die Phase der anderen Welle nach (2.50) um  $-\pi/2$  verschoben. Dort sind also die Spannungen der beiden Wellen gegenphasig und subtrahieren sich zum Minimalwert  $U_{\min} = ||U_H| - |U_R||$ .

Nutzt man Gleichung 2.30 in Gleichung 2.51 und 2.52 erhält man folgende Beziehung:

$$U(z) = U_H(z) + U_R(z) = U_0 [e^{\gamma z} + r_V e^{-\gamma z} \pm r_V e^{\gamma z - 2\alpha z} \mp r_V e^{\gamma z - 2\alpha z}] \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} U(z,t) &= U_0 [(e^{\alpha z} \pm r_V e^{-\alpha z}) e^{j\beta z} + r_V e^{-\alpha z} (\mp e^{j\beta z} + e^{-j\beta z})] e^{j\omega t} \\ &= U_0 (e^{\alpha z} \pm r_V e^{-\alpha z}) e^{j(\beta z + \omega t)} \mp U_0 r_V e^{-\alpha z} 2 \{j \sin, \cos\}(\beta z) e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Wobei der vordere Term die in  $-z$ -Richtung laufende Welle und der Term nach  $\mp$  die stehende Welle beschreiben. Für den Strom gelten folgende Gleichungen:

$$U(z) = I_H(z) - I_R(z) = I_0 [e^{\gamma z} - r_V e^{-\gamma z} \pm r_V e^{\gamma z - 2\alpha z} \mp r_V e^{\gamma z - 2\alpha z}] \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} I(z,t) &= I_0 [(e^{\alpha z} \pm r_V e^{-\alpha z}) e^{j\beta z} - r_V e^{-\alpha z} (\pm e^{j\beta z} + e^{-j\beta z})] e^{j\omega t} \\ &= I_0 (e^{\alpha z} \pm r_V e^{-\alpha z}) e^{j(\beta z + \omega t)} \mp I_0 r_V e^{-\alpha z} 2 \{\cos, j \sin\}(\beta z) e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Vergleicht man nun die Gleichungen 2.60 und 2.62, so kann man erkennen, dass Strom und Spannung für die in  $-z$ -Richtung laufende Welle in Phase, während diese für die stehende Welle um  $90^\circ$  bzw. um  $\lambda/4$  phasenverschoben sind.

Für den Strom gelten die gleichen Gesetze, also auch die gleichen Kurven wie in Bild 2.7, jedoch sind die Kurven des Stromes um  $\lambda/4$  gegen die Kurven der Spannung verschoben, weil zwar nach (2.53) und (2.54) der reflektierte Strom  $I_R$  in Phase mit der Spannung  $U_R$  liegt, sich aber die Ströme  $I_H$  und  $I_R$  subtrahieren, während sich die Spannungen  $U_H$  und  $U_R$  addieren. Die Strommaxima liegen also am Ort der Spannungsminima und umgekehrt.

Das Verhältnis der maximalen Amplituden zu den minimalen Amplituden von Spannung bzw. Strom ist der Welligkeitsfaktor  $s$ , auch Stehwellenverhältnis VSWR (**V**oltage **S**tanding **W**ave **R**atio) genannt:

$$s = \text{VSWR} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{|U_H| + |U_R|}{||U_H| - |U_R||} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \quad (2.63)$$

Damit wird die Schwankung der Spannung und des Stromes längs der Leitung beschrieben.

Der Kehrwert  $1/s$  wird Anpassungsfaktor  $m$  genannt:

$$m = \frac{1}{s} = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{I_{\min}}{I_{\max}} = \frac{1 - |r|}{1 + |r|} \quad (2.64)$$

Das VSWR kann Werte zwischen 1 und  $\infty$  annehmen, während  $m$  nur zwischen 0 und 1 liegen kann. Betrachtet man als Sonderfall einen reellen Abschlusswiderstand  $Z_V = R_V$ , so ergibt sich für den Anpassfaktor nach (2.64) mit (2.30)

$$m = \frac{R_V + Z_L - |R_V - Z_L|}{R_V + Z_L + |R_V - Z_L|} = \begin{cases} \frac{Z_L}{R_V} & \text{für } R_V > Z_V \\ \frac{R_V}{Z_L} & \text{für } R_V < Z_V \end{cases}, \quad (2.65)$$

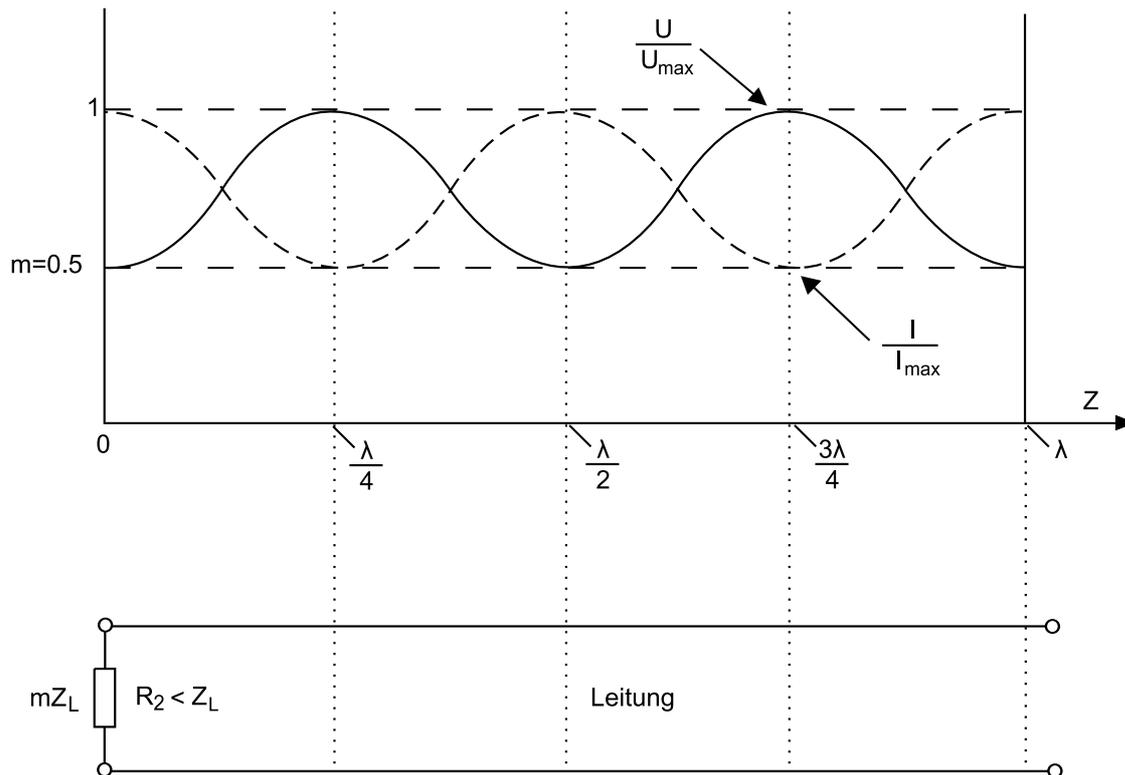


Bild 2.8.: Spannung und Strom längs der Leitung für  $m = 0,5$ , wobei die Leitung mit dem reellen Widerstand  $R_2 = mZ_L = 0,5Z_L$  abgeschlossen ist.

d.h. es gilt  $R_V = \frac{1}{m} Z_L$  für  $R_V > Z_V$  und  $R_V = m Z_L$  falls  $R_V < Z_V$  ist.

Da sich Ströme und Spannungen längs der Leitung bei Fehlanpassung periodisch ändern, durchläuft auch die Impedanz, die zu dem jeweiligen Spannungs-/Stromverhältnis  $U(z)/I(z)$  gehört, einen definierten Wertebereich. In Bild 2.8 ist der Verlauf von Spannung und Strom qualitativ dargestellt, wobei an der Stelle  $z = 0$  ein reeller Abschluss  $R_V = mZ_L = 0,5 Z_L$  gewählt wurde. Die Größe und der Phasenwinkel einer am Leitungsende reflektierten Welle hängen wesentlich davon ab, wie der Verbraucher vom Wellenwiderstand abweicht, d.h. ob sein Widerstand größer oder kleiner ist, und ob er eine induktive oder eine kapazitive Phase besitzt.

Um die Art der Reflexion aus dem komplexen Widerstand  $Z_2$  des Verbrauchers berechnen zu können, und dadurch den Zustand auf der Leitung kennen zu lernen, ist es zweckmäßig, (2.51) und (2.52) für Strom und Spannung unter Verwendung der Eulerschen Formel

$$e^{\pm j\beta z} = \cos(\beta z) \pm j \sin(\beta z) \quad (2.66)$$

umzuformen in (vergleiche auch mit dem allgemeinen Fall in (2.20) und (2.21))

$$U(z) = U_2 \cos(\beta z) + j I_2 Z_L \sin(\beta z) \quad (2.67)$$

$$I(z) = I_2 \cos(\beta z) + j \frac{U_2}{Z_L} \sin(\beta z) \quad (2.68)$$

mit dem Strom am Leitungsende

$$I_2 = I_H(0) - I_R(0) = \frac{U_H(0) - U_R(0)}{Z_L} \quad (2.69)$$

und der Spannung am Leitungsende

$$U_2 = U_H(0) + U_R(0) = [I_H(0) + I_R(0)] Z_L \quad (2.70)$$

Die Gleichungen (2.67) und (2.68) sind die so genannten Vierpolgleichungen der verlustfreien Leitung, in denen der Zusammenhang zwischen den Betriebsgrößen am Ende der Leitung und den Betriebsgrößen an einem beliebigen Ort  $z$  der Leitung dargestellt ist.

Mit dem Verbraucher  $Z_2 = U_2/I_2$  erhält man daraus die so genannten Transformationsgleichungen der Leitung

$$U(z) = U_2 \left( \cos(\beta z) + j \frac{Z_L}{Z_2} \sin(\beta z) \right) \quad (2.71)$$

$$I(z) = I_2 \left( \cos(\beta z) + j \frac{Z_2}{Z_L} \sin(\beta z) \right) \quad (2.72)$$

Die Spannung und der Strom werden längs der Leitung durch die komplexen Klammerfaktoren, die vom Verhältnis  $Z_2/Z_L$  abhängig sind, transformiert. Daraus ergibt sich durch Division von (2.71) durch (2.72) der Eingangswiderstand  $Z_1$  einer Leitung der Länge  $l$  am Ort  $z = l$  als Quotient von  $U(l)$  und  $I(l)$ :

$$Z_1 = \frac{U(l)}{I(l)} = Z_2 \frac{1 + j \frac{Z_L}{Z_2} \tan(\beta l)}{1 + j \frac{Z_2}{Z_L} \tan(\beta l)} \quad (2.73)$$

Man erkennt den komplexen Faktor, mit dem der Widerstand  $Z_2$  durch die Leitung transformiert wird. Im Grenzfall für  $l = \lambda/4 + n \cdot \lambda/2$  greift man auf (2.71) und (2.72) zurück und erhält mit  $\cos(\beta z) = 0$  und  $\sin(\beta z) = 1$

$$Z_1 = \frac{U(l)}{I(l)} = \frac{Z_L^2}{Z_2} \quad (2.74)$$

Dieser Fall der Leitungslänge von  $\lambda/4$  wird in der Praxis häufig angewandt. Seine Eigenschaften zur Kompensation von Blindwiderständen werden deshalb in Abschnitt 4.1 ausführlich behandelt.

Ist die Leitung bei  $z = 0$  mit einer beliebigen Impedanz  $Z_V = Z_2$  des Verbrauchers, also dem Reflexionsfaktor  $r_2 = |r_2|e^{j\varphi_2}$ , abgeschlossen erhält man aus (2.51) und (2.52) für die Beträge von Spannung und Strom längs der Leitung

$$\begin{aligned} |U(z)| &= |U_H(0) e^{j\beta z} + r_2 U_H(0) e^{-j\beta z}| & (2.75) \\ &= |U_H(0)| \cdot |e^{j\beta z}| \cdot |1 + r_2 e^{-j2\beta z}| = |U_H(0)| \cdot |1 + r_2 e^{-j2\beta z}| \\ &= |U_H(0)| \cdot |1 + |r_2| e^{j(\varphi_2 - 2\beta z)}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |I(z)| &= |I_H(0) e^{j\beta z} - r_2 I_H(0) e^{-j\beta z}| & (2.76) \\ &= |I_H(0)| \cdot |e^{j\beta z}| \cdot |1 - r_2 e^{-j2\beta z}| = \frac{|U_H(0)|}{Z_L} \cdot |1 - r_2 e^{-j2\beta z}| \\ &= \frac{|U_H(0)|}{Z_L} \cdot |1 - |r_2| e^{j(\varphi_2 - 2\beta z)}| \end{aligned}$$

Damit lassen sich die Orte an denen Spannung und Strom Maximal-, bzw. Minimalwerte annehmen leicht berechnen. Die Spannung wird minimal, wenn sich die hinlaufende und die rücklaufende Welle destruktiv überlagern, d.h. wenn für den letzten Term in (2.75) gilt:

$$\text{Spannungsminima:} \quad \varphi_2 - 2\beta z = \pi + n \cdot 2\pi \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z} \quad (2.77)$$

Entsprechend wird die Spannung maximal falls sich die hin- und rücklaufende Welle der Spannung konstruktiv überlagern, d.h. wenn gilt:

$$\text{Spannungsmaxima:} \quad \varphi_2 - 2\beta z = n \cdot 2\pi \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z} \quad (2.78)$$

Für die Minima und Maxima des Stromes gelten wegen des negativen Vorzeichens in (2.77) genau die umgekehrten Beziehungen, d.h. der Strom ist gerade dort minimal wo die Spannung maximal ist und umgekehrt, also:

$$\text{Stromminima:} \quad \varphi_2 - 2\beta z = n \cdot 2\pi \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z} \quad (2.79)$$

und

$$\text{Strommaxima:} \quad \varphi_2 - 2\beta z = \pi + n \cdot 2\pi \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z} \quad (2.80)$$

Ist die Abschlussimpedanz  $Z_2 = R_2$  reell, so gilt, falls  $Z_2 < Z_L$  ist, für die Phase des Reflexionsfaktors  $\varphi_2 = \pi$ . Für den Fall  $Z_2 > Z_L$  ist die Phase  $\varphi_2 = 0$ .

Zur Veranschaulichung soll deshalb zunächst der Fall des reellen Abschlusswiderstandes  $Z_2 = R_2 < Z_L$  diskutiert werden. Der allgemeine Fall einer Leitung mit beliebig komplexem Abschluss wird in Abschnitt 4.1 behandelt. Der reelle Abschlusswiderstand am Ende der Leitung mit einem Wert  $R_2 < Z_L$  bewirkt gemäß (2.30) einen reellen Reflexionsfaktor  $r_2$  am Leitungsende mit  $r_2 < 0$ , also  $\varphi_2 = \pi$ . Für die Orte der Spannungsminima ergeben sich daher gemäß (2.77)

$$\begin{aligned} 2\beta z_{\min} &= n \cdot 2\pi & n \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow z_{\min} &= n \cdot \frac{\lambda}{2} \end{aligned} \quad , \quad (2.81)$$

d.h. ein Spannungsminimum befindet sich für  $n = 0$  direkt am Leitungsende  $z = 0$  des Verbrauchers. Die weiteren Minima wiederholen sich auf der Leitung dann periodisch in Abständen von  $\lambda/2$ .

Die Spannungsmaxima ergeben sich auf die gleiche Weise aus (2.78) zu

$$\begin{aligned} 2\beta z_{\max} &= \pi + n \cdot 2\pi & n \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow z_{\max} &= \frac{\lambda}{4} + n \cdot \frac{\lambda}{2} \end{aligned} \quad . \quad (2.82)$$

Der Minimalwert der Spannung  $U_{\min}$  ergibt sich aus (2.71) für  $z = z_{\min}$  und damit

$$\cos(\beta z_{\min}) = \pm 1 \quad \text{und} \quad \sin(\beta z_{\min}) = 0$$

zu

$$U_{\min} = |U_2| \quad . \quad (2.83)$$

Der Maximalwert  $U_{\max}$  folgt für  $z = z_{\max}$  und damit

$$\cos(\beta z_{\max}) = 0 \quad \text{und} \quad \sin(\beta z_{\max}) = \pm 1$$

aus (2.71), wenn man noch (2.65) berücksichtigt zu

$$U_{\max} = |U_2| \frac{Z_L}{R_2} = U_{\min} \frac{Z_L}{R_2} = U_{\min} \frac{1}{m} \quad . \quad (2.84)$$

Die Amplitude der Spannung längs der Leitung ist damit nach (2.71)

$$|U(z)| = U_{\max} \sqrt{\sin^2(\beta z) + (m \cos(\beta z))^2} \quad (2.85)$$

Der Maxima des Stromes sind nach (2.72) gegenüber der Spannung um  $\lambda/4$  verschoben

$$|I(z)| = I_{\max} \sqrt{\cos^2(\beta z) + (m \sin(\beta z))^2} \quad (2.86)$$

$I_{\max}$  ergibt sich für  $z = 0$  zu

$$I_{\max} = |I_2| \quad (2.87)$$

$I_{\min}$  ergibt sich für  $z = \lambda/4$ , also  $\beta z = \pi/2$  aus (2.72) zu:

$$I_{\min} = |I_2| \frac{R_2}{Z_L} = I_{\max} \frac{R_2}{Z_L} = I_{\max} m \quad (2.88)$$

Da zudem  $|U_2|/|I_2| = R_2$  gilt, folgt aus (2.84) und (2.88) die wichtige Beziehung

$$\frac{U_{\max}}{I_{\max}} = \frac{U_{\min}}{I_{\min}} = Z_L \quad (2.89)$$

Schreibt man der Spannung  $U_2$  und dem Strom  $I_2$  die Phase 0 zu, so ergibt sich aus der Klammer in Gleichung (2.71) die Phase  $\varphi$  der Spannung an einem beliebigen Ort  $z$  für  $Z_2 = R_2$  zu

$$\tan \varphi = \frac{\operatorname{Im} U(z)}{\operatorname{Re} U(z)} = \frac{Z_L}{R_2} \tan(\beta z) = \frac{1}{m} \tan(\beta z) \quad (2.90)$$

und die Phase des Stromes  $\psi$  aus der Klammer in (2.72) zu

$$\tan \psi = \frac{\operatorname{Im} I(z)}{\operatorname{Re} I(z)} = \frac{R_2}{Z_L} \tan(\beta z) = m \tan(\beta z) \quad (2.91)$$

## 2.7. Näherungslösung für Leitungen mit kleinen Verlusten

Verluste in schwach gedämpften Leitungen entstehen zum einen durch induktive Stromverdrängung im Leiter (Skinneffekt) und durch dielektrische Verluste der Querkapazitäten. Diese

Verluste werden charakterisiert durch ihre Verlustwinkel:

$$\tan \delta_L = \frac{R'}{\omega L'} \quad \tan \delta_C = \frac{G'}{\omega C'} \quad (2.92)$$

Berücksichtigt man (2.92) bei der Berechnung der Ausbreitungskonstanten  $\gamma$  nach (2.8), so erhält man

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha + j\beta = \sqrt{(j\omega L' + R') \cdot (j\omega C' + G')} \\ &= \sqrt{j\omega L' \cdot j\omega C' \cdot \left(1 - j\frac{R'}{\omega L'}\right) \cdot \left(1 - j\frac{G'}{\omega C'}\right)} \\ &= j\omega\sqrt{L'C'}\sqrt{1 - j\tan\delta_L - j\tan\delta_C - \tan\delta_L\tan\delta_C}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Für schwach gedämpfte Leitungen gilt  $R' \ll \omega L'$  und  $G' \ll \omega C'$  und damit für die Verlustwinkel

$$\tan \delta_L \ll 1 \quad \text{und} \quad \tan \delta_C \ll 1. \quad (2.94)$$

Benutzt man dies und nimmt weiterhin die Näherung

$$\sqrt{1 + \Delta} \approx 1 + \frac{\Delta}{2} \quad \text{für kleine } \Delta \quad (2.95)$$

zu Hilfe, erhält man

$$\begin{aligned} \gamma &= j\omega\sqrt{L'C'} \left[ 1 - \frac{j}{2}(\tan\delta_L + \tan\delta_C) \right] \\ &= j\omega\sqrt{L'C'} + \frac{1}{2}\omega\sqrt{L'C'} \left( \frac{R'}{\omega L'} + \frac{G'}{\omega C'} \right) \end{aligned} \quad (2.96)$$

Für den Leitungswellenwiderstand nach (2.19) werden der Widerstandsbelag  $R'$  und der Leitwertbelag  $G'$  vernachlässigt, so dass sich ein reeller Leitungswellenwiderstand

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (2.97)$$

wie im Fall der verlustlosen Leitung ergibt. Damit ergeben sich die Phasenkonstante  $\beta$  und der Dämpfungsbelag  $\alpha$  zu:

$$\beta = \omega \sqrt{L'C'} \quad (2.98)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \underbrace{\frac{R'}{Z_L}}_{\text{Längsdämpfung}} + \underbrace{G'Z_L}_{\text{Querdämpfung}} \right) \quad (2.99)$$

Für die hinlaufende Welle ergeben sich die reellen Scheitelwerte von Strom und Spannung längs der Leitung zu

$$I_0(z) = I_0(0)e^{\alpha z} \quad (2.100)$$

$$U_0(z) = U_0(0)e^{\alpha z} \quad (2.101)$$

Die komplexen orts- und zeitabhängigen Werte von Strom und Spannung sind

$$u(z, t) = U_0(0)e^{j\beta z} e^{\alpha z} e^{j\omega t} \quad (2.102)$$

$$i(z, t) = I_0(0)e^{j\beta z} e^{\alpha z} e^{j\omega t} \quad (2.103)$$

Die Dämpfung  $D$  für ein Leitungsstück der Länge  $z$  ergibt sich aus dem Verhältnis der Leistungen auf der Leitung

$$\frac{D}{\text{dB}} = 10 \lg \frac{P(z)}{P(0)} \quad (2.104)$$

$$\frac{D}{\text{Np}} = \frac{1}{2} \ln \frac{P(z)}{P(0)} \quad (2.105)$$

und wird meist in dB angegeben. Früher war die Angabe in Neper (Np) gebräuchlich. Auch den Dämpfungsbelag  $\alpha$  gibt man üblicherweise in der Einheit dB/m an. Die Umrechnung von der Einheit Np/m (Neper, bezüglich Basis  $e$ ) auf dB/m ist gegeben durch

$$\frac{\alpha}{\text{dB/m}} = 20 \lg(e) \cdot \frac{\alpha}{\text{Np/m}} = 8,69 \cdot \frac{\alpha}{\text{Np/m}} \quad (2.106)$$

Die Längs- und Querdämpfung in (2.99) besitzen unterschiedliche Frequenzabhängigkeiten, die im Folgenden untersucht werden.

Bei hohen Frequenzen ist der Skineffekt so stark ausgeprägt, dass die Eindringtiefe klein ist gegen sonstige Dimensionen, z.B. den Leiterdurchmesser. Der bei zylindrischen Leitern für niedrige Frequenzen notwendige Ansatz mit Besselfunktionen kann daher durch die Angabe einer effektiven Leitschichtdicke  $s$  ersetzt werden, die von der Frequenz und den Materialeigenschaften abhängt. Der Längswiderstand  $R'$  ist der effektiven Leitschichtdicke  $s$  und der spezifischen Leitfähigkeit  $\kappa$  umgekehrt proportional.

Er steigt mit der Wurzel aus der Frequenz:

$$R' \propto \frac{1}{\kappa s} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\kappa}} \quad \text{mit} \quad s = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}} \quad (2.107)$$

Beispiele für die Eindringtiefe in Kupfer ( $\kappa = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ ):

$f$	1 MHz	10 MHz	100 MHz	1 GHz	10 GHz
$s$	66 $\mu\text{m}$	21 $\mu\text{m}$	6,6 $\mu\text{m}$	2,1 $\mu\text{m}$	0,66 $\mu\text{m}$

Für die Längsdämpfung ergibt sich hieraus eine Frequenzabhängigkeit

$$\alpha_{R'} = \frac{1}{2} \frac{R'}{Z_L} \propto \frac{\sqrt{\omega}}{Z_L} \quad (2.108)$$

Für die Querdämpfung  $\alpha_{G'}$  gilt zunächst

$$\alpha_{G'} = \frac{1}{2} G' Z_L = \frac{1}{2} \omega C' \tan \delta_c \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{1}{2} \beta \tan \delta_c = \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} \tan \delta_c \quad (2.109)$$

Dabei ist  $\tan \delta_c$ , ebenso wie die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$ , eine Materialeigenschaft des Dielektrikums [8, 10] und hängt nur vom Material, nicht aber von der Geometrie der Leitung ab. Die dielektrische Dämpfung hängt daher nur vom Material des Dielektrikums und von  $\omega$  ab. Sie kann nicht durch die Wahl des Wellenwiderstandes und damit der Querschnittsform beeinflusst werden. Insbesondere hat eine dünne Leitung keine höheren dielektrischen Verluste als eine dicke mit demselben Dielektrikum.

Bei guten Isolierstoffen sind die ohmschen Verluste deutlich kleiner als die dielektrischen Verluste durch den Verschiebungsstrom. Unter dieser Voraussetzung ist  $\tan \delta_c$  näherungsweise frequenzunabhängig. Man erhält dann einen der Frequenz direkt proportionalen Querleitbelag  $\alpha_{G'}$ :

$$\alpha_{G'} \propto \omega \quad (2.110)$$

Dies ist physikalisch auch dadurch zu erklären, dass die dielektrischen Verluste proportional der Häufigkeit (und damit der Frequenz) der Umpolarisierungsvorgänge innerhalb des Isoliermaterials sind.

Für niedrige Frequenzen wird daher der Längswiderstand, für hinreichend hohe Frequenzen der Querleitwert den wesentlichen Beitrag zur Leitungsdämpfung liefern. Im doppeltlogarithmischen Diagramm (Bild 2.9) erhalten wir dann für beide Anteile Geraden mit der Steigung  $1/2$  bzw. 1 und für die Gesamtdämpfung näherungsweise eine geknickte Gerade.

Die Frequenz, bei der Längs- und Querdämpfung übereinstimmen, nennt man *Übernahmefrequenz*  $f_{\ddot{u}}$ , d.h. Bei der Übernahmefrequenz gilt

$$\alpha_{R'}(f_{\ddot{u}}) = \alpha_{G'}(f_{\ddot{u}}) \quad . \quad (2.111)$$

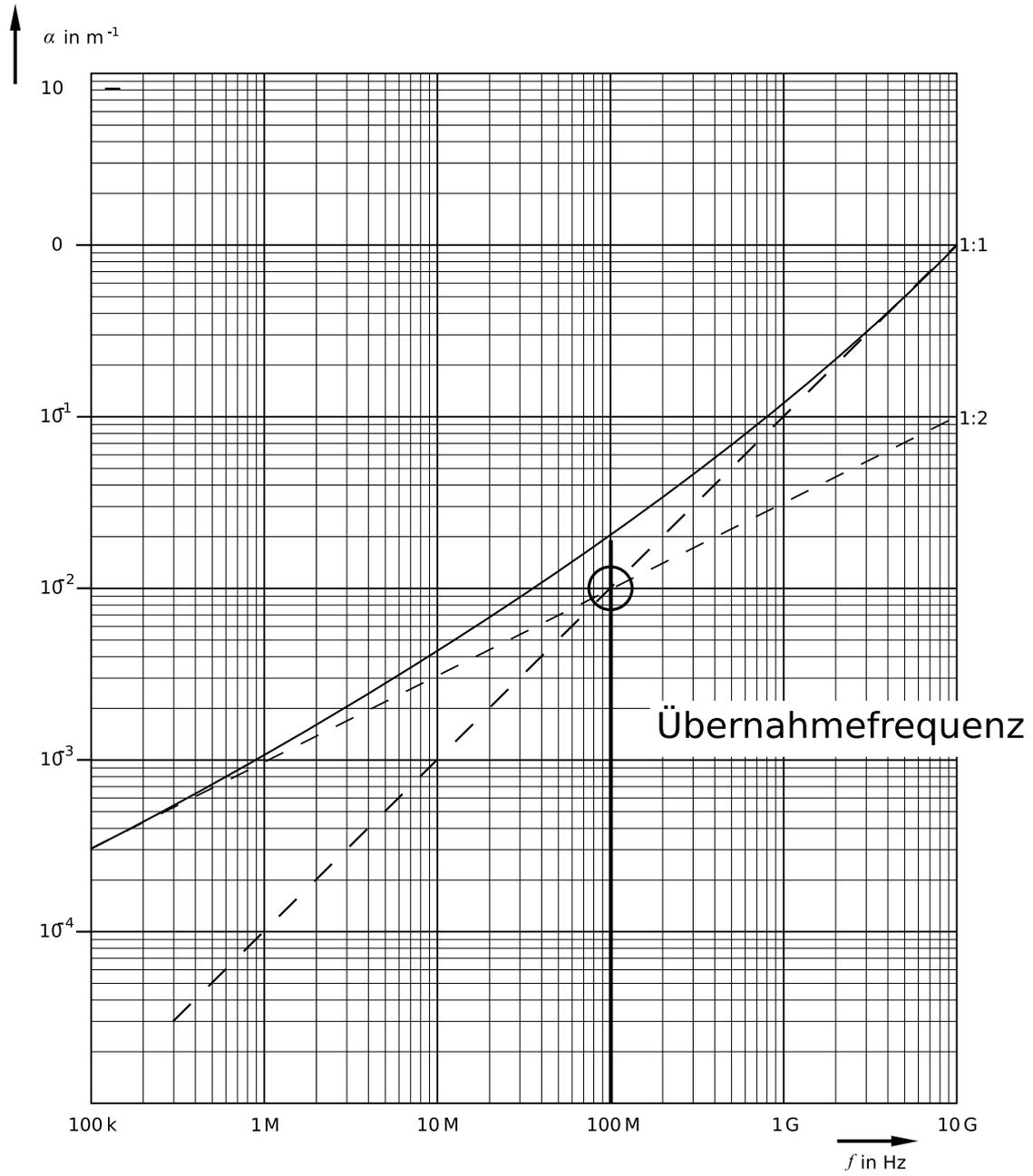


Bild 2.9.: Leitungsdämpfung in Abhängigkeit von der Frequenz (Beispiel)

## 2.8. Spezielle Leitungstypen

### 2.8.1. Koaxialleitung

An Hochfrequenzleitungen wird häufig die Forderung gestellt, dass weder ihr elektromagnetisches Feld nach außen dringen kann, noch dass äußere Felder Energie in die Leitung ein koppeln können. Man erreicht dies durch Abschirmung. Ein Beispiel einer unsymmetrischen, abgeschirmten Leitung ist die koaxiale Leitung (Bild 2.10). Der Verlauf der Feldlinien ist in Bild 2.11 gezeigt. Der Innenleiter einer solchen Leitung kann massiv, hohl oder verdrillt sein. Der Außenleiter kann als glattes oder gewelltes Rohr oder als Drahtgeflecht ausgeführt werden, u.U. mehrlagig, wenn geringe Abstrahlung an den Außenraum gefordert wird.

Die Leitungskenngrößen  $L'$ ,  $C'$ ,  $R'$  und  $G'$  lassen sich bei Kenntnis der Materialeigenschaften auch für viele andere Leitungen prinzipiell aus dem geometrischen Aufbau berechnen. Besondere Schwierigkeiten bereitet dabei die Bestimmung von  $R'$ , da die Oberflächenbeschaffenheit der Leiter einen schwer kontrollierbaren Einfluss auf den Hochfrequenzwiderstand hat. Die Berechnung von  $L'$  und  $C'$  soll an dem besonders einfachen Beispiel einer Leitung nach Bild 2.10 vorgeführt werden. Dazu verwendet man die bekannten Formeln für die magnetische Feldenergie einer Spule bzw. die elektrische Feldenergie eines Kondensators:

$$dW_{\text{el}} = \frac{1}{2} C' U^2 dz = \frac{1}{2} \varepsilon \iint E^2 dF dz \quad (2.112)$$

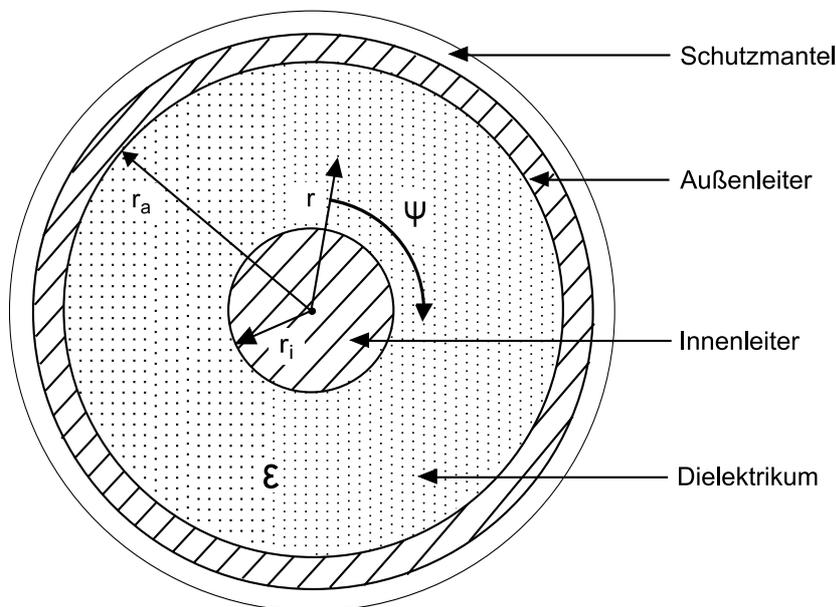


Bild 2.10.: Koaxiale Leitung

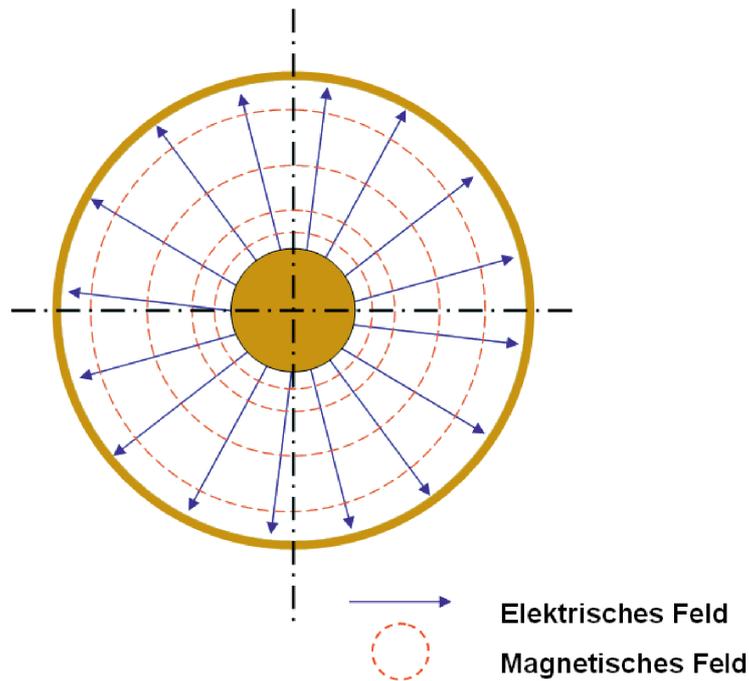


Bild 2.11.: Feldverteilung in der koaxialen Leitung

$$\text{mit } dF = r d\psi dr \quad (\text{siehe Bild 2.12}) \quad (2.113)$$

Aus den Gleichungen (2.112) und (2.113) folgt

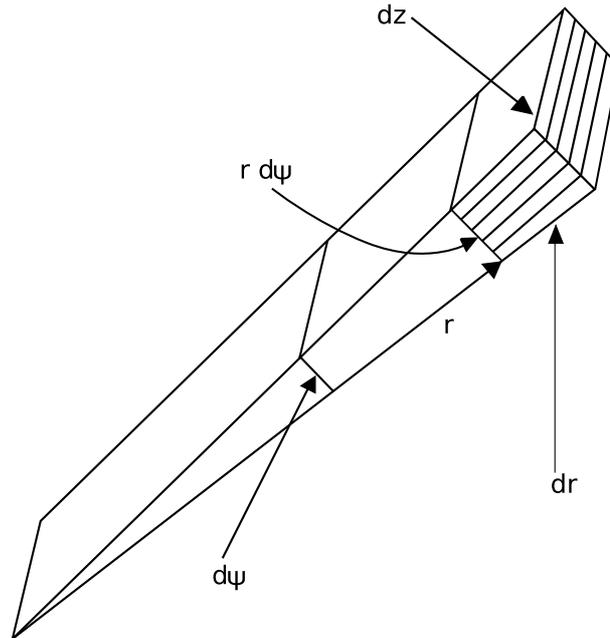
$$C' = \varepsilon \frac{\int_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} E^2 r d\psi dr}{U^2} \quad (2.114)$$

Da sich das elektrische Feld in einer Koaxialleitung wie das in einem Zylinderkondensator verhält, folgt mit

$$E = E_r \propto \frac{1}{r} \quad \text{und} \quad \int_{r_i}^{r_a} E dr = U \quad (2.115)$$

aus Gleichung (2.114):

$$C' = \varepsilon \frac{\int_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} r d\psi dr}{\left( \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r} dr \right)^2} = \varepsilon \frac{2\pi}{\ln \left( \frac{r_a}{r_i} \right)} \quad (2.116)$$

Bild 2.12.: Volumenelement  $dV$ 

Ähnlich berechnet sich der Induktivitätsbelag  $L'$  aus der magnetischen Feldenergie

$$dW_m = \frac{1}{2} L' I^2 dz = \frac{1}{2} \mu \iint H_\psi^2 dF dz \quad (2.117)$$

woraus folgt

$$L' = \mu \frac{\int_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} H_\psi^2 r d\psi dr}{I^2} \quad (2.118)$$

mit  $H_\psi = I/2\pi r$  für  $r_i \leq r \leq r_a$ . Setzt man dies in (2.118) ein und integriert, so ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln \left( \frac{r_a}{r_i} \right) \quad (2.119)$$

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{\ln \left( \frac{r_a}{r_i} \right)}{2\pi} \approx 60 \Omega \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \ln \left( \frac{r_a}{r_i} \right) \quad (2.120)$$

$$\beta = \omega\sqrt{L'C'} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \quad (2.121)$$

$$v_P = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \quad (2.122)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \quad (2.123)$$

wobei gilt:

$$\mu = \mu_0\mu_r \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am} \quad (2.124)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r \quad \varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm} \quad (2.125)$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377 \Omega \quad (2.126)$$

Die Gleichungen (2.121) bis (2.123) gelten allgemein für alle Leitungen, auf denen sich eine TEM-Welle (**t**ransversales **e**lektrisches und **m**agnetisches Feld) ausbreitet.

Für Leitungen mit homogenem Dielektrikum gelten darüber hinaus die aus (2.116), (2.119) und (2.120) abzuleitenden Gleichungen

$$C' = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{Z_L} \quad , \quad L' = \sqrt{\mu\varepsilon} \cdot Z_L \quad . \quad (2.127)$$

An dieser Stelle sei noch ohne weitergehende Erläuterungen erwähnt, dass die Grenzfrequenz diejenige Frequenz ist, ab der sich auf der Leitung keine reine TEM-Welle mehr ausbreitet, sondern ab der auch höhere Moden (z.B. E- und H-Feld in Ausbreitungsrichtung) auftreten. Sie wird dann erreicht, wenn der mittlere Umfang eine halbe Wellenlänge beträgt:

$$(r_a + r_i) \cdot \pi = \frac{\lambda}{2} \quad (2.128)$$

Weitere Details finden sich in [22].

Bei der coaxialen Leitung ist wegen der Rotationssymmetrie die Stromdichte längs des Umfangs der beiden Leiter konstant (d.h. nicht vom Koordinatenwinkel  $\psi$  abhängig). Da folglich die einzelnen Abschnitte der Umfangslinien gleichmäßig zum Längswiderstand beitragen, ist der leitende Querschnitt gleich dem Produkt aus Eindringtiefe und Umfang des betreffenden Kreises.

Die Beiträge des Innen- und des Außenleiters zur Längsdämpfung fasst man zusammen zu

$$R' = \frac{1}{\kappa s} \cdot \left( \frac{1}{2\pi r_a} + \frac{1}{2\pi r_i} \right) \quad (2.129)$$

mit  $\kappa$  als Leitfähigkeit und  $s$  als Eindringtiefe.

Für die Längsdämpfung in (2.108) ergibt sich unter Anwendung von (2.120):

$$\alpha_{R'} = \frac{R'}{2Z_L} = \frac{1}{2 \cdot \kappa \cdot s} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \left( \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_i} \right) \quad (2.130)$$

Eine Vergrößerung des Außenradius  $r_a$  führt daher immer zu einer geringeren Dämpfung. Allerdings existiert bei fixem Außenradius ein ganz bestimmtes Verhältnis von Außen- zu Innenradius, für das die Dämpfung ein Minimum annimmt. Es ist sinnvoll, das Minimum der Dämpfung bei konstant gehaltenem Außenradius aufzusuchen, da die Kosten eines Koaxialkabels im wesentlichen vom Außendurchmesser, kaum aber vom Durchmesser des Innenleiters abhängen.

Zur Bestimmung des Minimums setzt man

$$\frac{r_a}{r_i} = x \quad (2.131)$$

und erhält aus (2.130)

$$\alpha \propto \frac{1+x}{\ln x} =: y(x) \quad (2.132)$$

Von  $y(x)$  wird das Minimum bestimmt:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{\ln x - (1+x)/x}{\ln^2(x)} = 0 \quad \text{für} \quad \ln(x_{\text{opt}}) = 1 + \frac{1}{x_{\text{opt}}} \quad (2.133)$$

Diese transzendente Gleichung kann graphisch oder numerisch gelöst werden (Bild 2.13) und liefert das bei festgelegtem Außendurchmesser optimale Radienverhältnis:

$$x_{\text{opt}} = \left( \frac{r_a}{r_i} \right)_{\text{opt}} = 3,6 \quad \ln(x_{\text{opt}}) = 1,28 \quad (2.134)$$

„Luft“-Kabel enthalten nur eine schmale hochkant stehende Wendel großer Steigung aus isolierendem Kunststoff zur Halterung des Innenleiters und werden vor allem für fest verlegte Leitungen angewandt. Für bewegliche Leitungen, z.B. in Fahrzeugen und für preiswerte Kabel wird ein homogenes Dielektrikum verwendet, meist Polyäthylen ( $\varepsilon_r \approx 2,25$ ) oder lockerer Schaumstoff ( $\varepsilon_r \approx 1,4$ ).

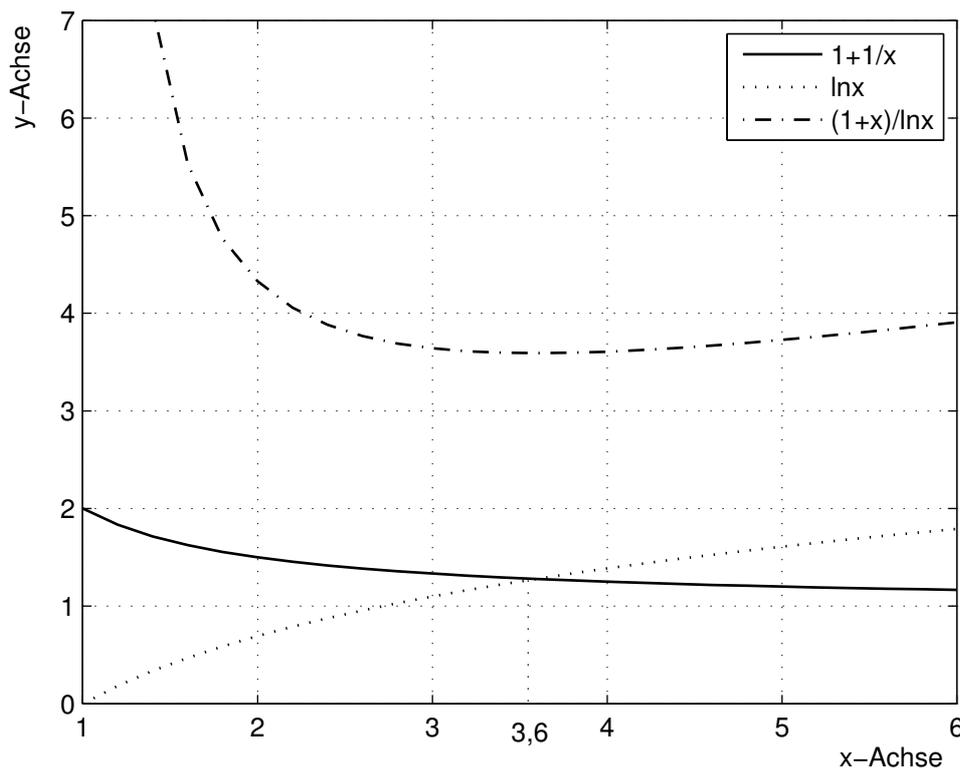


Bild 2.13.: Bestimmung des optimalen Durchmesserverhältnisses von Koaxialkabeln

Das optimale Durchmesserverhältnis von 3,6 : 1 entspricht für  $\varepsilon_r = 1$  (Luftkabel) einem Wellenwiderstand  $Z_L \approx 77 \Omega$ , für  $\varepsilon_r = 2,25$  (Vollkabel) einem Wellenwiderstand von  $51 \Omega$ .

Es wäre technisch vorteilhaft gewesen, einen mittleren Wellenwiderstand, z.B.  $60 \Omega$ , als allgemeinen Systemwiderstand festzulegen und dann sowohl mit Luftkabeln als auch mit Vollkabeln in der Nähe des Optimums zu liegen.

Die von einer koaxialen Leitung übertragbare Leistung hängt primär von der maximalen elektrischen Feldstärke  $E_{\max}$  ab. Sie liegt im Bereich von  $7 \text{ kV/cm}$ , wenn man von einer Durchschlagfeldstärke in Luft von  $30 \text{ kV/cm}$  ausgeht.  $E_{\max}$  ergibt sich aus der Feldstärke  $E$

$$\int E \, dr = U \quad E = \frac{U}{r \ln \left( \frac{r_a}{r_i} \right)} \quad (2.135)$$

am Innenleiter  $r_i$  zu

$$E_{\max} = \frac{U}{r_i \ln \left( \frac{r_a}{r_i} \right)} \quad (2.136)$$

Damit kann unter Zuhilfenahme von (2.120) mit  $\mu_r = 1$  eine koaxiale Leitung bei Anpassung

folgende maximale Leistung  $P_{\max}$  übertragen

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \frac{U_{\max}^2}{Z_L} = \frac{1}{120 \Omega} \sqrt{\varepsilon_r} \cdot E_{\max}^2 \cdot r_i^2 \ln \left( \frac{r_a}{r_i} \right) \quad (2.137)$$

Daraus kann das optimale Verhältnis  $r_a/r_i$  bestimmt werden:

$$r_i^2 \ln \left( \frac{r_a}{r_i} \right) = r_a^2 \left( \frac{r_i}{r_a} \right)^2 \cdot \ln \left( \frac{r_a}{r_i} \right) \stackrel{!}{=} \max \quad (2.138)$$

Substituiert man nun  $x = (r_a/r_i)^2$ , so erhält man die einfacher zu handhabende Gleichung für festes  $r_a$

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{\ln x}{x} \stackrel{!}{=} \max \quad (2.139)$$

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{x/x - \ln x}{x^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.140)$$

$$\Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow x = e = 2,718$$

und daraus das gesuchte Ergebnis:

$$\Rightarrow \left( \frac{r_a}{r_i} \right)_{\text{opt. bzgl. } P_{\max}} = \sqrt{2,718} = 1,648 \quad (2.141)$$

Vergleicht man (2.141) mit (2.134) so erkennt man, dass die Radienverhältnisse für die maximale übertragbare Leistung und für die minimalen ohmschen Verluste nicht übereinstimmen. Bei der Dimensionierung einer Koaxialleitung muss also zwischen beiden Forderungen eine Kompromisslösung gefunden werden.

## 2.8.2. Mikrostreifenleitung (Microstrip)

Auf gedruckten Schaltungen werden häufig Mikrostreifenleitungen (engl. Microstrip) verwendet. Diese bestehen aus einem metallisierten Substrat auf dessen Oberseite sich eine streifenförmige Leitung befindet. Die Unterseite besteht aus einer durchgehenden (theoretisch unendlich ausgedehnten) Massefläche wie in Bild 2.14 dargestellt. Die elektrischen Eigenschaften der Mikrostreifenleitung hängen im Wesentlichen von der Streifenbreite  $w$  und der Substrathöhe  $h$  ab. Einen geringeren Einfluss besitzt die Dicke der Metallisierung  $t$ .

Das Substrat besitzt die dielektrische Permittivität  $\varepsilon_r > 1$ . Der Verlauf der Feldlinien des elektrischen und magnetischen Feldes ist in Bild 2.15 gezeigt. Das Besondere an der Mikrostreifen-

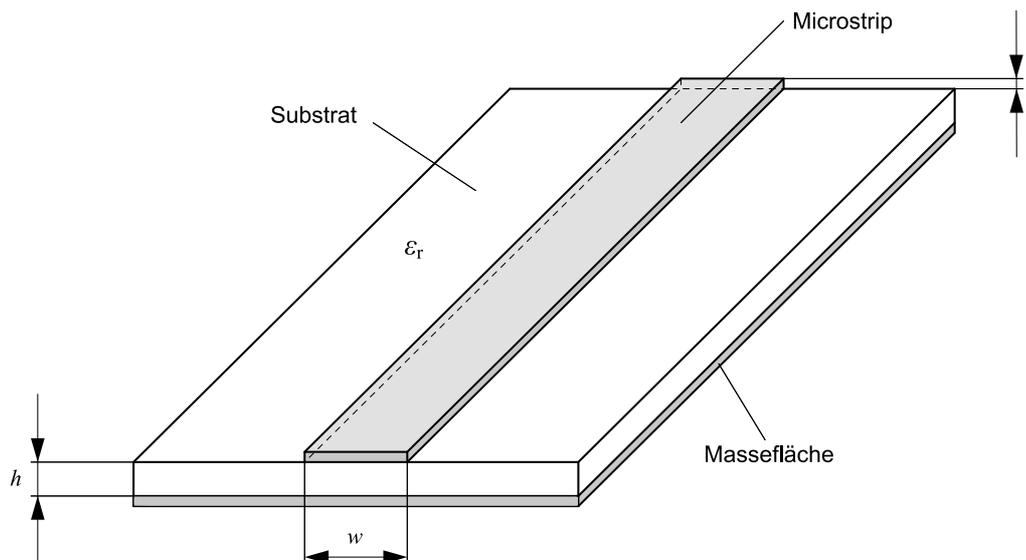


Bild 2.14.: Mikrostreifenleitung auf Substrat

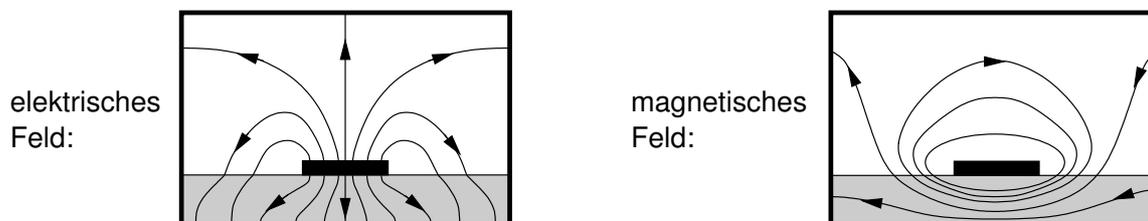


Bild 2.15.: Elektrisches und magnetisches Feld einer Mikrostreifenleitung

leitung ist, dass die Feldlinien teilweise in Luft (oberhalb des Substrates) und teilweise innerhalb des Substrates verlaufen. Dadurch weisen die elektrischen Feldlinien an der Grenzschicht einen Knick auf. Da die Normalkomponente des elektrischen Feldvektors an der Grenzschicht im Material mit der höheren Permittivität stets kleiner, die tangentielle Komponente aber gleich ist, wird die Feldlinie im Substrat von der Normalenrichtung weggebogen. Das Substrat besitzt gewöhnlich keine magnetischen Eigenschaften (d.h.  $\mu_r = 1$ ), weshalb die magnetischen Feldlinien keinen Knick aufweisen.

### Wellenausbreitung auf der Mikrostreifenleitung

Dadurch dass sich die Welle teilweise in Luft, teilweise im Substrat und damit in einem inhomogenen Medium ausbreitet, liegt keine reine TEM-Welle vor. Das heißt, sowohl das elektrische Feld, als auch das magnetische Feld besitzen eine Komponente in Ausbreitungsrichtung der Welle. Diese Längskomponente kann bei nicht zu hohen Frequenzen in den meisten Fällen jedoch vernachlässigt werden, so dass sich in guter Näherung mit einer TEM-Welle rechnen lässt. Man spricht daher auch von einer „Quasi-TEM“-Welle. Unter dieser Voraussetzung lässt sich die

Wellenausbreitung mittels einer statischen Näherung durch Kapazitäts- und Induktivitätsbeläge wie im Fall der TEM-Leitung (vgl. Abschnitt 2.1) beschreiben.

Zur Vereinfachung der Berechnung geht man dabei zunächst von einer „luftgefüllten“ Leitung aus, d.h. einem Substrat mit  $\varepsilon_r = 1$ . Unter dieser Voraussetzung liegt tatsächlich eine TEM-Welle vor. Für Substrate mit einem  $\varepsilon_r > 1$  wird ein Korrekturfaktor, die sogenannte *effektive Permittivität*  $\varepsilon_{r,\text{eff}}$  für den Kapazitätsbelag  $C'$  eingeführt:

$$C' = C'_0 \cdot \varepsilon_{r,\text{eff}} \quad (2.142)$$

$C'_0$  ist dabei der theoretische Kapazitätsbelag der luftgefüllten Leitung ( $\varepsilon_r = 1$ ). Wäre der gesamte Raum mit einem Material der Permittivität  $\varepsilon_r$  gefüllt, so würde gelten  $\varepsilon_{r,\text{eff}} = \varepsilon_r$ . Im realen Fall ergibt sich  $\varepsilon_{r,\text{eff}}$  zwischen diesen beiden Extremfällen, d.h. es gilt

$$1 < \varepsilon_{r,\text{eff}} < \varepsilon_r \quad (2.143)$$

$\varepsilon_{r,\text{eff}}$  liegt umso näher bei  $\varepsilon_r$ , je stärker das Feld im Substrat konzentriert ist, d.h. je größer die Breite  $w$  der Streifenleitung im Verhältnis zur Substrathöhe  $h$  ist und je höher die Permittivität  $\varepsilon_r$  ist. Der genaue Wert muss entweder mittels numerischer Berechnung oder aus Diagrammen ermittelt werden. Ein solches Diagramm ist in den Abbildungen 2.16 und 2.17 dargestellt.

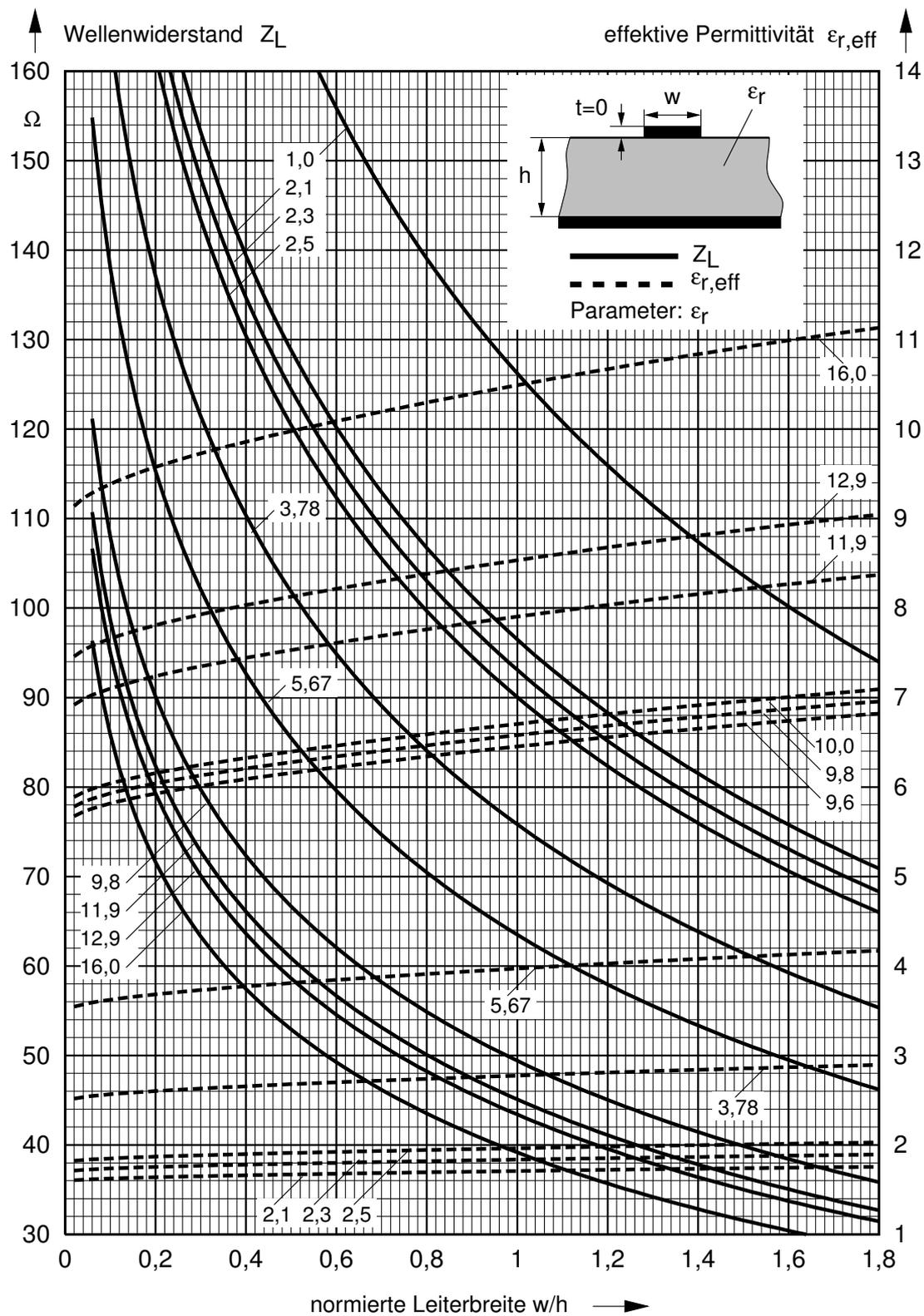
Unter Annahme einer zu vernachlässigenden Leiterdicke  $t \approx 0$  hängt die effektive Permittivität  $\varepsilon_{r,\text{eff}}$  nur vom Verhältnis der Leiterbreite  $w$  zur Substrathöhe  $h$  und der Permittivität des Substrates  $\varepsilon_r$  ab. Gleiches gilt für den Leitungswellenwiderstand  $Z_L$ , der ebenfalls aus den Diagrammen 2.16 und 2.17 abgelesen werden kann.

Für die Phasengeschwindigkeit auf der Mikrostreifenleitung gilt damit

$$v_P = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_{r,\text{eff}}}} \quad (2.144)$$

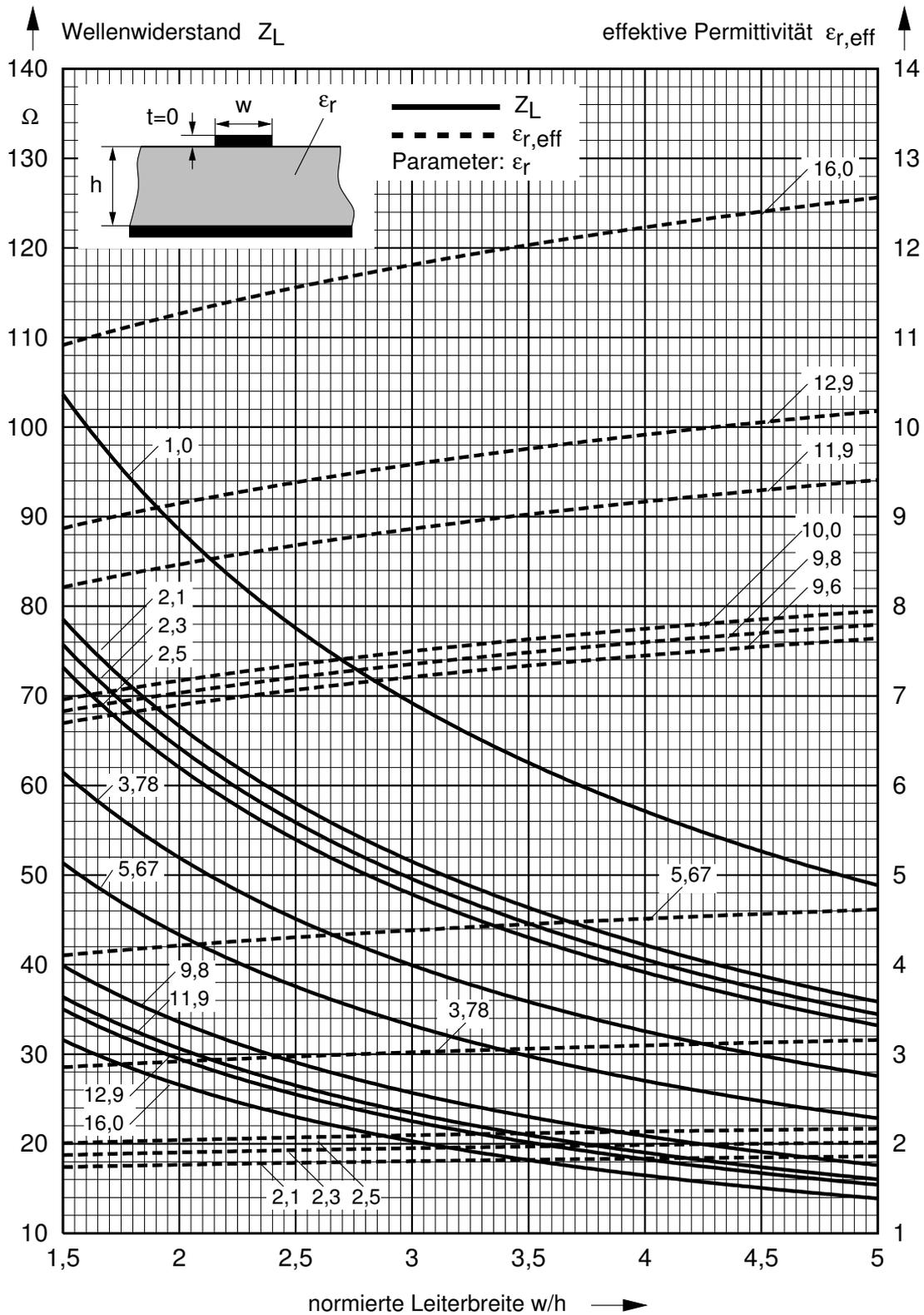
und für die resultierende Wellenlänge auf der Leitung

$$\lambda = \frac{v_P}{f} = \frac{c_0}{f \sqrt{\varepsilon_{r,\text{eff}}}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_{r,\text{eff}}}} \quad (2.145)$$



Quelle: [14]

Bild 2.16.: Leitungswellenwiderstand  $Z_L$  und effektive Permittivität  $\epsilon_{r,eff}$  als Funktion des Verhältnisses  $w/h = 0 \dots 1,8$ . Parameter ist  $\epsilon_r$ .



Quelle: [14]

Bild 2.17.: Leitungswellenwiderstand  $Z_L$  und effektive Permittivität  $\epsilon_{r,eff}$  als Funktion des Verhältnisses  $w/h = 1,5 \dots 5$ . Parameter ist  $\epsilon_r$ .



### 3. Leistungsanpassung und Impedanztransformation

Eine der Grundaufgaben der Elektrotechnik ist es, Energie möglichst effizient und Signale möglichst ungestört von einem Empfänger oder einer Quelle zu einem Verbraucher zu übertragen. Dies bedeutet die maximale Energie einer Quelle zu entnehmen und möglichst geringe Übertragungsverluste zuzulassen und die übertragene Energie vollständig dem Verbraucher zuzuführen. Bei einer Freiraumübertragung der Energie, wie es in der Hochfrequenztechnik möglich ist, ist die effiziente Nutzung der vorhandenen Energie besonders wichtig.

Im Gegensatz zur konventionellen Schaltungstechnik liegen in der Hochfrequenztechnik Verbindungsleitungen im Bereich der Wellenlänge. Die daraus resultierende Impedanztransformation führt zu Fehlanpassung, was wiederum Reflexionen und somit Signalstörungen und Energieverluste verursacht. Bild 3.1 zeigt eine schematische Darstellung. Die HF-Quelle liefert nur dann maximale Wirkleistung, wenn der Eingangswiderstand  $Z_{\ddot{U}}$  des Übertragungssystems an den Innenwiderstand der Quelle angepasst ist. Weiter ist der Widerstand des Verbrauchers an den Wellenwiderstand  $Z_L$  der Übertragungsleitung anzupassen. Dies zeigt, dass zahlreiche Aufgaben zur Anpassung und Transformation bestehen, die im Folgenden in ihren Grundzügen behandelt werden. Die Schaltungen, die diese Aufgaben erfüllen, sind je nach den Anforderungen sehr verschieden. Die einfachsten Schaltungen erhält man für Transformationen bei nur einer Frequenz.

In der Regel wird man bemüht sein, die Transformation

- mit möglichst wenigen Elementen,
- mit möglichst kleinen Strömen und Spannungen in bzw. an den Elementen,
- verlustarm und

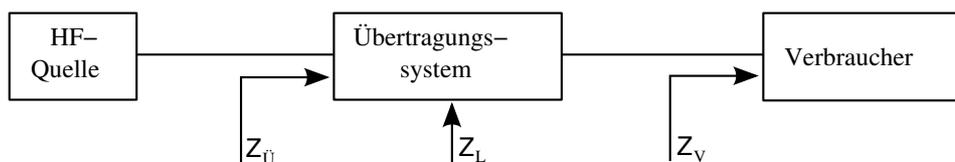


Bild 3.1.: Prinzipschaltung einer HF-Übertragung

- stabil gegen Wertänderungen der Frequenz, der Blindelemente und der Wirkelemente auszuführen.

In Folgendem wird auf die Leistungsanpassung detailliert eingegangen.

### 3.1. Wirkleistungsabgabe einer Quelle an den Verbraucher

Die Wirkleistung, die eine Quelle mit Innenwiderstand  $Z_i$  an einen Verbraucher abgibt, hängt wesentlich von dessen Impedanz  $Z$  ab. Die Aufgabe besteht meistens darin, die abgegebene Wirkleistung zu maximieren, das bedeutet den Verbraucher an die Quelle anzupassen.

Dargestellt in Bild 3.2 ist ein Verbraucher  $Z = R + jX$ , der an eine Quelle mit dem Innenwiderstand  $Z_i = R_i + jX_i$  angeschlossen ist. Die Wirkleistung, die die Quelle an den Verbraucher abgibt, ist

$$P_w = \frac{|I|^2 R}{2} = \frac{1}{2} \left| \frac{U_0}{(R + R_i) + j(X + X_i)} \right|^2 R = \frac{1}{2} \frac{|U_0|^2 R}{(R + R_i)^2 + (X + X_i)^2}. \quad (3.1)$$

Um maximale Wirkleistung an den Verbraucher zu übertragen, müssen folglich zwei Bedingungen erfüllt werden. Einerseits sollten sich die Blindanteile von Quelle und Verbraucher gegenseitig aufheben:

$$X + X_i = 0 \quad (3.2)$$

Andererseits muss ein optimaler Wert für  $R$  in Abhängigkeit von  $R_i$  gefunden werden. Um den Wert  $R$  zu finden, für den  $P_w$  maximal wird, setzen wir die Bedingung (3.2) in (3.1) ein, differenzieren diese Gleichung anschließend, und erhalten die Bedingung

$$\frac{\partial P_w}{\partial R} = \frac{|U_0|^2}{2} \frac{(R + R_i)^2 - 2R(R + R_i)}{(R + R_i)^4} \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.3)$$

die erfüllt ist, für

$$R = R_i. \quad (3.4)$$

(3.2) und (3.4) lassen sich zusammenfassen, zu der schon erwähnten Bedingung

$$Z = Z_i^*. \quad (3.5)$$

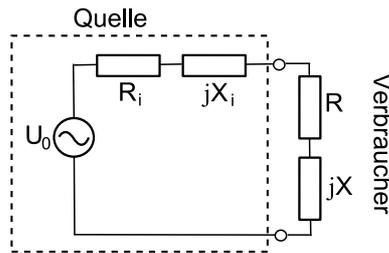


Bild 3.2.: Quelle mit Innenwiderstand und Verbraucher

Eine Quelle gibt also dann die maximale Wirkleistung ab, falls der Verbraucher konjugiert komplex zum Innenwiderstand der Quelle ist. Die maximal verfügbare Wirkleistung für den Verbraucher beträgt

$$P_{w,\max} = \frac{|U_0|^2}{8R_i}. \quad (3.6)$$

## 3.2. Graphische Lösungen der Leistungsanpassung

Die Dimensionierung und Auswahl von Bauelementen zur Impedanzanpassung kann sowohl rechnerisch als auch zeichnerisch erfolgen. In Zeiten hochentwickelter Software lösen Computerprogramme die Probleme wesentlich schneller und effektiver als man dies von Hand berechnen kann. Doch selbst wenn die Bauteilgrößen von der Entwicklersoftware bestimmt werden, müssen dem Computer sowohl Schaltung als auch Art der Bauteile (Kapazitäten, Spulen etc.) vorgegeben werden. Hilfreich zur Bestimmung der Schaltungstopologie sind zeichnerische Lösungswege, die vor einer Bauteilbestimmung am Computer eine qualitative Aussage über die Bauteilanordnung ermöglichen. Zeichnerisch bedient man sich eines der folgenden Diagramme:

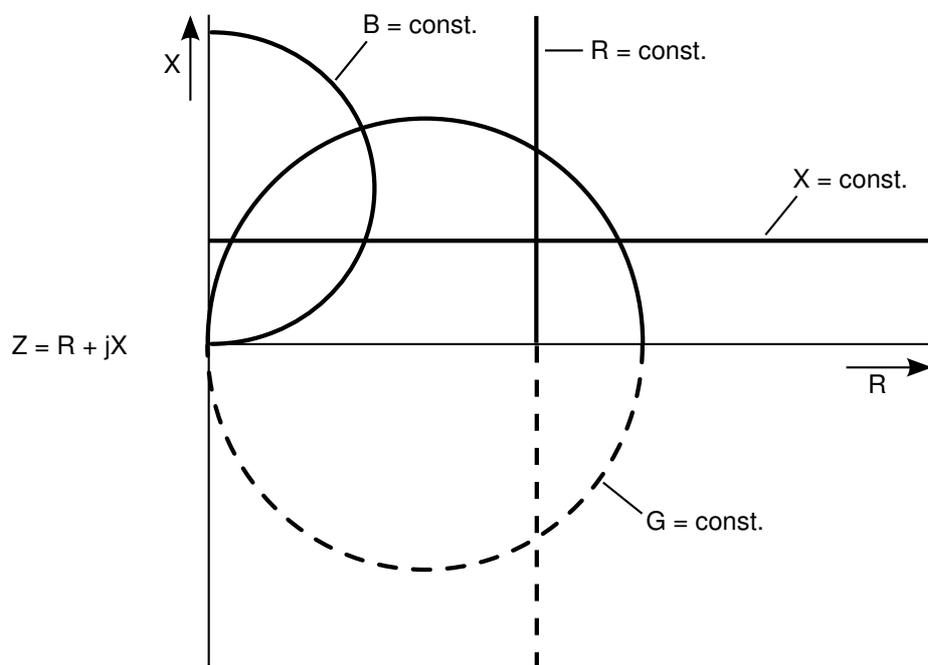
- Leitwertdiagramm,
- Widerstandsdiagramm.

In ihnen ist orthogonal jeweils

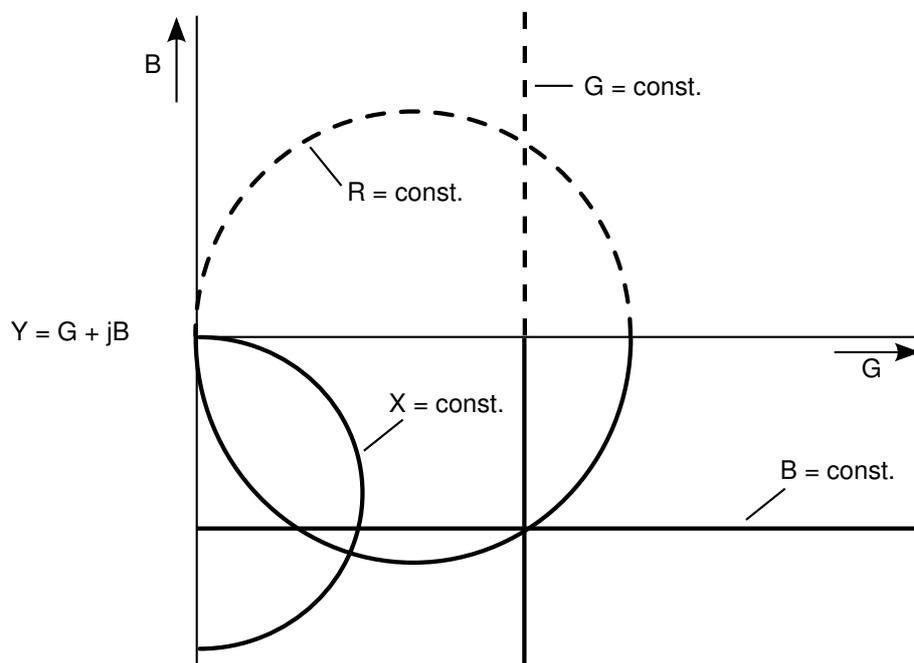
- Blindleitwert  $B$  zu Wirkleitwert  $G$ ,
- Blindwiderstand  $X$  zu Wirkwiderstand  $R$

aufgetragen. Die Bilder 3.3(a) und 3.3(b) zeigen die Diagramme mit Geraden bzw. Kreisen für konstantes  $R$ ,  $X$ ,  $G$  oder  $B$ .

Bild 3.4 zeigt die Transformationswege eines Blindelements in der Widerstands- und in der Leitwertebene. Dabei transformieren Serienelemente ( $L_S, C_S$ ) im Widerstandsdiagramm die Startimpedanz ( $Z$ ) auf einer Geraden mit konstantem Widerstand und Parallelelemente ( $L_P, C_P$ )



(a) Widerstandsdiagramm (Impedanzebene)



(b) Leitwertdiagramm (Admittanzebene)

Bild 3.3.: Transformation variabler Bauelemente in Widerstands- und Leitwertdiagramm

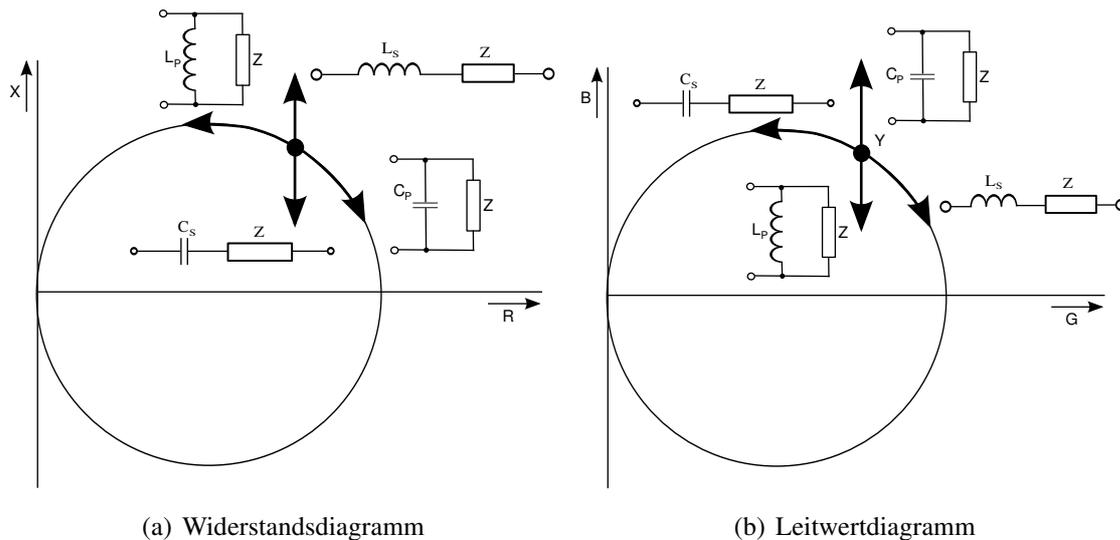


Bild 3.4.: Transformation mit einem Blindelement in Widerstands- und Leitwertdiagramm

auf einem Kreis mit konstantem Leitwert (G-Kreis). In der Leitwertebene ist dies genau umgekehrt.

### 3.2.1. Konforme Abbildung in die r-Ebene (Smith-Diagramm)

Das Widerstandsdiagramm nach Bild 3.3(a) wird für Impedanzen  $Z$  mit großem Real- oder Imaginärteil schwer handhabbar, da das Diagramm in seiner Ausdehnung nicht begrenzt ist. Es ist daher nur zur Transformation von Widerständen oder Leitwerten geeignet, die in der Umgebung des Anpasspunktes liegen.

Gesucht ist daher eine konforme Abbildung mit einer gebrochen linearen Funktion der Form

$$w(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} \quad (3.7)$$

mit der es gelingt, den gesamten Bereich der komplexen Widerstandshalbebene in einen Kreis abzubilden. Da alle Kurven des Widerstandsdiagramms stetig sind, ist eine eindeutige Abbildung möglich.

Eine solche Funktion erhält man über die Definition des komplexen Reflexionsfaktors nach (2.57). Setzt man hier (2.55) und (2.56) ein und dividiert durch den Strom  $I(z)$ , so erhält man die Abbildungsvorschrift (vergleiche auch (2.27))

$$r(z) = \frac{Z(z) - Z_L}{Z(z) + Z_L} = \frac{U_R(z)}{U_H(z)} = \frac{\frac{1}{2}(U(z) - Z_L I(z))}{\underbrace{\frac{1}{2}(U(z) + Z_L I(z))}_{(2.55), (2.56)}} \quad (3.8)$$

bzw.

$$\frac{Z(z)}{Z_L} = \frac{1 + r(z)}{1 - r(z)} \quad (3.9)$$

Sie definiert den Übergang von der Widerstandsebene in die Reflexionsfaktorebene ( $r$ -Ebene) und zurück. Entsprechend gilt auch für die Leitwertebene

$$r(z) = \frac{1 - Y(z) \cdot Z_L}{1 + Y(z) \cdot Z_L} \quad (3.10)$$

bzw.

$$Y(z) \cdot Z_L = \frac{1 - r(z)}{1 + r(z)} \quad (3.11)$$

Die Transformation ist dabei nur für reelle Leitungswellenwiderstände  $Z_L$  gültig.

Für die konforme Abbildung nach (3.8) bzw. (3.10) gelten nach der Funktionentheorie folgende Regeln:

- Winkeltreue im Kleinen (Schnittwinkel der Kurven bleiben erhalten)
- Kreistreue (Kreise werden auf Kreise abgebildet)
- Geraden sind als Kreise durch das Unendliche anzusehen
- Orientierungstreue (Umlaufsinn bleibt erhalten)

Diese Regeln sind sehr hilfreich, wenn Kurven oder Gebiete aus dem Widerstands- oder Leitwertdiagramm in das Kreisdiagramm, oder umgekehrt, abgebildet werden sollen. Zur Veranschaulichung ist in Bild 3.5 der Übergang verschiedener Kurvenscharen von der Widerstandsebene bzw. der Leitwertebene in das Kreisdiagramm dargestellt.

Wir betrachten nun einige dieser Übergänge am Beispiel der Widerstandsebene. Alle Linien, welche in der Widerstandsebene nach Unendlich ( $\frac{|Z|}{Z_L} \rightarrow \infty$ ) gehen, laufen in der  $r$ -Ebene durch den Punkt  $r = 1$ . Alle Linien, die durch den Nullpunkt des Widerstandsdiagramms führen, laufen in der  $r$ -Ebene durch den Punkt  $r = -1$ .

Charakteristisch für die  $r$ -Ebene ist, dass sowohl die Abbildung der Geraden  $R = \text{konst.}$  und  $X = \text{konst.}$ , wie auch die der Kreise mit  $G = \text{konst.}$  und  $B = \text{konst.}$  des Widerstandsdiagramms immer auf Kreise oder Teilkreise führt (vgl. Bild 3.5; in horizontaler Richtung sind immer gleiche Linien entsprechend in den unterschiedlichen Diagrammen dargestellt).

Bemerkenswert und für die Praxis relevant ist, dass die Abbildung des Koordinatennetzes der Widerstands- und Leitwertebene im  $r$ -Diagramm zu punktsymmetrischen Darstellungen führt (vgl. Bild 3.5 links, 3.5 - 3.5 Mitte, 3.5 rechts sowie 3.5 links, 3.5 - 3.5 Mitte, 3.5 rechts).

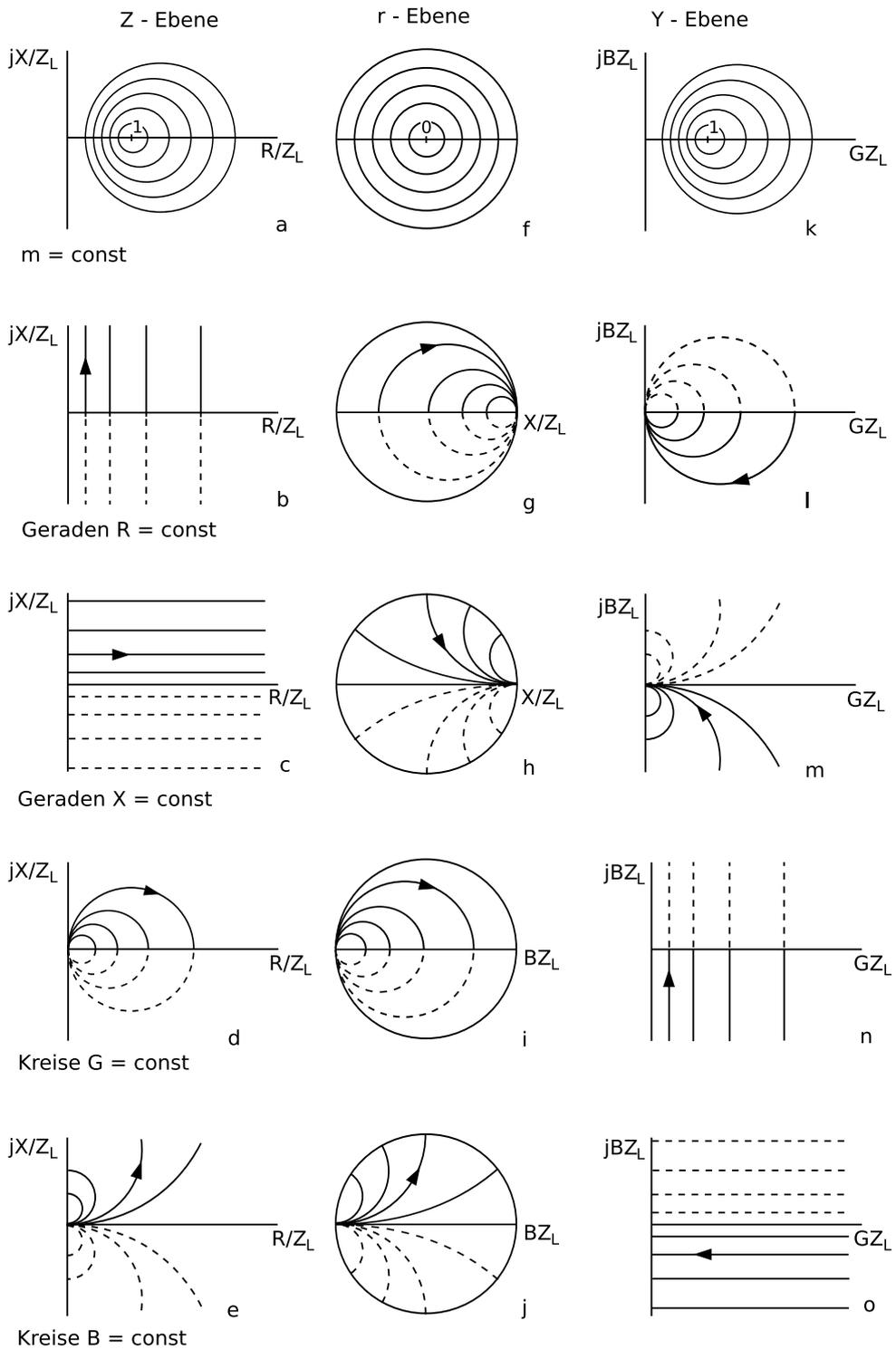


Bild 3.5.: Konforme Abbildung des Widerstands- und Leitwertdiagramms in das Kreisdiagramm

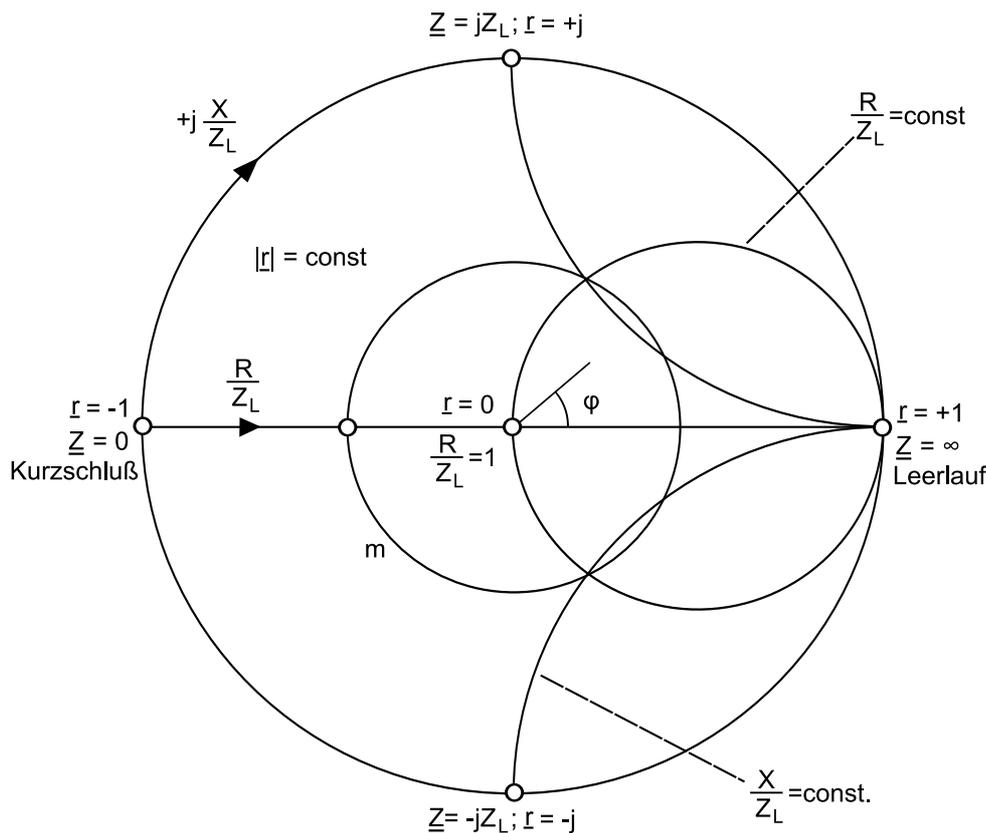


Bild 3.6.: Smith-Diagramm in Widerstandsform

Aufgrund der Abbildungsvorschrift nach (3.8) liegen komplexe Widerstände mit induktivem bzw. kapazitiven Blindanteil im oberen bzw. unteren Halbkreis des  $r$ -Diagramms.

Zur Arbeitsvereinfachung sind fertige Diagrammvorlagen in den zwei Ausführungen erhältlich, welche Smith-Diagramm (SD) genannt werden (siehe Anhang C). Es ist jene das SD in Widerstandsform, in dem  $R = \text{konst.}$ - und  $X = \text{konst.}$ -Kreise für verschiedene Werte von  $R/Z_L$  und  $X/Z_L$  eingetragen sind, die andere das SD in Leitwertform, welches  $G = \text{konst.}$ - und  $B = \text{konst.}$ - Kreise für verschiedene Werte von  $G/Z_L$  und  $B/Z_L$  enthält. Um eine universelle Anwendbarkeit zu gewährleisten, sind in den Smith-Diagrammen alle Werte normiert auf einen Bezugswiderstand eingetragen. Man beachte jedoch, dass es sich bei den beiden Diagrammen um ein und dieselbe Reflexionsfaktorebene handelt, in welche nur verschiedene Kurven eingezeichnet sind.

In folgender Übersicht sind die wichtigsten Punkte und Linien des  $r$ -Diagramms, die sich aus (3.8) ergeben, zusammengestellt.

$Z/Z_L = 0$	Kurzschluss	$r = -1$	$\varphi = \pi$	$l/\lambda = 0$
$Z/Z_L = \infty$	Leerlauf	$r = +1$	$\varphi = 0$	$l/\lambda = 0,25$
$Z/Z_L = 1$	Anpassung	$r = 0$	$\varphi = -$	$l/\lambda = -$
$Z/Z_L = j$	-	$r = j$	$\varphi = \pi/2$	$l/\lambda = 0,125$
$Z/Z_L = -j$	-	$r = -j$	$\varphi = 3\pi/2$	$l/\lambda = 0,375$

$\varphi$  ist der Phasenwinkel des komplexen Reflexionsfaktors nach der Definition

$$r = |r|e^{j\varphi} \quad . \quad (3.12)$$

Die Bedeutung der Größe  $l/\lambda$  wird in Abschnitt 4.1.3 erläutert.

In Anlehnung an (2.64) werden die Kreise  $|r| = \text{konst.}$  vielfach auch als  $m$ -Kreise bezeichnet, da jeder Kreis  $|r| < 1$  aufgrund der Abbildungsvorschrift

$$|r| = \frac{1 - m}{1 + m} \quad (3.13)$$

eindeutig durch einen  $m$ -Wert beschrieben ist. Das heißt, alle Werte  $Z_1$ , die eine Impedanz  $Z$  durch Vorschalten einer verlustfreien Leitung annehmen kann, liegen auf einem Kreis  $|r| = \text{konst.}$  (vgl. Abschnitt 4.1). Da der  $m$ -Wert die Anpassverhältnisse speziell auf Leitungen beschreiben soll und längs verlustfreier Leitungen konstant bleibt, kann mittels

$$m = \frac{R_{\min}}{Z_L} = G_{\max} Z_L \quad (3.14)$$

der zu einem  $|r| = \text{konst.}$  Kreis gehörende  $m$ -Wert direkt aus dem Schnittpunkt des Kreises mit der reellen Achse bei  $R_{\min}/Z_L$  bzw.  $G_{\max} Z_L$  abgelesen werden (Bilder 3.6 und 3.7).

Entsprechende Überlegungen können auch für das SD in Leitwertform nach (3.10) durchgeführt werden. Nachfolgend sind wiederum die wichtigsten Punkte und Linien zusammengefasst.

$Y Z_L = \infty$	Kurzschluss	$r = -1$	$\varphi = \pi$	$l/\lambda = 0$
$Y Z_L = 0$	Leerlauf	$r = +1$	$\varphi = 0$	$l/\lambda = 0,25$
$Y Z_L = 1$	Anpassung	$r = 0$	$\varphi = -$	$l/\lambda = -$
$Y Z_L = -j$	-	$r = j$	$\varphi = \pi/2$	$l/\lambda = 0,125$
$Y Z_L = j$	-	$r = -j$	$\varphi = 3\pi/2$	$l/\lambda = 0,375$

Die positive reelle Halbachse der Widerstands- bzw. Leitwertebene  $[0, \infty]$  wird auf das Intervall  $[-1, +1]$  der  $r$ -Ebene abgebildet.

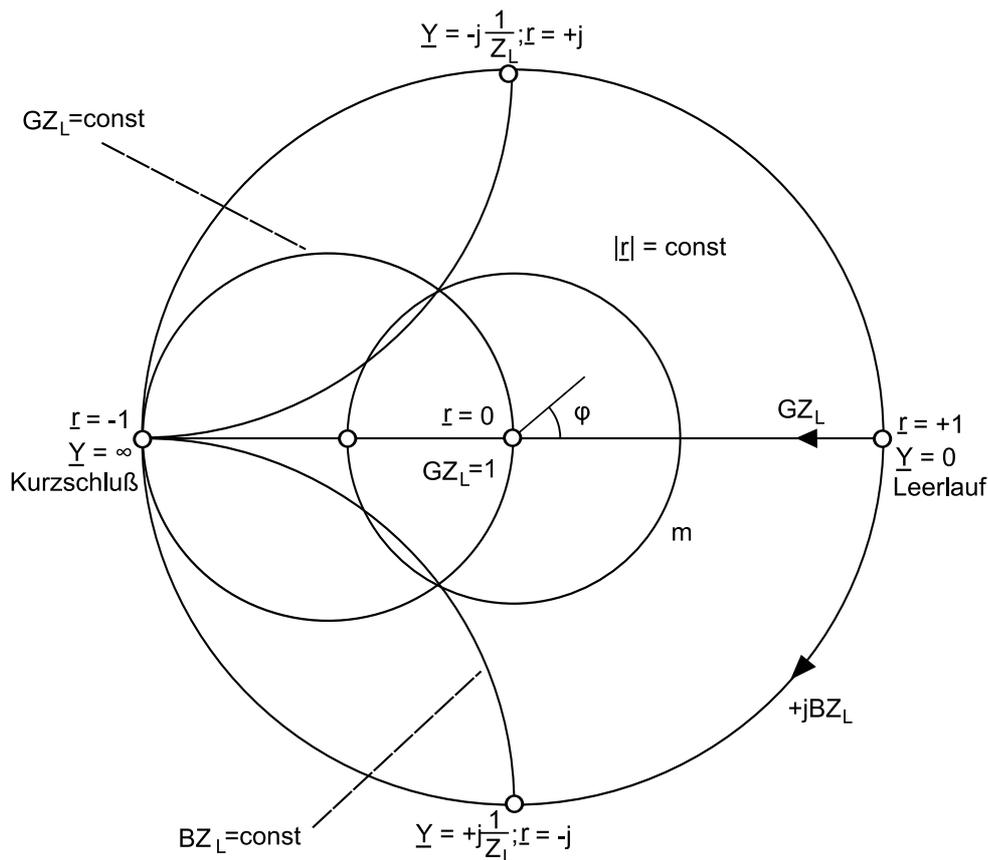


Bild 3.7.: Smith-Diagramm in Leitwertform

### 3.3. Impedanztransformation mit konzentrierten Elementen

Die allgemeine Transformation einer Impedanz von einem komplexen Wert auf einen beliebigen anderen erfordert zusätzlich zu der Transformation durch ein in Kette geschaltetes Leitungsstück die Serien- oder Parallelschaltung einer Impedanz. Dabei arbeitet man bei der Serienschaltung zweckmäßigerweise mit der Widerstandsform des Smith-Diagramms, bei der Parallelschaltung mit der Leitwertform. Schaltet man zu der normierten Impedanz  $Z/Z_L$  bzw. Admittanz  $Y/Z_L$  ein Element  $\Delta Z/Z_L$  bzw.  $Y/Z_L$  in Serie bzw. parallel, so ergeben sich folgende Transformationswege im Smith-Diagramm:

#### Serienschaltung

- Serienschaltung eines Wirkwiderstandes (einer Resistanz):

Die Impedanzänderung erfolgt auf einer Ortskurve  $X/Z_L = \text{konst.}$  des Smith-Diagramms in Widerstandsform.

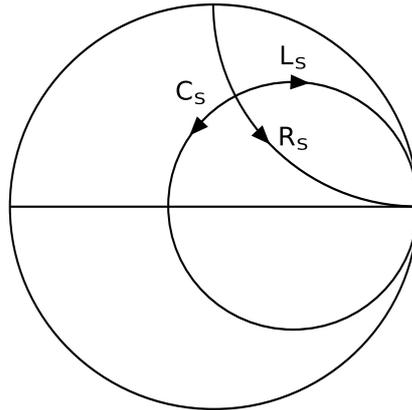


Bild 3.8.: Serienschaltung konzentrierter Elemente im SD (Widerstandsform)

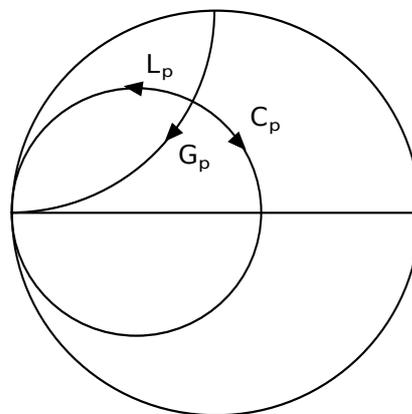


Bild 3.9.: Parallelschaltung konzentrierter Elemente im SD (Leitwertform)

- Serienschaltung eines Blindwiderstandes (einer Reaktanz):  
Die Impedanzänderung erfolgt auf einer Ortskurve  $R/Z_L = \text{konst.}$  des Smith-Diagramms in Widerstandsform.

### Parallelschaltung

- Parallelschaltung eines Wirkleitwertes (einer Konduktanz):  
Die Admittanzänderung erfolgt auf einer Ortskurve  $B/Z_L = \text{konst.}$  des Smith-Diagramms in Leitwertform.
- Parallelschaltung eines Blindleitwertes (einer Suszeptanz):  
Die Admittanzänderung erfolgt auf einer Ortskurve  $G/Z_L = \text{konst.}$  des Smith-Diagramms in Leitwertform.

Praktische Bedeutung für Transformationsaufgaben besitzt vor allem die Parallelschaltung von Blindleitwerten, da diese durch Leitungsstücke dargestellt werden können, die der Hauptleitung

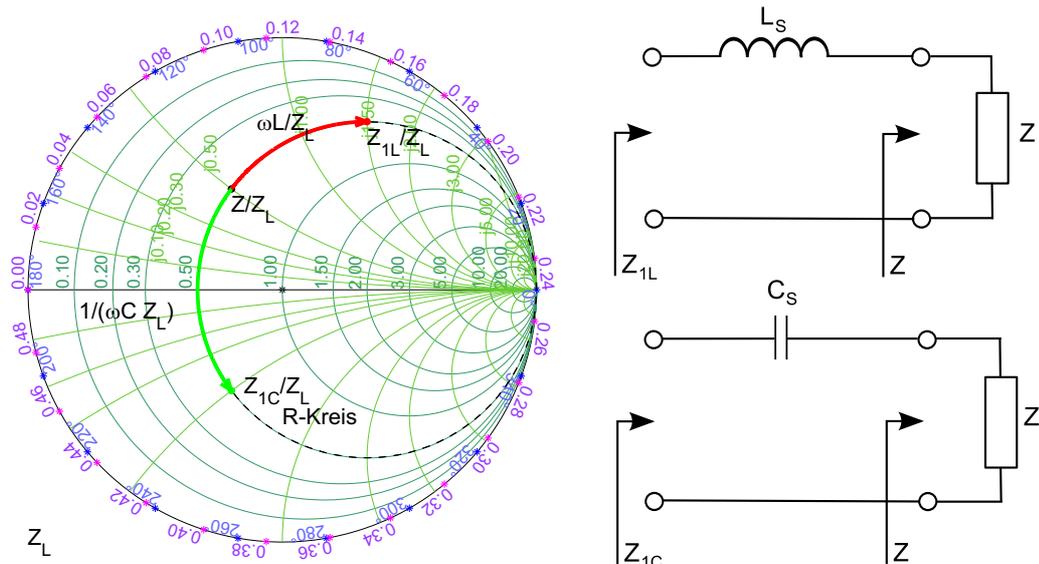


Bild 3.10.: Serienschaltung eines Blindwiderstandes im Smithdiagramm in Widerstandsform

parallelgeschaltet werden.

Durch Kombination der beiden geschilderten Transformationsarten, d.h. der Leitungstransformation mit einer in Kette geschalteten Leitung und der Serien- oder Parallelschaltung von Blindwiderständen bzw. Leitwerten ist von einem beliebigen Punkt ausgehend jeder andere Punkt der komplexen Ebene erreichbar.

Diese Zusammenhänge benutzt man unter anderem zur Leistungsanpassung einer Impedanz  $Z$  an den reellen Wellenwiderstand  $Z_L$  einer Leitung, d.h. um die komplexe Impedanz  $Z$  in den Punkt  $Z/Z_L$  zu überführen.

### 3.3.1. Serienschaltung eines Blindwiderstandes

Gegeben ist der komplexe Widerstand  $Z = R + jX$  dem der Blindwiderstand  $jX_S$  in Serie geschaltet wird, woraus sich ergibt

$$Z_1 = Z + jX_S = R + j(X + X_S) \quad . \quad (3.15)$$

Die Wirkkomponente bleibt erhalten, die Blindwiderstände werden addiert. Im Smithdiagramm verschiebt eine Induktivität  $L_S$  die Impedanz  $Z$  nach  $Z_{1L}$  um  $X_S = \omega L_S$  auf einem R-Kreis nach oben. Eine Kapazität  $C_S$  verschiebt  $Z$  nach  $Z_{1C}$  um  $X_S = -1/\omega C_S$  nach unten. Die Transformation zeigt Bild 3.10.

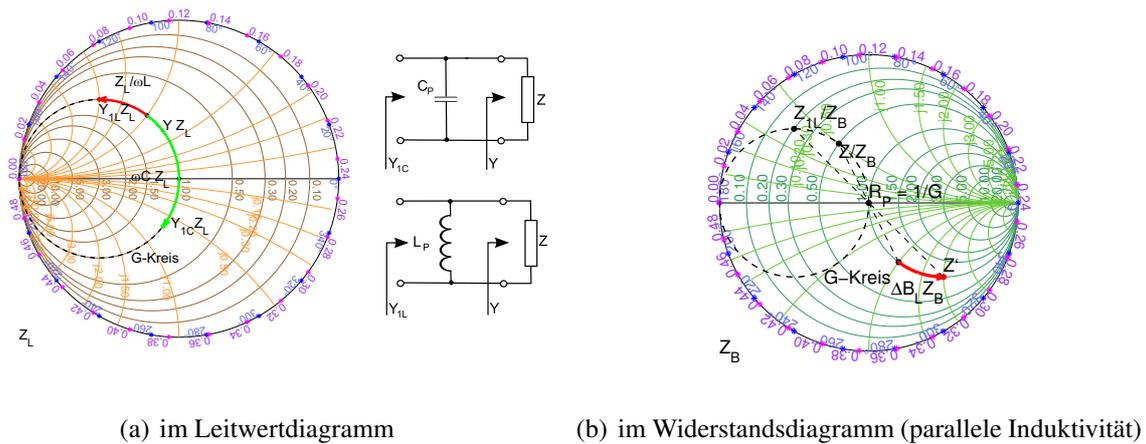


Bild 3.11.: Parallelschaltung eines Blindelements

### 3.3.2. Parallelschaltung eines Blindwiderstandes

Rechnerisch ermittelt man Parallelschaltungen aus den Leitwerten

$$Y = G + jB = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} \quad (3.16)$$

Schaltet man den Blindwiderstand  $jX_P$  parallel, so folgt mit dem Leitwert  $jB_P = -j/X_P$

$$Y_1 = Y + jB_P = G + j(B + B_P) \quad (3.17)$$

Im Leitwertdiagramm verschieben Kapazitäten die Admittanz auf einem G-Kreis um  $\omega C_P$  nach unten, Induktivitäten um  $1/\omega L_P$  nach oben, wie Bild 3.11(a) zeigt.

Auch in der Widerstandsform wandert  $Z_1 = 1/Y_1$  auf einem G-Kreis  $G = \text{konst.}$  Die Gleichung dieses Kreises folgt aus

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad (3.18)$$

zu

$$\left(\frac{1}{2G}\right)^2 = \left(R - \frac{1}{2G}\right)^2 + X^2 \quad (3.19)$$

Der Radius des Kreises ist  $1/2G$ , der Mittelpunkt liegt auf der Achse bei  $R = 1/2G$ . Bei  $R_P = 1/G$ , dem reziproken Wirkleitwert, schneidet der Kreis die Widerstandsachse.

Um die Impedanz  $Z_1$  nach der Parallelschaltung eines Blindleitwerts in der Widerstandsform zeichnerisch zu bestimmen, verwendet man eine Hilfskonstruktion nach Bild 3.11(b).

Die Impedanz  $Z_{1L}$  ergibt sich dabei als Schnittpunkt des durch  $Z$  verlaufenden  $G = \text{konst.}$ -Kreises mit einer Hilfsgeraden durch den Ursprung und den Hilfspunkt  $Z'$ . Dieser Hilfspunkt ergibt sich, wenn man den Punkt  $Z$  durch den Ursprung spiegelt und die Strecke  $\Delta B_L = 1/(\omega L_P)$  auf dem R-Kreis nach unten abträgt.

Diese Hilfskonstruktion nutzt die Eigenschaft des Smithcharts aus, dass der Kehrwert einer Punktspiegelung durch dem Ursprung entspricht. Somit ist die Spiegelung von  $Z$  nichts anderes als das Eintragen von  $Y$  in das Koordinatensystem der Widerstandsform.  $\Delta B_L$  ist dann der Blindleitwert der Spule  $L_P$ . Spulen besitzen einen negativen Blindleitwert (positiver Blindwiderstand) und bewegen sich somit auf im Koordinatensystem (jetzt R-Kreis) nach unten auf den Punkt  $Z'$ . Dieser entspricht  $Y_{1L}$  und muss natürlich in der Widerstandsform noch in eine Impedanz umgerechnet werden. Der Kehrwert ist dabei wieder die Spiegelung durch den Ursprung auf  $Z_{1L}$ .

### 3.3.3. Transformation mit zwei Blindwiderständen

Mit den Transformationen der Abschnitte 3.3.1 und 3.3.2 lassen sich durch ein Blindelement nur Anpassungen auf vorgegebenen Wegen erreichen, wie in Bild 3.12 zusammenfassend gezeigt wird.

Für eine Transformation von  $Z$  in beliebige komplexe Werte benötigt man mindestens zwei Blindelemente, von denen eines parallel und das andere in Serie zu schalten ist. Bild 3.13 zeigt für eine häufig vorkommende Schaltung mit zwei Blindelementen ein Beispiel. Die Transformation wird in der Widerstandsform ausgeführt. Die Parallelkapazität  $C_P$  verschiebt  $Z$  auf einem Kreis konstanten Wirkleitwertes ( $G$ ) im Uhrzeigersinn nach  $Z_1$ . Die Serieninduktivität verschiebt  $Z_1$  um  $\omega L_S$  auf einem Kreis konstanten Wirkwiderstands nach oben zu  $Z_2$ .

Das Beispiel zeigt, dass eine gegebene Anordnung aus zwei Blindelementen  $Z$  in beliebige Werte transformiert. Der in Bild 3.13 doppelt schraffierte Bereich kann dabei durch zwei verschiedene Wertepaare  $C_P$  und  $L_S$  mehrfach erreicht werden.

Untersucht man die zu Bild 3.13 duale Schaltung, wie sie in Bild 3.14 dargestellt ist, so zeigt sich, dass mit ihr der nicht schraffierte und der doppelt schraffierte Bereich aus Bild 3.13 erreicht werden kann.

Fasst man die Ergebnisse aus Bild 3.13 und 3.14 zusammen, so zeigt sich, dass sich die beiden Schaltungen ergänzen und mit einem  $T$ -Glied, wie in Bild 3.15(a) gezeigt, jede beliebige Impedanz erreichbar ist, solange  $Z$  eine Wirkkomponente enthält. Ohne Wirkkomponente in  $Z$  ergeben sich wieder nur Blindwiderstände. Für  $T$ -Glieder, oder auch für  $\pi$ -Glieder sind darüber hinaus im Allgemeinen viele Wertekombinationen möglich.

Die Auswahl ist dann nach den am Beginn des Kapitels 3 dargelegten Gesichtspunkten zu treffen. In der Regel ist die Schaltung mit den kürzesten Transformationswegen die günstigste.

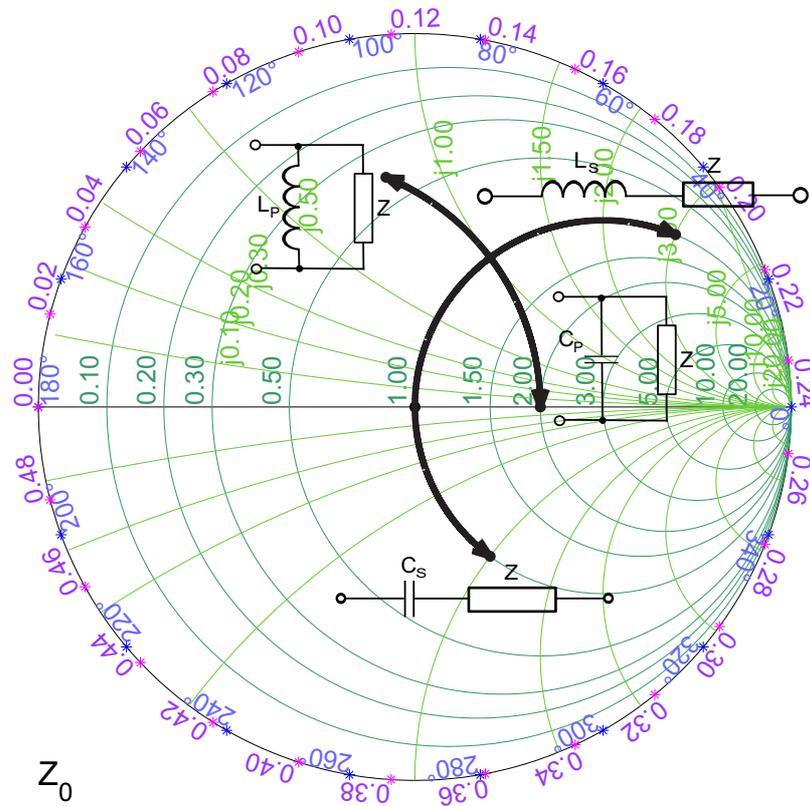


Bild 3.12.: Transformation mit einem Blindelement

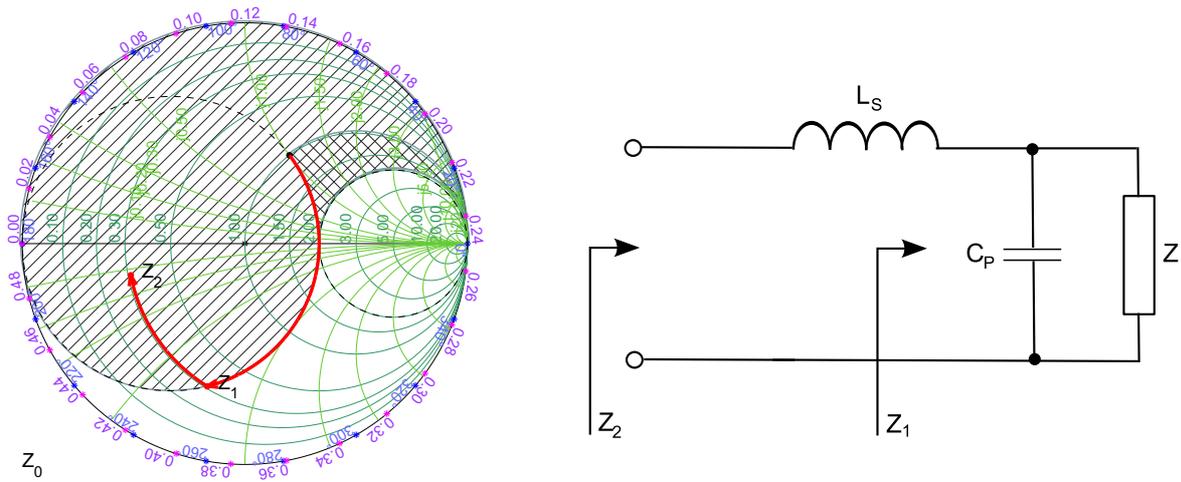


Bild 3.13.: Transformationsbereiche für  $C_P$  und  $L_S$

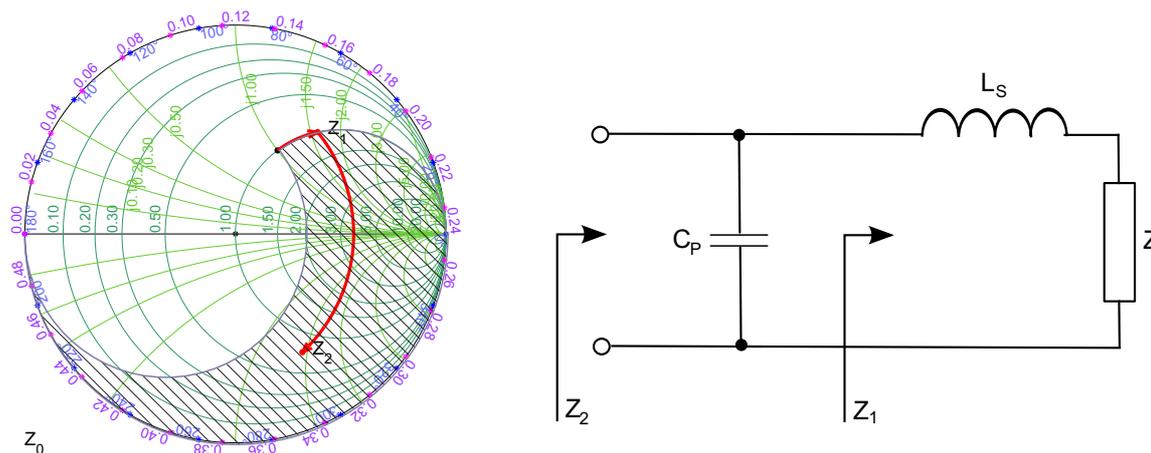
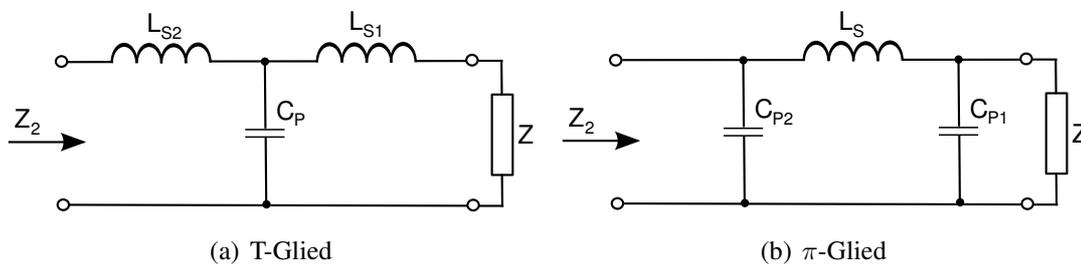
Bild 3.14.: Transformationsbereiche für  $C_P$  und  $L_S$ 

Bild 3.15.: Transformationsschaltungen

### 3.3.4. Frequenzabhängigkeit der Transformation

Die Transformationen in den vorangegangenen Abschnitten wurden für nur jeweils eine Frequenz ausgeführt. Alle Transformationsschaltungen mit wenigen Ausnahmen erweisen sich als frequenzabhängig.

Am Beispiel des Bildes 3.16 ist dies für eine Transformation von  $100\ \Omega$  in verschiedene reelle Widerstände anhand zweier Blindwiderstände gezeigt.

Für Frequenzen unter der Sollfrequenz  $f_0$  werden die Blindwerte  $X_S$  und  $B_P$  kleiner, die Impedanz  $Z$  wird nicht mehr reell, sondern induktiv. Umgekehrt verhält es sich für Frequenzen über  $f_0$ , bei denen die Impedanz kapazitiv wird (schwarze Punkte). Es gilt mit wenigen Ausnahmen die Regel:

*Die Frequenzabhängigkeit steigt mit der Länge des Transformationsweges.*

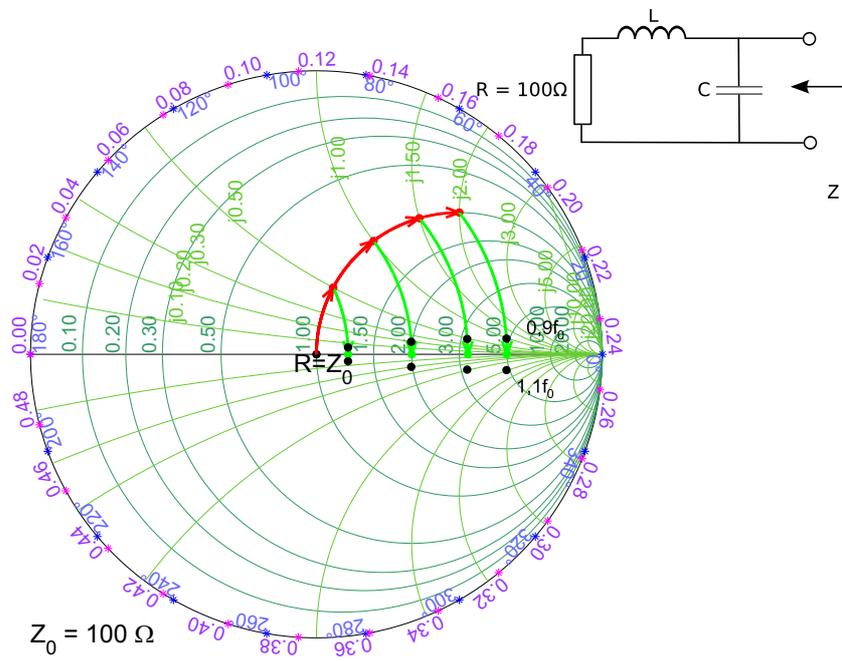


Bild 3.16.: Frequenzabhängigkeit der Transformationsschaltung



# 4. Anwendung von Leitungen bei höheren Frequenzen

## 4.1. Leitungstransformation

### 4.1.1. Eingangswiderstand und m-Kreis

Für den Eingangswiderstand  $Z_1$  der Leitung ergibt sich aus (2.73) für den Sonderfall eines reellen Abschlusswiderstandes  $R_2 = mZ_L < Z_L$  am Ort  $z = l$  mit  $\beta = 2\pi/\lambda$

$$Z_1 = R_1 + jX_1 = Z_L \frac{m + j \tan\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)}{1 + j \cdot m \tan\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)}, \quad (4.1)$$

mit dem zugehörigen Real- bzw. Imaginärteil

$$R_1 = Z_L \frac{m (1 + \tan^2\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right))}{1 + m^2 \tan^2\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)} \quad (4.2)$$

$$X_1 = Z_L \frac{(1 - m^2) \tan\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)}{1 + m^2 \tan^2\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)}. \quad (4.3)$$

Diese sehr komplizierte Formel wird in der Praxis fast ausschließlich mit Hilfe von Diagrammen oder Rechnern ausgewertet. Die Formel enthält die Parameter  $m$  und  $l/\lambda$ . Betrachtet man  $m$  als Konstante und variiert  $l/\lambda$ , so erhält man die Eingangswiderstände der Leitung bei gleichbleibendem Verbraucher  $R_2$  und verändertem  $l/\lambda$ , d.h. entweder veränderter Leitungslänge bei konstanter Frequenz oder veränderter Frequenz bei konstanter Leitungslänge. Alle diese Werte  $Z_1$  mit gleichem  $m$  liegen in der komplexen Widerstandsebene auf einem Kreis, genannt *m-Kreis*. Einen solchen Kreis findet man in Bild 4.1. Er hat die Gleichung

$$\left(\frac{Z_L}{2} \left(\frac{1}{m} - m\right)\right)^2 = \left(R_1 - \frac{Z_L}{2} \left(\frac{1}{m} + m\right)\right)^2 + X_1^2 \quad (4.4)$$

Sein Mittelpunkt liegt auf der reellen Achse bei  $\frac{Z_L}{2} \left(\frac{1}{m} + m\right)$  und sein Radius ist  $\frac{Z_L}{2} \left(\frac{1}{m} - m\right)$ . Die Kreisgleichung (4.4) beweist man am einfachsten dadurch, dass man  $R_1$  und  $X_1$  aus (4.2) und (4.3) einsetzt und dann die Identität  $0 = 0$  erhält.

Der Kreis schneidet die reelle Achse in den Punkten  $mZ_L$  und  $Z_L/m$ . Wenn man zu gegebenem Verbraucher  $R_2$  den Eingangswiderstand  $Z_1$  gewinnen will, berechne man zunächst  $m$  und konstruiere den Kreis. Dann liegt das gesuchte  $Z_1$  auf diesem Kreis. Man benötigt weiterhin noch eine Konstruktion, um bei gegebener Leitungslänge  $l$  den Ort des  $Z_1$  auf diesem Kreis zu finden. Hierzu betrachtet man  $l/\lambda$  in (4.7) als Konstante und  $m$  als Veränderliche. Dann erhält man die Eingangswiderstände der Leitung bei gleichbleibender Leitungslänge und gleichbleibender Frequenz, wenn der reelle Verbraucher  $R_2$  alle Werte zwischen 0 und  $Z_L$  annimmt. Alle diese Punkte  $Z_1$  liegen in der komplexen Widerstandsebene auf einem Kreis, genannt  $l/\lambda$ -Kreis; ein Beispiel findet man in Bild 4.1. Der Kreis hat die Gleichung:

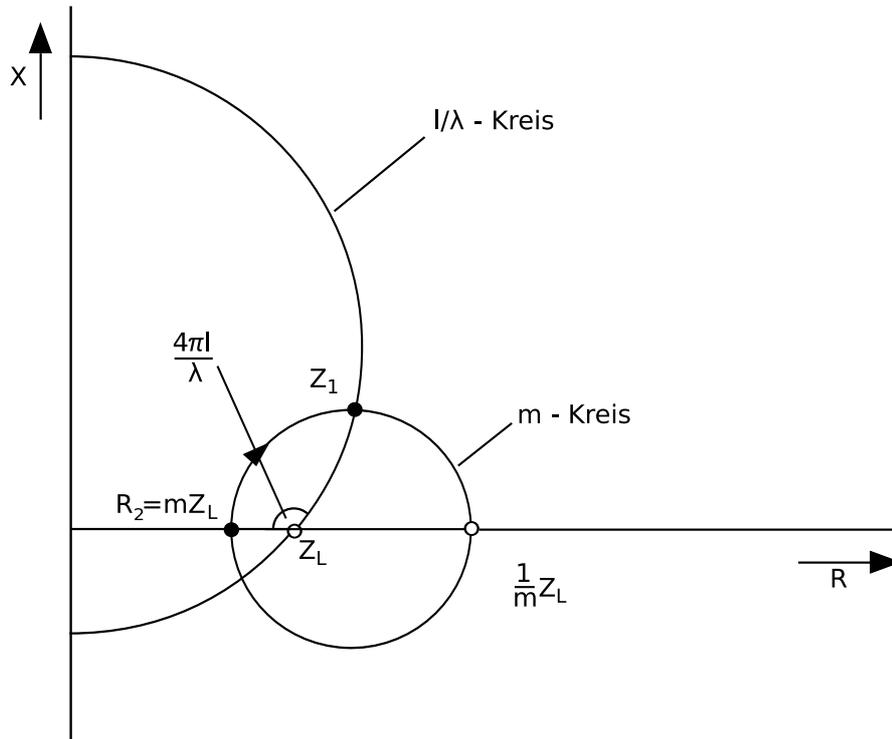
$$\left(\frac{Z_L}{\sin\left(\frac{4\pi l}{\lambda}\right)}\right)^2 = R_1^2 + \left(X_1 + Z_L \cot\left(\frac{4\pi l}{\lambda}\right)\right)^2 \quad (4.5)$$

Alle  $l/\lambda$ -Kreise gehen durch den Punkt  $Z_L$  der reellen Achse. Zu gegebener Leitungslänge  $l$  und gegebener Wellenlänge  $\lambda$  berechnet man  $l/\lambda$  und zeichnet den  $l/\lambda$ -Kreis. Der gesuchte Eingangswiderstand  $Z_1$  ist in Bild 4.1 der Schnitt des zu  $R_2$  gehörigen  $m$ -Kreises und des zur Leitungslänge gehörenden  $l/\lambda$ -Kreises. Es gibt zwei Schnittpunkte dieser Kreise. Es ist derjenige Schnittpunkt richtig, bei dem zwischen Verbraucher  $R_2 = mZ_L$  und dem Eingangswiderstand  $Z_1$  nach der im Bild 4.1 gegebenen Konstruktion der Winkel  $4\pi \cdot l/\lambda$  liegt. Ein gegebener Verbraucher  $R_2$  wird durch die vorgeschaltete Leitung auf seinem  $m$ -Kreis im Uhrzeigersinn bis zu dem betreffenden  $l/\lambda$ -Kreis so verschoben, dass sich im Punkt  $Z_L$  der Drehwinkel  $4\pi \cdot l/\lambda$  zwischen den  $l/\lambda$ -Kreisen bildet (Transformationsweg in Bild 4.1). Jedes Leitungsstück der Länge  $\lambda/2$  ergibt einen vollen Umlauf auf dem  $m$ -Kreis. Transformierend wirkt bei einer solchen Leitung also stets nur die überschüssige Länge  $l - n\lambda/2$ .

Da das Konstruieren der Kreise des Bildes 4.1 im Allgemeinen zu umständlich ist, ist es üblich, mit normierten Kreisdiagrammen zu arbeiten. Ein solches Kreisdiagramm verwendet relative Widerstände  $Z_1/Z_L$ . Der Wellenwiderstand  $Z_L$  ergibt den relativen Punkt 1 auf der reellen Achse. Die Kreise (4.4) und (4.5) haben im relativen Diagramm die Gleichungen

$$\left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} - m\right)\right)^2 = \left(\frac{R_1}{Z_L} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} + m\right)\right)^2 + \left(\frac{X_1}{Z_L}\right)^2 \quad (4.6)$$

$$\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{4\pi l}{\lambda}\right)}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{Z_L}\right)^2 + \left(\frac{X_1}{Z_L} + \cot\left(\frac{4\pi l}{\lambda}\right)\right)^2 \quad (4.7)$$

Bild 4.1.:  $m$ -Kreis und Transformation reeller Widerstände  $R_2 = mZ_L$ 

Diese Kreise sind für  $m$ -Werte üblicherweise in Abständen von 0,1 und für  $l/\lambda$ -Werte in Abständen von 0,01 gezeichnet. Ein solches Diagramm wird als Leitungsdiagramm 1. Art oder als Buschbeck-Diagramm bezeichnet. In der Praxis finden diese Diagramme aber keine Verwendung mehr, sondern man bedient sich der sogenannten Smith-Diagramme, die in Abschnitt 3.2.1 vorgestellt wurden.

#### 4.1.2. Eingangsleitwert einer Schaltung

Der Eingangsleitwert  $Y_1$  ergibt sich als Quotient des Stromes  $I$  aus (2.72) und der Spannung  $U$  aus (2.71) für  $z = l$ , sofern man Zähler und Nenner zuvor durch  $\cos(\beta z)$  geteilt hat, als

$$Y_1 = \frac{I(l)}{U(l)} = Y_2 \frac{1 + j \frac{1}{Y_2 Z_L} \tan(\beta l)}{1 + j Y_2 Z_L \tan(\beta l)} \quad (4.8)$$

$Y_2 = \frac{I_2}{U_2} = \frac{1}{Z_2}$  ist der Leitwert des Verbrauchers bei  $z = 0$ . Es besteht eine formale Ähnlichkeit mit der Widerstandsformel (2.73), die noch deutlicher wird, wenn man (4.8) für normierte Leitwerte schreibt.  $Y_L = \frac{1}{Z_L}$  ist der reziproke Wellenwiderstand, welcher Wellenleitwert genannt

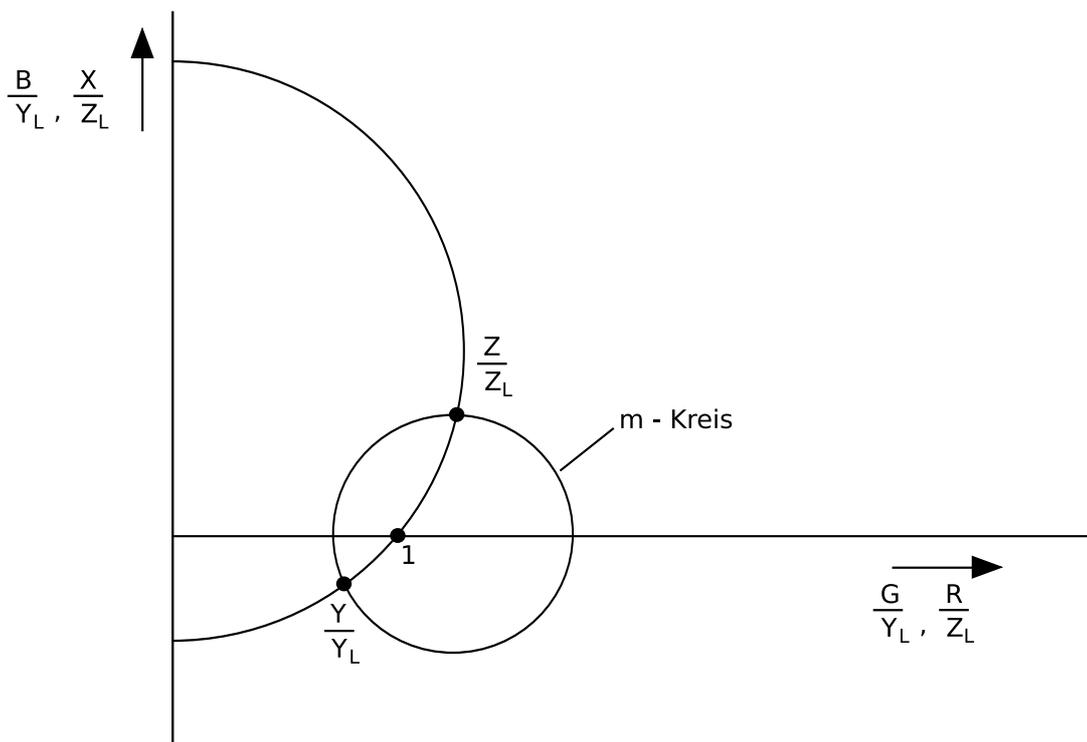


Bild 4.2.: Übergang von normierten Widerständen zu normierten Leitwerten

wird.  $\frac{Y}{Y_L}$  ist der normierte Leitwert. Aus (4.8) folgt:

$$\frac{Y_1}{Y_L} = \frac{I(l)}{U(l)} = \frac{Y_2}{Y_L} \frac{1 + j \frac{Y_L}{Y_2} \tan(\beta l)}{1 + j \frac{Y_2}{Y_L} \tan(\beta l)} \quad (4.9)$$

Gleichung (2.73) und (4.8) sind für normierte Werte formal völlig identisch. Man kann daher ein Buschbeck-Diagramm unverändert für normierte Leitwerte verwenden.

Ein weiterer wichtiger Zusammenhang zwischen dem normierten Leitwert  $Y/Y_L$  an einer beliebigen Stelle der Leitung und der zugehörigen normierten Impedanz  $Z/Z_L$  soll anhand von Bild 4.2 veranschaulicht werden.

Ein  $m$ -Kreis und ein  $l/\lambda$ -Kreis haben stets zwei Schnittpunkte, deren komplexe Impedanzen  $Z_1/Z_L$  und  $Z_2/Z_L$  auf der Leitung durch ein Leitungsstück der Länge  $\lambda/4$  getrennt sind. Für ein solches Leitungsstück gilt nach (2.74) die Beziehung

$$\frac{Z_1}{Z_L} = \frac{Z_L}{Z_2} \quad , \quad (4.10)$$

d.h. die normierten Impedanzen sind reziprok zueinander. Diese Reziprozität führt dazu, dass

der zweite Schnittpunkt eines  $l/\lambda$ -Kreises mit einem  $m$ -Kreis den normierten Leitwert

$$\frac{Y}{Y_L} = Y \cdot Z_L = \frac{1}{Z/Z_L} = \frac{Z_L}{Z} \quad (4.11)$$

darstellt, der zu der normierten Impedanz  $Z/Z_L$  des ersten Schnittpunktes gehört. Wenn man also im Leitungsdiagramm von Widerständen zu Leitwerten übergehen will, so bewegt man sich von dem jeweils erreichten  $Z/Z_L$  zu dem 2. Schnittpunkt der zugehörigen Diagrammkreise.

In der Praxis ist die Angabe des Wellenleitwertes einer Leitung eher unüblich. Für den bezogenen komplexen Leitwert  $Y/Y_L$  schreibt man daher bevorzugt  $Y Z_L$ .

### 4.1.3. Anwendung des Smithdiagramms zur Leitungstransformation

Im Smithdiagramm können alle bisher gezeigten Transformationen wie

- Serienschaltungen von Blindelementen
- Parallelschaltungen von Blindelementen
- Serien- / Parallelschaltungen von Wirkelementen
- Transformationen mit Leitungen

einfacher ausgeführt werden. Speziell die in der Mikrowellentechnik zumeist eingesetzte Leitungstransformation wird durch diese Darstellung stark vereinfacht. Grund dafür ist, dass im Gegensatz zu dem Diagramm in Bild 4.1 die  $m = \text{konst.}$  Kreise im  $r$ -Diagramm konzentrisch sind, und die Linien  $l/\lambda$  durch Geraden ausgehend vom Mittelpunkt  $r = 0$  (auch Anpasspunkt genannt) dargestellt werden. So ergibt es sich, dass gleiche Längenänderungen  $\Delta l/\lambda$  immer zu gleichen Winkeländerungen  $\Delta\varphi$  zwischen den  $l/\lambda = \text{konst.}$  Geraden führen.

Für die Arbeit mit dem Smith-Diagramm bedeutet dies, dass eine Längenänderung  $l/\lambda$  einer verlustlosen Leitung einer Drehung des Reflexionsfaktors  $r$  (dabei  $|r| = \text{konst.}$ ) um den Punkt  $r = 0$  entspricht. Dabei ist zu beachten, dass  $l/\lambda$  im Smith-Diagramm immer kleiner als 0,5 ist, da ein voller Umlauf von  $360^\circ$  einer Leitungslänge von  $l/\lambda = 0,5$  entspricht. Daraus folgt, dass alle ganzzahligen Vielfachen von 0,5 unberücksichtigt bleiben.

Gemäß Abschnitt 2.6 ist der komplexe Reflexionsfaktor definiert als das Verhältnis zwischen hin- und rücklaufender Spannungsamplitude

$$r(z) = \frac{U_R(z)}{U_H(z)} \quad (4.12)$$

Die rücklaufende Spannung  $U_R(l)$  am Ort  $z = l$  ergibt sich aus Bild 2.6 und (2.50) aus der rücklaufenden Spannung am Ort  $z = 0$  durch

$$U_R(l) = U_R(0) e^{-j\beta l} \quad . \quad (4.13)$$

Analog ergibt sich die hinlaufende Spannung am Ort  $l$  zu

$$U_H(l) = U_H(0) e^{j\beta l} \quad . \quad (4.14)$$

und damit der Reflexionsfaktor an der Stelle  $z = l$  zu

$$r(l) = \frac{U_R(0)}{U_H(0)} e^{-2j\beta l} \quad (4.15)$$

bzw. zu

$$r_1 = r_0 e^{-2j\beta l} \quad . \quad (4.16)$$

Hierbei ist  $r_0$  der Reflexionsfaktor an der Stelle  $z = 0$ , der durch eine Impedanz  $Z(0)$  als Abschluss einer Leitung nach Bild 4.3 erzeugt wird, und  $r_1$  der Reflexionsfaktor am Eingang der Leitung bei  $z = l$ .

Man erkennt aus dem  $r$ -Diagramm, dass sich der Betrag des Reflexionsfaktors  $|r|$  eines beliebigen komplexen Widerstandes also durch Vorschalten einer ungedämpften Leitung nicht ändert. Die Phase dreht innerhalb einer Wellenlänge zweimal vollständig über  $360^\circ$  durch. Die Leitung wird dabei zweimal durchlaufen, einmal von der hin- und einmal von der rücklaufenden Welle. Aufgrund des negativen Vorzeichens der Phase in (4.16) dreht der Reflexionsfaktor ausgehend von  $r_0$  für ansteigende Leitungslängen in mathematisch negativer Richtung weg (zum Generator im Uhrzeigersinn).

Mit Gleichung (3.12) gilt außerdem

$$r_1 = |r_1| e^{j\varphi_1} = |r_0| \cdot e^{j(\varphi_0 + \Delta\varphi)} \quad (4.17)$$

Somit lässt sich eine Beziehung zwischen dem Drehwinkel  $\Delta\varphi$  um den Ursprung des  $r$ -Diagramms und der daraus abzuleitenden Längenänderung einer Leitung  $\Delta l$  formulieren durch

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\Delta l}{\lambda} \quad . \quad (4.18)$$

( $\Delta\varphi$  ist negativ für Drehung im Uhrzeigersinn.)

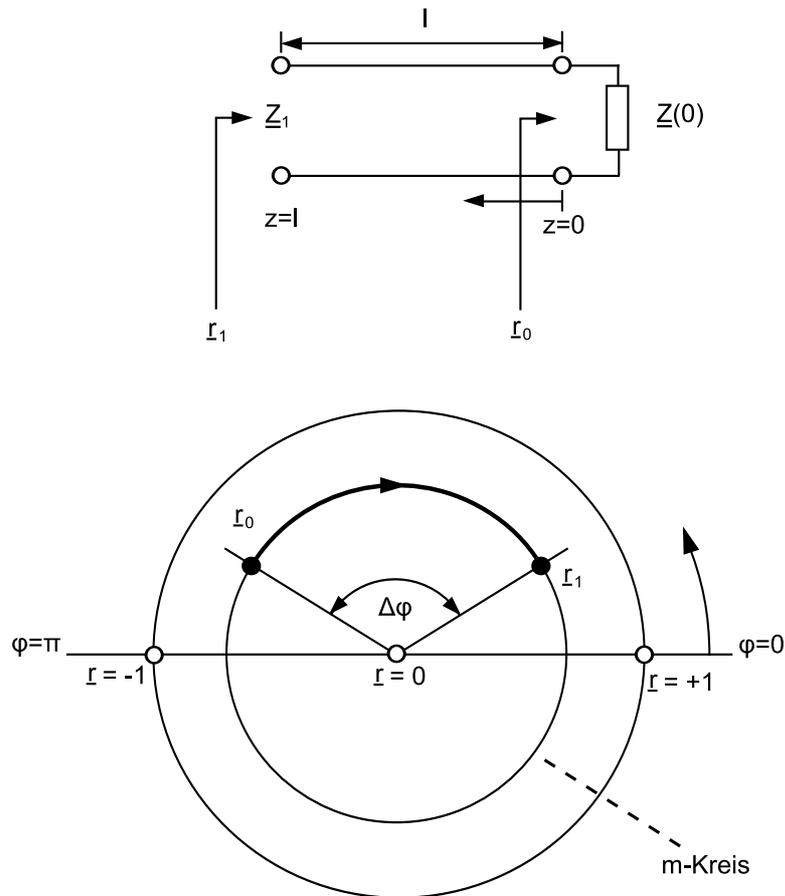


Bild 4.3.: Transformation des Reflexionsfaktors

Da der Winkel der durch die Leitung verursachten Phasendrehung proportional  $l/\lambda$  ist, wird vielfach am Außenkreis des Smithdiagramms eine normierte Skala in  $l/\lambda$  angebracht (siehe Anhang C).

Anzumerken ist schließlich, dass sämtliche vorausgegangenen Überlegungen nicht nur für eine Leitungstransformation bei gegebener Frequenz gelten, sondern ebenso für eine Änderung der Frequenz bei fester Leitungslänge.

Da die  $l/\lambda$ -Kreise der Leitungsdiagramme bzw. Schmidt-Buschbeck Diagramme (vgl. Abschnitt 4.1.1) im Smith-Diagramm Geraden durch den Anpasspunkt darstellen, ergibt sich dort der normierte Leitwert aus dem normierten Widerstand einfach durch Spiegelung am Anpasspunkt  $Z/Z_L = 1$  (Bild 4.4). Dies entspricht gerade einer Drehung um  $\lambda/4$ , also um  $180^\circ$ .

Der Zusammenhang wird auch aus (2.73) ersichtlich. Setzt man für das Leitungsstück  $l = \lambda/4$  ein, erhält man ebenfalls Bild 4.4.

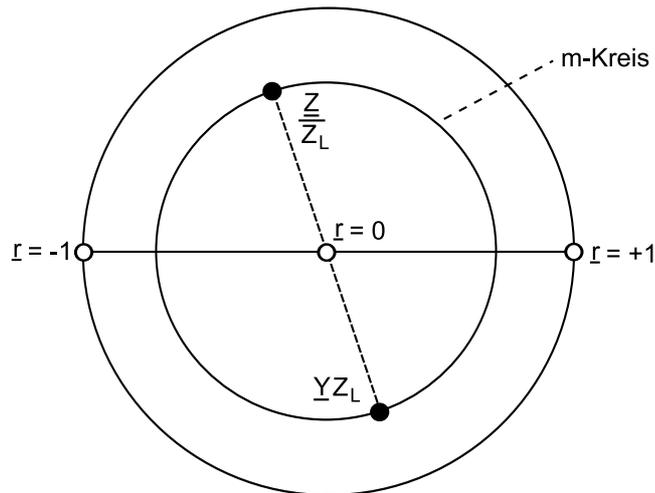


Bild 4.4.: Normierter Widerstand und normierter Leitwert im Smithdiagramm

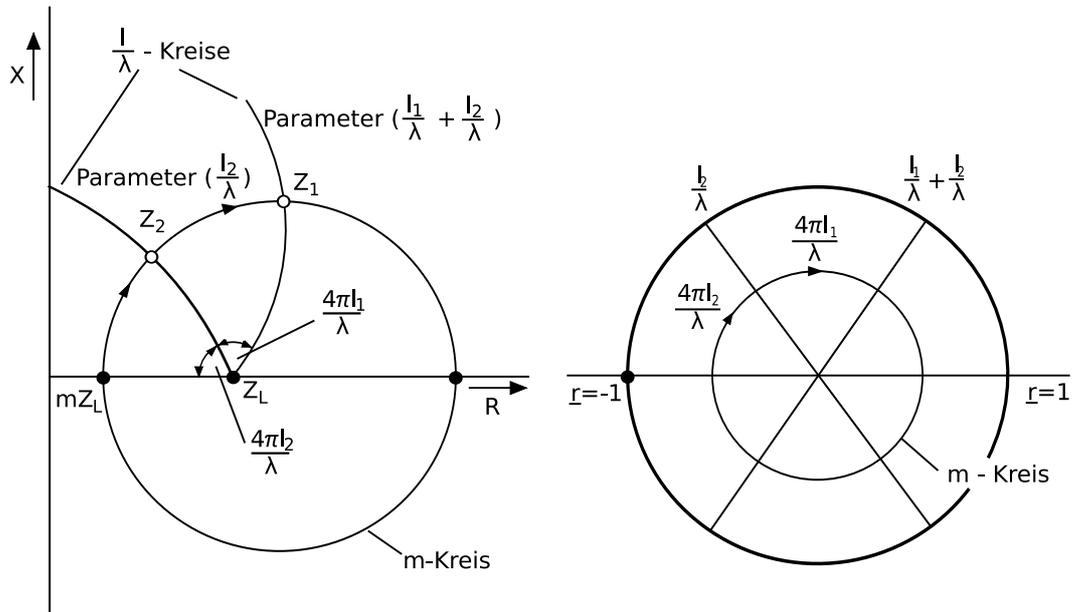
#### 4.1.4. Leitung mit beliebig komplexem Abschluss

Nach Bild 4.5(a) kann man sich jeden komplexen Verbraucher  $Z_2$  als Kombination eines reellen Widerstands  $mZ_L$  mit einer ihm vorgeschalteten Leitung des Wellenwiderstands  $Z_L$  und der Länge  $l_2$  denken. Dabei ist  $m$  der Parameter des durch  $Z_2$  gehenden  $m$ -Kreises.  $l_2$  kann aus dem Parameter  $l_2/\lambda$  des durch  $Z_2$  gehenden  $l/\lambda$ -Kreises berechnet werden.

Die Transformation eines beliebig komplexen Verbrauchers  $Z_2$  über eine Leitung der Länge  $l_1$  ist also nach Bild 4.5 identisch mit der Transformation eines reellen Verbrauchers  $mZ_L$  über eine Leitung der Länge  $l_2 + l_1$ . Jeder Verbraucher wird nach Bild 4.5(a) durch eine Leitung auf seinem  $m$ -Kreis im Uhrzeigersinn verschoben. Der Parameter  $l_2/\lambda$  ist der Parameter des  $l/\lambda$ -Kreises, auf dem in Bild 4.5(a) das gegebene  $Z_2$  liegt bzw. auf dem im normierten Smith-Diagramm des Bildes 4.5(b) das normierte  $Z_2/Z_L$  liegt. Der gesuchte Eingangswiderstand  $Z_1$  liegt in Bild 4.5(a) bzw.  $Z_1/Z_L$  in Bild 4.5(b) auf dem  $l/\lambda$ -Kreis mit dem Parameter  $l_2/\lambda + l_1/\lambda$ .

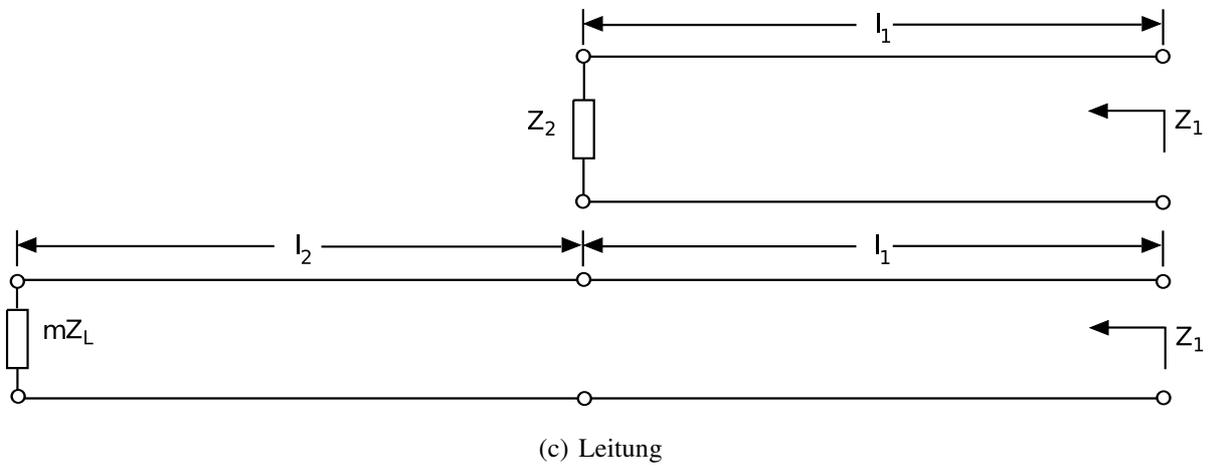
Bild 4.6 gibt einen Überblick über die Größe des  $l_2$ . Wenn  $Z_2$  eine induktive Phase hat, also oberhalb der reellen Achse liegt, ist  $l_2/\lambda < 0,25$  bzw.  $l_2 < \lambda/4$ . Wenn  $Z_2$  zwar reell, aber größer als  $Z_L$  ist, liegt  $Z_2$  rechts von  $Z_L$  auf der reellen Achse, und es ist  $l_2/\lambda = 0,25$ , also  $l_2 = \lambda/4$ . Wenn  $Z_2$  eine kapazitive Phase hat, also unterhalb der reellen Achse liegt, ist  $0,25 < l_2/\lambda < 0,5$  und  $\lambda/4 < l_2 < \lambda/2$ . Strom und Spannung auf einer mit beliebig komplexem  $Z_2$  abgeschlossenen Leitung verlaufen nach den gleichen Kurven wie auf einer um  $l_2$  längeren mit  $R_2 < Z_L$  abgeschlossenen Leitung nach Bild 4.6 oben. Es ist lediglich der Anfangspunkt der Kurven um  $l_2$  verschoben, wie dies in Bild 4.6 angedeutet ist.

Selbstverständlich kann obige Transformation nicht nur im Widerstandsdiagramm nach Bild 4.5(a), sondern auch im Smith-Diagramm, wie in Bild 4.5(b) dargestellt, durchgeführt werden.



(a) Buschbeckdiagramm

(b) Smithdiagramm



(c) Leitung

Bild 4.5.: Transformation komplexer Widerstände

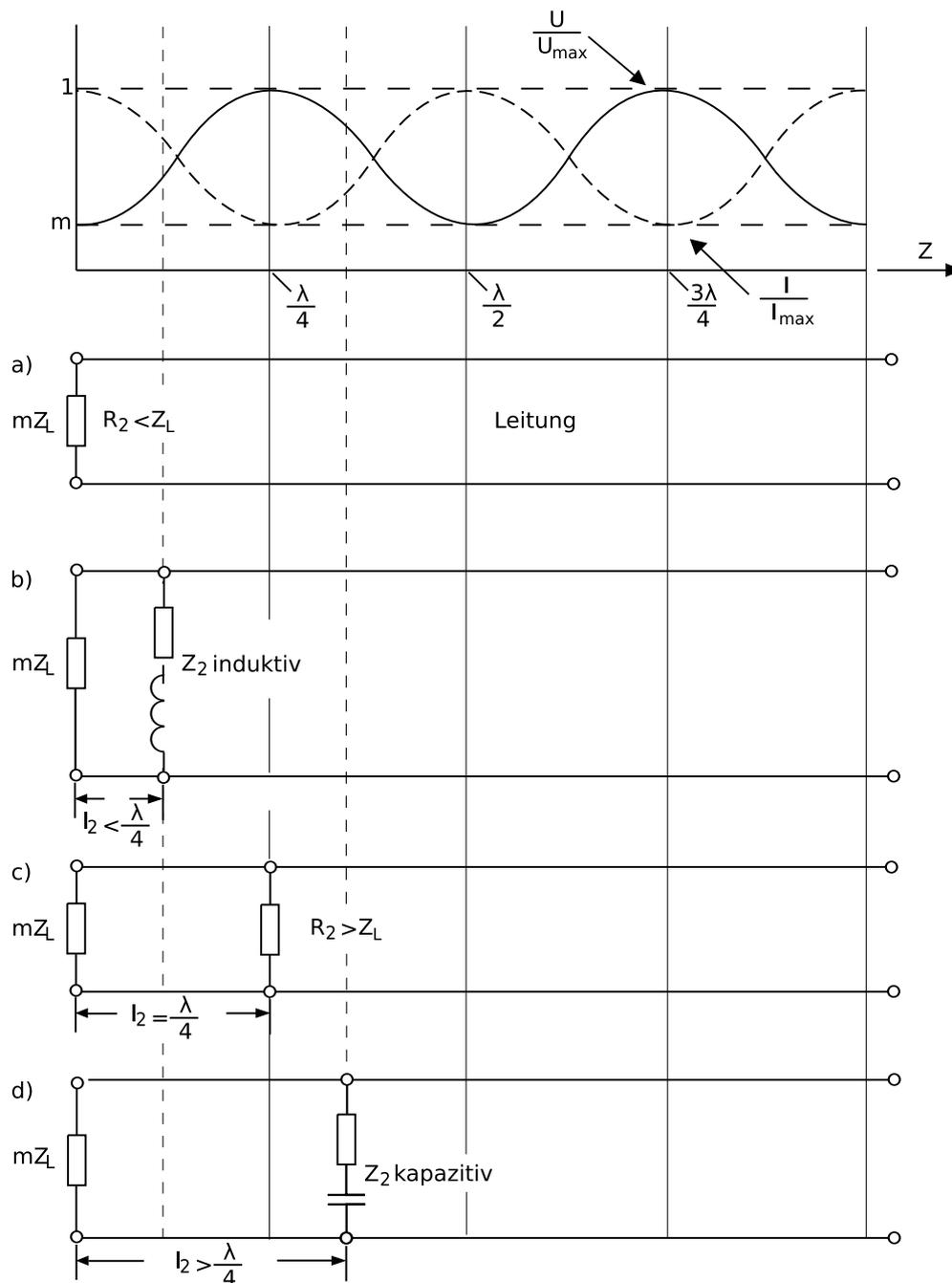
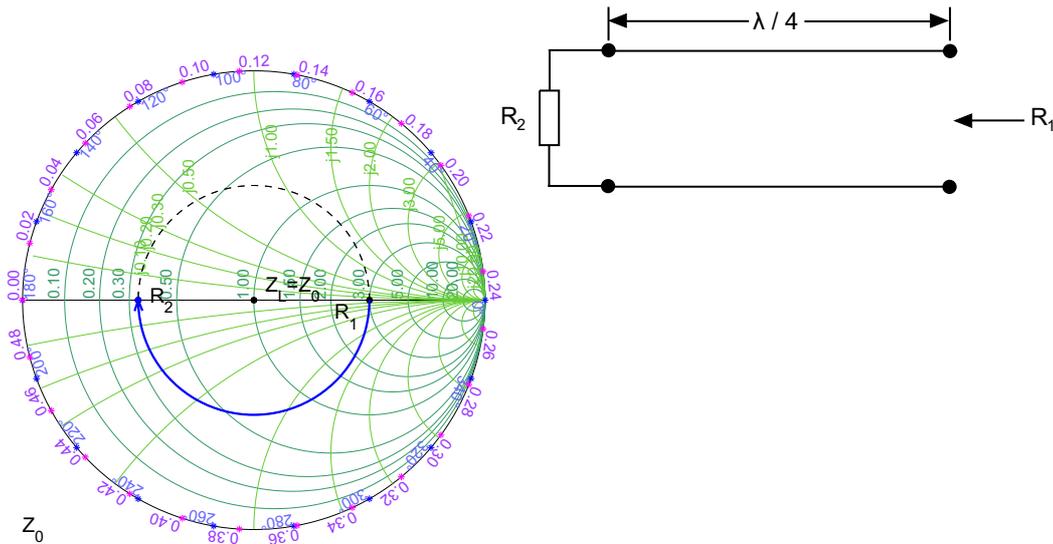


Bild 4.6.: Spannung und Strom längs einer Leitung für  $m = 0,5$

- bei reellem Abschluss  $R_2 = mZ_L < Z_L$
- bei komplexem Abschluss mit induktiver Phase
- bei reellem Abschluss  $R_2 = Z_L/m > Z_L$
- bei komplexem Abschluss mit kapazitiver Phase

Bild 4.7.:  $\lambda/4$ -Transformation reeller Widerstände

### 4.1.5. Spezielle Fälle der Transformation mit Leitungen

#### $\lambda/4$ -Transformation reeller Widerstände

Ein reeller Verbraucher  $R_2$  wird durch eine vorgeschaltete  $\lambda/4$ -Leitung in den reellen Eingangswiderstand  $R_1$  transformiert wie in Bild 4.7 dargestellt. Der Wellenwiderstand der Leitung folgt aus (2.74) zu

$$Z_L = \sqrt{R_1 R_2} \quad , \quad (4.19)$$

wobei der  $m$ -Kreis durch

$$\frac{R_2}{Z_L} = m = \frac{Z_L}{R_1} \quad (4.20)$$

definiert ist.

Ein solcher sog.  $\lambda/4$ -Transformator wird häufig benutzt, um zwei Leitungen mit verschiedenen Wellenwiderständen  $Z_{L1} \neq Z_{L2}$  aneinander anzupassen. Der Nachteil dieser Schaltung ist ihre Schmalbandigkeit, da die  $\lambda/4$ -Bedingung nur für eine Frequenz erfüllt ist.

#### Anpassung durch einen Parallelblindwiderstand

Man kann Leitungen auch mit Blindwiderständen kombinieren und auf diese Weise zahlreiche weitere Schaltungen erhalten. Eine bekannte Anwendung ist die Anpassungsschaltung aus Bild 4.8.

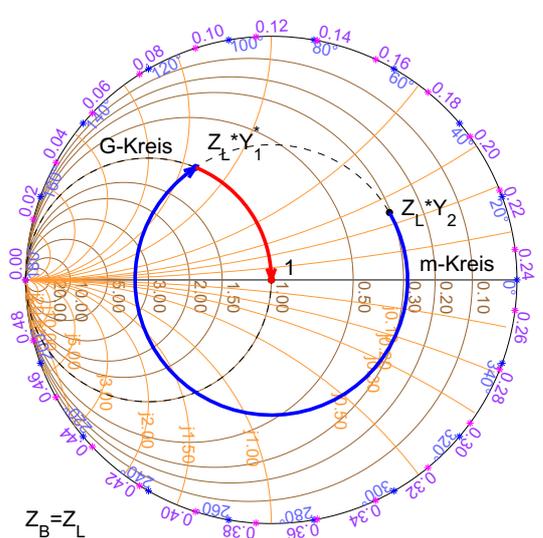
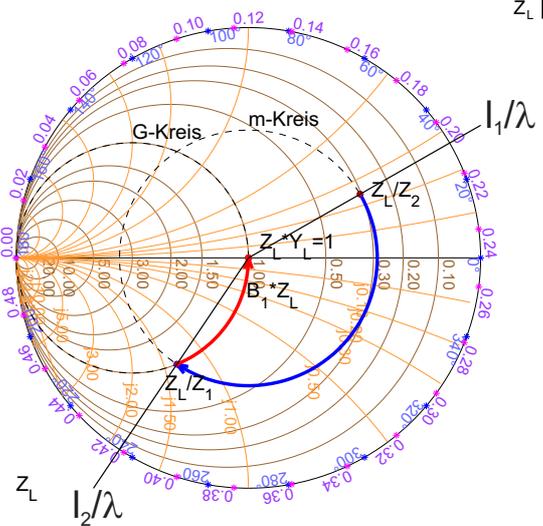
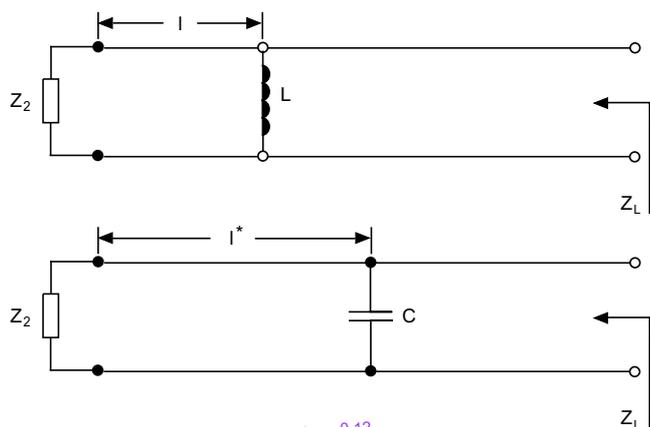


Bild 4.8.: Anpassung durch einen Parallelblindwiderstand

Ein beliebig komplexer Verbraucher  $Z_2$  soll in den reellen Widerstand  $Z_L$  transformiert werden, der gleich dem Wellenwiderstand der vorgeschalteten Leitung ist. Diese Aufgabe soll im Smithdiagramm für normierte Leitwerte  $Y Z_L$  durchgeführt werden. Die Leitung transformiert das gegebene  $Z_L/Z_2$  auf seinem  $m$ -Kreis im Uhrzeigersinn und zwar — bei noch frei verfügbarer Leitungslänge — in jeden Punkt dieses Kreises.

In Bild 4.8 unten ist ferner der durch 1 (Anpassung) laufende Kreis konstanten Wirkleitwerts ( $G = \text{konst.}$ ) dargestellt.  $Z_L/Z_1$  und  $Z_L/Z_1^*$  sind die Schnittpunkte der beiden Kreise. Man transformiert das gegebene  $Z_L/Z_2$  über eine Leitung der Länge  $l$  nach  $Z_L/Z_1$ . Die hierfür erforderliche Länge  $l$  gewinnt man aus dem Parameter  $l/\lambda = l_1/\lambda - l_2/\lambda$  der Gerade vom Ursprung durch  $Z_L/Z_1$  und aus dem Parameter  $l_2/\lambda$  der Gerade durch  $Z_L/Z_2$ . Das  $Z_L/Z_1$  kann man auf dem Kreis  $G = \text{konst.}$  durch eine Parallelinduktivität  $L$  in den gewünschten Punkt 1 transformieren. Den hierfür erforderlichen Blindleitwert  $B_p = \frac{1}{\omega L}$  kann man aus dem Smithdiagramm ablesen.

$$\Delta B_L = -B_1 \quad \omega L = \frac{1}{\Delta B_L} \quad (4.21)$$

Man kann aber auch das gegebene  $Z_2/Z_L$  nach Bild 4.8 durch Vorschalten einer Leitung der Länge  $l^*$  in den Wert  $Z_L/Z_1^*$  transformieren und dann durch Parallelschalten einer Kapazität  $C$  auf dem Kreis  $G = \text{konst.}$  den Punkt 1 erreichen. Da  $Y_1^*$  spiegelbildlich zu  $Y$  liegt, ist der erforderliche Blindleitwert  $\omega C$  der Kapazität  $C$  ebenso groß wie der in (4.21). Man kann also jeden beliebigen komplexen Verbraucher (mit Ausnahme von verlustfreien Blindwiderständen) unter Verwendung eines längs der Leitung verschiebbaren und in seiner Größe einstellbaren Blindwiderstandes parallel zur Leitung an den Wellenwiderstand der Leitung anpassen. Zur Einstellung der richtigen Transformation müssen Ort und Größe des Blindwiderstandes jeweils in bestimmter Weise gewählt werden.

#### $\lambda/4$ -Kompensation von kleinen Störblindwiderständen

Es ist nicht einfach, völlig homogene Leitungen zu bauen. Aus konstruktiven Gründen entstehen örtliche Störungen der Homogenität. Beispiele sind Stecker, Knicke usw. Eine bekannte Abhilfe gegen unerwünschte Folgen solcher Störungen ist die so genannte  $\lambda/4$ -Kompensation.

In Bild 4.9 ist eine Leitung mit einem angepassten Verbraucher  $Z_L$  abgeschlossen und die Anpassung auf der Leitung durch eine unvermeidliche Blindstörung, z.B. eine Parallelkapazität  $C$ , kompensiert. Der normierte Verbraucher  $Z/Z_L = 1$  wird durch diesen Parallelblindwiderstand auf einen Kreis  $G = \text{konst.}$  in einen komplexen Wert  $Z_1/Z_L$  transformiert.

Die vor der Störung liegende Leitung transformiert dieses  $Z_1/Z_L$  weiter auf dem  $m$ -Kreis. Man kann diese Fehlanpassung durch ein gleichgroßes  $C$  (bzw. allgemein durch eine Wiederholung einer gleichartigen Störung), das in bestimmtem Abstand  $l$  von der ursprünglichen Störung

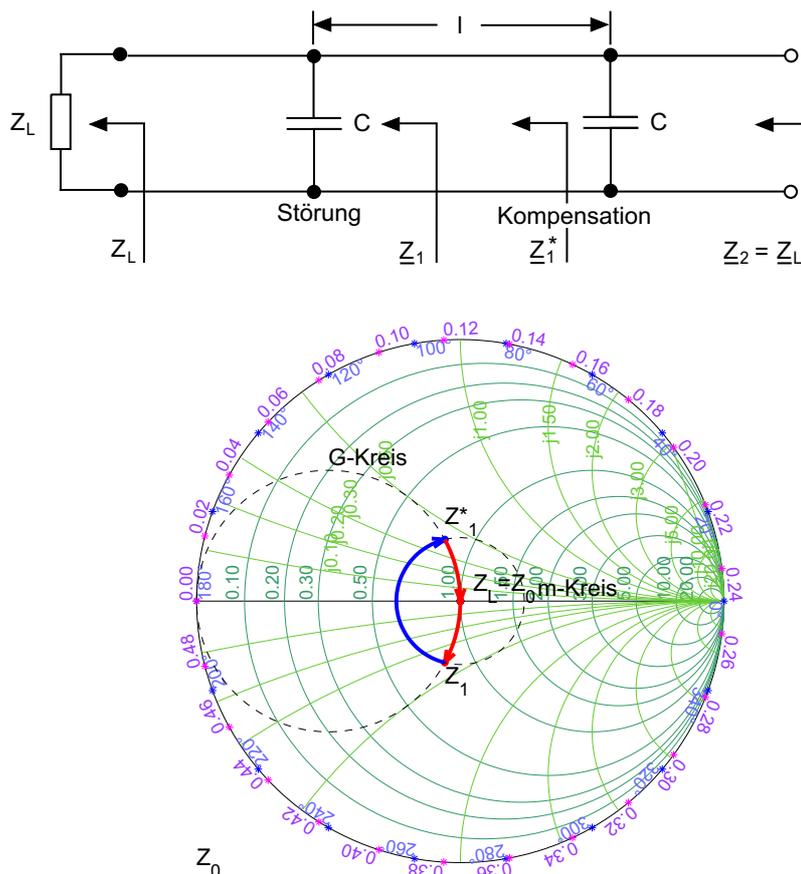


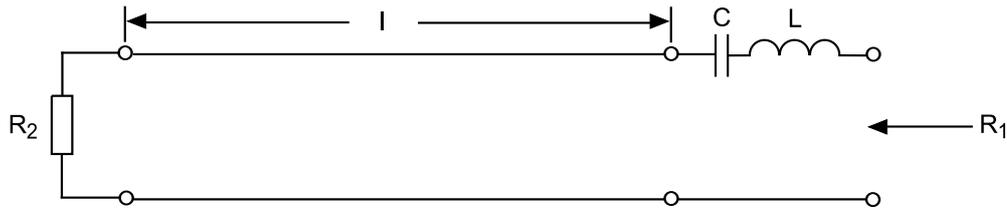
Bild 4.9.:  $\lambda/4$ -Kompensation von kleinen Störblindwiderständen ( $l/\lambda \approx 1/4$ )

angebracht ist, wieder beseitigen. Hierzu wählt man die Länge  $l$  so, dass der Punkt  $Z_1/Z_L$  auf einem  $m$ -Kreis in seinen spiegelbildlichen Wert  $Z_1^*/Z_L$  verschoben wird.  $Z_1^*/Z_L$  kann dann durch das gleichgroße, kompensierende  $C$  nach 1 transformiert, die Anpassung somit wieder hergestellt werden. Für kleine Störungen ist  $l \approx \lambda/4$ .

### Breitbandtransformationen

Die bisher erwähnten Transformationsbeispiele waren jeweils nur für eine einzige Frequenz brauchbar. Man kann mit Hilfe von Leitungen auch Breitbandschaltungen bauen. Ein bekanntes Beispiel ist die kompensierte  $\lambda/4$ -Transformation.

Die in Bild 4.7 dargestellte Transformation ist frequenzabhängig. Wählt man bei gleichem  $l$  eine niedrigere Betriebsfrequenz, so wird  $\lambda$  größer, also  $l/\lambda$  kleiner, die Drehung auf dem  $m$ -Kreis kleiner und man erreicht in Bild 4.7 nicht den Punkt  $R_1$ . Wählt man eine höhere Betriebsfrequenz, so wird  $\lambda$  kleiner, also  $l/\lambda$  größer, die Drehung auf dem  $m$ -Kreis größer und man überschreitet  $R_1$ . Je mehr sich die Betriebsfrequenz von dem Wert entfernt, für den die

Bild 4.10.: Kompensierte  $\lambda/4$ -Transformation

Leitungslänge gleich  $\lambda/4$  ist, desto mehr entfernt man sich von dem Sollwert  $R_1$ .

Legt man an den Eingang der Leitung, wie in Bild 4.10 gezeigt, einen in Serie geschalteten Serienresonanzkreis, so erzeugt man einen Breitbandeffekt. Die Resonanzfrequenz dieses Serienkreises legt man auf diejenige Frequenz, bei der die Leitungslänge  $l = \lambda/4$  ist. Bei dieser Frequenz besitzt der Serienkreis keinen Blindwiderstand und ändert daher den Eingangswert  $R_1$  nicht. Bei niedrigeren Frequenzen hat der Serienkreis einen kapazitiven Blindwiderstand und beseitigt bei richtiger Wahl von  $L$  und  $C$  die induktive Komponente. Bei höheren Frequenzen hat der Serienkreis einen induktiven Blindwiderstand und kompensiert, bei richtig dimensioniertem  $X_R$ , die kapazitive Komponente.

#### 4.1.6. Die fehlangepasste Leitung mit Verlusten

Im Folgenden soll kurz die Wirkung der Leitungsverluste auf die transformierenden Eigenschaften einer Leitung betrachtet werden. Die Leitungsgleichungen sind nach (2.51) und (2.52) unter Berücksichtigung der Verluste

$$U(z) = U_H(0)e^{\gamma z} + U_R(0)e^{-\gamma z} \quad (4.22)$$

$$I(z) = I_H(0)e^{\gamma z} - I_R(0)e^{-\gamma z} \quad (4.23)$$

$$\text{mit } \gamma = \alpha + j\beta \quad (4.24)$$

Setzt man  $U_R(0) = U_H(0) \cdot r_2$  und berechnet die Amplituden der Spannung längs der Leitung, so folgt:

$$U_{\max} = |U_H(z)| + |U_R(z)| = |U_H(0)| \cdot (e^{+\alpha z} + |r_2|e^{-\alpha z}) \quad (4.25)$$

für die Orte längs der Leitung, an denen sich hin- und rücklaufende Welle phasenrichtig addieren.

Die Minima der Spannung  $U_{\min}$  liegen im Abstand  $\lambda/4$  davon an den Stellen, wo sich  $U_H$  und

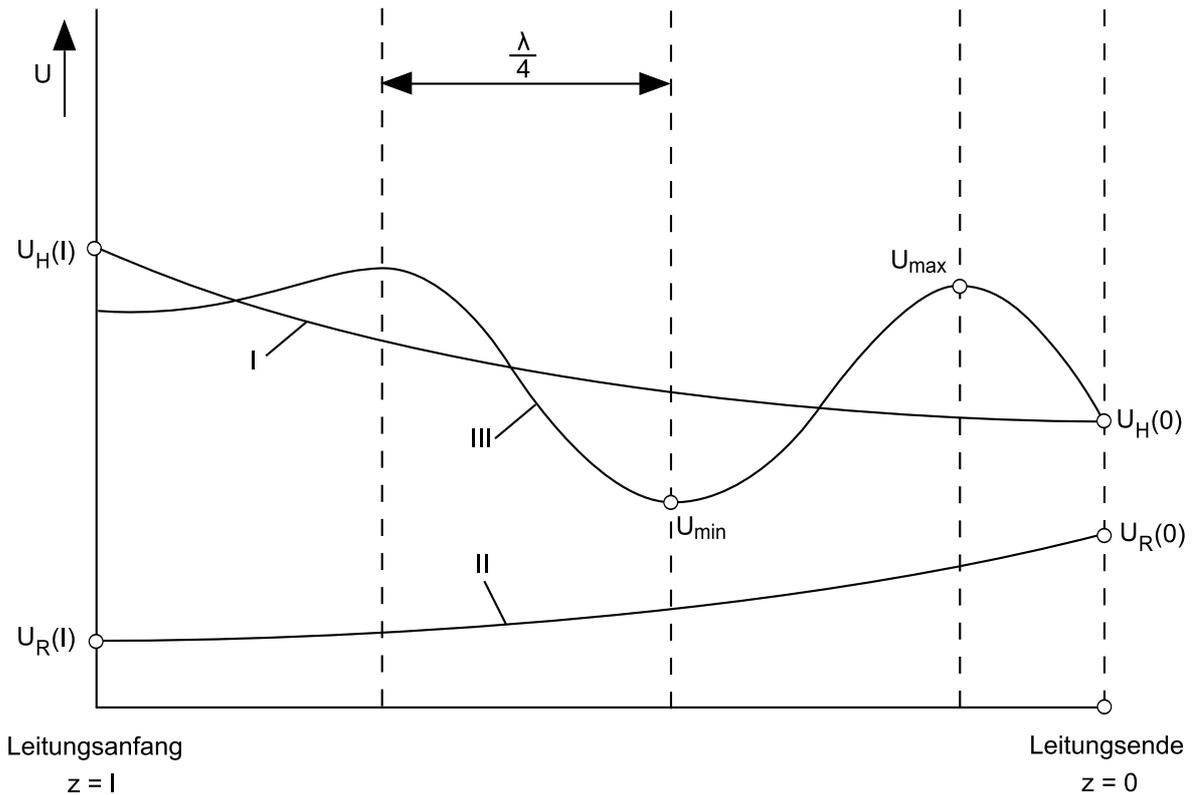


Bild 4.11.: Spannung auf einer Leitung mit Verlusten, dabei ist

- I) der Betrag der hinlaufenden Welle,
- II) der Betrag der reflektierten Welle und
- III) die schließlich durch die Überlagerung entstehende Welle

$U_R$  subtrahieren:

$$U_{\min} = |U_H(z)| - |U_R(z)| = |U_H(0)| \cdot (e^{+\alpha z} - |r_2|e^{-\alpha z}) \quad (4.26)$$

In Bild 4.11 sind die Amplituden der Spannungen

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & |U_H(z)| = |U_H(0)|e^{+\gamma z} \\
 \text{(II)} \quad & |U_R(z)| = |U_R(0)|e^{-\gamma z} \quad \text{und} \\
 \text{(III)} \quad & |U(z)|
 \end{aligned} \quad (4.27)$$

dargestellt.

Vom Leitungsende zum Leitungseingang hin hat die Amplitude der Gesamtspannung steigende Tendenz, weil  $|U_H|$  steigt. Außerdem nehmen die Schwankungen zum Leitungseingang hin ab, weil  $|U_R|$  kleiner wird. Der Anpassungsfaktor  $m$  ist längs der Leitung nicht konstant, sondern

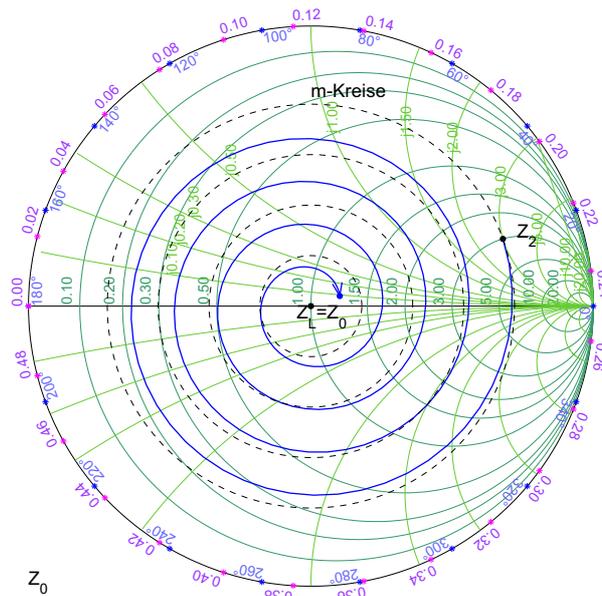


Bild 4.12.: Widerstandstransformation längs einer Leitung mit Verlusten

wächst in Richtung zum Leitungseingang hin und nähert sich dabei dem Wert 1. Wenn man (4.25) durch (4.26) teilt und dann Zähler und Nenner jeweils um  $e^{\alpha z}$  kürzt, wird

$$m = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{1 - |r_2|e^{-2\alpha z}}{1 + |r_2|e^{-2\alpha z}} \quad (4.28)$$

Hinreichend lange Leitungen haben am Eingang  $m = 1$  und ihr Eingangswiderstand ist daher, unabhängig vom Verbraucher, gleich  $Z_L$ . Bei der Widerstandstransformation durch verlustbehaftete Leitungen bedeutet das wachsende  $m$ , dass die Widerstände mit wachsender Leitungslänge auf Spiralen nach Bild 4.12 transformiert werden, die sich um den Punkt  $Z_L$  wickeln.

Bei größeren Verlusten kann der Wellenwiderstand der verlustbehafteten Leitung auch ein komplexer Widerstand sein und sich die Widerstandsspirale um den komplexen Wert für  $Z_L$  wickeln. Die zur Spannung korrespondierende Betrachtung kann auch für den Strom angestellt werden. Der Betrag des Reflexionsfaktors am Eingang der Leitung  $|r(z)|$  als Funktion des Reflexionsfaktors des Abschlusses  $r_2$  kann wegen

$$|r| = \frac{1 - m}{1 + m} \quad \text{bzw.} \quad m = \frac{1 - |r|}{1 + |r|} \quad (4.29)$$

direkt aus (4.28) entnommen werden:

$$|r(z)| = |r_2| \cdot e^{-2\alpha z} \quad (4.30)$$

Den komplexen Reflexionsfaktor erhält man mit Berücksichtigung der Phase zu

$$r(z) = r_2 \cdot e^{-2\gamma z} \quad (4.31)$$

## 4.2. Verwendung von Leitungen mit stehenden Wellen als Stichleitung

Eine am Ende kurzgeschlossene oder leerlaufende verlustfreie Leitung nimmt vom Generator keine Wirkleistung auf. Es entsteht eine so genannte stehende Welle, da die rücklaufende und die hinlaufende Welle gleich groß sind. Der Betrag des Reflexionsfaktors ist  $|r| = 1$ , die Phase ist eine Funktion der Leitungslänge. Damit ist  $m = 0$  und  $s = \infty$ . Bild 4.13 zeigt Spannung und Strom längs der Leitung.

Allgemein gilt:

$$U(z) = U_H(0) \cdot e^{+\gamma z} + U_R(0) \cdot e^{-\gamma z} \quad (4.32)$$

$$r(z) = r_2 e^{-2\gamma z} \quad (4.33)$$

Für den verlustlosen Fall und  $r_2 = -1$  (Kurzschluss) folgt, da  $U_H = -U_R$

$$\begin{aligned} U(z) &= U_H(0)(e^{+j\beta z} - e^{-j\beta z}) \\ &= 2jU_H(0) \sin(\beta z) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Oben in Bild 4.13 sieht man, dass  $U_{\max} = U_H + U_R = 2U_H$  und  $U_{\min} = U_H - U_R = 0$  ist. Für die Phase der Spannung folgt aus (2.90)  $\tan \varphi = \infty$  also  $\varphi = \pi/2$ . bzw.  $\varphi = \pi/2 \pm n\pi$ . Die Phase des Stroms aus (2.91) ist  $\tan \psi = 0$ , also  $\psi = 0$  bzw.  $\psi = n\pi$ . Die Phasenwinkel ändern sich also nicht stetig längs der Leitung, sondern sind zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen der Spannung oder des Stromes jeweils konstant und ändern sich beim Durchgang durch die Nullstelle sprunghaft um  $\pi$ . Die stetige Änderung der Phasenwinkel als typisches Kennzeichen des Wanderns der Wellen längs der Leitung fällt hier fort und man spricht daher im Fall  $m = 0$  wegen der abschnittsweise konstanten Phase von stehenden Wellen.

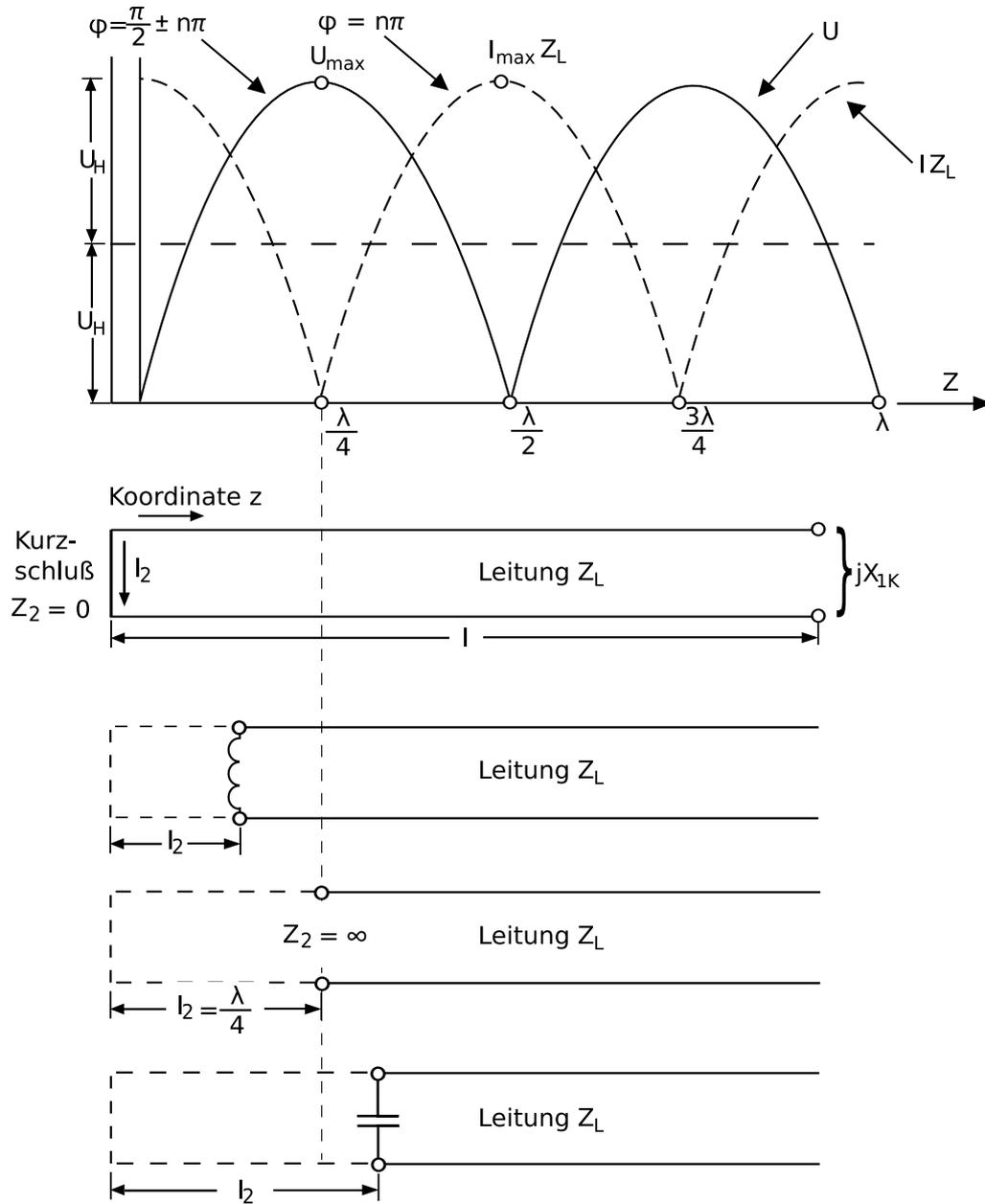


Bild 4.13.: Strom und Spannung bei stehenden Wellen. Zurückführung von Blindabschlüssen auf einen Kurzschluss

### 4.2.1. Die kurzgeschlossene Leitung

Das Verhalten einer Leitung mit stehenden Wellen wird zunächst an dem einfachen Beispiel der am Ende kurzgeschlossenen Leitung erläutert. Der Fall mit beliebigem Blindabschluss wird dann wie in Bild 4.13 durch Einführen einer Verlängerung  $l_2$  auf diesen Kurzschlussfall zurückgeführt. Mit dem Verbraucher  $R_2 = 0$  und der Abschlussspannung  $U_2 = 0$  wird aus (2.67) und (2.68)

$$U(z) = jZ_L I_2 \sin(\beta z) \quad (4.35)$$

$$I(z) = I_2 \cos(\beta z) \quad (4.36)$$

Den Verlauf der Scheitelwerte von Spannung und Strom zeigt Bild 4.13 oben. Der Phasensprung von Strom und Spannung in ihren Nullstellen entsteht durch Vorzeichenwechsel der Sinus- und der Cosinusfunktion. Es ist  $|I_2| = I_{\max}$  und  $|I_2|Z_L = U_{\max}$ . Daher gilt

$$\frac{U_{\max}}{I_{\max}} = Z_L \quad (4.37)$$

Der Eingangswiderstand  $Z_1$  der Leitung am Ort  $z = l$  ist stets ein Blindwiderstand, weil die Anordnung keine Wirkleistung verbraucht:

$$Z_1 = jX_{1K} = \frac{U(l)}{I(l)} = jZ_L \tan(\beta l) \quad (4.38)$$

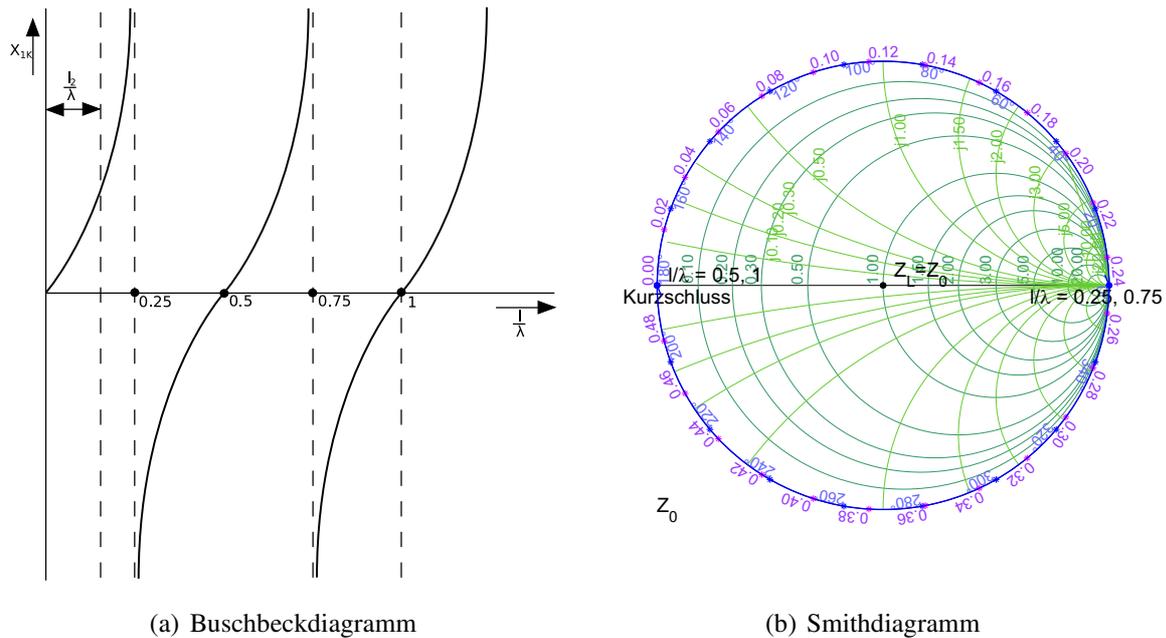
Den Verlauf dieses Blindwiderstandes als Funktion von  $l/\lambda$  zeigt Bild 4.14. Für Leitungen  $l < \lambda/4$  ist der Blindwiderstand  $X_{1K}$  induktiv. Für Leitungslängen, die wesentlich kleiner als  $X_{1K}$  sind ( $l < 0,1\lambda$ ), ist  $2\pi l/\lambda$  sehr klein und näherungsweise  $\tan(\beta l) \approx \beta l$ . Aus (4.38) folgt dann:

$$Z_1 \approx jZ_L \beta l = j\omega L' l \quad (4.39)$$

Es wirkt dann nur die Induktivität der Leitung. Wird die Leitung länger, bewirkt die Leitungskapazität eine Vergrößerung des Blindwiderstandes ähnlich wie bei einem Parallelresonanzkreis. Für  $l = \lambda/4$  ist  $X_{1K} = \infty$ .

Für  $\lambda/4 < l < \lambda/2$  ist der Blindwiderstand nach (4.38) kapazitiv. Für  $l = \lambda/2$  ist  $X_{1K} = 0$ , weil eine Leitung der Länge  $l = \lambda/2$  nicht transformiert.

Die  $X_{1K}$ -Kurven wiederholen sich periodisch mit  $l/\lambda = 0,5$ . Die Kurven des Bildes 4.14 zeigen die Änderung des  $X_{1K}$  mit wachsender Leitungslänge bei konstanter Frequenz, gleichzeitig aber

Bild 4.14.: Eingangsblindwiderstand  $X_{1K}$  einer am Ende kurzgeschlossenen Leitung

auch die Änderung des  $X_{1K}$  bei konstanter Leitungslänge mit wachsender Frequenz ( $l/\lambda$  ist proportional zur Frequenz). Der Eingangsblindleitwert lautet

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = jB_{1K} = -j\frac{1}{Z_L} \cot(\beta l) \quad (4.40)$$

### 4.2.2. Die offene Leitung

Die am Ende offene Leitung wird in der Praxis wenig verwendet, da sie zum einen Verluste durch Abstrahlung am Ende aufweist, zum anderen die Stelle des Leerlaufs physikalisch schwer zu definieren ist. Eine am Ende offene Leitung verhält sich wie eine um  $\lambda/4$  längere, am Ende kurzgeschlossene Leitung. Aus (2.67) und (2.68) folgt mit  $I_2 = 0$

$$U(z) = U_2 \cos(\beta z) \quad (4.41)$$

$$I(z) = j\frac{U_2}{Z_L} \sin(\beta z) \quad (4.42)$$

Der Eingangsblindwiderstand der offenen Leitung wird

$$Z_1 = jX_{1L} = \frac{U(l)}{I(l)} = -jZ_L \cot(\beta l) \quad (4.43)$$

Der Verlauf des Blindwiderstandes ist in Bild 4.15 gezeigt.

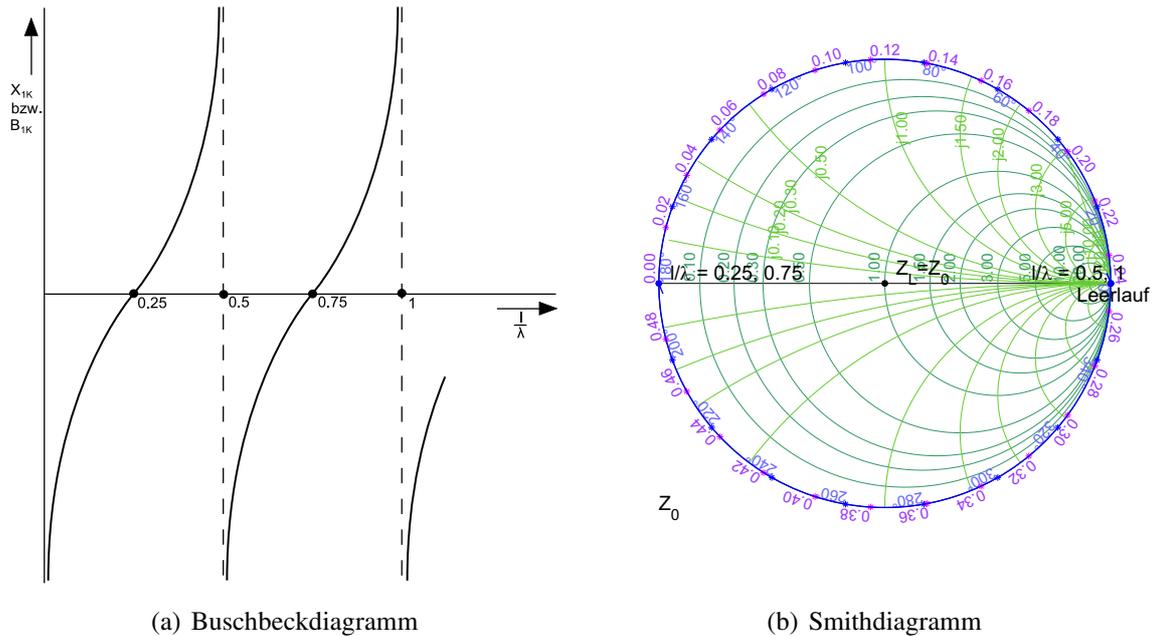


Bild 4.15.: Eingangsblindwiderstand  $X_{1L}$  einer am Ende offenen Leitung bzw. Eingangsblindleitwert  $B_{1k}$  einer am Ende kurzgeschlossenen Leitung

Für Leitungslängen  $l < \lambda/4$  ist  $X_{1L}$  ein kapazitiver Blindwiderstand. Für Leitungslängen, die wesentlich kleiner als  $\lambda/4$  sind ( $l < 0,1\lambda$ ), ist  $\beta l$  sehr klein und nach der Reihenentwicklung näherungsweise  $\cot(\beta l) \approx 1/\beta l$  und damit:

$$Z_1 \approx -j \frac{Z_L}{\beta l} = -j \frac{1}{\omega C' l} \quad (4.44)$$

Es wirkt dann nur die Kapazität  $C' l$  der Leitung. Für höhere Frequenzen wirkt auch die Induktivität der Leitung, wodurch  $Z_1$  ähnlich wie bei einem Serienresonanzkreis im Wert sinkt. Für  $l = \lambda/4$  ist  $X_{1L} = 0$ . Für  $\lambda/4 < l < \lambda/2$  ist  $X_{1L}$  induktiv. Für  $l = \lambda/2$  ist  $X_{1L} = \infty$  wie am Leitungsende, da eine Leitung der Länge  $\lambda/2$  nicht transformiert. Die  $X_{1L}$ -Kurven wiederholen sich in Bild (4.15) periodisch mit  $l/\lambda = 0,5$ .

Man kann die am Ende kurzgeschlossene und die am Ende offene Leitung zur Messung der charakteristischen Leitungsgrößen verwenden. Aus dem Blindwiderstand  $X_{1K}$  der kurzgeschlossenen Leitung nach (4.38) und dem  $X_{1L}$  der offenen Leitung nach (4.43) folgt

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{-X_{1K} X_{1L}} \quad \text{und} \quad \tan(\beta l) = \sqrt{-\frac{X_{1K}}{X_{1L}}} \quad (4.45)$$

Daraus folgt dann

$$\beta = \omega\sqrt{L'C'} = \frac{1}{l} \arctan\left(\sqrt{-\frac{X_{1K}}{X_{1L}}}\right) . \quad (4.46)$$

Aus  $Z_L$  und  $\beta$  ergeben sich  $L'$  und  $C'$  zu

$$L' = \frac{Z_L\beta}{\omega} \quad \text{und} \quad C' = \frac{\beta}{Z_L\omega} . \quad (4.47)$$

### 4.2.3. Leitung mit beliebigem Blindwiderstand als Abschluss

Alle Leitungen mit einer rein induktiven oder kapazitiven Abschlussimpedanz  $jX_2$  können auf einen Kurzschluss nach (4.38) zurückgeführt werden:

$$X_2 = Z_L \tan(\beta l_2) \quad \text{bzw.} \quad l_2 = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan\left(\frac{X_2}{Z_L}\right) \quad (4.48)$$

Das Verhalten einer mit einem Blindwiderstand  $jX_2$  abgeschlossenen Leitung ist daher das gleiche wie das einer um  $l_2$  längeren, am Ende kurzgeschlossenen Leitung. Für positive (induktive)  $X_2$  ist  $l_2 < \lambda/4$ . Für negative (kapazitive)  $X_2$  ist  $\lambda/4 < l_2 < \lambda/2$ . In Bild (4.13) ist dies anschaulich dargestellt.

Leitungen mit stehenden Wellen dienen bei höheren Frequenzen zur Darstellung von gut definierten Blindwiderständen als Ersatz für reine  $L$  und  $C$ , die bei höheren Frequenzen oft ein undefiniertes Verhalten zeigen. Induktive Blindwiderstände erzeugt man meist durch am Ende kurzgeschlossene Leitungen mit  $l < \lambda/4$ , kapazitive Blindwiderstände durch am Ende kurzgeschlossene Leitungen mit Längen  $\lambda/4 < l < \lambda/2$  oder durch am Ende offene Leitungen mit Längen  $l < \lambda/4$ .

Leitungslängen  $l > \lambda/2$  verwendet man hierfür fast nie, da man alle Blindwerte bereits mit  $l < \lambda/2$  herstellen kann und längere Leitungen größere Verluste ergeben. Außerdem führen längere Leitungen zu geringeren Bandbreiten.



# 5. Dimensionierung von Anpassschaltungen mit Hilfe des Smith-Diagramms

Immer dann, wenn Leitungen zwischen Bauelementen bzw. zwischen Quelle und Verbraucher eine Länge haben, die nicht mehr vernachlässigbar gegenüber der Wellenlänge ist, können stehende Wellen auf Leitungen entstehen, die zu einer schwankenden Spannung über der Leitung führen. Um dies zu vermeiden, werden in der Hochfrequenztechnik Schaltungen angepasst.

Nur für den Fall der Anpassung erhält man:

- Maximale Leistungsübertragung in die Last
- Vermeidung von stehenden Wellen
- Optimiertes Signal-zu-Rausch-Verhältnis
- Minimale Amplituden- und Phasenfehler in Verteilnetzwerken

Die Aufgabe, eine Anpassschaltung zu bestimmen, die für konjugiert komplexe Anpassung sorgt, kann man einerseits rechnerisch lösen, aber auch graphisch. Die graphische Lösung ist in vielen Fällen übersichtlicher und anschaulicher. Dies wird meist im Smith Diagramm durchgeführt, da sich in diesem die komplexe rechte Halbebene von Impedanz- und Admittanz-Ebene im Einheitskreis befindet. Die grafische Lösung im Smith Diagramm hat insbesondere den Vorteil, dass man sehr schnell erkennt, welche Schaltung mit welchen Komponenten eine optimale Anpassung ermöglichen. Die Bestimmung der genauen Werte erfolgt dann üblicherweise mit den verfügbaren Berechnungsprogrammen, in denen auch Nichtidealitäten modelliert werden können.

Beispielhaft sollen nun drei verschiedene Arten von Anpass-Schaltungen zusammen mit ihren Transformationswegen im Smith Diagramm betrachtet werden. Gegeben ist im Folgenden stets eine Last (Verbraucher) mit der Impedanz  $Z_v$ , sowie eine Speiseleitung mit dem Wellenwiderstand  $Z_0$ . Die Last ist dabei nicht an die Leitung angepasst ( $Z_v \neq Z_0^*$ ). Um die Last optimal anzupassen, wird ein Anpassnetzwerk zwischen-geschaltet.

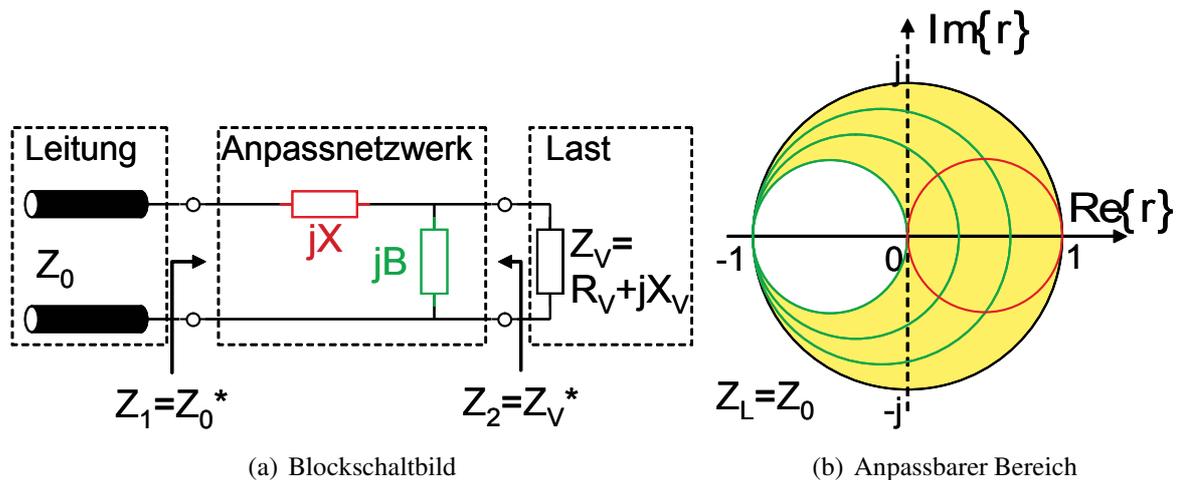


Bild 5.1.: L-Netzwerk 1

## 5.1. Anpassung mit diskreten Elementen

Eine erste Möglichkeit für solch ein Anpassnetzwerk ist in Bild 5.1 dargestellt. Parallel zur Last wird ein Blindelement mit der Admittanz  $jB$  geschaltet und in Serie dazu ein Blindelement mit der Impedanz  $jX$ . In Bild 5.1 ist rechts außerdem der Bereich der möglichen  $Z_v$  gelb markiert, die mit dieser Schaltung an  $Z_0$  angepasst werden können. Von allen gelb markierten Punkten kann man sich zuerst mittels  $jB$  auf einem der grün markierten  $G$ -konst. Kreise auf den rot markierten  $R$ -konst. Kreis bewegen. Befindet man sich auf diesem, kann man sich durch  $jX$  in den Anpasspunkt bewegen. Mathematisch lässt sich der gelb markierte, anpassbare Bereich durch die Bedingung  $Re\{\frac{1}{Z_v}\} \leq \frac{1}{Z_0}$  beschreiben.

Eine zweite Möglichkeit für ein Anpassnetzwerk mit diskreten Elementen ist in Bild 5.2 dargestellt. In diesem Fall schaltet man zuerst seriell zur Last eine Impedanz  $jX$ , und anschließend parallel dazu eine Admittanz  $jB$ . Für diesen Fall ergibt sich ein anderer Bereich der möglichen  $Z_v$ , die an  $Z_0$  angepasst werden können. Von allen in Bild 5.2 gelb markierten Punkten kann man sich zuerst mittels  $jX$  auf einem der rot markierten  $R$ -konst. Kreise auf den grün markierten  $G$ -konst. Kreis bewegen. Befindet man sich auf diesem, kann man sich durch  $jB$  in den Anpasspunkt bewegen. Mathematisch lässt sich der gelb markierte, anpassbare Bereich in diesem Fall durch die Bedingung  $Re\{Z_v\} \leq Z_0$  beschreiben.

Gegeben ist nun ein Verbraucher  $Z_v = 200 - j100 \Omega$ , der bei  $0,5 \text{ GHz}$  an  $Z_0 = 100 \Omega$  angepasst werden soll (Bild 5.3). Da  $Re\{Z_v\} > Z_0$  gilt, kommt nur Netzwerk 1 in Frage. Im ersten Schritt zeichnet man den Verbraucher in ein Smith-Diagramm mit der Normierung  $Z_0 = 100 \Omega$  ein. Wir wählen in diesem Fall ein Smith-Diagramm in Leitwertform. Diese Wahl erschwert jedoch im ersten Schritt das Einzeichnen des Punkts  $Z_v$ . Man kann nun einerseits  $Y_v = 1/Z_v = (4 + j2) \text{ mS}$  berechnen, den Punkt normieren mittels  $Y_v * Z_0 = 0,4 + j0,2$ , und

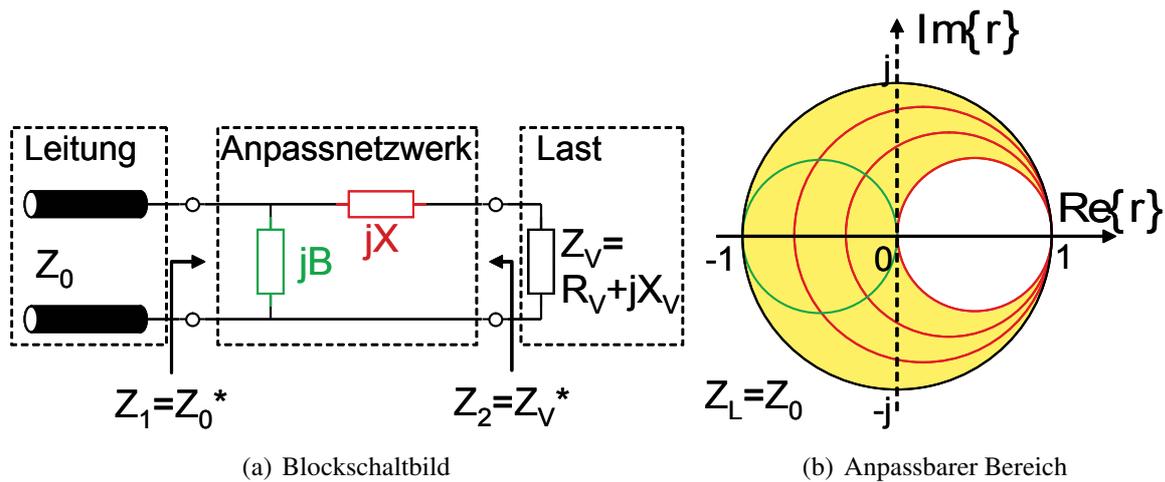


Bild 5.2.: L-Netzwerk 2

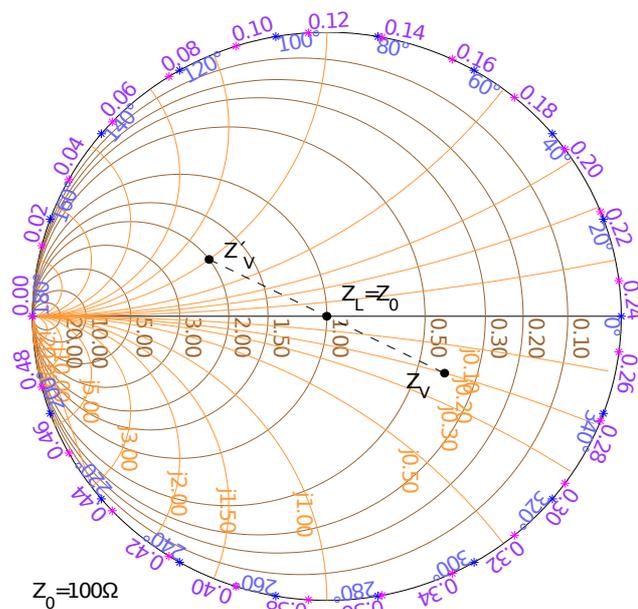
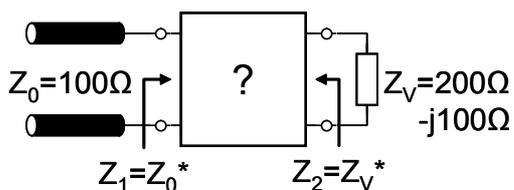
anschließend einzeichnen. Ein zweiter möglicher Weg  $Z_v$  einzuzeichnen führt über einen Hilfs-Trick. Normiert man direkt  $Z_v/Z_0 = 2 - j1$  und markiert den Punkt  $2 - j1$  auf den Hilfslinien im Smith-Diagramm in Leitwertform, so entspricht dieser Punkt exakt  $Z_v^*$ . Durch Punktspiegelung am Mittelpunkt kann man dann auch  $Z_v$  einzeichnen (siehe Bild 5.3(b)).

Nach Einzeichnen des Punkts  $Z_v$  in das Smith Diagramm erkennt man auch, dass nur eine Anpass-Schaltungen mit L-Netzwerk 1 möglich ist. Für diesen Fall gibt es jedoch immer noch zwei mögliche Varianten. Variante 1 besteht aus einem parallel geschalteten Kondensator und einer seriellen Spule; Variante 2 dagegen aus einer parallelen Spule und einem seriellen Kondensator. Die Transformationswege beider Varianten sind in Bild 5.4 dargestellt. Mittels beiden Transformationswegen kann man Anpassung erzeugen.

Im letzten Schritt werden nun noch die Bauteilwerte bestimmt (hier beispielhaft für Variante 1). Um den Wert des parallelen Kondensators zu bestimmen, kann man direkt die Hilfslinien des hier dargestellten Smith-Diagramms in Leitwertform benutzen. Der Wert von  $B$  lässt sich auf diese Weise bestimmen zu  $B * Z_0 = 0,5 - 0,2 = 0,3$ . Nach Bestimmung von  $B = 0,3/100 \Omega = 3 \text{ mS}$  lässt sich dann durch  $C = B/\omega = 3 \text{ mS}/(2 * \pi * 0,5 \text{ GHz}) = 0,95 \text{ pF}$  der Bauteilwert des Kondensators berechnen.

Da wir uns in einem Diagramm in Leitwertform befinden, kann der Wert des seriellen Elements nicht direkt abgelesen werden. Man kann nun einerseits  $X$  nach Kehrwertbildung der Admittanzen berechnen, oder wieder den Hilfs-Trick benutzen. Durch Punkt-Spiegelung des unteren Punkts im Mittelpunkt des Smith-Diagramms erhält man wieder direkt seinen Kehrwert, den man im Smith Diagramm ablesen kann als  $(Z_0 + X)/Z_0 = 1 + j1,3$ . Durch  $L = X/\omega = 130 \Omega/(2 * \pi * 0,5 \text{ GHz}) = 41 \text{ nH}$  lässt sich dann der Bauteilwert der Spule berechnen.

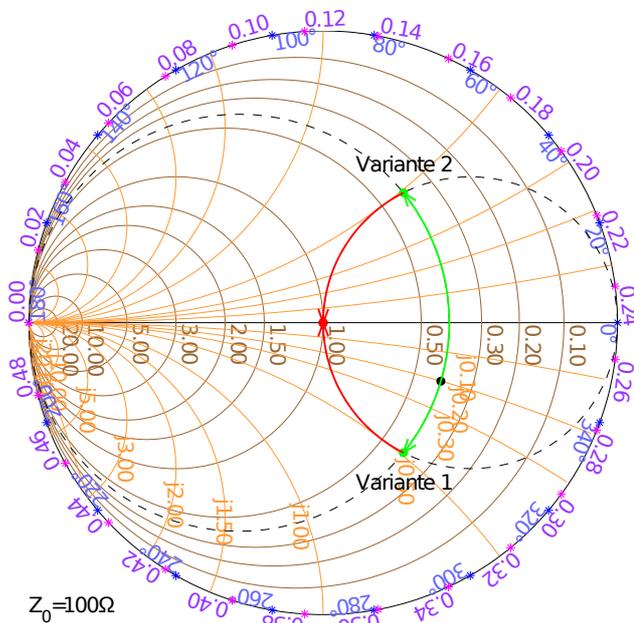
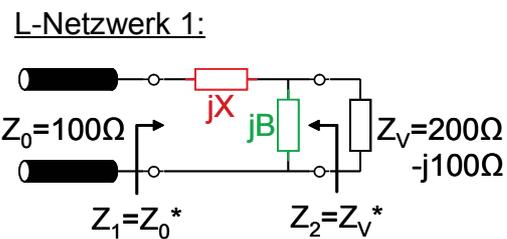
Analog lassen sich die Bauteilwerte  $C_{ser} = 2,61 \text{ pF}$  und  $L_{par} = 46 \text{ nH}$  für Variante 2 be-



(a) Blockschaltbild der Beispielaufgabe 1

(b)  $Z_v$  im Smith Chart in Leitwertform

Bild 5.3.: Beispielaufgabe 1, Schritt 1



(a) L-Netzwerk 1 für Beispiel 1 - Variante 1

(b) Mögliche Varianten für L-Netzwerk 1

Bild 5.4.: Beispielaufgabe 1, Schritt 2

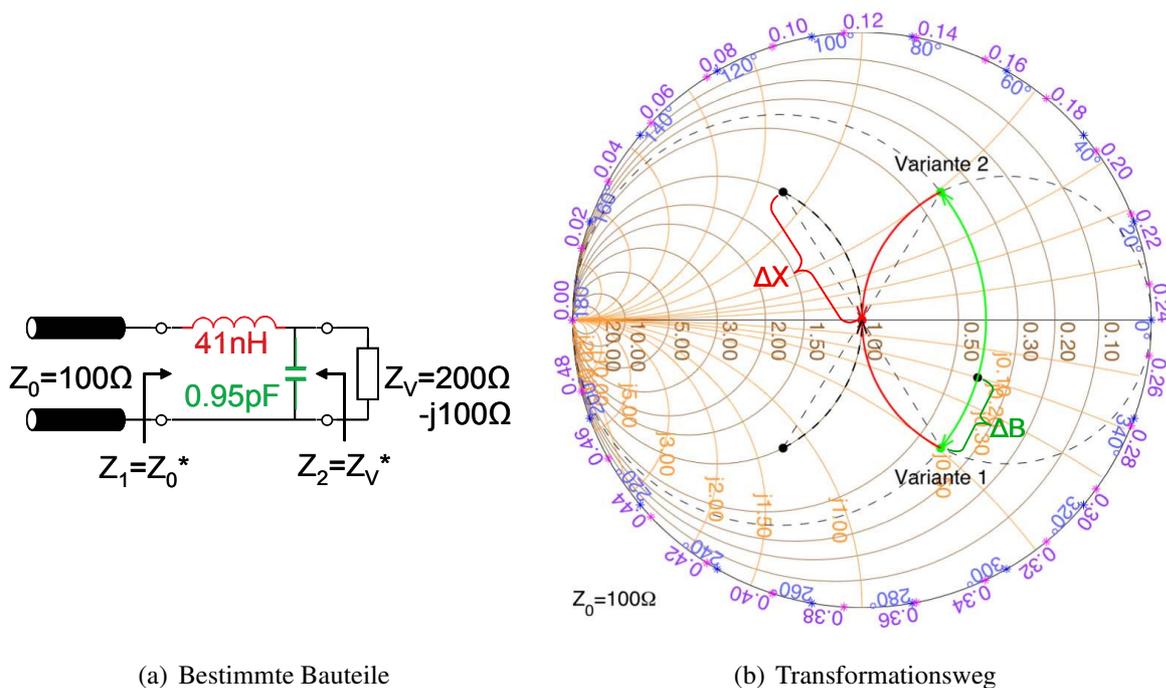


Bild 5.5.: Beispielaufgabe 1, Schritt 3

stimmen. Für die Frequenz, für die die Anpass-Schaltungen bestimmt wurden, liefern beide Varianten exakt die selbe Lösung. In der Regel müssen Hochfrequenz-Schaltungen jedoch eine gewisse Bandbreite abdecken, die sich nach der Anwendung richtet. Für diesen Fall ist es interessant die Anpassung beider Varianten über der Frequenz zu betrachten. Dies ist in Bild 5.6 dargestellt. Man erkennt, dass in beiden Fällen für 0,5 GHz optimale Anpassung erzielt wurde. Um eine noch ausreichend gute Anpassung zu beurteilen wird in der Praxis häufig die -10 dB Bandbreite betrachtet. Diese ist im Fall von Variante 1 größer (auf Grund des kürzeren Transformationswegs). Außerdem kann man erkennen, dass Variante 1 ein Tiefpass-Verhalten zeigt, und Variante 2 ein Hochpass-Verhalten.

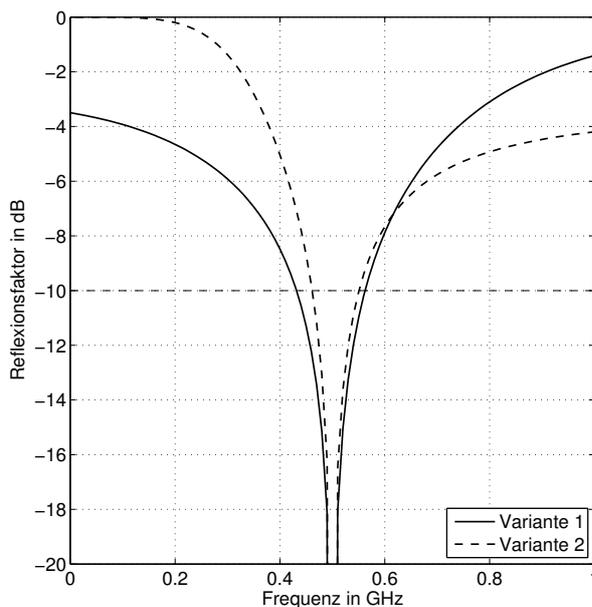


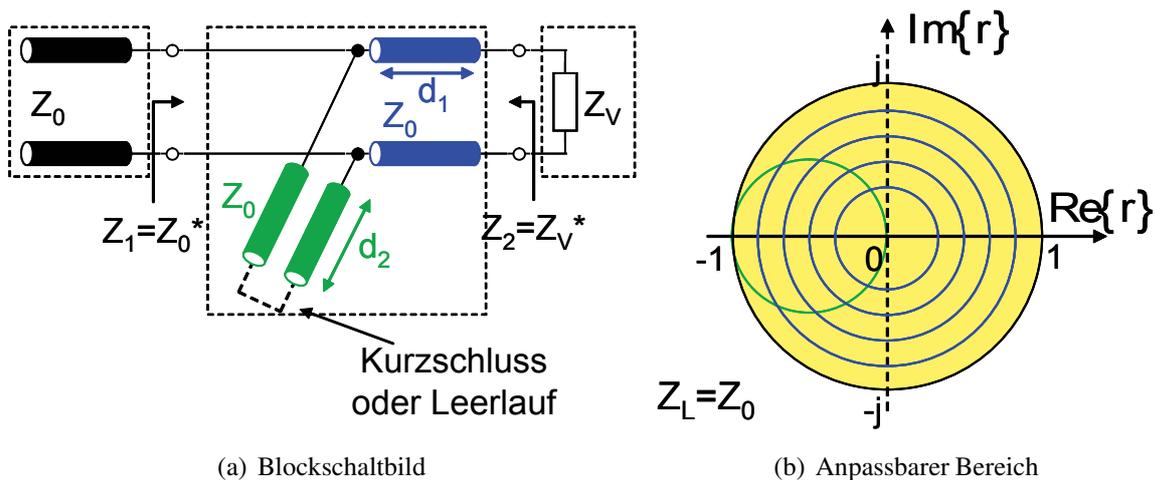
Bild 5.6.: Reflexionsfaktor über der Frequenz zum Vergleich beider Varianten

## 5.2. Anpassung mit einer Stichleitung

Vor allem mit steigender Frequenz wird es immer schwerer, diskrete Elemente zu realisieren. Diese haben dann selbst sehr starke parasitäre Effekte und erzielen nicht mehr den gewünschten Effekt bzw. erschweren die Entwicklung einer Anpassschaltung. Für sehr hohe Frequenzen können je nach Aufbauweise sogar gar keine diskreten Elemente mehr realisiert werden. In diesem Fall nutzt man sehr häufig Leitungen, um Anpassung zu erzielen. Diese Art von Anpassschaltungen lassen sich dann sehr leicht realisieren.

Eine Möglichkeit besteht aus einer Anpassschaltung mit einer Leitungstransformation, sowie einer zusätzlich parallel oder seriell geschalteten Stichleitung. Diese Stichleitung ist an ihrem Ende entweder mit einem Leerlauf oder mit einem Kurzschluss abgeschlossen, und kann dann, je nach Länge, an ihren Klemmen in der Anpassschaltung ein beliebiges Blindelement erzeugen. Bild 5.7 zeigt eine solche Anpassschaltung mit einer parallel geschalteten Stichleitung. Je nach Länge  $d_1$  und  $d_2$  kann für den kompletten Bereich innerhalb des Smith Diagramms Anpassung an  $Z_0$  erzielt werden. Von allen gelb markierten Punkten kann man sich zuerst mittels eines blau eingezeichneten m-Kreises auf den grünen  $G$ -konst. Kreis bewegen. Die parallele Stichleitung erzeugt dann die Transformation auf eben diesem  $G$ -konst. Kreis bis in den Anpasspunkt.

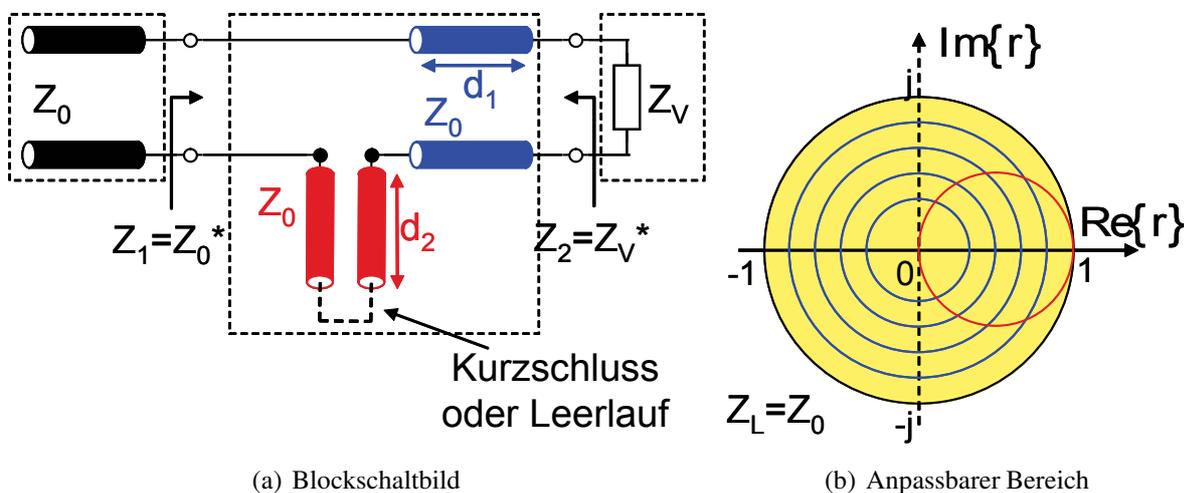
Die zweite Möglichkeit besteht darin, die Stichleitung in Serie zu schalten (Bild 5.8). Auch in diesem Fall kann man für alle Punkte Anpassung an  $Z_0$  erzielen. Mittels des m-Kreises bewegt man sich zuerst bis auf den rot eingezeichneten  $R$ -konst. Kreis. Die serielle Stichleitung führt



(a) Blockschaltbild

(b) Anpassbarer Bereich

Bild 5.7.: Parallelstichleitung



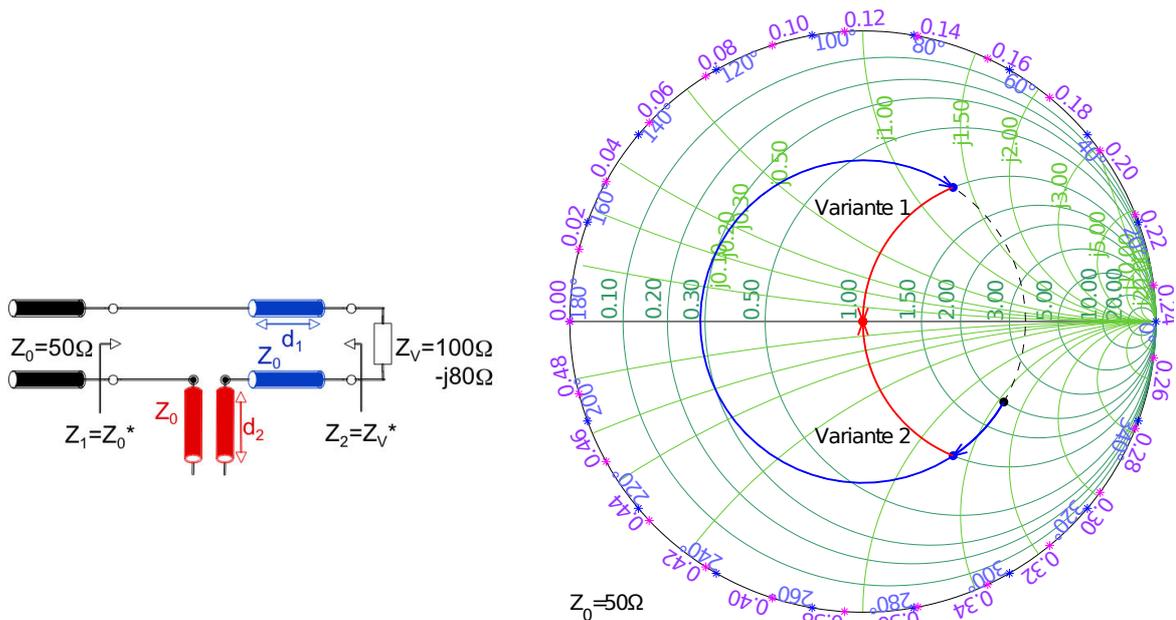
(a) Blockschaltbild

(b) Anpassbarer Bereich

Bild 5.8.: Serienstichleitung

dann zur Transformation auf dem  $R$ -const. Kreis bis in den Anpasspunkt. Bei den in der Mikrowellenschaltungstechnik üblichen Microstrip-Leitungen ist eine Serienstichleitung auf Grund der gemeinsamen Masse jedoch kaum zu realisieren und daher in der Praxis unüblich.

Beispielhaft soll nun das in Bild 5.9(a) dargestellte Problem gelöst werden. Der Verbraucher  $Z_v = (100 - j80) \Omega$  soll mittels der beschriebenen Anpassschaltung für eine Frequenz von 2 GHz an  $Z_0 = 50 \Omega$  angepasst werden. Auch in diesem Fall zeichnet man zuerst den Start- und den Endpunkt in das Smith Diagramm ein. Da eine serielle Stichleitung gegeben ist, wählt man die Widerstandsform und da eine Leitungstransformation mit  $Z_L = Z_0 = 50 \Omega$  vorkommt, wählt man den Bezugswiderstand zu  $50 \Omega$ . In Bild 5.9(b) sind direkt zwei mögliche Transformationswege eingezeichnet, die mittels der gewünschten Schaltung Anpassung erzielen. Variante 2 zeigt den kurzen Weg; zuerst mittels des blauen m-Kreises bis zum ersten Schnittpunkt mit



(a) Blockschaltbild der Beispielaufgabe 2

(b) Mögliche Varianten

Bild 5.9.: Beispielaufgabe 2, Schritt 1

dem  $R = 1$ -konst-Kreis (der  $R$ -konst. Kreis, für den  $R = 1$  gilt). Auf diesem Kreis bewegt man sich dann nach oben bis zum Anpasspunkt. Variante 1 wählt den längeren Weg; auf dem Kreis bis zum oberen Schnittpunkt mit dem  $R = 1$ -konst-Kreis. Auf diesem Kreis bewegt man sich dann nach unten bis zum Anpasspunkt. Im Fall von Variante 1 muss die Stichleitung also an ihren Klemmen eine Kapazität erzeugen; dagegen im Fall von Variante 2 eine Induktivität.

Nach Bestimmung der möglichen Transformationswege, sollen nun beispielhaft für Variante 1 die Leitungslängen bestimmt werden. Um  $d_1$  zu bestimmen zeichnet man Geraden vom Mittelpunkt des Smith Diagramms durch den Start und Endpunkt der Leitungstransformation bis auf die äussere Skala. Mittels der  $l/\lambda$  Skala kann man dort  $d_1/\lambda = (0,165 + 0,5) - 0,285 = 0,38$  ablesen. Um  $d_2$  zu bestimmen, muss erst das durch diese Stichleitung erzeugte Blindelement bestimmt werden. Dessen Wert kann man an den Hilfslinien ablesen zu  $X_2/Z_0 = -1,4$ . Nun muss die Länge von  $d_2$  bestimmt werden, die durch eine Leitungstransformation aus dem Leerlauf den Blindwiderstand  $X_2/Z_0 = -1,4$  erzeugt. Eine grafische Lösung ist es, die Impedanz  $(R+X)/Z_0 = 0 - j1,4$  in das Smith Diagramm einzuzeichnen, und auf der äusseren Skala wiederum die Länge bis zum Leerlaufpunkt abzulesen (siehe Bild 5.10(b)). Somit kann  $d_2/\lambda = 0,1$  bestimmt werden. (Für Variante 2 kann man die Längen analog zu  $d_1/\lambda = 0,04$  und  $d_2/\lambda = 0,4$  bestimmen.)

In Bild 5.11 ist wiederum die Anpassung beider Varianten über der Frequenz dargestellt. In diesem Fall ist nicht eindeutig zu erkennen, welche Variante die breitbandigere Anpassung erzielt

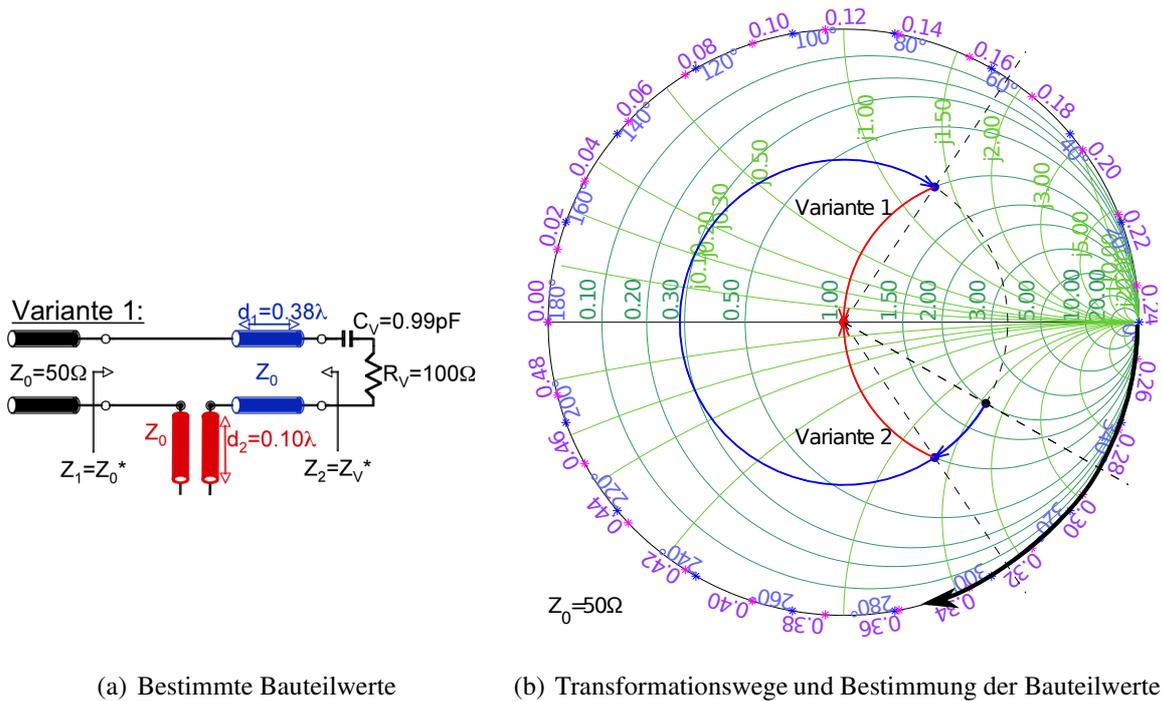


Bild 5.10.: Beispielaufgabe 2, Schritt 2

(obwohl Variante 2 im Smith Diagramm den deutlich kürzeren Weg durchläuft). Der Grund ist in diesem Fall die physikalische Länge der Leitung 2 für die beiden Varianten. Diese ist im Smith Diagramm nicht direkt ersichtlich. Im Fall von Variante 2 ist sie jedoch deutlich länger. Die breitbandigste Transformation erhält man somit im Fall von Stichleitungen nicht zwingend mit dem kürzesten Transformationsweg im Smith Diagramm. Falls nur diskrete Elemente verwendet werden, ist dies jedoch immer der Fall.

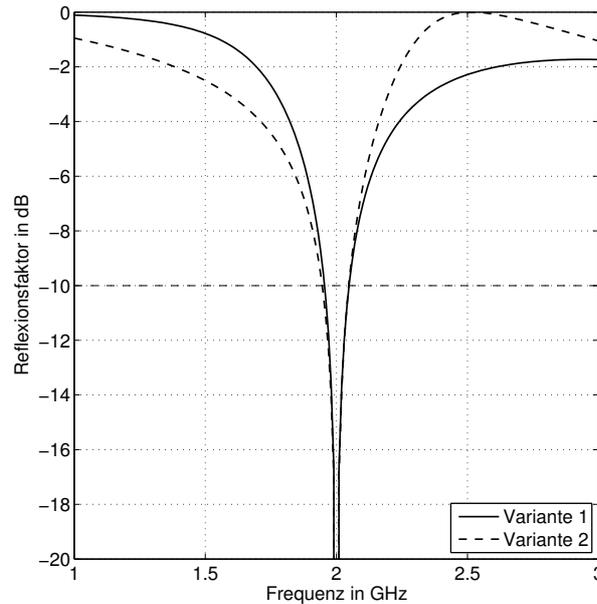


Bild 5.11.: Reflexionsfaktor über der Frequenz zum Vergleich beider Varianten

### 5.3. Anpassung mit zwei Stichleitungen

Eine weitere, sehr gebräuchliche Anpassschaltung ist in Bild 5.12 dargestellt. Sie behebt einen Nachteil der Anpassschaltungen nach Bild 5.7 und Bild 5.8, bei denen eine variable Leitungslänge  $d_1$  zwischen Verbraucher und Stichleitung benötigt wird. Dies ist in manchen Fällen unerwünscht. Die Schaltung mit 2 Stichleitungen kann dagegen für eine fest vorgegebene Leitungslänge  $d_2$  für fast alle Punkte Anpassung erzielen. Der exakt anpassbare Bereich hängt dabei von der Länge  $d_2$  ab. Für  $d_2 = \lambda/8$  erhält man den in 5.12(b) gelb markierten Bereich. Von allen diesen Punkten kann man mittels eines  $G$ -const Kreises auf dem grün gestrichelten Kreis landen. Dieser ergibt nach Drehung um  $90^\circ$  durch die Leitungstransformation den  $G = 1$ -konst Kreis. Die zusätzliche Stichleitung transformiert letztendlich auf diesem  $G = 1$ -konst Kreis in den Anpasspunkt.

Als Beispiel dieser Anpass-Schaltung soll der Verbraucher  $Z_V = (30 + j10) \Omega$  an  $Z_0 = 50 \Omega$  angepasst werden (Bild 5.13(a)). Im ersten Schritt zeichnet man  $Y_V = 1/Z_V$  in ein auf  $50 \Omega$  normiertes Smith-Diagramm in Leitwertform ein (Bild 5.13(b)). Um die möglichen Transformationswege zu bestimmen, zeichnet man außerdem denjenigen  $G$ -const. Kreis ein, der durch  $Y_V$  geht, sowie den um  $90^\circ$  gedrehten  $G = 1$ -konst-Kreis. Dieser beschreibt alle Punkte, die sich durch Leitung 2 und Leitung 3 auf  $Z_0 = 50 \Omega$  transformieren lassen. Die beiden Schnittpunkte dieser Kreise legen letztendlich die möglichen Transformationswege fest.

Diese sind in Bild 5.14(a) eingezeichnet. Variante 2 beschreibt den kürzeren Weg und Variante 1 den längeren der beiden möglichen Transformationswege. Zur Bestimmung der Leitungslängen

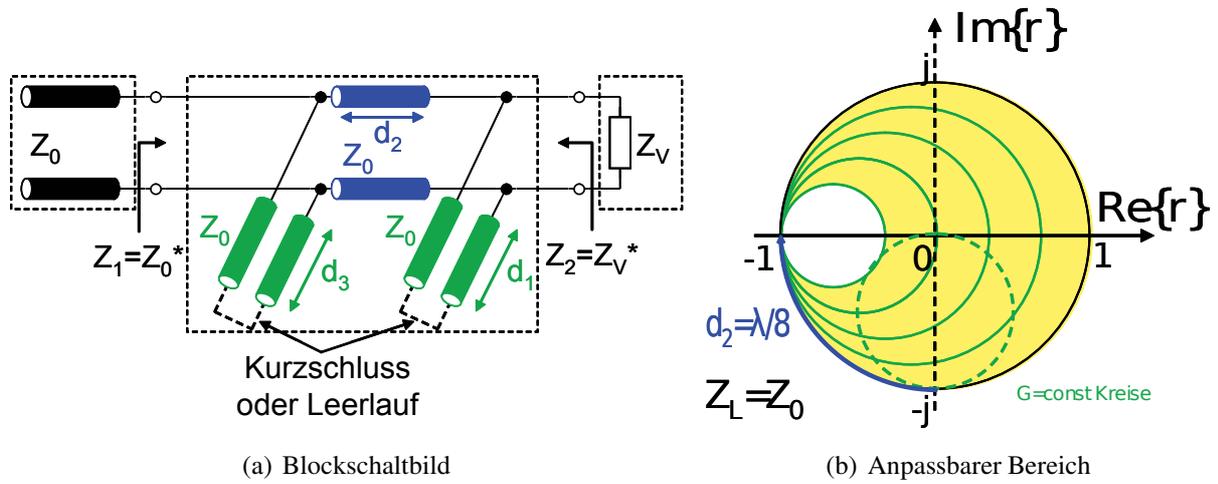


Bild 5.12.: 2 Parallelsticheleitungen

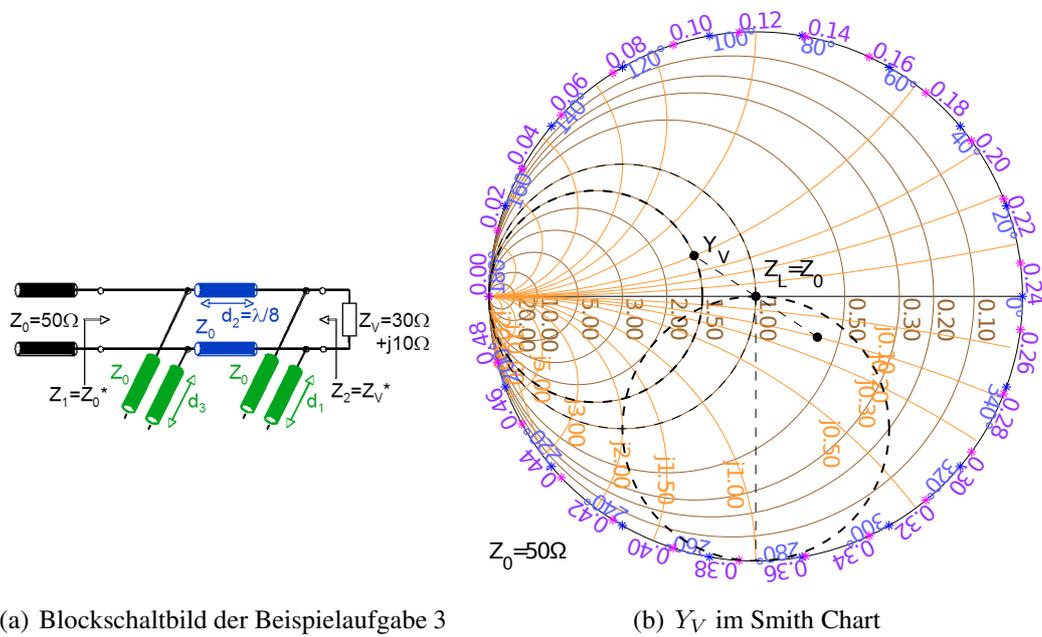


Bild 5.13.: Beispielaufgabe 3, Schritt 1

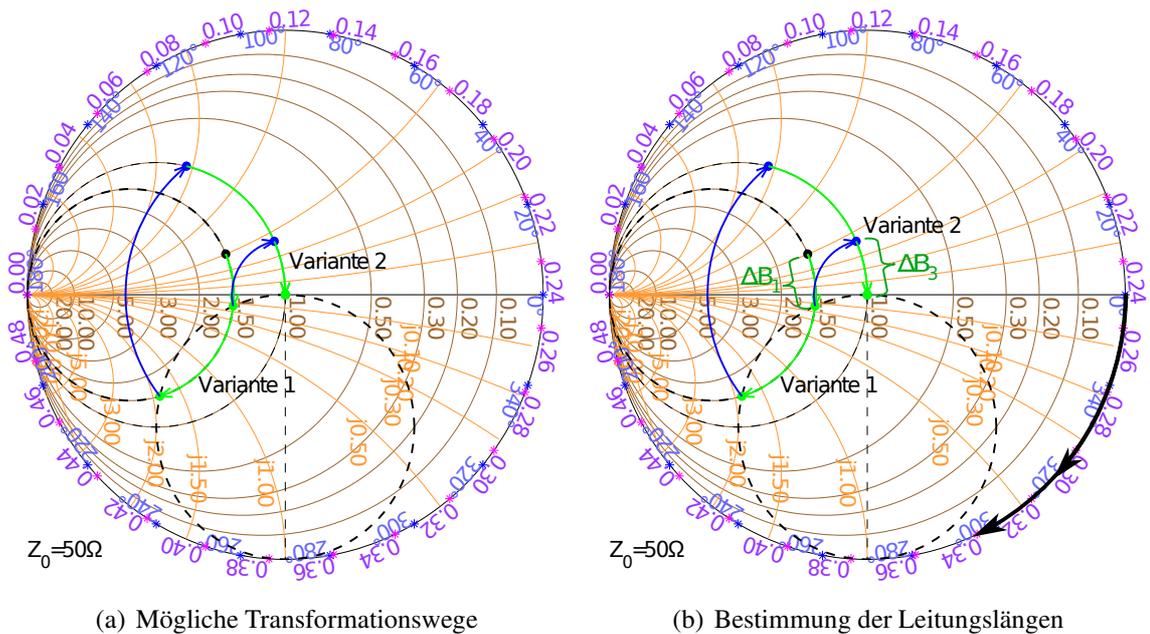


Bild 5.14.: Beispielaufgabe 3, Schritt 2 und 3

von Variante 2 liest man zuerst an den Hilfslinien die Werte  $\Delta B_1 = 0,65/Z_0$  und  $\Delta B_3 = 0,4/Z_0$  ab. Da diese beiden Leitungen am Ende mit einem Leerlauf abgeschlossen sein sollen, kann man ihre Längen wiederum auf der äusseren Skala des Smith Charts ablesen; als diejenige Länge, die vom Leerlaufpunkt zu den Punkten  $Y_1 * Z_0 = 0 + j0,65$  und  $Y_3 * Z_0 = 0 + j0,4$  transformiert. Dies ist im Fall von Leitung 1  $d_1 = 0,09\lambda$  und  $d_3 = 0,06\lambda$  im Fall von Leitung 3.

In Bild 5.15 ist wiederum die Anpassung beider Varianten über der Frequenz dargestellt. Variante 2 erzielt auf Grund des kürzeren Transformationswegs dabei eine deutlich breitbandigere Anpassung. Die -10 dB Bandbreite ist in diesem Fall über 1 GHz im Gegensatz zu lediglich ca. 0,2 GHz für Variante 1.

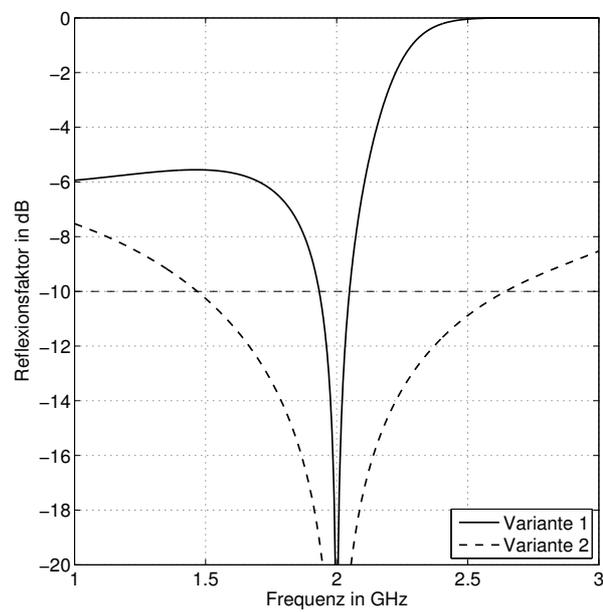


Bild 5.15.: Reflexionsfaktor über der Frequenz zum Vergleich beider Varianten



# 6. Mikrowellen-Netzwerkanalyse

## 6.1. Impedanz- und Admittanz-Matrizen

Betrachtet sei eine Schaltung mit  $N$  Toren (Anschlüssen), aus denen elektromagnetische Wellen ein- und auslaufen. Charakterisiert wird dieses  $N$ -Tor durch die Klemmenspannungen  $U_i$  und die Klemmenströme  $I_i$ .<sup>1</sup> In Bild 6.1 ist ein solches  $N$ -Tor schematisch dargestellt.

Besteht die Schaltung ausschließlich aus linearen Bauelementen, so spricht man von einem *linearen Netzwerk*. Setzt man weiterhin voraus, dass innerhalb der Schaltung keine Quellen existieren, so besteht ein linearer Zusammenhang zwischen den Klemmenspannungen und

---

<sup>1</sup>Es handelt sich dabei um die Gesamtspannung bzw. den Gesamtstrom, resultierend aus der Überlagerung von hin- und rücklaufender Welle.

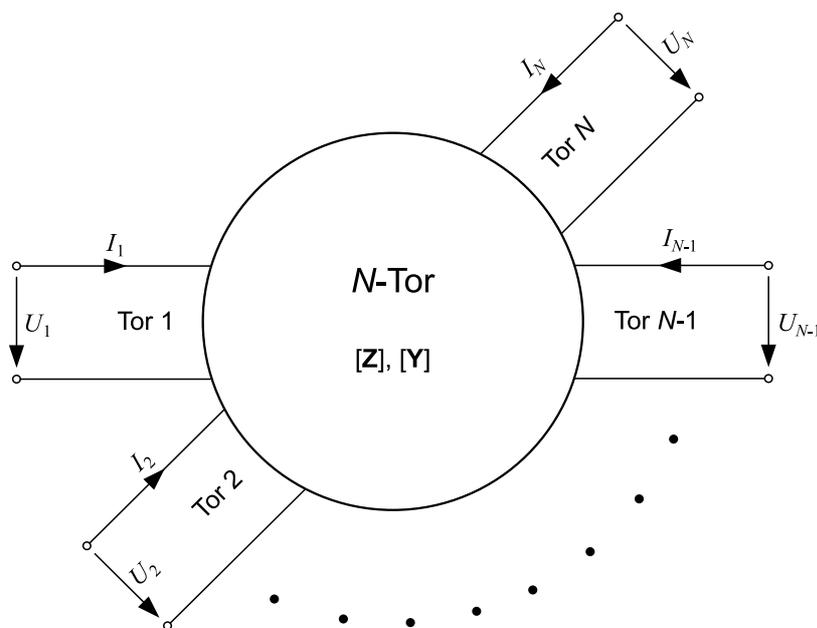


Bild 6.1.: Schematische Darstellung eines  $N$ -Tores mit Klemmenspannungen und -strömen.

-strömen an den einzelnen Toren:

$$U_i = \sum_{k=1}^N Z_{ik} I_k \quad \text{für } i = 1, \dots, N \quad (6.1)$$

$$I_i = \sum_{k=1}^N Y_{ik} U_k \quad \text{für } i = 1, \dots, N \quad (6.2)$$

Die Koeffizienten  $Z_{ik}$  und  $Y_{ik}$  werden dabei als Impedanz- bzw. Admittanzparameter, oder kürzer als  $Z$ - bzw.  $Y$ -Parameter bezeichnet. Besteht die Schaltung aus konzentrierten Elementen, so lassen sich die  $Z$ - bzw.  $Y$ -Parameter direkt aus der Schaltung mittels Maschen- und Knotenregel bestimmen.

Zur Bestimmung des Impedanzparameters  $Z_{ik}$  werden sämtliche Ströme mit Ausnahme von  $I_k$  zu Null gesetzt, d.h. die entsprechenden Tore werden offen gelassen (Leerlauf). Unter dieser Voraussetzung kann  $Z_{ik}$  berechnet werden zu

$$Z_{ik} = \left. \frac{U_i}{I_k} \right|_{I_j=0 \text{ für } j \neq k, I_k \neq 0} \quad (6.3)$$

Analog bestimmen sich die Admittanzparameter  $Y_{ik}$ , indem die Spannungen sämtlicher Tore mit Ausnahme des  $k$ -ten Tores zu Null gesetzt, d.h. kurzgeschlossen werden:

$$Y_{ik} = \left. \frac{I_i}{U_k} \right|_{U_j=0 \text{ für } j \neq k, U_k \neq 0} \quad (6.4)$$

Die Gleichungssysteme (6.1) und (6.2) lassen sich kürzer und übersichtlicher in Matrixform schreiben. Aus (6.1) wird dann

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \cdots & Z_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

oder

$$[\mathbf{U}] = [\mathbf{Z}] [\mathbf{I}] \quad (6.6)$$

Entsprechend schreibt sich (6.2) in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \cdots & Y_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

oder

$$[\mathbf{I}] = [\mathbf{Y}] [\mathbf{U}] \quad . \quad (6.8)$$

Nicht immer läßt sich ein Netzwerk in beiden Darstellungen beschreiben. Ist jedoch die Matrix  $[\mathbf{Z}]$  oder  $[\mathbf{Y}]$  invertierbar, d.h. sie besitzt eine nicht verschwindende Determinante, so ist auch die jeweils andere Matrix ( $[\mathbf{Y}]$  bzw.  $[\mathbf{Z}]$ ) invertierbar und es gilt

$$[\mathbf{Y}] = [\mathbf{Z}]^{-1} \quad \text{und} \quad [\mathbf{Z}] = [\mathbf{Y}]^{-1} \quad . \quad (6.9)$$

## 6.2. Streuvariable

In vielen Fällen ist eine Definition von Strom und Spannung nicht eindeutig möglich (z.B. bei Hohlleitern), da die Integrale

$$\int \vec{E} \, d\vec{s} \quad \text{und} \quad \oint \vec{H} \, d\vec{s} \quad (6.10)$$

nicht wegunabhängig sind wie bei TEM-Leitungen. Messbar hingegen ist die von der Quelle zum Verbraucher transportierte bzw. die am Verbraucher reflektierte Wirkleistung, die durch eine definierte Querschnittsfläche der Leitung fließt (Leistungswellen). Um den Zusammenhang mit den bisher betrachteten Spannungs- und Stromgrößen herzustellen, werden im Folgenden zunächst ausschließlich TEM-Leitungen betrachtet. Die für Leistungswellen gelten Beziehungen sind jedoch auch bei anderen Leitungstypen anwendbar, lediglich die Umrechnung auf Spannungs- bzw. Stromgrößen entfällt, wenn diese nicht definiert sind.

### 6.2.1. Leistungswellen

Für die gesamte zum Verbraucher transportierte komplexe Scheinleistung auf einer TEM-Leitung gilt

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{1}{2} U(z) I^*(z) = \frac{1}{2} [U_H(z) + U_R(z)] [I_H^*(z) - I_R^*(z)] \\ &= \frac{1}{2} [U_H(z) I_H^*(z) - U_R(z) I_R^*(z) + U_R(z) I_H^*(z) - U_H(z) I_R^*(z)] \quad . \end{aligned} \quad (6.11)$$

Mit (2.19) folgt daraus

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{1}{2} \left[ U_H(z) I_H^*(z) - U_R(z) I_R^*(z) + U_R(z) \frac{U_H^*(z)}{Z_L^*} - U_H(z) \frac{U_R^*(z)}{Z_L^*} \right] \\ &= \frac{1}{2} [U_H(z) I_H^*(z) - U_R(z) I_R^*(z)] + \frac{1}{2Z_L^*} [U_R(z) U_H^*(z) - (U_R(z) U_H^*(z))^*] \\ &= S_H(z) - S_R(z) + \frac{j}{Z_L^*} \operatorname{Im} \{ U_R(z) U_H^*(z) \} \quad , \end{aligned} \quad (6.12)$$

wobei

$$S_H(z) := \frac{1}{2} U_H(z) I_H^*(z) \quad \text{und} \quad S_R(z) := \frac{1}{2} U_R(z) I_R^*(z) \quad (6.13)$$

die zum Verbraucher hinlaufende bzw. zur Quelle zurücklaufende komplexen Scheinleistungen bedeuten. Für eine verlustfreie (oder näherungsweise für eine höchstens schwach verlustbehaftete Leitung) ist der Leitungswellenwiderstand  $Z_L$  reell und damit gilt für die transportierte Wirkleistung

$$P_W(z) = \operatorname{Re} S(z) = \operatorname{Re} S_H(z) - \operatorname{Re} S_R(z) = P_{W,H}(z) - P_{W,R}(z) \quad . \quad (6.14)$$

Die gesamte zum Verbraucher transportierte Wirkleistung ergibt sich somit als Differenz der von der hinlaufenden Welle transportierten Wirkleistung  $P_{W,H}$  abzüglich der in die Quelle zurücklaufenden Wirkleistung  $P_{W,R}$ . Diese beiden Teilleistungen sind den hin- und rücklaufenden Teilwellen eindeutig zuzuordnen, wobei gemäß (6.12) bis (6.14) gilt:

$$P_{W,H} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ U_H(z) I_H^*(z) \} = \frac{|U_H(z)|^2}{2Z_L} = \frac{|I_H(z)|^2}{2} Z_L \quad (6.15)$$

$$\text{und} \quad P_{W,R} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ U_R(z) I_R^*(z) \} = \frac{|U_R(z)|^2}{2Z_L} = \frac{|I_R(z)|^2}{2} Z_L \quad (6.16)$$

Die Wirkleistungen sind damit den Quadraten der Beträge (Amplituden) der hin- und rücklaufenden Spannungs- bzw. Stromwellen proportional. Definiert man nun gemäß DIN 4899 die sogenannten *Streuvariablen*<sup>2</sup>

$$a(z) := \frac{U_H(z)}{\sqrt{Z_L}} = I_H(z) \sqrt{Z_L} \quad (6.17)$$

$$\text{und } b(z) := \frac{U_R(z)}{\sqrt{Z_L}} = I_R(z) \sqrt{Z_L} \quad , \quad (6.18)$$

so gilt mit Blick auf (6.15) und (6.16)

$$P_{W,H}(z) = \frac{1}{2} |a(z)|^2 \quad \text{und} \quad P_{W,R}(z) = \frac{1}{2} |b(z)|^2 \quad , \quad (6.19)$$

und somit

$$|a(z)| = \sqrt{2P_{W,H}(z)} \quad \text{und} \quad |b(z)| = \sqrt{2P_{W,R}(z)} \quad . \quad (6.20)$$

Die Beträge der Streuvariablen  $a(z)$  und  $b(z)$  sind dadurch direkt mit den transportierten Wirkleistungen der hin- und rücklaufenden Teilwellen verknüpft. Die Beziehung (6.20) kann auch als Definition für die Streuvariablen angesehen werden, die es erlaubt  $a(z)$  und  $b(z)$  aus den (stets eindeutig definierten) Wirkleistungen zu bestimmen, selbst wenn keine Spannungen und Ströme definiert werden können. Mit (6.20) ist aber nur der Betrag der Streuvariablen gegeben. Für die Phase gilt mit (6.17) bzw. (6.18)

$$\arg a(z) = \arg U_H(z) = \arg I_H(z) \quad (6.21)$$

$$\text{bzw. } \arg b(z) = \arg U_R(z) = \arg I_R(z) \quad . \quad (6.22)$$

Sind Spannung und Strom nicht definiert, so kann die Phase auch direkt aus dem elektrischen oder magnetischen Feld gewonnen werden, da einer Phasenfront einer einzelnen elektromagnetischen Welle stets eine konstante Phase zugeordnet ist.

Für die resultierende zum Verbraucher transportierte Wirkleistung gilt mit (6.14) und (6.19)

$$P_W(z) = \frac{1}{2} (|a(z)|^2 - |b(z)|^2) \quad . \quad (6.23)$$

Der Reflexionsfaktor auf der Leitung gemäß (2.27) ergibt sich mit (6.17) und (6.18) zu

$$r(z) = \frac{U_R(z)}{U_H(z)} = \frac{I_R(z)}{I_H(z)} = \frac{b(z)}{a(z)} \quad . \quad (6.24)$$

---

<sup>2</sup>auch *Leistungswellen* oder *Wellengrößen* genannt

Die Streuvariablen  $a(z)$  und  $b(z)$  besitzen wegen (6.17) und (6.18) die gleiche Ortsabhängigkeit wie die Spannungs- bzw. Stromwellen (2.17) bzw. (2.18):

$$a(z) = a(0) e^{+\gamma z} \quad \text{und} \quad b(z) = b(0) e^{-\gamma z} \quad (6.25)$$

Für die resultierende Spannung und den resultierenden Strom, die sich auf der Leitung durch die Überlagerung von hin- und rücklaufender Welle ergeben, gilt mit (6.17) und (6.18)

$$U(z) = U_H(z) + U_R(z) = \sqrt{Z_L} [a(z) + b(z)] \quad (6.26)$$

$$I(z) = I_H(z) - I_R(z) = \frac{1}{\sqrt{Z_L}} [a(z) - b(z)] \quad (6.27)$$

Umgekehrt lassen sich die Streuvariablen  $a(z)$  und  $b(z)$  auch eindeutig aus Gesamtspannung  $U(z)$  und Gesamtstrom  $I(z)$  berechnen:

$$a(z) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{Z_L}} U(z) + \sqrt{Z_L} I(z) \right] \quad (6.28)$$

$$b(z) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{Z_L}} U(z) - \sqrt{Z_L} I(z) \right] \quad (6.29)$$

Durch die Zusammenhänge (6.26) bis (6.29) lassen sich alle Schaltungen, die sich mittels Spannung  $U$  und Strom  $I$  beschreiben lassen, alternativ auch durch die Streuvariablen  $a$  und  $b$  beschreiben. Umgekehrt braucht dies jedoch nicht der Fall zu sein, da Spannung und Strom nicht definiert sein müssen.

### 6.3. Streumatrix

Auf die gleiche Art und Weise, wie  $[\mathbf{Z}]$ - und  $[\mathbf{Y}]$ -Matrizen die komplexen Amplituden der Ströme und Spannungen eines Mehrtores verknüpfen, werden durch die Streumatrix die komplexen Amplituden eines Mehrtores verknüpft. Bezeichnet man, wie in Bild 6.2, die Tore mit  $1 \dots k \dots n$ , dann läuft am Tor  $k$  die Welle mit der Streuvariablen  $a_k$  ein, die Welle mit der Streuvariablen  $b_k$  aus. Aus den Netzwerkgleichungen lässt sich für die Streuvariablen, die gemäß Abschnitt 6.2 mit Strom und Spannung verknüpft sind, ein Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{aligned} b_1 &= s_{11} \cdot a_1 + s_{12} \cdot a_2 + \dots + s_{1N} \cdot a_N \\ b_2 &= s_{21} \cdot a_1 + s_{22} \cdot a_2 + \dots + s_{2N} \cdot a_N \\ &\vdots = \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \quad \ddots \quad + \quad \vdots \\ b_N &= s_{N1} \cdot a_1 + s_{N2} \cdot a_2 + \dots + s_{NN} \cdot a_N \end{aligned} \quad (6.30)$$

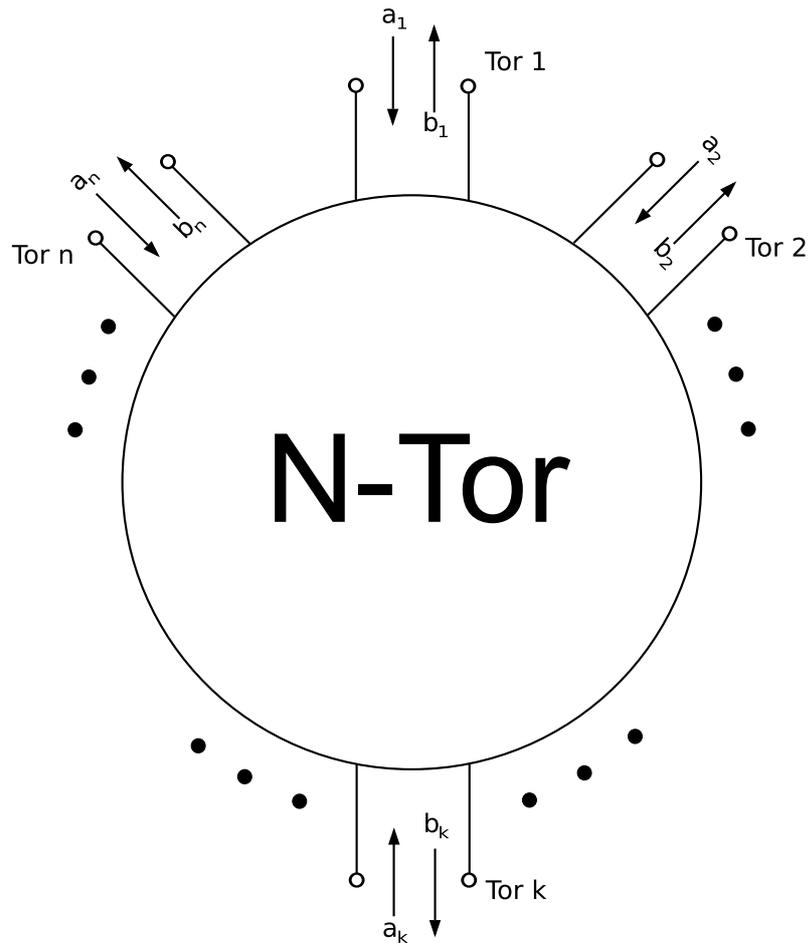


Bild 6.2.: Ein- und auslaufende Wellen an einem  $N$ -Tor (Zählrichtung im Uhrzeigersinn)

Die Streuvariable für die rücklaufende Welle des  $i$ -ten Tores einer Zeile aus Gleichung 6.30 ist

$$b_i = \sum_{k=1}^N s_{ik} \cdot a_k \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.31)$$

Die Koeffizienten  $s_{ik}$  sind im Allgemeinen komplexe Größen. Man kann sie in üblicher Weise zu einer Matrix  $[S]$ , die  $a_k$  und  $b_k$  zu Spaltenmatrizen oder Vektoren  $[\mathbf{a}]$  und  $[\mathbf{b}]$  zusammenfassen:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1N} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N1} & s_{N2} & \dots & s_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

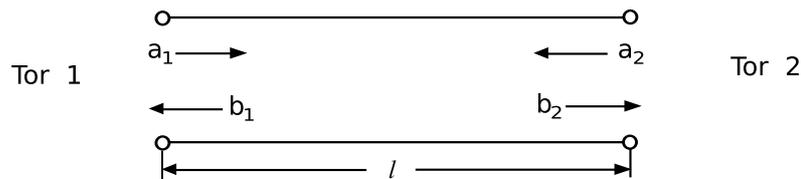


Bild 6.3.: Leitung mit Streuvariablen

Abkürzend schreibt man:

$$[\mathbf{b}] = [\mathbf{S}] \cdot [\mathbf{a}] \quad (6.33)$$

Die Matrix  $[\mathbf{S}]$  ist quadratisch und heißt *Streumatrix*, ihre Elemente werden *Streuparameter* genannt. Der Wellenwiderstand als Bezug für die Tore kann verschieden sein und muss dann angegeben werden. Ist kein Bezugswiderstand angegeben, so kann man von einem Wellenwiderstand an allen Toren von  $50 \Omega$  ausgehen. Als Beispiel wird die Streumatrix einer Leitung der Länge  $l$  nach Bild 6.3 bestimmt. Für dieses Beispiel lautet das Gleichungssystem gemäß (6.30)

$$\begin{aligned} b_1 &= s_{11} \cdot a_1 + s_{12} \cdot a_2 \\ b_2 &= s_{21} \cdot a_1 + s_{22} \cdot a_2 \end{aligned} \quad (6.34)$$

Aus dem Gleichungssystem folgt unmittelbar

$$s_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} \quad (6.35)$$

Zur Bestimmung von  $s_{11}$  wird ein Generator an Tor 1 an-, das Tor 2 reflexionsfrei abgeschlossen. Im Fall der TEM-Leitung wird mit dem Wellenwiderstand  $Z_L$  abgeschlossen.  $s_{11}$  ist nach (6.35) identisch mit dem Reflexionsfaktor am Tor 1

$$s_{11} = r_1 \quad (6.36)$$

Ist die Leitung ideal, so tritt bei reflexionsfreiem Abschluss der Leitung keine rücklaufende Welle auf, d.h.  $b_1 = 0$  und somit  $s_{11} = 0$ . Aus (6.34) folgt weiter:

$$s_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0} \quad (6.37)$$

Zur Bestimmung von  $s_{12}$  schließt man den Generator an Tor 2 an und schließt Tor 1 reflexionsfrei mit einem Messgerät ab. Bei idealer Leitung erfährt die einlaufende Welle bis zum Ausgang

eine Phasendrehung um den Winkel  $\varphi = -2\pi l/\lambda$ . Damit wird

$$s_{12} = e^{j\varphi} \quad (6.38)$$

Auf die gleiche Weise folgen die Streuparameter  $s_{21}$  und  $s_{22}$ . Für die ideale Leitung lautet die Streumatrix

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} 0 & e^{j\varphi} \\ e^{j\varphi} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

## 6.4. Spezielle Eigenschaften von Netzwerken

### Eigenreflexionsfreiheit

Tritt an einem Tor  $k$  mit angeschlossenem Generator keine rücklaufende Welle auf und sind alle anderen Tore reflexionsfrei abgeschlossen, dann gilt für das zugehörige Element der Hauptdiagonalen der Streumatrix

$$s_{kk} = 0 \quad (6.40)$$

Das Tor  $k$  des Netzwerkes ist eigenreflexionsfrei. Eine andere gebräuchliche Bezeichnung dafür ist *angepasst*.

### Umkehrbarkeit

Bei einem Mehrtor, das dem Umkehrsatz genügt, gilt

$$s_{kl} = s_{lk} \quad (6.41)$$

für alle  $k$  und  $l$ , abgesehen von  $k = l$  (z.B.  $s_{21} = s_{12}$ ). Das Mehrtor muss durch die Maxwell'schen Gleichungen beschreibbar sein. Ist die Bedingung zusätzlich für  $k = l$  erfüllt (z.B.  $s_{11} = s_{22}$ ), so ist das Mehrtor symmetrisch umkehrbar. Wenn der Umkehrsatz für die Matrix gilt, können die Tore beliebig vertauscht werden.

### Passivität

Die Wirkleistungsbilanz lässt sich berechnen zu

$$P_W = \sum_k P_{W,k} = \frac{1}{2} \sum_k (|a_k|^2 - |b_k|^2) \quad (6.42)$$

Die  $|a_k|^2$  erhält man aus

$$|a_k|^2 = a_k \cdot a_k^* \quad (6.43)$$

und in Matrixschreibweise durch

$$[\mathbf{a}]^+ [\mathbf{a}] = [a_1^* \cdots a_N^*] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N |a_k|^2 \quad (6.44)$$

Dabei ist  $[\mathbf{a}]^+$  die zu  $[\mathbf{a}]$  adjungierte bzw. hermitesch konjugierte Matrix. Die zu einer beliebigen Matrix  $[\mathbf{A}]$  adjungierte Matrix  $[\mathbf{A}]^+$  ist definiert durch

$$[\mathbf{A}]^+ = ([\mathbf{A}]^*)^T = ([\mathbf{A}]^T)^* \quad ,$$

wobei  $[\mathbf{A}_{ik}]^T = [\mathbf{A}_{ki}]$  die transponierte Matrix (Vertauschung von Zeilen und Spalten) und  $[\mathbf{A}]^*$  die zu  $[\mathbf{A}]$  (elementweise) konjugiert komplexe Matrix ist.

Somit lässt sich die Wirkleistung auch schreiben als

$$P_W = \frac{1}{2} ([\mathbf{a}]^+ [\mathbf{a}] - [\mathbf{b}]^+ [\mathbf{b}]) \quad (6.45)$$

Da weiter nach den Matrizenregeln gilt

$$([\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{B}])^+ = [\mathbf{B}]^+ \cdot [\mathbf{A}]^+ \quad , \quad (6.46)$$

folgt aus

$$[\mathbf{b}] = [\mathbf{S}] \cdot [\mathbf{a}] \quad (6.47)$$

direkt

$$[\mathbf{b}]^+ = [\mathbf{a}]^+ \cdot [\mathbf{S}]^+ \quad (6.48)$$

Setzt man (6.44), (6.47) und (6.48) in (6.45) ein, so erhält man

$$P_W = \frac{1}{2} ([\mathbf{a}]^+ [\mathbf{a}] - [\mathbf{a}]^+ [\mathbf{S}]^+ [\mathbf{S}] [\mathbf{a}]) \quad (6.49)$$

$$= \frac{1}{2} [\mathbf{a}]^+ \{ [\mathbf{E}] - [\mathbf{S}]^+ [\mathbf{S}] \} [\mathbf{a}] \quad (6.50)$$

wobei  $\mathbf{E}$  die Einheitsmatrix bedeutet.

Ein  $N$ -Tor ist passiv, wenn die Summe der einlaufenden Wirkleistungen größer oder gleich den auslaufenden Wirkleistungen ist, das heißt, wenn die Leistungsbilanz, von außen nach innen gerechnet positiv oder maximal null ist. Dies muss für jeden Betriebszustand erfüllt sein.

$$P_W \geq 0 \quad (6.51)$$

Eine quadratische Form der Art

$$P_W = \frac{1}{2}[\mathbf{x}]^+[\mathbf{R}][\mathbf{x}] \quad (6.52)$$

ist dann für alle  $[\mathbf{x}]$  größer oder gleich Null, wenn alle Eigenwerte von  $[\mathbf{R}] \geq 0$  sind. Eine Matrix mit diesen Eigenschaften nennt man auch positiv semidefinit. Auf (6.50) angewandt bedeutet dies, dass der Ausdruck

$$[\mathbf{R}] = ([\mathbf{E}] - [\mathbf{S}]^+[\mathbf{S}]) \quad (6.53)$$

für passive Streumatrizen positiv semidefinit sein muss.

Ein Mehrtor ist verlustlos, falls die Wirkleistung gleich Null ist:

$$P_W = 0 \quad (6.54)$$

Dies bedeutet nach (6.50)

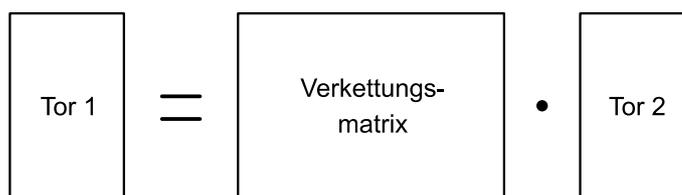
$$[\mathbf{S}] \cdot [\mathbf{S}]^+ = [\mathbf{E}] \quad (6.55)$$

$$\text{bzw. } [\mathbf{S}]^+ \cdot [\mathbf{S}] = [\mathbf{E}] \quad (6.56)$$

d.h. die Streumatrix ist unitär.

## 6.5. ABCD-Matrix und Transmissionsmatrix

Bei der Hintereinanderschaltung (Kettenschaltung) mehrerer Zweitore ist die Beschreibung der Zweitore mittels Verkettungsmatrizen vorteilhaft. Diese setzen die Größen an Tor 1 mit denen an Tor 2 in Verbindung, gemäß dem folgenden Schema:



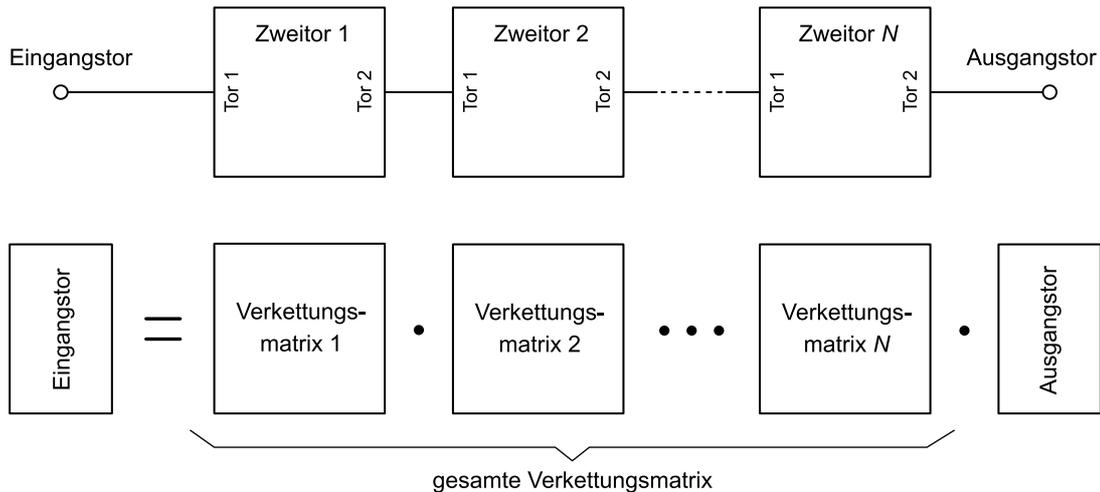


Bild 6.4.: Hintereinanderschaltung mehrerer Zweitore und zugehörige Multiplikation der Verkettungsmatrizen

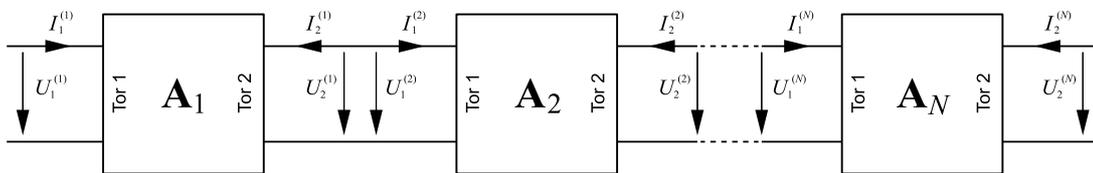


Bild 6.5.: Hintereinanderschaltung mehrerer Zweitore in der Spannungs-/Stromdarstellung

Man erhält die Beschreibungsgrößen von Tor 1, indem die Größen an Tor 2 mit der Verkettungsmatrix multipliziert werden. Der Vorteil der Darstellung mittels Verkettungsmatrizen entsteht erst bei der Hintereinanderschaltung mehrerer Zweitore. Die Verkettungsmatrix der gesamten Schaltung erhält man dann durch einfache Matrizenmultiplikation der einzelnen Verkettungsmatrizen. Die Reihenfolge der einzelnen Verkettungsmatrizen entspricht dabei der Reihenfolge der Hintereinanderschaltung der Zweitore (vgl. Bild 6.4).

Man unterscheidet je nach Darstellung zwei Arten von Verkettungsmatrizen. Werden die Ein- und Ausgangstore mittels Spannungen und Strömen beschrieben, erfolgt die Charakterisierung der Zweitore am zweckmäßigsten mittels der ABCD-Matrizen. Erfolgt die Beschreibung mittels Streuvariablen, so wird die Transmissionsmatrix verwendet.

### ABCD-Matrix

Bei einer Beschreibung mittels Spannungen und Strömen an den Ein- und Ausgängen der Zweitore stellt sich eine Hintereinanderschaltung wie in Bild 6.5 gezeigt dar. Bei der Formulierung ist die Verkettungsbedingung zu beachten. Damit ist gemeint, wie die Spannungen und Ströme an den Verbindungsstellen der Zweitore zusammenhängen. Mit Blick auf Bild 6.5 ergibt sich die

Verkettungsbedingung zwischen dem  $n$ -ten und dem nachfolgenden  $(n + 1)$ -ten Zweitor

$$U_1^{(n+1)} = U_2^{(n)} \quad \text{und} \quad I_1^{(n+1)} = -I_2^{(n)} \quad , \quad (6.57)$$

d.h. die Eingangsspannung (Tor 1) eines Zweitores ist gleich der Ausgangsspannung (Tor 2) des vorangegangenen Zweitores. Beim Strom gilt das gleiche, jedoch ist aufgrund der unterschiedlichen Zählrichtung (der Strom wird beim hineinfließen in das Zweitor positiv gezählt) ein Minuszeichen beim Strom in (6.57) erforderlich.

Unter diesen Voraussetzungen lautet die Transformationsgleichung des Zweitores mittels ABCD-Matrix, welche auch mit  $[A]$  bezeichnet wird

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}_{\text{ABCD-Matrix } [A]} \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \quad , \quad (6.58)$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\begin{aligned} U_1 &= A U_2 - B I_2 \\ I_1 &= C U_2 - D I_2 \quad . \end{aligned} \quad (6.59)$$

Aus der Bezeichnung der Koeffizienten mit  $A$  bis  $D$  resultiert die Bezeichnung ABCD-Matrix. Liegt eine Beschreibung des Zweitores in Form von Impedanzparametern  $[Z]$  vor, so lassen sich durch Umstellen von (6.1) und Koeffizientenvergleich mit (6.59) die Elemente der ABCD-Matrix bestimmen:

$$\begin{aligned} A &= \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & B &= \frac{Z_{11}Z_{22}}{Z_{21}} - Z_{12} \\ C &= \frac{1}{Z_{21}} & D &= \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{aligned} \quad (6.60)$$

Umgekehrt ergeben sich die Elemente der Impedanzmatrix  $[Z]$  aus den Elementen der ABCD-Matrix zu

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \frac{A}{C} & Z_{12} &= \frac{AD}{C} - B \\ Z_{21} &= \frac{1}{C} & Z_{22} &= \frac{D}{C} \quad . \end{aligned} \quad (6.61)$$

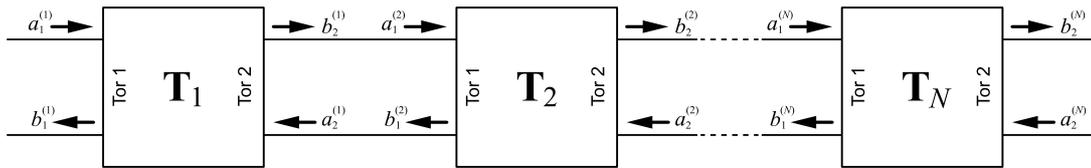


Bild 6.6.: Hintereinanderschaltung mehrerer Zweitoren in der Darstellung mittels Streuvariablen

Auf die gleiche Weise läßt sich auch eine Umrechnung von Admittanzparametern  $[Y]$  in ABCD-Darstellung durchführen

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} & B &= -\frac{1}{Y_{21}} \\
 C &= Y_{12} - \frac{Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}} & D &= -\frac{Y_{11}}{Y_{21}}
 \end{aligned}
 \tag{6.62}$$

und umgekehrt aus den ABCD-Parametern die Admittanzparameter bestimmen

$$\begin{aligned}
 Y_{11} &= \frac{D}{B} & Y_{12} &= C - \frac{AD}{B} \\
 Y_{21} &= -\frac{1}{B} & Y_{22} &= \frac{A}{B}
 \end{aligned}
 \tag{6.63}$$

Werden nun  $N$  Zweitoren gemäß Bild 6.5 hintereinander geschaltet, so ergibt sich die ABCD-Matrix  $[A_{\text{ges}}]$  des gesamten Systems durch Matrizenmultiplikation zu

$$[A_{\text{ges}}] = [A_1] \cdot [A_2] \cdots [A_N] \quad , \tag{6.64}$$

wobei die  $[A_i]$  die ABCD-Matrizen der einzelnen Zweitoren darstellen.

### Transmissions-Matrix

Liegt die Beschreibung der einzelnen Zweitoren in der Form von Streuvariablen vor, so stellt sich die Hintereinanderschaltung mehrerer Zweitoren wie in Bild 6.6 gezeigt dar. Die Verkettungsbedingung an den Verbindungsstellen der Zweitoren ergibt sich aus Bild 6.6 zu

$$b_1^{(n+1)} = a_2^{(n)} \quad \text{und} \quad a_1^{(n+1)} = b_2^{(n)} \quad , \tag{6.65}$$

d.h. die einlaufende Welle  $a_1$  am Eingang (Tor 1) eines Zweitores ist gleich der auslaufenden Welle  $b_2$  am Ausgang (Tor 2) des vorangegangenen Zweitores. Entsprechend ergibt sich die

einlaufende Welle  $a_2$  am Ausgang (Tor 2) eines Zweitores als auslaufende bzw. reflektierte Welle am Eingang (Tor 1) des nachfolgenden Zweitores.

Damit lautet die Transformationsgleichung des Zweitores mittels der Transmissions-Matrix  $[\mathbf{T}]$ :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}}_{\text{Transmissions-Matrix } [\mathbf{T}]} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (6.66)$$

Zur Berechnung der Parameter  $T_{11}$ ,  $T_{12}$ ,  $T_{21}$  und  $T_{22}$  aus den Streuparametern wird das Gleichungssystem (6.32) nach  $b_1$  und  $a_1$  umgestellt:

$$\begin{aligned} b_1 &= \left( S_{12} - \frac{S_{11}S_{22}}{S_{21}} \right) a_2 + \frac{S_{11}}{S_{21}} b_2 \\ a_1 &= -\frac{S_{22}}{S_{21}} a_2 + \frac{1}{S_{21}} b_2 \end{aligned} \quad (6.67)$$

Durch Koeffizientenvergleich mit (6.66) ergibt sich

$$\begin{aligned} T_{11} &= S_{12} - \frac{S_{11}S_{22}}{S_{21}} & T_{12} &= \frac{S_{11}}{S_{21}} \\ T_{21} &= -\frac{S_{22}}{S_{21}} & T_{22} &= \frac{1}{S_{21}} \end{aligned} \quad (6.68)$$

Diese Umrechnung setzt voraus, dass  $S_{21} \neq 0$  ist, d.h. die Transmission des Zweitores in Vorwärtsrichtung nicht verschwindet. Ganz entsprechend lassen sich aus  $T_{11}$ ,  $T_{12}$ ,  $T_{21}$  und  $T_{22}$  die zugehörigen Streuparameter berechnen:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{T_{12}}{T_{22}} & S_{12} &= T_{11} - \frac{T_{12}T_{21}}{T_{22}} \\ S_{21} &= \frac{1}{T_{22}} & S_{22} &= -\frac{T_{21}}{T_{22}} \end{aligned} \quad (6.69)$$

Werden nun  $N$  Zweitore gemäß Bild 6.6 hintereinander geschaltet, so ergibt sich die Transmissionsmatrix  $[\mathbf{T}_{\text{ges}}]$  des gesamten Systems durch Matrizenmultiplikation zu

$$[\mathbf{T}_{\text{ges}}] = [\mathbf{T}_1] \cdot [\mathbf{T}_2] \cdots [\mathbf{T}_N] \quad , \quad (6.70)$$

wobei die  $[\mathbf{T}_i]$  die Transmissionsmatrizen der einzelnen Zweitore darstellen.

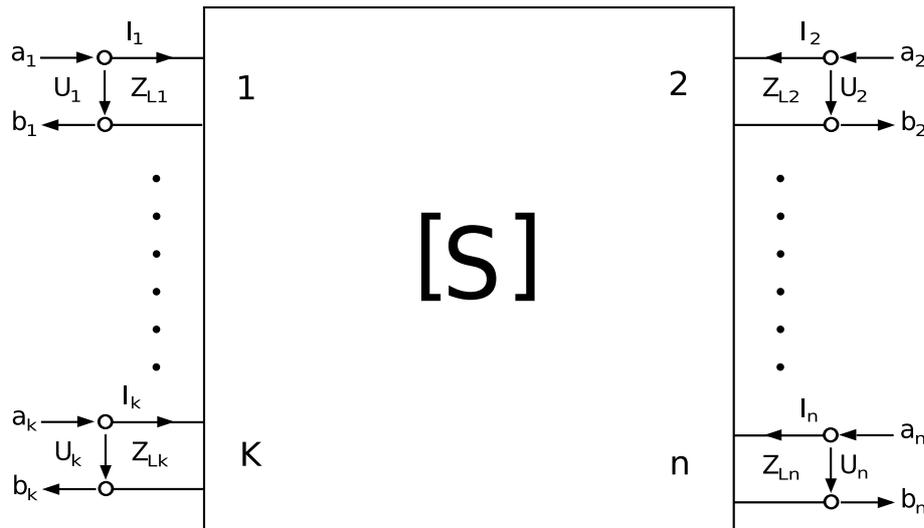


Bild 6.7.: Schematische Darstellung eines  $n$ -Tores, es gilt  $[b] = [S][a]$ .

## 6.6. Berechnungsmethoden für die Streumatrix

### 6.6.1. Streuparameterbestimmung aus Strom-Spannungsdefinition

Sofern Bauelemente der Hochfrequenztechnik nicht als konzentrierte Elemente vorliegen, lassen sie sich in vielen Fällen durch Ersatzschaltbilder beschreiben. Diese enthalten konzentrierte Elemente (Widerstände, Kondensatoren, Induktivitäten) und zum Teil Strom- oder Spannungsquellen (bei aktiven Elementen, z.B. Transistoren). Mit Hilfe der Knoten- und Maschenregel lassen sich hieraus Leitwert-Parameter ( $Y$ -Parameter)

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 \\ I_2 &= Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 \end{aligned} \quad (6.71)$$

oder Widerstands-Parameter ( $Z$ -Parameter) ableiten.

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ U_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned} \quad (6.72)$$

Ersetzt man in (6.71) und (6.72) die Spannungen und Ströme durch (6.26) und (6.27) und setzt die dadurch gewonnenen Streuvariablen  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  und  $b_2$  in (6.34) ein, so kann man daraus

die  $S$ -Parameter als Funktion der  $Y$ - und  $Z$ -Parameter bestimmen. Da die  $S$ -Parameter relative Größen, die  $Y$ - und  $Z$ -Parameter jedoch absolute Größen sind, führt man auch hier relative Größen ein und bezieht alle Werte auf den reellen Bezugswellenwiderstand  $Z_0$ .

Für Zweitore sind die Umrechnungsbeziehungen in Tabelle 6.1 angegeben. Diese beinhaltet zusätzliche Formeln für die Hybrid- $(H)$ - und die Ketten- $(A)$ -Parameter. Mit Hilfe dieser Umrechnungsformeln lassen sich auch leicht Parallel- und Serienschaltungen von Zweitoren durch entsprechende Umwandlungen berechnen:

$$\begin{aligned} [S] &\rightarrow [Y] \rightarrow \text{Parallelschaltung} \rightarrow [Y] \rightarrow [S] \\ [S] &\rightarrow [Z] \rightarrow \text{Serienschaltung} \rightarrow [Z] \rightarrow [S] \end{aligned}$$

### 6.6.2. Konversion zwischen Matrizen

Aufgrund der linearen Zusammenhänge zwischen den Strom- Spannungsbeziehungen und den Streuvariablen lassen sich Impedanzparameter in Leitwertparameter oder Streuparameter umrechnen. Für den häufig vorkommenden Anwendungsfall von Zweitoren (welche in der analogen Schaltungstechnik auch als Vierpole bezeichnet werden) sind in Tabelle 6.1 die Umrechnungsbeziehungen zwischen den  $[S]$ -,  $[Z]$ -,  $[Y]$ -,  $[A]$  (ABCD)- und  $[T]$ -Matrizen angegeben.

### 6.6.3. Zusammenschaltung von Mehratoren

Bei der Zusammenschaltung von Mehratoren interessiert die resultierende Streumatrix. Diese lässt sich bestimmen durch Aufstellen des Gleichungssystems nach (6.32) bzw. (6.34). Durch Gleichsetzen der Leistungswellen an den Verbindungsstellen und anschließende Elimination dieser Streuvariablen lässt sich die gesuchte Streumatrix bestimmen.

Ein in vielen Fällen bequemerer Weg ist jedoch die direkte Bestimmung der einzelnen Streuparameter nach

$$s_{ij} = \left. \frac{b_i}{a_j} \right|_{(a_k=0), k=1 \dots N, k \neq j} \quad (6.73)$$

Man denkt sich eine Welle an Tor  $j$  eingespeist, während die restlichen Tore mit ihrem Bezugswiderstand abgeschlossen sind und ermittelt den oder die Signalwege zum gewünschten Ausgangstor. Auf diese Weise lässt sich die  $[S]$ -Matrix des entstandenen Mehrators relativ einfach bestimmen.

In Ergänzung zu den in Abschnitt 6.4 dargelegten Eigenschaften von Streumatrizen lässt sich folgendes angeben:

Tabelle 6.1.: Umrechnung verschiedener Zweitorparameter

	[S]	[Z]	[Y]	[A] (ABCD)	[T]
$S_{11}$	$S_{11}$	$\frac{(Z_{11} - Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}$	$\frac{(Y_0 - Y_{11})(Y_0 + Y_{22}) + Y_{12}Y_{21}}{(Y_{11} + Y_0)(Y_{22} + Y_0) - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{A + B/Z_0 - CZ_0 - D}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$	$\frac{T_{12}}{T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}}$
$S_{12}$	$S_{12}$	$\frac{2Z_{12}Z_0}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}$	$\frac{-2Y_{12}Y_0}{(Y_{11} + Y_0)(Y_{22} + Y_0) - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{2(AD - BC)}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$	$\frac{T_{22}}{T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}}$
$S_{21}$	$S_{21}$	$\frac{2Z_{21}Z_0}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}$	$\frac{-2Y_{21}Y_0}{(Y_{11} + Y_0)(Y_{22} + Y_0) - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{2}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$	$\frac{1}{T_{22}}$
$S_{22}$	$S_{22}$	$\frac{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}$	$\frac{(Y_{11} + Y_0)(Y_{22} + Y_0) - Y_{12}Y_{21}}{(Y_{11} + Y_0)(Y_{22} + Y_0) - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{-A + B/Z_0 - CZ_0 + D}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$	$\frac{-T_{21}}{T_{22}}$
$Z_{11}$	$Z_0 \frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$Z_{11}$	$\frac{Y_{22}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{A}{C}$	$\frac{A}{AD - BC}$
$Z_{12}$	$Z_0 \frac{2S_{12}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$Z_{12}$	$\frac{-Y_{12}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{AD - BC}{C}$	$\frac{1}{C}$
$Z_{21}$	$Z_0 \frac{2S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$Z_{21}$	$\frac{-Y_{21}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{1}{C}$
$Z_{22}$	$Z_0 \frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$Z_{22}$	$\frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}$	$\frac{D}{C}$	$\frac{D}{C}$
$Y_{11}$	$Y_0 \frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$	$Y_{11}$	$\frac{D}{B}$	$\frac{D}{BC - AD}$
$Y_{12}$	$Y_0 \frac{-2S_{12}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$\frac{-Z_{12}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$	$Y_{12}$	$\frac{-1}{B}$	$\frac{-1}{B}$
$Y_{21}$	$Y_0 \frac{-2S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$\frac{-Z_{21}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$	$Y_{21}$	$\frac{A}{B}$	$\frac{A}{B}$
$Y_{22}$	$Y_0 \frac{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$	$Y_{22}$	$\frac{A}{B}$	$\frac{A}{B}$
A	$\frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}}$	A	A
B	$\frac{Z_0}{2S_{21}} \frac{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$\frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}}$	$\frac{-1}{Y_{21}}$	B	B
C	$\frac{1}{Z_0} \frac{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{1}{Z_{21}}$	$\frac{Y_{12}Y_{21} - Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}}$	C	C
D	$\frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	D	D
$T_{11}$	$\frac{S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22}}{S_{21}}$				$T_{11}$
$T_{12}$	$\frac{S_{11}}{S_{21}}$				$T_{12}$
$T_{21}$	$\frac{-S_{22}}{S_{21}}$				$T_{21}$
$T_{22}$	$\frac{1}{S_{21}}$				$T_{22}$

**Umkehrbarkeit**

Bei der Zusammenschaltung von Mehratoren, von denen jedes einzelne Mehrator umkehrbar ist, ist auch das daraus entstehende Mehrator umkehrbar. Enthält die Zusammenschaltung jedoch ein nicht umkehrbares Mehrator, so lässt sich über das Verhalten des Gesamtmehrtores keine direkte Aussage treffen.

**Verlustfreiheit**

Die Verlustfreiheit von zusammenschalteten Mehratoren ist nicht erfüllt, falls die Zusammenschaltung mindestens einen Absorber (reflexionsfreier Abschluss) enthält, der so beschaltet ist, dass in ihn auch Leistung hineinfließen kann.



# 7. Elektromagnetische Wellen und Antennen

Eine wesentliche Anwendung der Hochfrequenztechnik ist die Funktechnik. Dabei werden Signale als elektromagnetische Welle über Antennen abgestrahlt und wieder empfangen. Die Grundlagen hierfür werden im folgenden Kapitel beschrieben.

## 7.1. Ebene Welle

Den Ausgangspunkt aller Überlegungen zur Beschreibung elektrodynamischer Fragestellungen bilden die Maxwell-Gleichungen. Für quellenfreie, raumladungsfreie, isotrope und homogene Materialien lassen sich daraus die Wellengleichungen ableiten. Die einfachste Lösung der Wellengleichungen ist die ebene Welle. Ausführliche Herleitungen dazu finden sich in [8, 10]. Eine ebene Welle, deren Ausbreitungsrichtung durch den Einheitsvektor  $\vec{e}_k$  charakterisiert ist, lässt sich in folgender Form schreiben:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_0 e^{-jk\vec{e}_k\vec{x}} \quad (7.1)$$

$$\vec{H}(\vec{x}) = \frac{\vec{e}_k \times \vec{E}(\vec{x})}{Z_F} = \frac{\vec{e}_k \times \vec{E}_0}{Z_F} e^{-jk\vec{e}_k\vec{x}} = \vec{H}_0 e^{-jk\vec{e}_k\vec{x}} \quad (7.2)$$

Die komplexe Wellenzahl des Mediums

$$k = k' - jk'' = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - j\omega \kappa \mu} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{\varepsilon_r \mu_r - j \frac{\kappa \mu_r}{\omega \varepsilon_r}} = k_0 n \quad (7.3)$$

ergibt sich aus den Materialparametern Permittivität  $\varepsilon$ , Leitfähigkeit  $\kappa$  und Permeabilität  $\mu$ . Die Größe  $k_0 = \omega/c_0$  mit der Lichtgeschwindigkeit  $c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  im Vakuum kennzeichnet die Wellenzahl im Vakuum und  $n$  den komplexen Brechungsindex des Mediums. Sowohl die elektrische Feldstärke als auch die magnetische Feldstärke stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung und senkrecht aufeinander. Es handelt sich somit um eine sogenannte TEM-Welle (TEM: **T**ransversal **E**lektro**M**agnetisch). Die Vektoren bilden in der Reihenfolge ( $\vec{e}_k$ ,

$\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ) oder auch  $(\vec{E}, \vec{H}, \vec{e}_k)$  ein Rechtssystem (rechte Handregel). Für den komplexen Feldwellenwiderstand des Mediums, welcher das Verhältnis der komplexen Amplituden zueinander beschreibt, gilt:

$$Z_F = \frac{E}{H} = \frac{\omega\mu}{k} \quad (7.4)$$

Für eine ebene Welle in Luft ( $\epsilon_r \approx 1$ ,  $\kappa \approx 0$ ,  $\mu_r \approx 1$ ) kann in guter Näherung der reelle Feldwellenwiderstand

$$Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \Omega \approx 377 \Omega \quad (7.5)$$

des Vakuums verwendet werden. Für ebene Wellen in Luft bzw. Vakuum stehen somit elektrische und magnetische Feldstärke nicht nur senkrecht aufeinander und senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung, was aus (7.2) folgt, sondern sind außerdem in Phase.

Eine ebene Welle mit der oben beschriebenen mathematischen Form lässt sich in der Realität nicht erzeugen. Sofern der Beobachtungspunkt jedoch genügend weit von der Quelle entfernt ist, kann die resultierende Kugelwelle (sphärische Welle) auf einem kleinen Ausschnitt der Kugel, d.h. in einem kleinen Raumwinkelbereich, als ebene Welle gedeutet werden (lokal ebene Welle). Deren Amplitude ist allerdings im Gegensatz zur eigentlichen ebenen Welle nicht konstant, sondern nimmt umgekehrt proportional zur Entfernung von der Quelle ab.

### 7.1.1. Poynting-Vektor und Leistungsdichte

Der Poynting-Vektor  $\vec{S}$  ist der Vektor der Energiestromdichte und somit das Vektorprodukt aus  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$ :

$$\vec{S}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y, z, t) \times \vec{H}(x, y, z, t) \quad (7.6)$$

Bei harmonischen Zeitvorgängen führt man einen komplexen Poynting-Vektor ein

$$\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}) \quad \text{bzw.} \quad \text{Re} \{ \vec{S} \} = \overline{\vec{S}(t)} \quad (7.7)$$

wobei der Realteil des Poyntingvektors die Wirkleistungsdichte darstellt.

Da bei einer ebenen Welle im freien Raum  $E$  und  $H$  immer senkrecht aufeinander stehen und in Phase sind, vereinfacht sich (7.7) zu

$$S = \frac{1}{2} E \cdot H^* = \frac{1}{2} \frac{E^2}{Z_{F0}} = \frac{1}{2} H^2 Z_{F0} \quad (7.8)$$

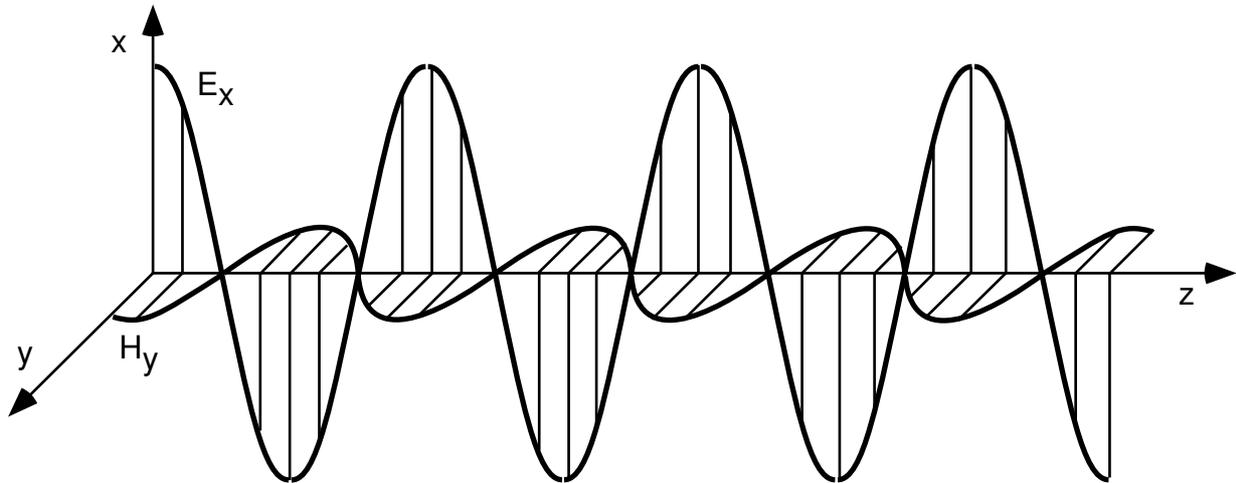


Bild 7.1.: Momentaufnahme einer ebenen, linear polarisierten Welle

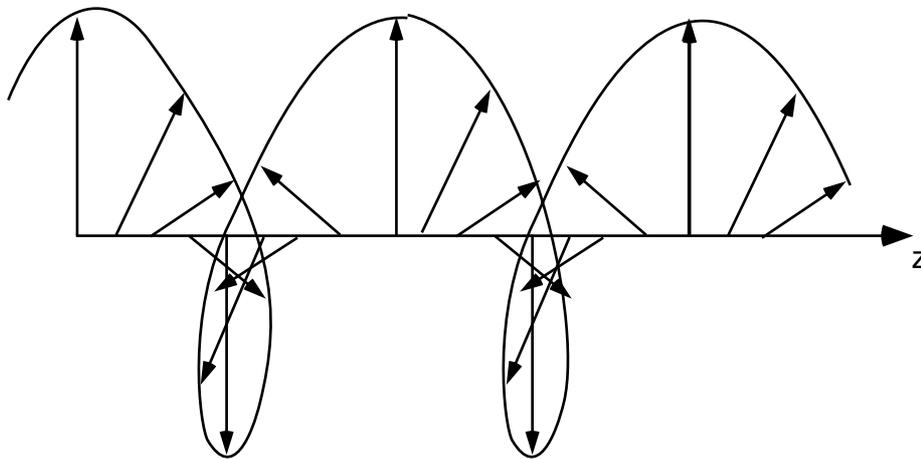


Bild 7.2.: Momentaufnahme einer zirkular polarisierten Welle

### 7.1.2. Polarisation

Die Polarisation einer Antenne wird allgemein nach der Ausrichtung des elektrischen Vektors des Wellenfeldes in Hauptstrahlrichtung angegeben. Schwingt der Endpunkt des elektrischen Vektors dabei in einer Ebene, so spricht man von *linearer Polarisation* (Bild 7.1).

Oft wird auch für die Polarisation die Erde als Bezugsebene angegeben. Mit dieser Bezugsebene erzeugt ein horizontaler Dipol horizontal polarisierte Wellen, ein vertikaler Dipol vertikal polarisierte Wellen.

Die lineare Polarisation stellt einen Spezialfall der elliptischen Polarisation dar, bei der sich der Endpunkt des elektrischen Feldstärkevektors auf einer elliptischen Spirale in Ausbreitungsrichtung bewegt (Bild 7.2). Eine elliptisch polarisierte Welle lässt sich aus zwei senkrecht linear polarisierten Wellen mit unterschiedlichen Amplituden und gegenseitiger Phasenverschiebung

$\varphi$  zusammensetzen. Für  $\varphi = 90^\circ$  und gleiche Amplituden resultiert als weiterer Sonderfall die zirkular polarisierte Welle.

Die Drehrichtung einer elliptisch polarisierten Welle ist nach IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) wie folgt definiert:

Für einen Beobachter, der in Richtung der Ausbreitung schaut, dreht sich der Vektor des  $E$ -Feldes in einer stationären Transversalebene ( $z = \text{konst.}$ ) für rechtshändige Polarisation im Uhrzeigersinn.

## 7.2. Antennen

Antennen ermöglichen den Übergang zwischen der leitungsgebundenen Ausbreitung elektromagnetischer Wellen und der Wellenausbreitung im freien Raum. Dieser Übergang kann in beide Richtungen erfolgen.

Eine Antenne wirkt als „Anpasstransformator“ zwischen dem Wellenwiderstand der Leitung  $Z_L$  und dem Wellenwiderstand des freien Raumes  $Z_{F0}$ . Man kann sich eine Antenne beispielsweise als eine sich langsam (über viele Wellenlängen) aufspreizende Leitung vorstellen (Bild 7.3). Eine Sendeantenne formt die Leitungswelle in eine sich im freien Raum ausbreitende Welle um. Bei einer Empfangsantenne wird einer sich im Raum ausbreitenden elektromagnetischen Welle Energie entzogen und in einer Leitungswelle weitergeführt. Der Frequenzbereich, in dem Antennen als Übertragungsglieder der Funktechnik eingesetzt werden, reicht von ca. 10 kHz (Längstwellen mit  $\lambda_0 = 30 \text{ km}$ ) bis ca. 300 GHz (Millimeterwellen mit  $\lambda_0 = 1 \text{ mm}$ ). Prinzipiell ist jede Antenne sowohl als Sende- als auch als Empfangsantenne geeignet. Die Auswahl des Antennentyps und verschiedene konstruktive Gesichtspunkte hängen jedoch vom speziellen Anwendungsfall ab. Außer den gewünschten Strahlungseigenschaften spielen Gewicht, Volumen und mechanische Stabilität eine Rolle. Mit abnehmender Wellenlänge nehmen auch die erforderlichen Antennenabmessungen ab.

Die Grundidee aller Empfangsantennen ist es, aus einer ankommenden ebenen Welle auf der Basis des Durchflutungs- und/oder des Induktionsgesetzes einen Teil der Leistung auf die Anschlussleitung zu bringen. Aus dieser Idee heraus lassen sich drei prinzipielle Antennenformen unterscheiden:

- Schleifenantennen, in denen durch das magnetische Wechselfeld ein Strom induziert wird (Induktionsgesetz).
- Stabantennen, in denen durch das ankommende elektrische Feld ein Strom angeregt wird.
- Hohlleiterantennen, bei denen ein Teil aus dem äußeren Feld im Hohlleiter weitergeführt wird.

Entscheidend für alle Antennen ist, dass durch ihre Form und Lage die geeigneten Randbe-

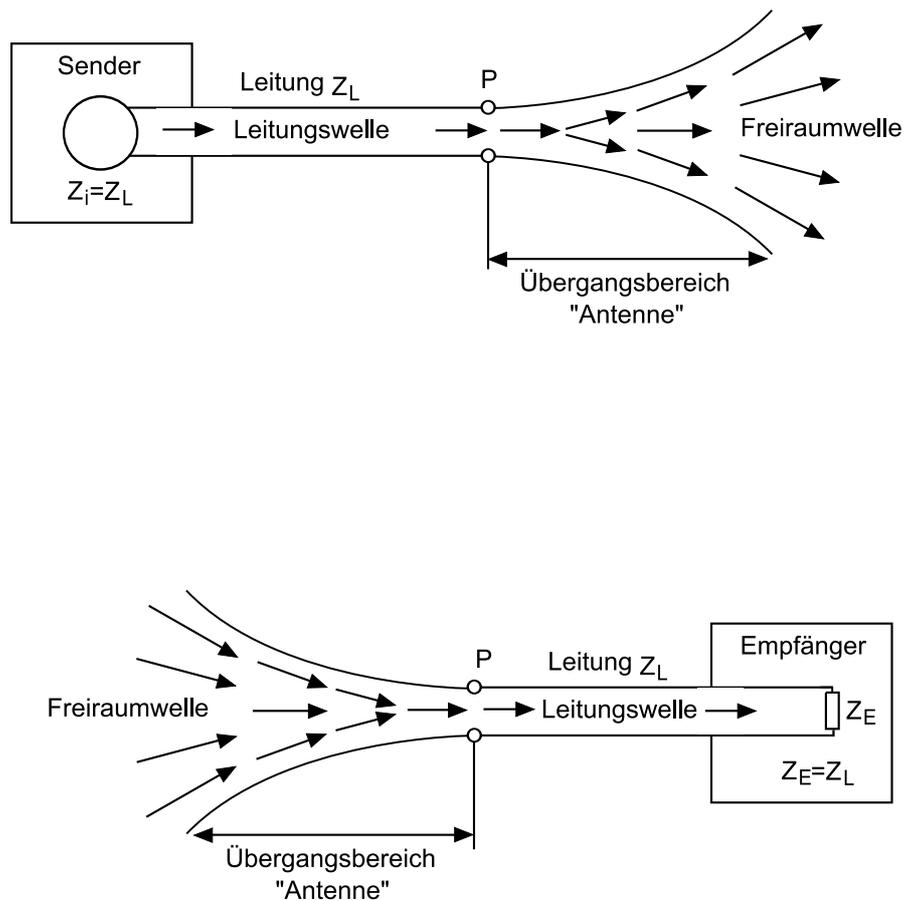


Bild 7.3.: Antenne als Übergangsbereich zwischen Leitungswelle und Freiraumwelle

dingungen bezüglich der ankommenden ebenen Welle (Fernfeld) geschaffen werden. Antennen sind in den verschiedensten Formen bekannt und es ist häufig schwierig festzustellen, bzw. zu definieren, nach welchem Grundprinzip die Antenne gebaut ist. Manchmal können durchaus mehrere Grundideen gleichzeitig umgesetzt werden. Das meiste, das eine Antenne äußerlich ausmacht, dient der Bestimmung des Bereichs, aus dem man empfangen oder in den man senden will.

Im Folgenden sind einige Beispiele für Antennenformen dargestellt, von denen einige später im Detail untersucht werden. Eine der häufigsten Antennenformen ist die Dipol-Antenne nach Bild 7.4(a). Sie besteht im einfachsten Fall aus einem geraden Leiter, der an einer Stelle unterbrochen ist und dort durch eine HF-Spannung angeregt wird. üblicherweise wird der Leiter in der Mitte unterbrochen und es gilt  $2l = \lambda/2$ . Unter Ausnutzung des Stromspiegelungsprinzips kann man in der Symmetrieebene zwischen beiden Dipolhälften eine leitende Ebene anbringen und erhält so die Linearantenne nach Bild 7.4(b). Dieser Antennentyp wird häufig im Mittel- und Kurzwellenbereich verwendet; hierbei dient der Erdboden als leitende Ebene. Dual zur elektrischen Dipol-Antenne verhält sich die Rahmenantenne nach Bild 7.4(c). Sie besteht aus einer oder mehreren Leiterwindungen, welche durch einen HF-Strom angeregt werden. Bild 7.4(d)

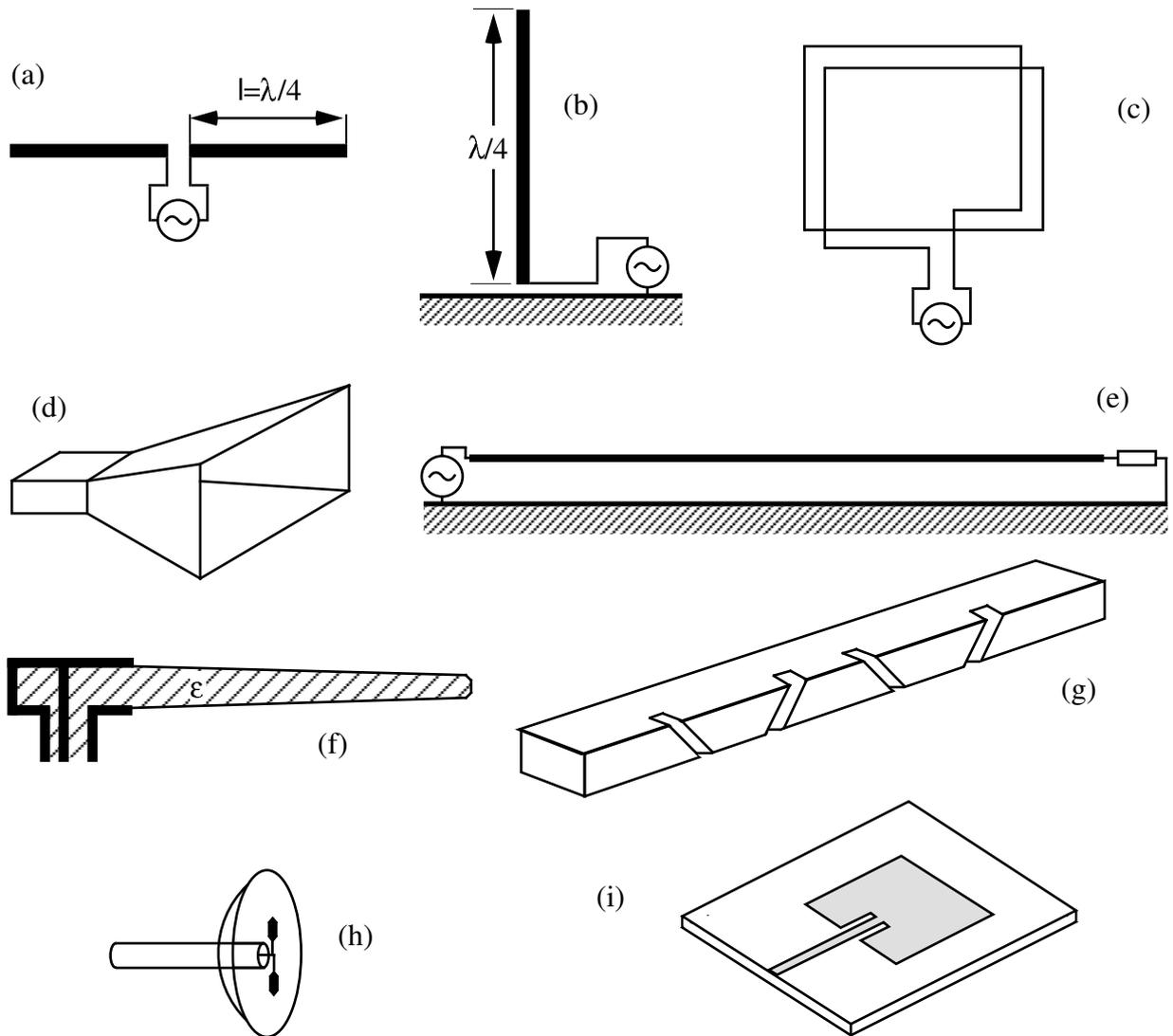


Bild 7.4.: Verschiedene Antennenformen:

(a) Dipol-Antenne, (b) Linearantenne, (c) Rahmenantenne, (d) Hornstrahler, (e) Langdrahtantenne, (f) dielektrischer Strahler, (g) Schlitzantenne, (h) parabolische Reflektorantenne, (i) Patch-Antenne.

zeigt den Hornstrahler als Beispiel für eine Mikrowellenantenne. Ist die Öffnung des Horns groß im Vergleich zur Wellenlänge, so lässt sich mit dem Hornstrahler eine gute Richtwirkung erzielen. Wanderwellenantennen nach Bild 7.4(e) und 7.4(f) bestehen aus einem Wellenleiter, dessen Länge ein Vielfaches der Wellenlänge ist. In diesem Wellenleiter wird eine elektromagnetische Welle angeregt, deren Phasengeschwindigkeit etwa der Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle im freien Raum entspricht. Bild 7.4(e) zeigt eine im Kurzwellenbereich verwendete Langdrahtantenne. Der dielektrische Strahler (Bild 7.4(f)) wird im Mikrowellenbereich verwendet. Werden in einem Hohlleiter HF-Ströme durch Schlitze unterbrochen, so strahlen diese Schlitze ebenfalls Hochfrequenzenergie ab. Bild 7.4(i) zeigt eine derartige Schlitzantenne. Die Richtwirkung von Antennen kann durch Zusammenfassung mehrerer Antennen zu Antennengruppen oder durch Anordnung von Reflektoren erhöht werden. Bild 7.4(g) zeigt die Anordnung eines Hornstrahlers im Brennpunkt eines parabolischen Reflektors. So genannte Patch-Antennen (Bild 7.4(h)) werden in planarer Technik als metallische Flächen auf ein dielektrisches Substrat mit metallisierter Rückseite aufgebracht. Sowohl durch die Geometrie als auch durch die Anzahl der Flächenelemente lässt sich die Richtwirkung der Antenne beeinflussen.

In dem folgenden Kapitel sollen die grundlegenden Begriffe aus dem Bereich der Antennentheorie eingeführt und erläutert werden. Auch deren Anwendung auf den Hertzschen Dipol und einige Antennentypen sollen beispielhaft dargestellt werden. Für die ausführliche mathematische Behandlung der Antennentheorie und die Betrachtung von weiteren Antennenarten wie Stabstrahler, Antennengruppen, Aperturantennen, YAGI-Antennen und Breitbandantennen sowie eine Einführung in die Antennenmesstechnik muss auf die Anschlussvorlesung „Antennen und Antennensysteme“ verwiesen werden.

### 7.2.1. Abgestrahlte Leistung

In hinreichend großer Entfernung von einer Sendeantenne kann man mit einer ebenen Welle rechnen, in Kugelkoordinaten existiert dann nur eine radiale Komponente des Poynting-Vektors (siehe Bild 7.5)

$$S_r = \frac{1}{2} (E_\theta H_\psi^* - E_\psi H_\theta^*) \quad . \quad (7.9)$$

Denkt man sich eine Kugeloberfläche in genügend großem Abstand  $r$  mit der Sendeantenne im Mittelpunkt der Kugel, dann muss die gesamte abgestrahlte Leistung durch die Kugeloberfläche  $F$  hindurchtreten.

$$P_S = \int_F \vec{S} \cdot d\vec{f} = \int_F S_r df, \quad r \rightarrow \infty \quad (7.10)$$

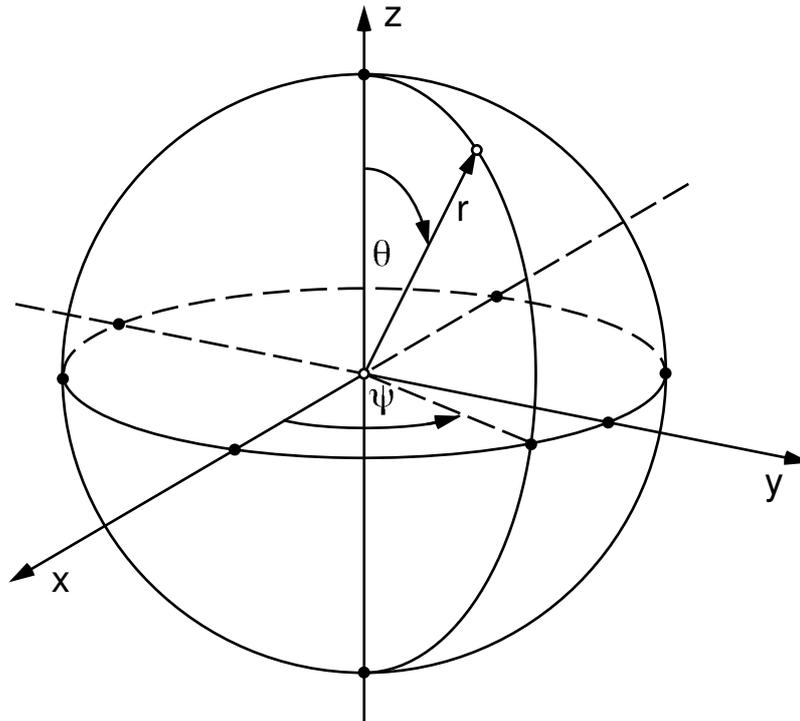


Bild 7.5.: Kugelkoordinaten

$F$  ist die gesamte Kugeloberfläche,  $df$  das Flächenelement auf der Kugel:

$$df = r \sin \theta \cdot d\theta \cdot r \cdot d\psi \quad , \quad (7.11)$$

$$P_S = r^2 \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} S_r(r, \theta, \psi) \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\psi, \quad r \rightarrow \infty \quad . \quad (7.12)$$

### 7.2.2. Antennengewinn und Richtwirkung

Der Antennengewinn wird hier anhand einer Sendeantenne behandelt, die Ableitungen sind äquivalent für Empfangsantennen. Praktisch ausgeführte Antennen strahlen ihre Energie bevorzugt in bestimmte Raumrichtungen ab; sie besitzen eine Richtwirkung. Diese Eigenschaft wird u.a. durch den Antennengewinn beschrieben. Zu seiner Definition benötigt man neben der eigentlichen Antenne eine Bezugsantenne. Verglichen wird in der Regel mit einem fiktiven Kugelstrahler, auch isotroper Strahler genannt, der in alle Raumrichtungen gleichmäßig abstrahlt, der aber theoretisch und praktisch nicht verwirklicht werden kann.

Die abgestrahlte Leistung  $P_S$  verteilt sich im Abstand  $r$  auf einer Kugelfläche  $4\pi r^2$ . Die Lei-

stungsdichte  $S_{ri}$  des isotropen Kugelstrahlers in diesem Abstand beträgt daher

$$S_{ri} = \frac{P_S}{4\pi r^2}, \quad r \rightarrow \infty \quad . \quad (7.13)$$

Der Index  $i$  weist auf den isotropen Strahler als Bezugsantenne hin.

Anstelle des Kugelstrahlers wird jetzt die zu untersuchende Antenne an denselben Ort gebracht und strahlt dort dieselbe Leistung  $P_S$  ab.

Der Gewinn  $G_i$  ist definiert als das Verhältnis der maximalen Leistungsdichte  $S_{r,\max}$  der Antenne zur Leistungsdichte der Bezugsantenne, in diesem Fall des Kugelstrahlers. Im Fernfeld gilt

$$G_i = \frac{S_{r,\max}}{S_{ri}} = 4\pi r^2 \frac{S_{r,\max}}{P_S} \quad . \quad (7.14)$$

Der Gewinn wird i.a. logarithmisch angegeben:

$$G_i/\text{dBi} = 10 \log G_i \quad . \quad (7.15)$$

Wegen der Gültigkeit des Umkehrsatzes hängt der Gewinn einer Antenne nicht davon ab, ob sie als Sende- oder als Empfangsantenne betrieben wird. Der Gewinn in der vorangegangenen Definition enthält alle Verluste der Antenne, wenn er messtechnisch ermittelt wird. Man spricht in diesem Fall auch von einem praktischen Antennengewinn. Bei rein rechnerischer Ermittlung aus der im Abschnitt 7.2.3 behandelten Richtcharakteristik kann sowohl ein theoretischer Gewinn (Richtwirkung, ohne Verluste)  $D_i$ , als auch ein praktischer Gewinn  $G_i$  bestimmt werden. Das Verhältnis zwischen Gewinn und Richtwirkung wird als Effizienz  $\eta$  der Antenne bezeichnet:

$$G_i = \eta D_i \quad (7.16)$$

### 7.2.3. Richtcharakteristik

Der Gewinn liefert eine zwar wichtige, allerdings nur integrale Aussage bezüglich der Antenne. In der Regel will man das Abstrahl- oder Empfangsverhalten in Abhängigkeit von den Raumrichtungen  $\theta$  und  $\psi$  wissen. Dieses ist definiert durch die komplexe Richtcharakteristik  $C(\theta, \psi)$ :

$$C(\theta, \psi) = \frac{\vec{E}(\theta, \psi)}{|\vec{E}_{\max}|} = \frac{\vec{H}(\theta, \psi)}{|\vec{H}_{\max}|}, \quad r \rightarrow \infty \quad (7.17)$$

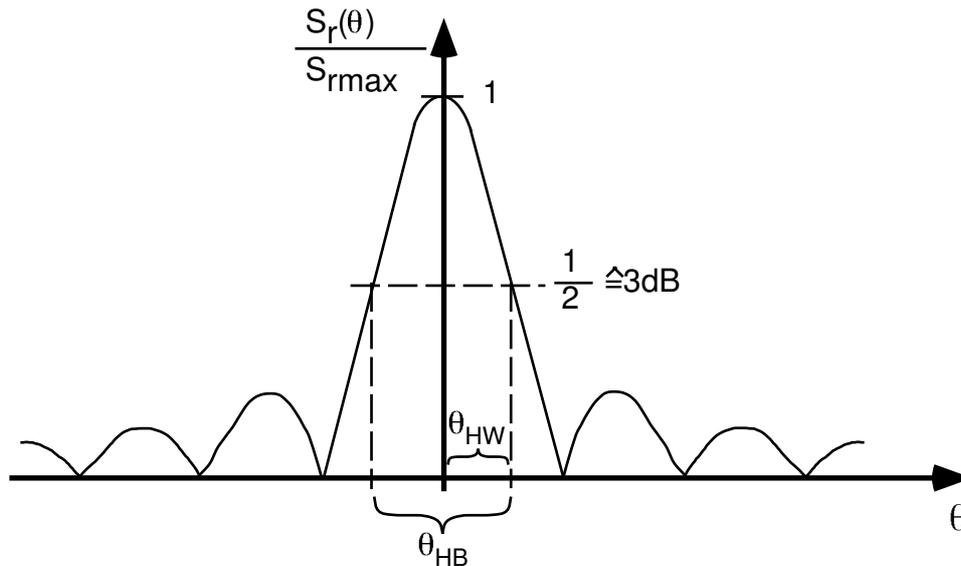


Bild 7.6.: Definition von Halbwertsbreite und Halbwertswinkel

$\vec{E}$  und  $\vec{H}$  sind die Feldstärken im Fernfeld auf einer Kugeloberfläche,  $\vec{E}_{\max}$  und  $\vec{H}_{\max}$  die dabei auftretenden Maxima. Durch die Normierung auf  $\vec{E}_{\max}$  entfällt die Abhängigkeit von  $r$ . Die Richtcharakteristik ist nur eine Funktion der Richtung und somit von  $\theta, \psi$ . Sie ist eine dimensionslose Größe, deren Betrag zwischen Null und Eins liegt.

Zur Darstellung der Richtcharakteristik müssten die normierten Feldstärkekomponenten als Funktion der Winkel  $\theta$  und  $\psi$  in einem räumlichen Koordinatensystem aufgetragen werden. Als Richtdiagramm bezeichnet man die zweidimensionale Darstellung, die sich durch einen ebenen Schnitt durch die räumliche Richtcharakteristik ergibt. Wenn die Schnittebene in der Vertikalen liegt, spricht man von einem Vertikaldiagramm, entsprechend von einem Horizontaldiagramm, wenn die Schnittebene waagrecht liegt.

#### 7.2.4. Halbwertsbreite und Halbwertswinkel

Als Halbwertsbreite ( $\psi_{\text{HB}}$ ) oder 3 dB-Breite bei einem Strahlungsmaximum (räumlich: Strahlungskeule) bezeichnet man den Winkelbereich, an dessen Grenzen die Strahlungsdichte halb so groß ist wie im Maximum (d.h. 3 dB weniger). Als Halbwertswinkel ( $\psi_{\text{HW}}$ ) bei einem Strahlungsmaximum (bzw. einer Strahlungskeule) bezeichnet man den Winkel zwischen der Richtung des Strahlungsmaximums und der Richtung, in der die Strahlungsleistung halb so groß ist wie im Maximum. Ist das Richtdiagramm in der Umgebung des Strahlungsmaximums spiegelsymmetrisch, so ist die Halbwertsbreite gleich dem doppelten Halbwertswinkel.

### 7.2.5. Zusammenhang zwischen Gewinn und Richtcharakteristik

Wie schon in Abschnitt 7.2.2 angedeutet, lässt sich der theoretischen Gewinn aus der Richtcharakteristik bestimmen. Dazu werden die gesamte Strahlungsleistung und die maximale Leistungsdichte benötigt. Aus (7.12)

$$P_S = r^2 \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} S_r \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\psi \quad (7.18)$$

wird in (7.8)

$$P_S = r^2 \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{E^2}{2Z_{F0}} \sin \theta d\theta d\psi \quad (7.19)$$

$$= r^2 \frac{E_{\max}^2}{2Z_{F0}} \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{E^2}{E_{\max}^2} \sin \theta d\theta d\psi \quad (7.20)$$

$$= r^2 \frac{E_{\max}^2}{2Z_{F0}} \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} |C(\theta, \psi)|^2 \sin \theta d\theta d\psi \quad (7.21)$$

Die maximale Leistungsdichte ergibt sich wieder mit (7.8) zu

$$S_{r_{\max}} = \frac{E_{\max}^2}{2Z_{F0}} \quad (7.22)$$

Damit erhält man für den theoretischen Gewinn nach (7.14)

$$D_i = \frac{4\pi}{\int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} |C(\theta, \psi)|^2 \sin \theta d\theta d\psi} \quad (7.23)$$

### 7.2.6. Antennenwirkfläche

Eine Empfangsantenne, welche sich in hinreichender Entfernung von einer Sendeantenne befindet, liegt im ebenen Wellenfeld. Die radiale Energiestromdichte  $S_r$  ist in der Umgebung der Empfangsantenne konstant. Die Empfangsantenne entnimmt mit ihrer fiktiven Antennenwirkfläche  $A_W$  dem Wellenfeld (der Energiestromdichte  $S_r$ ) die Leistung  $P_e$ :

$$P_e = S_r \cdot A_W \quad (7.24)$$

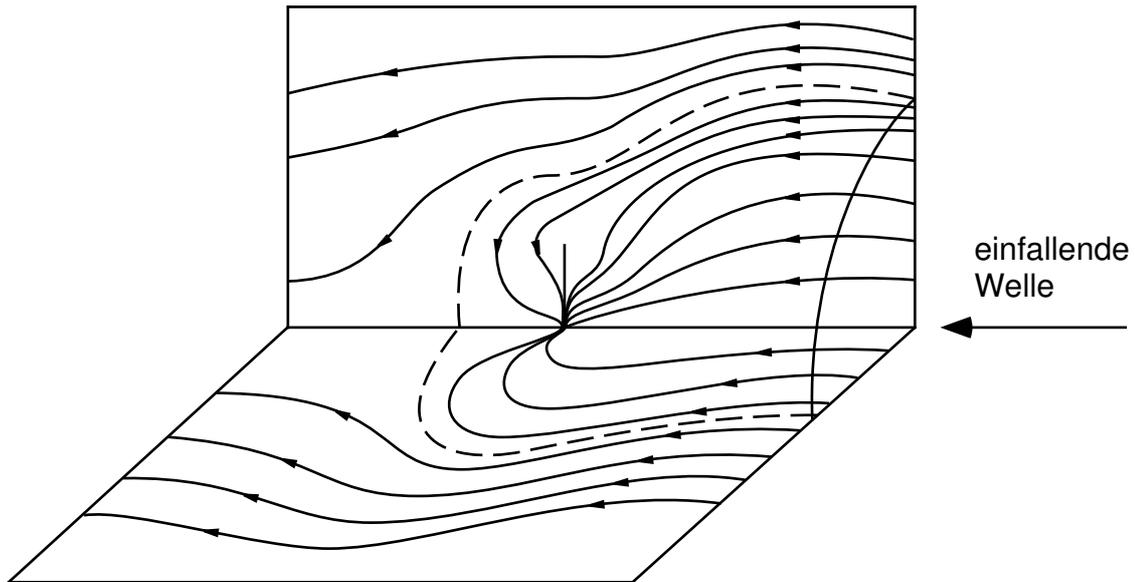


Bild 7.7.: Strömungslinien der Strahlungsdichte bei der linearen Empfangsantenne

Die wirksame Antennenfläche lässt sich anhand der Strömungslinien der Strahlungsdichte  $S_r$  anschaulich erklären. Bild 7.7 zeigt die Strömungslinien von  $S_r$  in der Umgebung einer Empfangsantenne. Die innerhalb der gestrichelten Begrenzungen verlaufenden Strömungslinien münden in die Antennenzuleitung und sind mit der von der Antenne empfangenen Feldenergie verknüpft. Die in Bild 7.7 gestrichelt eingezeichneten Strömungslinien sind räumlich ergänzt in Bild 7.8 dargestellt. Diese Strömungslinienschar bildet eine Begrenzungsfläche  $A_1$ , wobei die innerhalb der Begrenzungsfläche verlaufenden Strömungslinien die von der Antenne empfangene Leistung repräsentieren. In einiger Entfernung von der Antenne wird das Empfangsfeld durch die Antenne nicht mehr gestört. Dort ist die Querschnittsfläche (normal zur Ausbreitungsrichtung des Empfangsfeldes) durch den von  $A_1$  begrenzten Strömungslinienbereich gleich der wirksamen Antennenfläche  $A_W$ .

Die Antennenwirkfläche ist also genauso wie der Gewinn ein Maß für die einem ebenem Wellenfeld entnehmbare Leistung. Die Proportionalität ist gegeben durch

$$A_W = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_i \quad , \quad (7.25)$$

$$G_i = A_W \frac{4\pi}{\lambda^2} \quad . \quad (7.26)$$

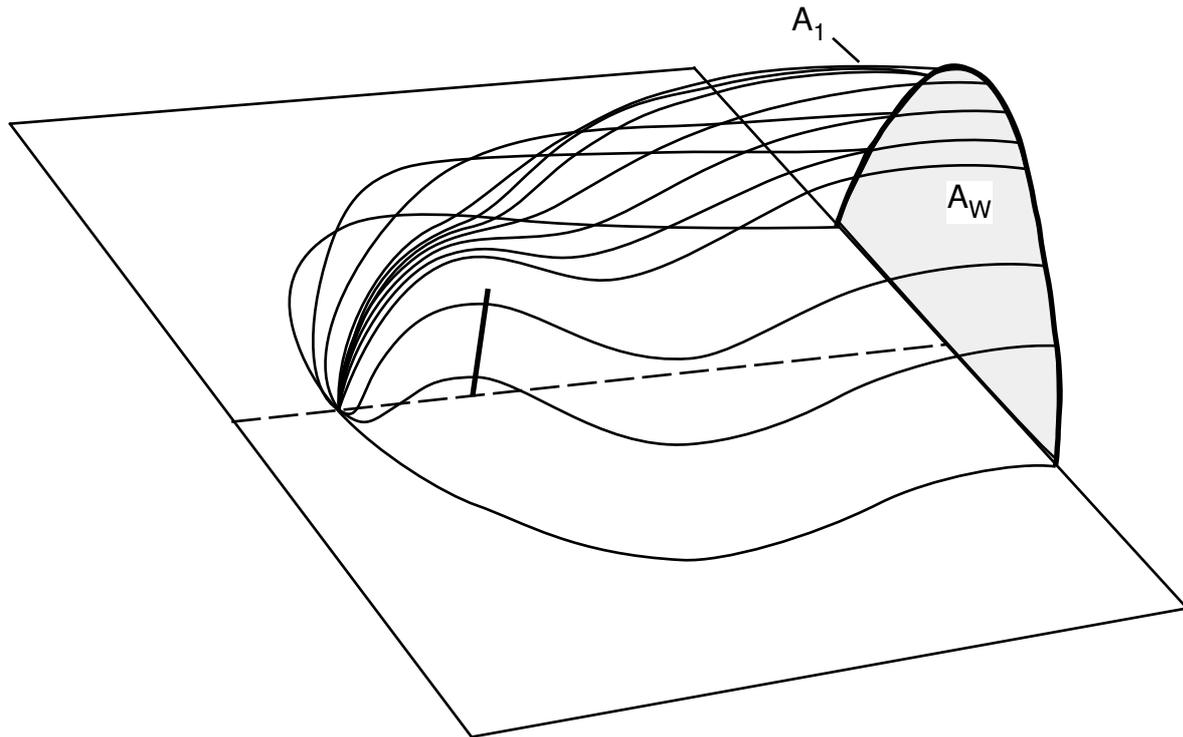


Bild 7.8.: Wirksame Antennenfläche  $A_W$  der linearen Empfangsantenne

## 7.3. Wellenausbreitung

Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Freiraum wird durch eine Vielzahl von Einflussfaktoren und Phänomenen bestimmt. Die primär zu berücksichtigenden Ausbreitungsphänomene sind die Freiraumausbreitung, die Reflexion und Transmission an Grenzflächen, die Beugung, die Streuung und atmosphärische Effekte. Der Funkkanal wird im allgemeinen jedoch nicht nur durch ein einzelnes dieser Ausbreitungsphänomene sondern durch eine komplexe Wechselwirkung aller beeinflusst, wobei z.B. bei der Funkübertragung zwischen Antennen in der Regel mehrere Ausbreitungspfade eine Rolle spielen, wie in Bild 7.9 skizziert. Man spricht hierbei von Mehrwegeausbreitung. Die daraus resultierende Interferenz ist neben der eigentlichen Empfangsleistung eines der wesentlichen Kriterien für die Übertragungsqualität von modernen Funkkommunikationssystemen. Umfassende Informationen zum Thema Wellenausbreitung finden sich in [20, 15]. Hier werden nur die Grundlegenden Themen Freiraumausbreitung und atmosphärische Dämpfung behandelt.

### 7.3.1. Freiraumausbreitung

Am einfachsten zu modellieren ist ein einzelner Ausbreitungsweg zwischen Sende- und Empfangsantenne, wenn dieser durch keinerlei Hindernisse beeinflusst wird und falls angenommen

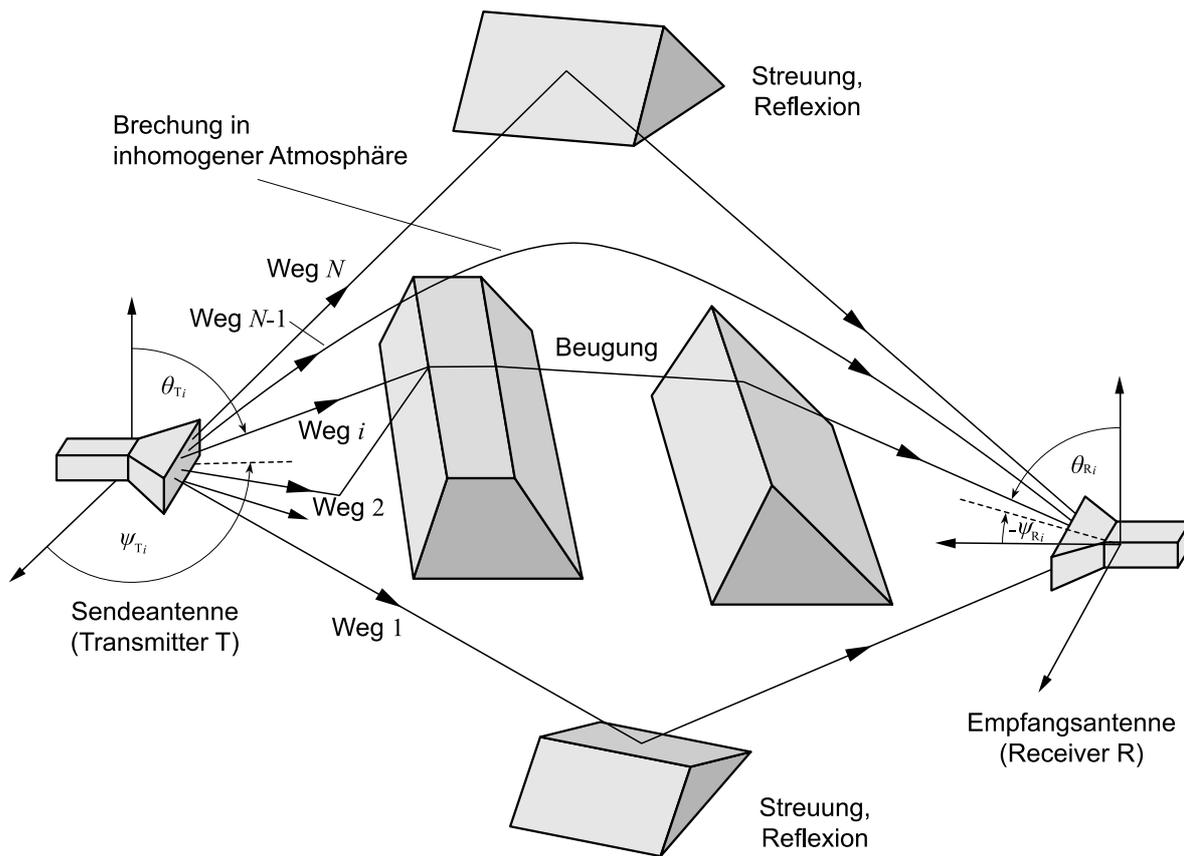


Bild 7.9.: Schematische Darstellung der Mehrwegeausbreitung elektromagnetischer Wellen zwischen einer Sende- und einer Empfangsantenne

werden kann, dass sich die elektromagnetische Welle in homogener Materie ausbreitet. Letztendlich wurden die Grundlagen dieser Freiraumausbreitung schon in den vorangegangenen Abschnitten erarbeitet, da außer den Antennen lediglich der Abstand  $r$  eine Rolle spielt. Die radiale Komponente des Poynting-Vektors ergibt sich zu

$$S_r = \frac{P_s \cdot G_s}{4\pi r^2} |C_s(\theta, \psi)|^2 \tag{7.27}$$

wobei der Index  $s$  die Sendeparameter identifiziert. Die Empfangsleistung  $P_e$  einer Empfangsantenne mit der Antennenwirkfläche  $A_{we}$  resultiert mit (7.25) und (7.24) zu

$$P_e = A_{we} \cdot S_r = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_e |C_e(\theta, \psi)|^2 \cdot S_r = \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 P_s G_s G_e |C_s(\theta, \psi) C_e(\theta, \psi)|^2 \tag{7.28}$$

Der Index  $e$  identifiziert die Parameter der Empfangsantenne. Für optimale Ausrichtung der Antennen der Antennen aufeinander, d.h.

$$|C_s(\theta, \psi)| = |C_e(\theta, \psi)| = 1 \quad (7.29)$$

gilt die sogenannte Friis'sche Leistungsübertragungsgleichung

$$P_e = \left( \frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 P_s G_s G_e. \quad (7.30)$$

Hier ist zu bemerken, dass zusätzlich zur optimalen Ausrichtung auch Polarisationsanpassung gelten muss, was hier aber nicht näher betrachtet werden soll (siehe hierzu [20]).

Die Friis'sche Gleichung zeigt, dass die Empfangsleistung proportional zu den Antennengewinnen ist und mit  $1/R^2$  abnimmt. Bild 7.10 illustriert den Unterschied der Ausbreitungsdämpfung im Freiraum gegenüber Wellenleitern. Die drei Wellenleiter sind ein Koaxialkabel, ein Hohlleiter (Ausbreitung im Grundmode) und eine Glasfaser je mit einer für den Leitungstyp typischen Dämpfung. Die Kurven sind bei  $1\text{km}$  Abstand auf  $0\text{dB}$  normiert um die Abhängigkeiten bezüglich Frequenz und Antennengewinn zu eliminieren. Es ist deutlich erkennbar, dass die Dämpfung auf Leitungen zu großen Abständen hin sehr dramatisch wird, die Freiraumausbreitung sich dagegen deutlich besser verhält. Auf der anderen Seite werden Signale natürlich auf Leitungen nicht durch Ausbreitungseffekte, Wetterbedingungen oder andere externe Einflüsse gestört. Ein gutes Beispiel für die Bedeutung des Zusammenhangs in Bild 7.10 ist, dass bei weiten glasfaserbasierten Datenübertragungsstrecken in regelmäßigen Abständen Verstärker eingesetzt werden müssen, wogegen funkbasierte Datenübertragung zu und von Satelliten über Entfernungen von z.B.  $35880\text{km}$  bei geostationären Satelliten gut möglich ist.

### 7.3.2. Atmosphärische Effekte

Die relative Permittivität der Atmosphäre ist nahe eins, hängt aber von den Parametern Luftdruck, Temperatur und Luftfeuchte ab. Mit zunehmender Höhe nimmt die relative Permittivität der Atmosphäre ab und nähert sich der des Vakuums an. Diese höhenabhängige Veränderung der Permittivität beugt Funkwellen zur Erde hin. Dieser Effekt wird in manchen Fällen genutzt, da sich damit die Reichweite eines Funksystems über den Horizont hinaus verlängert. Unterschiedliche Wetterbedingungen beeinflussen auch die Permittivität, wodurch die Wellenausbreitung beeinflusst wird.

Ein weiterer atmosphärischer Effekt ist die atmosphärische Dämpfung hauptsächlich verursacht durch Absorption von Mikrowellenenergie durch Wasserdampf oder Sauerstoffmoleküle. Maxima dieser Absorption finden sich bei molekularen Resonanzfrequenzen von Wasser oder Sauerstoff. In Bild 7.11 ist der Dämpfungsverlauf der Atmosphäre über der Frequenz aufgetragen.

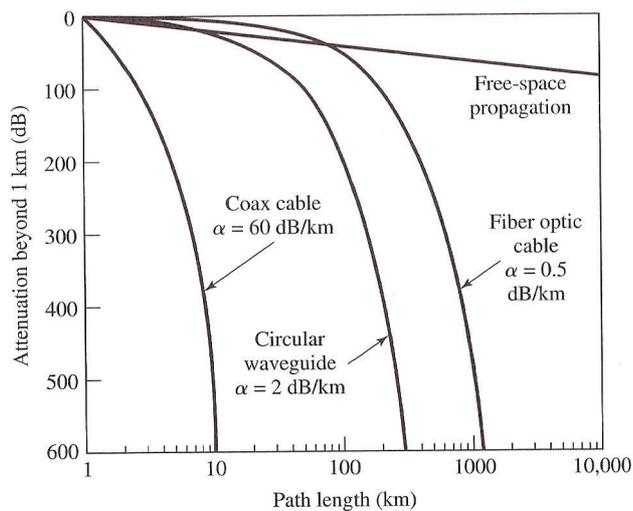


Bild 7.10.: Ausbreitungsdämpfung unterschiedlicher Übertragungsschema

Unterhalb 10 GHz werden elektromagnetische Wellen kaum gedämpft wogegen zu höheren Frequenzen hin einige Maxima und Minima auftreten.

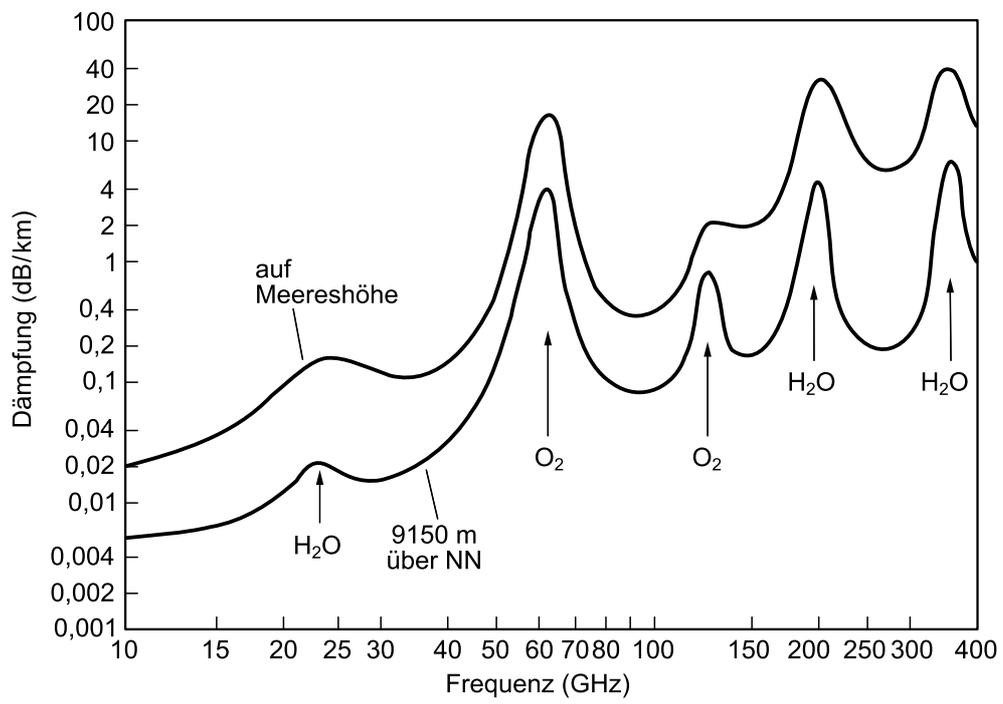


Bild 7.11.: Atmosphärische Dämpfung über der Frequenz



# 8. Mikrowellenkomponenten

Dieses Kapitel gibt einen kleinen Einblick in die Funktionsweise und den Gebrauch der wichtigsten Komponenten in der Hochfrequenztechnik.

## 8.1. Rauschen in Mikrowellenkomponenten

Ganz allgemein ist Rauschen eine Folge von thermischen Schwingungen bei einer Temperatur oberhalb des absoluten Nullpunktes. Rauschen entsteht z.B. bei der Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle durch die Ionosphäre oder durch ionisiertes Gas aber auch als Folge von Zufallsprozessen wie z.B. der Bewegung von Ladungsträgern in Halbleitern oder Elektronenröhren. Je nach Entstehung bzw. Charakteristik werden die folgenden Rauscharten unterschieden:

- **Thermisches Rauschen (engl. Thermal Noise)** ist der wichtigste Rauschtyp und wird durch thermische Vibration von abgegrenzten Ladungen verursacht,
- **Schrotrauschen (engl. Shot Noise)** wird durch zufällige Fluktuationen von Ladungsträgern in Elektronenröhren oder Halbleitern verursacht,
- **Funkelrauschen (engl. Flicker Noise)** tritt auch in Elektronenröhren oder Halbleitern auf, ist aber durch einen Leistungsverlauf invers zur Frequenz gekennzeichnet. Es wird darum auch oft als  $1/f$ -Rauschen bezeichnet.
- **Plasmarauschen (engl. Plasma Noise)** wird durch zufällige Bewegungen von Ladungen in ionisierten Gasen verursacht,
- **Quantenrauschen (engl. Quantum Noise)** entsteht auf Grund der quantisierten Eigenschaft von Ladungen und Photonen, ist aber meistens unerheblich im Vergleich zu den anderen Rauschquellen.

### 8.1.1. Elektrisches Rauschen

Wie bereits erwähnt entsteht thermisches Rauschen durch die statistischen Bewegungen von Ladungsträgern. Es äußert sich durch eine Rauschspannung an den Enden von elektrischen Leitern, wenn diese sich auf einer Temperatur oberhalb des absoluten Nullpunktes befinden. Auß-

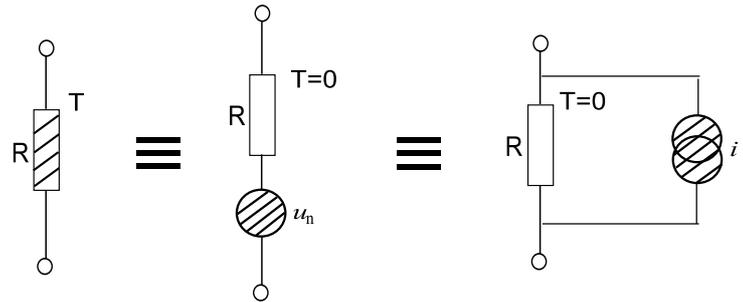


Bild 8.1.: Ersatzschaltbilder eines thermisch rauschenden Widerstandes

derdem kann ein elektrischer Leiter nur dann rauschen, wenn er selbst Wirkverluste aufweist. Ein ideales, verlustloses Bauelement rauscht auch dann nicht thermisch, wenn es sich auf einer endlichen Temperatur befindet. In der Netzwerktheorie sind daher Netzwerke aus idealen Reaktanzen als rauschfrei zu betrachten. Thermische Rauschspannungen treten grundsätzlich nur bei ohmschen Widerständen auf, die bekanntlich Wirkverluste jeglicher Art repräsentieren können. Ein rauschender Widerstand  $R$  kann im Ersatzschaltbild als Serienschaltung einer Rauschspannungsquelle oder Parallelschaltung einer Rauschstromquelle mit einem nicht rauschenden Widerstand beschrieben werden (siehe Bild 8.1). Die durch das Rauschen verursachten Spannungsfluktuationen  $u_n$  am Widerstand sind mittelwertfrei mit einer Standardabweichung  $\sigma_{u_n}$ , die aus dem Planck'schen Strahlungsgesetz abgeleitet werden kann:

$$\sigma_{u_n} = \sqrt{\frac{4hfBR}{e^{hf/kT} - 1}} \quad (8.1)$$

wobei  $f$  die Frequenz,  $B$  die Bandbreite,  $R$  den Widerstandswert und  $T$  die absolute Temperatur beschreiben. Des Weiteren werden noch die Boltzmann-Konstante  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K und die Plancksche Konstante  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Js benötigt. Diese Gleichung resultiert aus quantenmechanischen Überlegungen und gilt für alle Frequenzen. Im Mikrowellenfrequenzbereich kann (8.2) vereinfacht werden, da  $hf \ll kT$  (z.B. bei  $f = 100\text{GHz}$  und  $T = 300\text{K}$ :  $hf = 6,5 \cdot 10^{-23} \ll kT = 4,2 \cdot 10^{-21}$ ). Mit den ersten zwei Termen einer Taylor-Reihenentwicklung der Exponentialfunktion ergibt sich:

$$e^{hf/kT} - 1 \approx \frac{hf}{kT} \quad (8.2)$$

wodurch sich (8.2) zu

$$\sigma_{u_n} = \sqrt{4kTBR} \quad (8.3)$$

vereinfachen lässt. Diese Vereinfachung wird auch Rayleigh-Jeans Approximation genannt und wird im Mikrowellenfrequenzbereich fast ausschließlich eingesetzt. Für sehr hohe Frequenzen

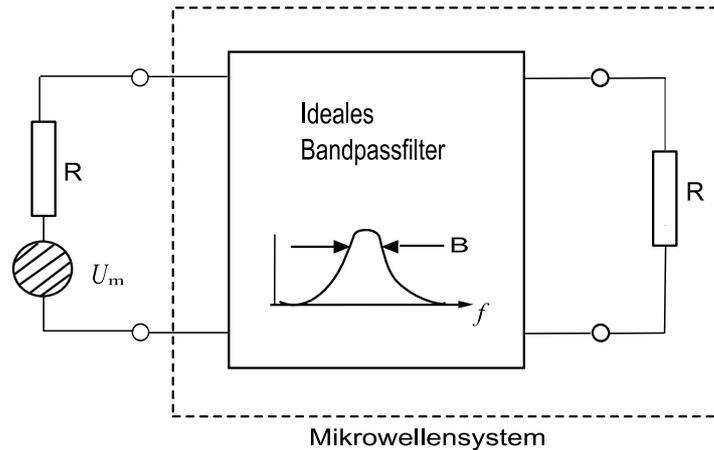


Bild 8.2.: Ersatzschaltbild für die Übertragung maximaler Leistung eines thermisch rauschenden Widerstandes in ein Mikrowellensystem repräsentiert durch ein ideales Bandpassfilter und einen Lastwiderstand

oder sehr tiefe Temperaturen wird diese Näherung allerdings ungültig - es muss dann (8.2) angewandt werden. Aus (8.3) ist ersichtlich, dass das Rauschen frequenzunabhängig ist, d.h. solch eine Rauschquelle hat eine frequenzunabhängige spektrale Leistungsdichte. Dies wird als weißes Rauschen bezeichnet. Außerdem ist die Rauschleistung direkt zur Bandbreite proportional, die im allgemeinen durch die Filter des Mikrowellensystems gegeben ist. Da weiße Rauschquellen durch normalverteilte Zufallsvariablen repräsentiert werden können, kann man die Rauschleistungen statistisch unabhängiger Rauschquellen addieren.

Die maximale Leistungsübertragung eines rauschenden Widerstandes in ein Mikrowellensystem kann an dem Ersatzschaltbild 8.2 verdeutlicht werden. Ein Eingangswiderstand des Systems von  $R$  führt zu maximaler Leistungsübertragung, und somit zu einer in das System innerhalb der Bandbreite  $B$  übertragenen Rauschleistung von

$$P_n = \left( \frac{\sigma_{u_n}}{2R} \right)^2 R = \frac{\sigma_{u_n}^2}{4R} = kTB. \quad (8.4)$$

Dadurch ist die maximale verfügbare Rauschleistung eines Widerstandes bei der Temperatur  $T$  innerhalb der Bandbreite  $B$  gegeben. Dabei sind die folgenden wesentlichen Punkte zu beachten:

- $P_n$  ist unabhängig von  $R$ ! (8.4) gilt allerdings nur bei Anpassung, wovon bei Mikrowellensystemen allerdings meistens ausgegangen werden kann.
- Für  $B \rightarrow 0$  gilt  $P_n \rightarrow 0$ , d.h. die Systeme mit der geringsten Bandbreite nehmen auch die geringste Rauschleistung auf.
- Für  $T \rightarrow 0$  gilt  $P_n \rightarrow 0$ , d.h. kühlere Komponenten und Schaltungen generieren weniger Rauschen.

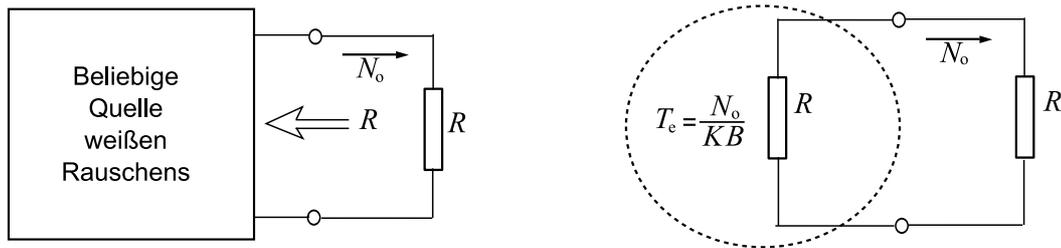


Bild 8.3.: Äquivalente Rauschtemperatur einer beliebigen Quelle weißen Rauschens

- Aus  $B \rightarrow \infty$  folgt  $P_n \rightarrow \infty$ . Dies nennt man die ultraviolette Katastrophe, die in der Realität nicht vorkommt, da (8.3) und (8.4) für  $B \rightarrow \infty$  und damit auch  $f \rightarrow \infty$  nicht gültig sind. In diesem Fall müsste (8.2) ohne Näherung angewandt werden.

### 8.1.2. Äquivalente Rauschtemperatur

Jede Rauschquelle, die frequenzunabhängiges bzw. weißes Rauschen verursacht, kann als eine äquivalente thermische Rauschquelle betrachtet, und durch die sogenannte äquivalente Rauschtemperatur beschrieben werden. Eine beliebige Quelle weißen Rauschens mit Fußpunktimpedanz  $R$ , die einer Lastimpedanz  $R$  die Rauschleistung  $N_o$  zuführt, kann folglich durch einen rauschenden Widerstand ersetzt werden (siehe Bild 8.3). Diesem rauschenden Widerstand wird die äquivalente Rauschtemperatur  $T_e$  zugewiesen, die so gewählt ist, dass sie der Lastimpedanz die selbe Rauschleistung zuführt. Folglich gilt:

$$T_e = \frac{N_o}{k B} \quad (8.5)$$

Komponenten und Systeme können dann durch ihre äquivalente Rauschtemperatur  $T_e$  beschrieben werden. Die zugehörige Bandbreite  $B$  entspricht dabei in der Regel der Bandbreite der jeweiligen Komponente oder des Systems.

Als Beispiel betrachten wir einen rauschbehafteten Verstärker mit der Bandbreite  $B$  und der Verstärkung  $G$ , der den rauschfreien Quell- und Lastwiderständen angepasst ist, siehe Bild 8.4. Falls der Quellwiderstand bei der Temperatur  $T_S = 0 \text{ K}$  betrieben wird, beträgt die Eingangsrauschleistung des Verstärkers  $N_i = 0$ , und somit entsteht die Ausgangsrauschleistung  $N_o$  ausschliesslich durch den Verstärker selbst. Die selbe Ausgangsrauschleistung würde man erhalten, wenn man einen idealen rauschfreien Verstärker am Eingang mit einem rauschenden Widerstand der Temperatur

$$T_e = \frac{N_o}{G k B} \quad (8.6)$$

beschaltet, so dass sich in beiden Fällen eine Rauschleistung  $N_o = G k T_e B$  ergibt.

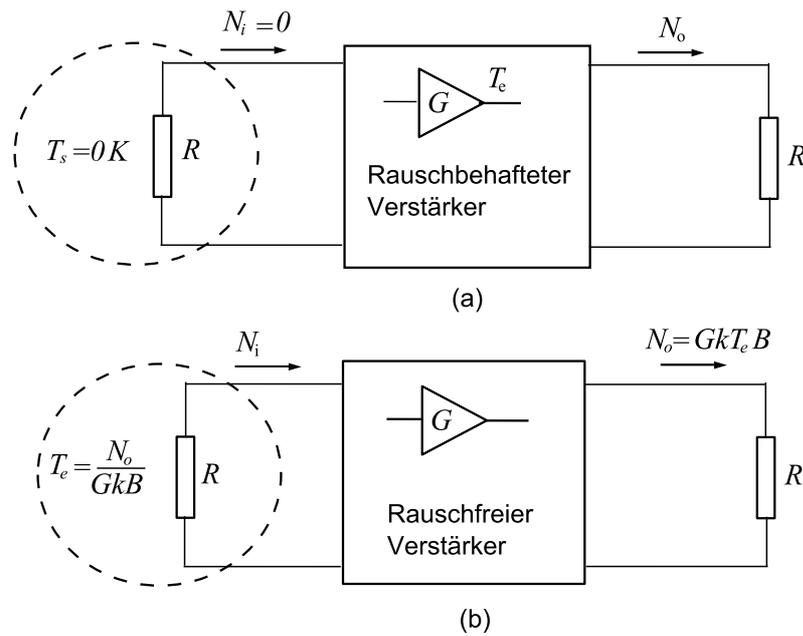


Bild 8.4.: Äquivalente Rauschtemperatur eines rauschbehafteten Verstärkers: (a) Rauschbehafteter Verstärker (b) Rauschfreier Verstärker

### 8.1.3. Rauschtemperaturmessung durch die Y-Faktor-Methode

Prinzipiell könnte die Rauschtemperatur einer Komponente dadurch bestimmt werden, dass man die Ausgangsleistung misst, wenn am Eingang der Komponente eine angepasste Last bei einer Temperatur von 0 K angeschlossen ist. Da diese Temperatur jedoch nicht erreicht werden kann, müssen andere Verfahren angewendet werden. Eine Möglichkeit ist die Verwendung einer Rauschquelle mit bekannter Rauschleistung  $kT_1B$  am Eingang der Schaltung. Misst man nun die Rauschleistung am Ausgang

$$N_1 = GkT_1B + GkT_eB, \quad (8.7)$$

kann man mit Kenntnis der Verstärkung  $G$  das Rauschen der unbekanntenen Komponente bestimmt werden:

$$T_e = \frac{N_1}{GkB} - T_1. \quad (8.8)$$

Im Laborbereich, d.h. wenn alle Komponenten bei Zimmertemperatur (290K) betrieben werden, verwendet man üblicherweise eine andere Methode, die ohne Kenntnis der Verstärkung auskommt, der Y-Faktor-Methode. Bei dieser Technik, dargestellt in Bild 8.5, werden zwei Rauschquellen mit deutlich unterschiedlichen Temperaturen benötigt. Diese werden nacheinander an den Eingang der Komponente (hier ein Verstärker) geschaltet, wobei jeweils die Aus-

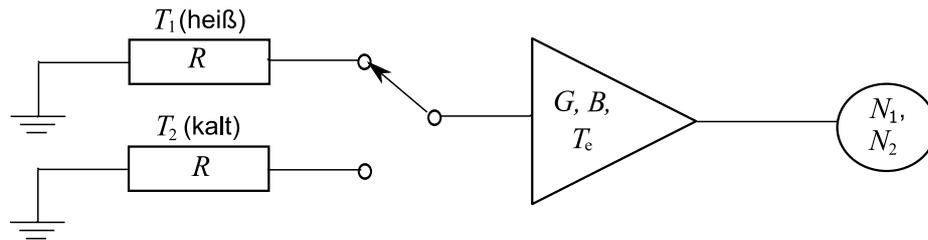


Bild 8.5.: Y-Faktor Methode um die äquivalente Rauschtemperatur eines Verstärkers zu messen

gangsleistung gemessen wird. Diese besteht dann jeweils aus der Rauschleistung des Widerstands und der vom Verstärker generierten Rauschleistung. Für die beiden Fälle gilt folglich

$$N_1 = GkT_1B + GkT_eB \quad (8.9)$$

und

$$N_2 = GkT_2B + GkT_eB. \quad (8.10)$$

Diese Gleichungen lassen sich nach den beiden Unbekannten  $GB$  und  $T_e$  auflösen. Definiert man den Y-Faktor als

$$Y = \frac{N_1}{N_2} = \frac{T_1 + T_e}{T_2 + T_e}, \quad (8.11)$$

so folgt aus (8.9) und (8.10) für die gesuchte äquivalente Rauschtemperatur

$$T_e = \frac{T_1 - YT_2}{Y - 1}. \quad (8.12)$$

d.h. die äquivalente Rauschtemperatur der Komponente kann ohne Kenntnis der Verstärkung direkt bestimmt werden.

Üblicherweise besteht die Rauschquelle aus einer Diode, die für den Fall, dass eine Spannung angelegt wird, weißes Rauschen erzeugt. Im ausgeschalteten Zustand entspricht die Rauschleistung der eines angepassten Widerstands bei Zimmertemperatur. Beide Zustände aus Bild 8.5 sind damit aus einer Komponente durch Anlegen einer Spannung generierbar. Die Rauschquelle muss weiterhin für beide Zustände möglichst gut angepasst sein. Der Quotient aus dem Temperaturunterschied der Rauschdiode im eingeschalteten und ausgeschalteten Zustand und  $T_0$  wird als *Excess Noise Ratio* (ENR) bezeichnet und wird vom Hersteller in einer frequenzabhängigen Kalibrationstabelle mitgeliefert (meist gilt dort die Annahme, dass  $T_2 = T_0$  gilt).

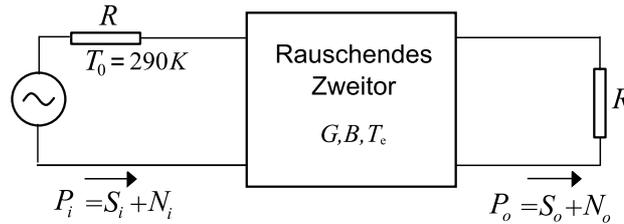


Bild 8.6.: Rauschzahlbestimmung eines rauschbehafteten Zweitors

### 8.1.4. Rauschzahl

Eine weitere Charakterisierungsmöglichkeit für rauschende Mikrowellenkomponenten ist die Rauschzahl  $F$ . Sie beschreibt, wie stark sich das Signal-zu-Rauschverhältnis (SNR) zwischen dem Eingang und dem Ausgang einer Komponente verschlechtert. Wenn ein rauschbehaftetes Signal mit der Signalleistung  $S_i$  und der Rauschleistung  $N_i$  einem rauschfreien Netzwerk zugeführt wird, so werden Signal- und Rauschleistung um den selben Faktor verstärkt oder gedämpft und folglich bleibt das SNR unverändert. Ist das Netzwerk jedoch rauschbehaftet, wird die Rauschleistung um einen höheren Faktor als die Signalleistung verstärkt und das SNR wird folglich reduziert. Die Rauschzahl  $F$  beschreibt die Verschlechterung im Signal-zu-Rauschverhältnis und ist gegeben durch

$$F = \frac{S_i/N_i}{S_o/N_o} = \frac{S_i N_o}{S_o N_i} \geq 1. \quad (8.13)$$

Die Eingangsrauschleistung  $N_i$  wird dabei in der Regel definiert als die Rauschleistung, die sich von einem angepassten Widerstand bei Zimmertemperatur ( $T_0 = 290\text{K}$ ) ergibt, also  $N_i = kT_0 B$ .

Betrachtet man das rauschende Zweitor in Bild 8.6, so lässt sich dieses durch die Bandbreite  $B$ , die Verstärkung  $G$  und eine äquivalente Rauschtemperatur  $T_e$  beschreiben. Die Eingangsrauschleistung beträgt  $N_i = kT_0 B$  und die Ausgangsrauschleistung ergibt sich als Summe der verstärkten Eingangsrauschleistung und dem intern verursachten Rauschen als  $N_o = kGB(T_0 + T_e)$ . Für die Signalleistung am Ausgang gilt  $S_o = GS_i$  und somit folgt aus (8.13) für die Rauschzahl

$$F = \frac{S_i}{kT_0 B} \frac{kGB(T_0 + T_e)}{GS_i} = \frac{T_0 + T_e}{T_0} = 1 + \frac{T_e}{T_0} \geq 1. \quad (8.14)$$

Für ein rauschfreies Netzwerk würde sich  $F = 1$  ergeben. Es ist dabei sehr wichtig im Hinterkopf zu behalten, dass die Rauschzahl für eine angepasste Eingangsschaltung und für eine Rauschquelle, die aus einem Widerstand bei Zimmertemperatur besteht, definiert ist. Die

Rauschzahl und die äquivalente Rauschtemperatur sind austauschbare Beschreibungsmöglichkeiten der Rauscheigenschaften einer Komponente, wobei sich (8.14) umformen lässt zu

$$T_e = (F - 1)T_0. \quad (8.15)$$

### Sonderfall einer passiven, verlustbehafteten Komponente

Ein wichtiger Sonderfall ist ein passives, verlustbehaftetes Element (z.B. Leitung, Dämpfungsglied) bei der Temperatur  $T$ . Dargestellt in Bild 8.7 ist ein solches Element, das von einem angepassten Quellwiderstand (ebenfalls bei der Temperatur  $T$ ) gespeist wird. Die Verstärkung  $G$  eines verlustbehafteten Elements ist kleiner 1, die Dämpfung  $L$  wird definiert als  $L = 1/G$ . Da sich das gesamte System in thermischem Gleichgewicht befindet, muss die Ausgangsrauschleistung  $N_o = kBT$  betragen. Man kann sich diese Ausgangsrauschleistung jedoch auch als Summe der Rauschleistungen vom Quellwiderstand (durch die Leitung) und von der Leitung selbst vorstellen. Dann ergibt sich

$$N_o = kBT = GkBT + GN_L, \quad (8.16)$$

wobei  $N_L$  die zusätzliche von der Leitung generierte Rauschleistung darstellt. Nach dieser Leistung aufgelöst ergibt sich

$$N_L = \frac{1 - G}{G}kTB = (L - 1)kTB. \quad (8.17)$$

Nach (8.5) beträgt somit die äquivalente Rauschtemperatur der Leitung

$$T_L = \frac{1 - G}{G}T = (L - 1)T, \quad (8.18)$$

und somit nach (8.14) die Rauschzahl

$$F_L = 1 + (L - 1)\frac{T}{T_0}. \quad (8.19)$$

Diese Gleichung vereinfacht sich, falls die Leitung bei der Zimmertemperatur  $T = T_0$  ist, zu  $F_L = L$ . Das bedeutet, dass z.B. eine Leitung, die eine Dämpfung von 2 dB aufweist, bei Zimmertemperatur eine Rauschzahl von 2 dB hat.

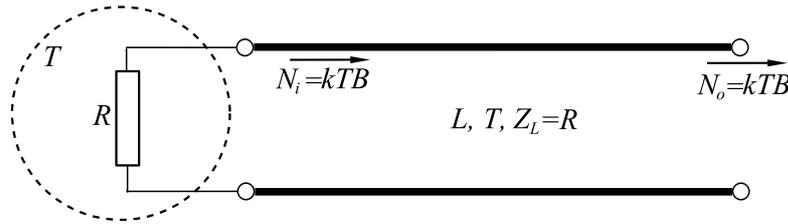


Bild 8.7.: Rauschzahlbestimmung einer verlustbehafteten Leitung oder eines Dämpfungsglieds bei der Temperatur  $T$

### 8.1.5. Rauschzahl eines kaskadierten Systems

In einem typischen Hochfrequenz-System wandert das Eingangssignal durch eine Reihenschaltung von mehreren verschiedenen Komponenten, von denen jede das Signal-zu-Rauschverhältnis beeinflusst. Falls die Rauschzahlen (bzw. die Rauschtemperaturen) der einzelnen Komponenten bekannt sind, kann die Rauschzahl (bzw. die Rauschtemperatur) des Gesamtsystems berechnet werden. Es wird sich zeigen, dass in der Regel die Rauscheigenschaften der ersten Stufe den größten Einfluss haben. Diese Tatsache spielt in der Praxis eine entscheidende Rolle.

Betrachtet man, wie in Bild 8.8 dargestellt, zwei Komponenten mit den jeweiligen Verstärkungen  $G_1$  und  $G_2$ , den Rauschzahlen  $F_1$  und  $F_2$ , sowie den Rauschtemperaturen  $T_{e1}$  und  $T_{e2}$ , so ist es von Interesse die Rauschzahl des kaskadierten Systems zu kennen. Die Verstärkung des kaskadierten Systems beträgt  $G_1 G_2$ . Die Rauschleistung am Ausgang der ersten Komponente ergibt sich zu

$$N_1 = G_1 N_i + G_1 k T_{e1} B = G_1 k T_0 B + G_1 k T_{e1} B, \quad (8.20)$$

wobei die Eingangsrauschleistung  $N_i = k T_0 B$  beträgt. Für die Rauschtemperatur am Ausgang der zweiten Komponente folgt

$$N_o = G_2 N_1 + G_2 k T_{e2} B = G_1 G_2 k B \left( T_0 + T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_1} \right). \quad (8.21)$$

Für das Gesamtsystem gilt

$$N_o = G_1 G_2 k B (T_{e,\text{cas}} + T_0) \quad (8.22)$$

und somit folgt aus dem Vergleich mit (8.21) für die Rauschtemperatur des kaskadierten Systems

$$T_{e,\text{cas}} = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_1}. \quad (8.23)$$

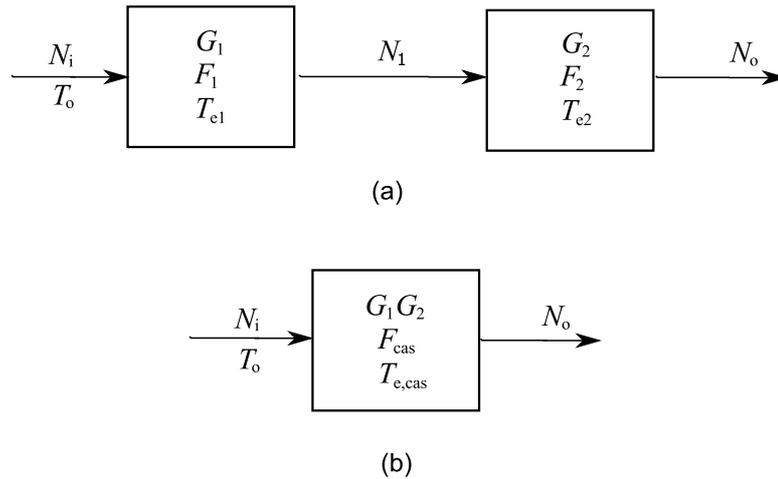


Bild 8.8.: Rauschzahl und äquivalente Rauschtemperatur eines kaskadierten Systems:  
 (a) Zwei kaskadierte Zweitore (b) Äquivalentes Netzwerk

Mit (8.14) folgt für die Rauschzahl des kaskadierten Systems

$$F_{\text{cas}} = 1 + \frac{T_{e,\text{cas}}}{T_0} = 1 + \frac{T_{e1}}{T_0} + \frac{T_{e2}}{T_0 G_1} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1}. \quad (8.24)$$

Die Gleichungen (8.23) und (8.24) zeigen, dass die Rauscheigenschaften eines kaskadierten Systems hauptsächlich von der ersten Stufe bestimmt werden, da der Effekt der zweiten Stufe durch den Gewinn der ersten Stufe abgeschwächt wird. Aus diesem Grund muss man, um für ein Gesamtsystem optimale Rauscheigenschaften zu erzielen, eine erste Stufe mit einer geringen Rauschzahl und einer zumindest mäßigen Verstärkung verwenden. Diese Stufen werden als rauscharme Verstärker (*Low Noise Amplifier*, LNA) bezeichnet und spielen eine entscheidende Rolle bei jedem Funkempfänger.

Die Gleichungen (8.23) und (8.24) können auf eine beliebige Anzahl  $N$  kaskadierter Stufen erweitert werden und ergeben sich dann als:

$$T_{e,\text{cas}} = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_1} + \frac{T_{e3}}{G_1 G_2} + \dots = T_{e1} + \sum_{i=2}^N \frac{T_{e,i}}{\prod_{j=1}^{i-1} G_j}, \quad (8.25)$$

$$F_{\text{cas}} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + \dots = F_1 + \sum_{i=2}^N \frac{F_i - 1}{\prod_{j=1}^{i-1} G_j}. \quad (8.26)$$

## 8.2. Komponenten von Mikrowellensystemen

Mikrowellensysteme bestehen in der Regel aus vielen einzelnen Komponenten wie z.B. Leitungen, Filter, Koppler, Zirkulatoren, Verstärker, Antennen, Mischer, Detektoren, Vervielfacher, Teiler. In diesem Kapitel wird bewusst darauf verzichtet, den Aufbau dieser Komponenten anhand von Schaltbildern zu behandeln. Es soll nur ein Verständnis für die Funktionsweise der Schaltungsblöcke mit ihren wichtigsten charakteristischen Parametern gegeben werden. Details über den Aufbau einer Schaltung werden nur dann präsentiert, wenn sie für das Verständnis der Eigenschaften unbedingt nötig sind. Im Folgenden werden deshalb zuerst einige grundlegenden Eigenschaften verschiedener Mikrowellenschaltungen erläutert. Im Anschluss daran wird ein Überblick über die wichtigsten Mikrowellenkomponenten zusammen mit Ihren Eigenschaften und Parametern gegeben.

### 8.2.1. Nichtlineare Kennlinien

Auf Grund ihrer zentralen Bedeutung innerhalb der HF-Sender- und Empfängertechnik werden in diesem Abschnitt speziell die Komponenten behandelt, die auf nichtlinearen Kennlinien beruhen. Die entstehenden Komponenten sind Mehrere, bei denen die Ausgangsgröße (z.B. Spannung oder Strom) keine lineare Funktion der Eingangsgröße (z.B. Spannung oder Strom) ist. Aus der Vielzahl an nichtlinearen Bauelementen der Elektrotechnik sind

- Halbleiterdioden,
- Transistoren und
- Röhren

in der Hochfrequenztechnik am häufigsten anzutreffen. Die wichtigsten Anwendungen ihrer nichtlinearen Eigenschaften sind

- Frequenzumsetzung (d.h. Mischer),
- Frequenzvervielfachung,
- Detektion und
- Leistungsmessung.

Um allgemein die Funktionsweise der nichtlinearen Komponenten zu verstehen, betrachten wir hier die nichtlineare, exponentielle Kennlinie einer Halbleiterdiode:

$$i(u) = I_S \cdot (e^{u/U_T} - 1) \quad (8.27)$$

Der Einfachheit halber werden die Betrachtungen hier auf nichtlineare Komponenten ohne Speichereffekt beschränkt, d.h. dass der Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße

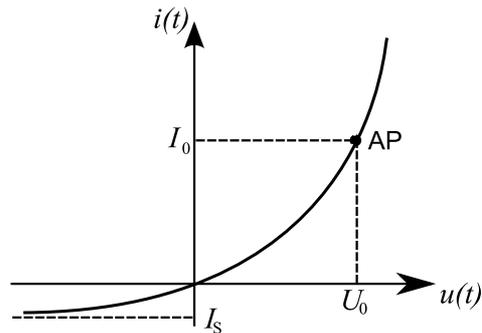


Bild 8.9.: Kennlinie einer Halbleiterdiode als Beispiel für eine nichtlineare Kennlinie

eindeutig ist und nicht von der Vorgeschichte abhängt. Bei Raumtemperatur ist die Temperaturspannung  $U_T \approx 25\text{mV}$  und im Falle einer Silizium-Diode beträgt der Sperrstrom  $I_S = 10^{-8}\text{A}$ . Der Verlauf der Kennlinie ist in Bild 8.9 skizziert.

In der hochfrequenten Schaltungstechnik werden solche Kennlinien häufig mit kleinen Signalen angesteuert (Kleinsignalaussteuerung). Das bedeutet, dass die Amplitude des Eingangssignals klein gegenüber dem gesamten Kennlinienbereich ist und nur ein relativ kleiner Bereich um den Arbeitspunkt (AP) herum angesteuert wird. Der Arbeitspunkt wird mit einer überlagerten Gleichspannung eingestellt. Gemäß Kennlinie fließt ein Gleichstrom  $I_0$  (Bias-Strom). Ein zusätzliches zeitabhängiges Signal  $\Delta u(t)$  soll die Kennlinie nur in einer kleinen Umgebung um den AP ( $U_0, I_0$ ) aussteuern. Die Diodenspannung  $u(t)$  und damit auch der Diodenstrom  $i(t)$  setzen sich also gemäß

$$u(t) = U_0 + \Delta u(t) \quad (8.28)$$

$$i(t) = I_0 + \Delta i(t) \quad (8.29)$$

aus einem Gleichanteil und einem zeitabhängigen Anteil zusammen. Bei eingepprägter Spannung  $u(t)$  kann der Strom  $i(t)$  im Punkt AP in eine Potenzreihe nach Taylor entwickelt werden:

$$i(t) = i(U_0) + \left. \frac{di}{du} \right|_{U_0} \cdot \Delta u + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2i}{du^2} \right|_{U_0} \cdot \Delta u^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3i}{du^3} \right|_{U_0} \cdot \Delta u^3 + \dots \quad (8.30)$$

Hierbei ist der Gleichanteil  $i(U_0) = I_0$  und der Wechselanteil besitzt die Form

$$\Delta i = S \cdot \Delta u + k_2 \cdot \Delta u^2 + k_3 \cdot \Delta u^3 + \dots \quad (8.31)$$

Den Proportionalitätsfaktor vor dem linearen Glied  $S = (di/du)|_{U_0}$  bezeichnet man als Steilheit der Kennlinie im Arbeitspunkt.  $S$  hat die Dimension eines Leitwertes.

Je nach erforderlicher Genauigkeit kann die Reihenentwicklung (8.30) weiter entwickelt werden. In den meisten praktischen Fällen nehmen die Koeffizienten  $k_v$  jedoch mit wachsendem  $v$  so schnell ab, dass (8.30) nach der 2. oder 3. Potenz abgebrochen werden kann. In vielen Fällen werden nichtlineare Kennlinien auch mit großer Ansteuerung oder ohne Bias (engl. Zero-Bias) betrieben. In diesen Fällen stimmen zwar die Betrachtungen hier nicht mehr ganz, aber da die prinzipielle Funktionsweise ähnlich bleibt, wird hier auf weiter führende Betrachtungen verzichtet. Im Folgenden wird an Hand von (8.30) die Funktionsweise nichtlinearer Kennlinien beim Anlegen unterschiedlicher Signale demonstriert.

### Aussteuerung mit einer Frequenz

Der einfachste Fall ist sicherlich die Aussteuerung mit einem monofrequenten Signal

$$\Delta u(t) = U_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \phi_1). \quad (8.32)$$

Eingesetzt in (8.31) und mit  $\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$  und  $\cos^3 \alpha = (3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)/4$  ergibt sich für den Wechselanteil des Stroms:

$$\Delta i(t) = S \cdot U_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \phi_1) + k_2 \cdot U_1^2 \cdot \cos^2(\omega_1 t + \phi_1) + k_3 \cdot U_1^3 \cdot \cos^3(\omega_1 t + \phi_1) + \dots \quad (8.33)$$

Durch Zusammenfassen der Komponenten gleicher Frequenzen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta i(t) = & \frac{1}{2} k_2 U_1^2 && \text{Gleichspannung} \\ & + \left( S \cdot U_1 + \frac{3}{4} k_3 U_1^3 \right) \cos(\omega_1 t + \phi_1) && \text{1. Harmonische} \\ & + \frac{1}{2} k_2 U_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\phi_1) && \text{2. Harmonische} \\ & + \frac{1}{4} k_3 U_1^3 \cos(3\omega_1 t + 3\phi_1) && \text{3. Harmonische} \\ & + \dots && \end{aligned} \quad (8.34)$$

Aus den ersten drei Gliedern in (8.31) ergeben sich ein Gleichanteil (zusätzlich zu  $I_0$ ), Anteile bei der Eingangsfrequenz  $\omega_1$  sowie ihrer zweiten und dritten Harmonischen  $2\omega_1$  und  $3\omega_1$ . Eine Berücksichtigung höherer Terme würde weitere Harmonische erzeugen, wobei deren Beiträge mit zunehmender Ordnung deutlich geringer werden.

Die Amplitude des Gleichanteils von  $\Delta i$  in (8.34) ist proportional zur Leistung von  $\Delta u(t)$ . Gleichanteile, die durch Terme höherer Ordnung verursacht werden, können gegenüber dem in (8.34) notierten Gleichanteil auf Grund der deutlich kleineren Koeffizienten vernachlässigt werden. Bei geschickter Tiefpassfilterung am Ausgang der Schaltung ergibt sich deshalb die Möglichkeit der Gleichrichtung bzw. Leistungsmessung. Beispiele dafür sind Leistungsmessschaltungen bei Sendemodulen oder Hüllkurvendektoren in Amplitudenmodulationsempfängern.

Durch eine Bandpassfilterung am Ausgang der Schaltung um eine der harmonischen Schwingungen herum, entsteht ein Frequenzvervielfacher.

### Aussteuerung mit zwei Signalen unterschiedlicher Frequenz

Als allgemeiner Fall wird nun die Aussteuerung mit zwei Signalen unterschiedlicher Frequenz behandelt, d.h.

$$\Delta u(t) = U_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \phi_1) + U_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \phi_2). \quad (8.35)$$

Eingesetzt in (8.31) und mit  $\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$  und  $\cos^3 \alpha = (3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)/4$  ergibt sich für den Wechselanteil des Stroms:

$$\begin{aligned} \Delta i(t) = & \frac{1}{2}k_2U_1^2 + \frac{1}{2}k_2U_2^2 && \text{Gleichspannung} \\ & + \left(SU_1 + \frac{3}{4}k_3U_1^3 + \frac{3}{2}k_3U_1U_2^2\right) \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ & + \left(SU_2 + \frac{3}{4}k_3U_2^3 + \frac{3}{2}k_3U_1^2U_2\right) \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ & + \frac{1}{2}k_2U_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\phi_1) \\ & + \frac{1}{2}k_2U_2^2 \cos(2\omega_2 t + 2\phi_2) \\ & + k_2U_1U_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2] && \text{1. Mischglied} \\ & + k_2U_1U_2 \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \phi_1 + \phi_2] && \text{2. Mischglied} \\ & + \frac{1}{4}k_3U_1^3 \cos(3\omega_1 t + 3\phi_1) \\ & + \frac{1}{4}k_3U_2^3 \cos(3\omega_2 t + 3\phi_2) \\ & + \frac{3}{4}k_3U_1^2U_2 \cos[(2\omega_1 - \omega_2)t + 2\phi_1 - \phi_2] && \text{Intermodulation} \\ & + \frac{3}{4}k_3U_1U_2^2 \cos[(2\omega_1 + \omega_2)t + 2\phi_1 + \phi_2] \\ & + \frac{3}{4}k_3U_1U_2^2 \cos[(2\omega_2 - \omega_1)t + 2\phi_2 - \phi_1] && \text{Intermodulation} \\ & + \frac{3}{4}k_3U_1U_2^2 \cos[(2\omega_2 + \omega_1)t + 2\phi_2 + \phi_1] \\ & + \dots \end{aligned} \quad (8.36)$$

In (8.36) wird deutlich, dass außer den Vielfachen der beiden Frequenzen auch noch sogenannte Mischprodukte aus der Kombination beider Frequenzen entstehen. Die beiden Terme mit Summe und Differenz der beiden Frequenzen sind hierbei die Wichtigsten, da damit die Funktionsweise eines Frequenzumsetzers bzw. Mischers erklärt wird. Alle anderen Signale in (8.36) sind bei Anwendung als Mischer Störsignale und müssen herausgefiltert werden. Besonders störend sind dabei die Anteile bei  $2\omega_1 - \omega_2$  und  $2\omega_2 - \omega_1$ , die als Intermodulationsprodukte dritter Ordnung bezeichnet werden. Handelt es sich bei  $\omega_1$  und  $\omega_2$  um zwei Frequenzen innerhalb der Nutzbandbreite des Eingangssignals, dann liegen deren Intermodulationsprodukte mit großer Wahrscheinlichkeit wieder im Nutzfrequenzbereich. Die Leistung dieser Intermodulationen bezogen auf das Nutzsignal selbst wird als Intermodulationsabstand bezeichnet.

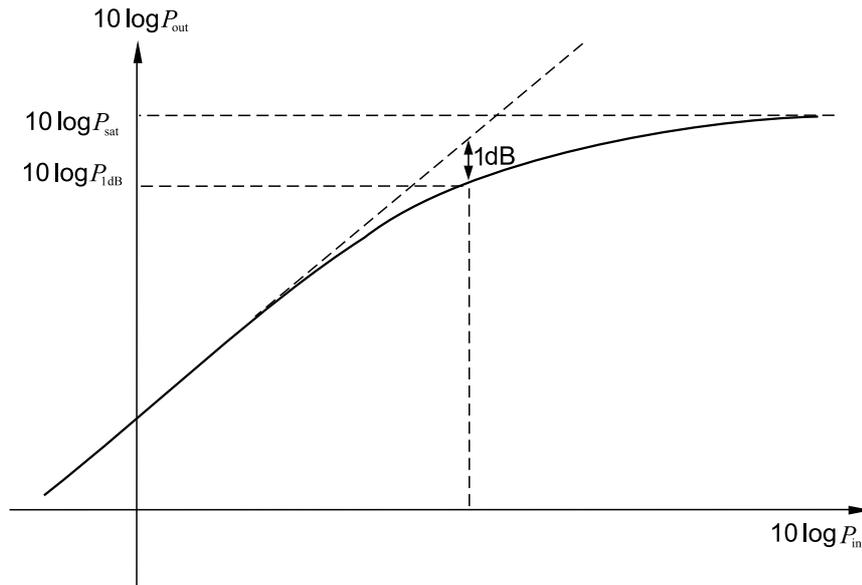


Bild 8.10.: Großsignalaussteuerung eines Verstärkers und 1dB Kompressionspunkt

### 8.2.2. Verstärkung hochfrequenter Signale

In der Hochfrequenztechnik werden Verstärker im Allgemeinen am Ein- und Ausgang angepasst, d.h. die wichtigste Kenngröße eines HF-Verstärkers ist die Leistungsverstärkung. Ein Verstärker wandelt basierend auf einem aktiven Bauelement Leistung aus einer Gleichspannungsversorgung in hochfrequente Leistung um. Es werden Bauelemente wie Transistoren und Röhren verwendet, die nichtlineare Kennlinien besitzen (siehe Abschnitt 8.2.1). Im sogenannten Kleinsignalbetrieb ist die Eingangsleistung so klein, dass die Verstärkung unabhängig von dieser ist. Zu immer höheren Eingangsleistungen hin beginnt die Verstärkung allerdings zu variieren. Dies kann auch erklärt werden, wenn man in (8.34) den Term der 1. Harmonischen betrachtet. Da  $k_3 < 0$ , ist der Gewinn eine über der Eingangsamplitude abnehmende Funktion. Für ausreichend große Eingangssignale verschwindet der Gewinn komplett. Diesen Zustand nennt man Sättigung und definiert dazu die maximal erreichbare Ausgangsleistung bzw. Sättigungsleistung  $P_{sat}$  (siehe Bild 8.10). Zur Beschreibung des Übergangs zwischen linearer Verstärkung und Sättigung wird der 1dB-Kompressionspunkt verwendet. Er beschreibt diejenige Ausgangsleistung, bei der die Verstärkung um 1dB gegenüber der Verstärkung bei sehr kleiner Leistung abgesunken ist (siehe auch Bild 8.10). Der Verlauf dieser Kurve ist unterschiedlich je nach Verstärkertyp bzw. Zusammensetzung der Koeffizienten  $k_i$ .

Ein weiterer sehr wichtiger Effekt, der bei Verstärkern für moderne Mikrowellensysteme beachtet werden muss, ist die Intermodulation (IM). Dazu sind in (8.36) insbesondere die Intermodulationsprodukte 3. Ordnung bei  $2\omega_1 - \omega_2$  und  $2\omega_2 - \omega_1$  relevant. Im Fall zweier Signale mit kaum unterschiedlichen Frequenzen entstehen dadurch Störsignale bei nah benachbarten Frequenzen (siehe Bild 8.11), die sich unter Umständen sehr schwer durch Filter unterdrücken

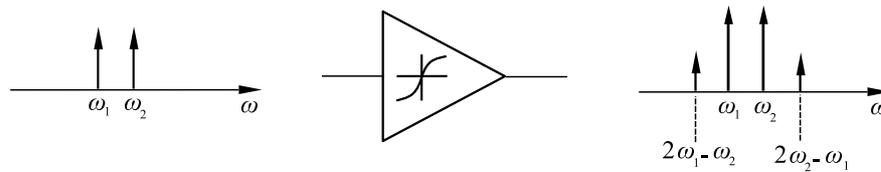


Bild 8.11.: Intermodulationsprodukte 3. Ordnung bei Zweisignalaussteuerung

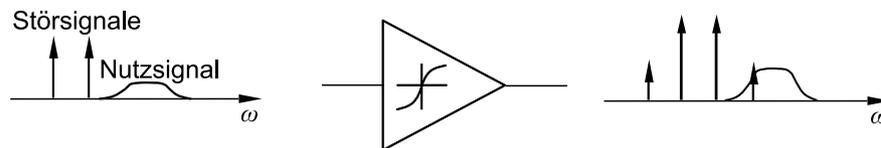


Bild 8.12.: Störsignale am Beispiel UMTS

lassen oder sogar direkt im Nutzfrequenzband liegen.

Dies lässt sich am Beispiel eines Mobilfunkempfängers für den UMTS-Standard (UMTS: Universal Mobile Telecommunications System) gut veranschaulichen. Hierbei sind die Anforderungen an die Nachbarkanalunterdrückung im Sender und Empfänger für den Downlink (von der Basisstation zur Mobilstation) sehr hoch. Dies bedeutet, dass im Extremfall in direkter Nachbarschaft des kleinen Nutzsignals deutlich stärkere Nachbarkanäle am Empfänger eintreffen (siehe Bild 8.12).

Durch Intermodulation der Frequenzanteile des Nachbarkanals entstehen Störsignale im Nutzsignal, die im restlichen Empfänger nicht mehr beseitigt werden können. Bei der Charakterisierung der Intermodulation wird generell von zwei Signalen mit gleicher Amplitude  $U = U_1 = U_2$  ausgegangen. Der Quotient aus Intermodulationsstörsignal und Nutzsignal beschreibt die IM-Störung. Bei  $k_1 U = 1V$  und  $\frac{3}{4} k_3 U^3$  z.B. spricht man von einer IM-Störung von  $-40dBc$ , wobei der Buchstabe „c“ den Bezug zum Nutzsignal angibt. Es ist unbedingt zu beachten, dass der Quotient von der Amplitude der Signale abhängt. Als Kenngröße für das Intermodulationsverhalten verwendet man deshalb den sogenannten *Third Intercept Point* (IP3). Dabei wird für zwei Signale mit gleicher Amplitude  $U = U_1 = U_2$  der Schnittpunkt bestimmt, an dem sich die beiden Kurven der ersten und dritten Harmonischen schneiden würden. Dies ist in Bild 8.13 skizziert. In doppellogarithmischer Darstellung von Ausgangsleistung über Eingangsleistung verlaufen beide Kurven in der Form von Geraden. Damit genügen jeweils zwei Messpunkte zur Bestimmung der gesamten Kurven und damit des Schnittpunktes.

Es ist hierbei zu beachten, dass der Schnittpunkt außerhalb des linearen Bereichs der Kurven liegt, d.h. beide Kurven müssen bei deutlich geringeren Leistungen gemessen werden. Je nachdem, ob sich der Wert auf die Eingangs- oder Ausgangsleistung bezieht, finden die Bezeichnungen *Third Input Intercept Point* (IIP3) oder *Third Output Intercept Point* (OIP3) Anwendung.

Die Kenngrößen Sättigung ( $P_{sat}$ ), 1dB-Kompressionspunkt ( $P_{1dB}$ ), Intermodulation ( $IIP_3$ ,

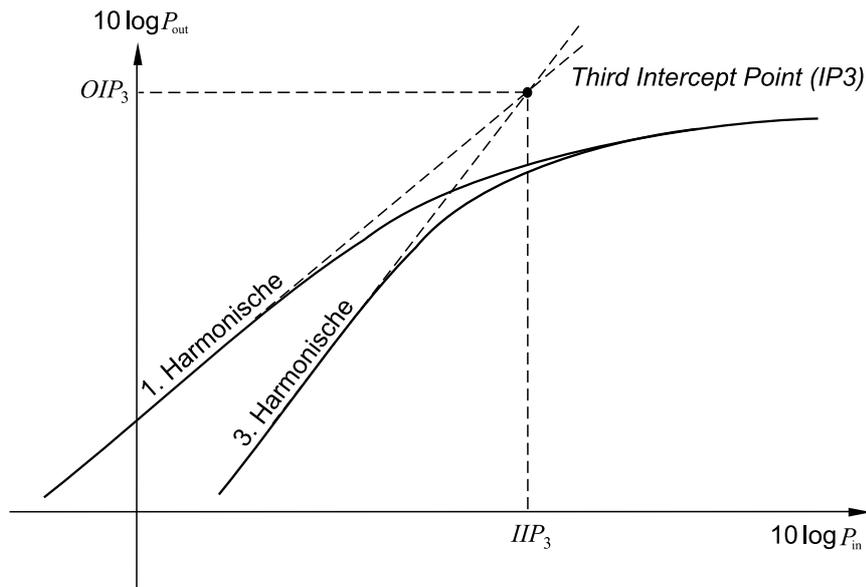


Bild 8.13.: Third Intercept Point

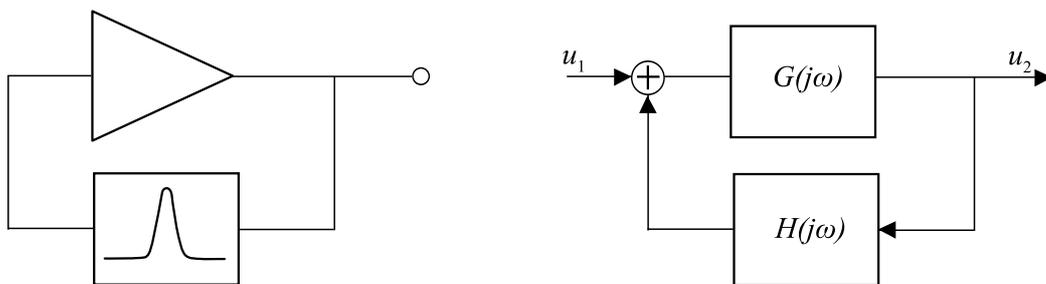


Bild 8.14.: Blockschaltbild und Signalflussdiagramm eines einfachen rückgekoppelten Oszillators

$OIP_3$ ) werden nicht nur für Verstärker sondern auch für alle anderen Mikrowellenkomponenten verwendet (z.B. Mischer).

### 8.2.3. Schwingungserzeugung

Eine weitere wesentliche aktive Komponente der Mikrowellentechnik ist der Oszillator. Ein Oszillator generiert ein periodisches Ausgangssignal, d.h. er erzeugt eine Schwingung. Ein solcher Schaltkreis muss dazu einen sich selbst erhaltenden Mechanismus besitzen, bei dem aus dem Eigenrauschen ein periodisches Signal entsteht. Ein vereinfachtes Beispiel für einen Oszillator ist in Bild 8.14 gegeben. Das Ausgangssignal des Verstärkers wird über ein Filter an den Eingang des Verstärkers zurück geführt. Aus dem Signalflussdiagramm des Oszillators in Bild 8.14

lässt sich die Ausgangsspannung  $u_2$  bestimmen:

$$u_2 = u_1 \frac{G(j\omega)}{1 - G(j\omega)H(j\omega)}. \quad (8.37)$$

Um bei  $u_1 = 0$  eine Ausgangsspannung  $u_2 \neq 0$  zu erhalten, muss der Nenner in Gleichung (8.37) Null werden, d.h. für die Schwingfrequenz  $\omega_0$  muss

$$G(j\omega)H(j\omega) = 1 \quad (8.38)$$

gelten. Diese Bedingung nennt man *Barkhausen-Kriterium*. Für eine Schwingung mit konstanter Amplitude muss daher für die Verstärkung der offenen Schleife  $G(j\omega)H(j\omega)$  gelten:

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = 1 \quad (8.39)$$

$$\arg [G(j\omega)H(j\omega)] = n \cdot 360^\circ \quad (8.40)$$

Die Schwingfähigkeit selbst macht keine Aussage zur Stabilität des Systems. Sie sagt nur aus, dass Schwingfähigkeit besteht. Die Schwingung kann nach Anregung abklingend, konstant oder anwachsend bis zur Begrenzung sein. Die Anregung erfolgt in der Praxis aus dem Rauschen oder aus einer Störung, z.B. dem Einschaltstromstoß. Durch das Filter wird die Frequenzwahl getroffen, d.h. die Güte des Filters geht direkt in die Oszillatorgüte ein. In vielen Fällen besteht das Filter aus Komponenten, deren Resonanzfrequenz durch eine Steuerspannung veränderbar ist, um die Frequenz des Oszillators steuern zu können. Es handelt sich dann um einen *Voltage Controlled Oscillator* (VCO).

Eine der wichtigsten Kenngrößen für Oszillatoren neben offensichtlichen Werten wie Frequenzabstimmbereich, Ausgangsleistung usw. ist das Phasenrauschen. Das Leistungsspektrum eines Oszillators besteht nicht nur aus einer einzigen diskreten Frequenz sondern besitzt den in Bild 8.15 skizzierten typischen Verlauf.

Das Phasenrauschen wird nun bezogen auf die Leistung des Hauptsignals (d.h. in dBc/Hz) abhängig von der Frequenzdifferenz angegeben. Die Anforderungen an das Phasenrauschen werden durch das Gesamtsystem bestimmt. In den meisten Fällen muss das Phasenrauschen des eigentlichen Oszillators durch eine zusätzliche Regelschaltung, der sogenannten *Phase Locked Loop* (PLL) weiter reduziert werden. Dabei wird die Ausgangsfrequenz in einen deutlich tieferen Frequenzbereich geteilt. Dort wird die Phase des Signals mit der Phase eines extrem rauscharmen Signals (z.B. von einem Quarzoszillator) verglichen und über eine Regelschleife die Frequenz des HF-Oszillators korrigiert.

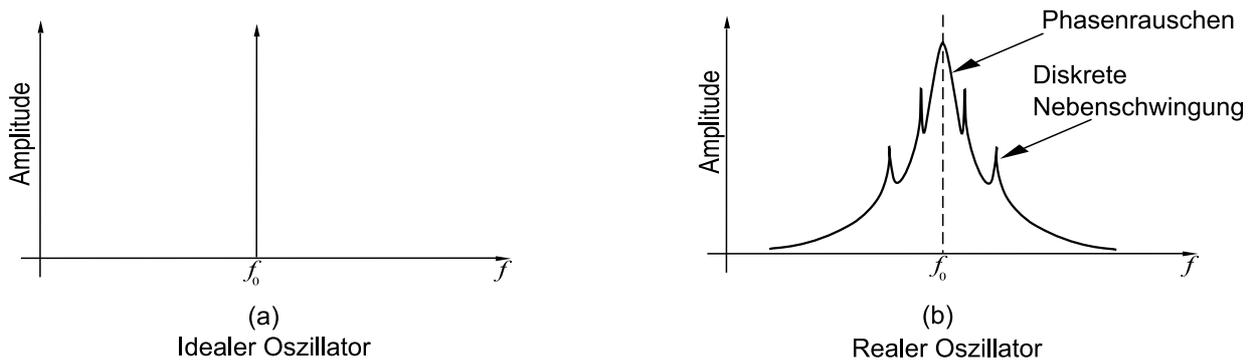


Bild 8.15.: Ideales und reales Spektrum eines Oszillators

### 8.2.4. Zusammenfassung der wichtigsten HF-Komponenten von Mikrowellensystemen

In Bild 8.16 sind die wichtigsten Mikrowellenkomponenten mit ihren Blockschaltbildern und einigen wichtigen Parametern zusammengefasst. Da bei Mikrowellensystemen immer davon ausgegangen werden kann, dass die einzelnen Schaltungsblöcke angepasst sind und über eine Leitung verbunden werden können, werden die Masseverbindungen in Blockschaltbildern gewöhnlich weggelassen. Je nach System und Anwendung müssen natürlich noch weitere Parameter beachtet werden, die nicht in Bild 8.16 aufgelistet sind, wie z.B. Temperaturabhängigkeit oder Leistungsverbrauch.

Im Folgenden sollen die Komponenten, die bisher noch nicht genauer erklärt wurden, kurz erläutert werden. Bei einem Mischer wird ein beliebiges Signal an einem nichtlinearen Element (Diode, Transistor) mit einem Sinussignal in einen anderen Frequenzbereich verschoben (siehe Kapitel 8.2.1). Das Sinussignal wird dabei als Lokaloszillator (LO) bezeichnet. Die beiden anderen Signale werden mit RF (*Radio Frequency*) und ZF bzw. IF (*Zwischenfrequenz* bzw. *Intermediate Frequency*) gekennzeichnet. Bei fundamentalen Mixern werden speziell die Mischglieder 1. Ordnung ausgenutzt um so eine Abwärts- ( $f_{ZF} = f_{RF} - f_{LO}$ ) oder eine Aufwärtsmischung ( $f_{RF} = f_{ZF} + f_{LO}$ ) zu realisieren. Der Unterschied zwischen Ein- und Ausgangssignalpegel wird als Mischverlust definiert. Die Rauschzahl beschreibt das zusätzlich vom Mischer generierte Rauschen (siehe Kapitel 8.1.4). Die Linearität und der Dynamikbereich beschreiben ähnlich zu einem Verstärker den Pegelbereich, in dem der Ausgangspegel linear dem Eingangspegel folgt. Ein weiteres wichtiges Merkmal ist die LO-RF Unterdrückung, die beschreibt wie stark das LO-Signal auf den RF-Ausgang überkoppelt. Speziell in Fällen, in denen die LO-Frequenz innerhalb des RF-Frequenzbereichs liegt, ist dieser Parameter unter Umständen sehr kritisch, da der Artefakt in diesem Fall nicht mehr herausgefiltert werden kann.

Ein Koppler ist in der Regel ein symmetrisches Viertor. Der Großteil der Leistung, die an Port 1 eingespeist wird, wird zu Port 3 transmittiert. Ein Teil der Leistung wird jedoch auch zu Port 4

Mischer (Mixer)		Mischverlust Rauschzahl LO-RF Unterdrückung Dynamikbereich Linearität
Verstärker (Amplifier)		Verstärkung Rauschzahl Rückwirkungsfreiheit Linearität
Oszillator (Oscillator)		Signalfrequenz Oszillatorrauschen Ausgangsleistung
Spannungsgesteuerter Oszillator (Voltage Controlled Oscillator, VCO)		Frequenzbereich Oszillatorrauschen Ausgangsleistung
Filter (Filter)		Dämpfung im Durchlassbereich Obere und/oder untere Grenzfrequenz Welligkeit im Durchlassbereich
Koppler (Coupler)		Kopplung Isolation
Zirkulator (Circulator)		Dämpfung Isolation
Antenne (Antenna)		Gewinn / Antennenwirkfläche Impedanz / Anpassung Effizienz
Detektor (Detector)		Bandbreite Dynamikbereich
Frequenzvervielfacher (Frequency Multiplier)		Vervielfachungsgrad N Max. Ausgangsleistung Min. Eingangsleistung
Frequenzteiler (Frequency Divider)		Teilerfaktor N Max. Ausgangsleistung Min. Eingangsleistung
Leistungsteiler (Power Divider)		Dämpfung Amplituden - Balance Phasenfehler
Leitung (Transmission Line)		Wellenwiderstand Ausbreitungskonstante Dämpfung

Bild 8.16.: Zusammenfassung der wichtigsten HF-Komponenten und deren Parametern

gekoppelt. Port 2 dagegen ist von Port 1 isoliert. Die Streumatrix eines idealen, symmetrischen Kopplers ist gegeben durch

$$\left[ S_{\text{Koppler}} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_T & S_K \\ 0 & 0 & S_K & S_T \\ S_T & S_K & 0 & 0 \\ S_K & S_T & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.41)$$

Je nach Anwendung werden Koppler mit unterschiedlichen Kopplungskoeffizienten  $S_k$  verwendet. Ein 3 dB Koppler teilt die Leistung gleichmäßig auf Port 3 und 4 auf. Ein 10 dB Koppler führt nur ein Zehntel der Leistung an Port 4 ab. Die Isolation beschreibt wie stark der Port 2 vom Eingangsport 1 isoliert ist.

Der Zirkulator gehört zu den nichtreziproken Bauelementen. Auf die Funktionsweise soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden. Wichtig zu wissen ist, dass eine an Port 1 eingespeiste Leistung an Port 2 ausgegeben wird und der Port 3 isoliert ist. Andererseits wird eine am Port 2 eingespeiste Leistung am Port 3 ausgegeben (usw.). Die Streumatrix eines idealen Zirkulators ist gegeben durch

$$\left[ S_{\text{Zirkulator}} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.42)$$

Ein Detektor wird in der Regel dazu verwendet aus einem modulierten Signal das ursprüngliche Videosignal wieder herzustellen. Die Funktionsweise des Detektors kann am einfachsten an Hand von Bild 8.17 erklärt werden. Der Detektor, bestehend aus einer Schottky-Diode, führt im Prinzip eine Gleichrichtung des Signals durch, und stellt so aus dem amplitudenmodulierten Signal wieder das ursprüngliche Basisbandsignal her (abgesehen von der überlagerten Gleichspannung). Ein solches Bauelement wird als Hüllkurvendetektor bzw. Hüllkurvendemodulator bezeichnet. Die Detektoren werden für einen bestimmten Frequenzbereich (Bandbreite) spezifiziert. Auch für Detektoren wird der Dynamikbereich als der Pegelbereich spezifiziert, in dem der Detektor das erwünschte Verhalten hat.

Ein Frequenzvervielfacher basiert auf der Eintonaussteuerung eines nichtlinearen Bauelements nach (8.34), durch das Signalkomponenten bei Mehrfachen der Eingangsfrequenz  $f_e$  erzeugt werden. Durch Filter wird möglichst nur die erwünschte N-te Harmonische  $f_a = N f_e$  an den Ausgang gegeben, die restlichen Harmonischen werden unterdrückt. Frequenzteiler können entweder digital durch Flip-Flops realisiert werden, jedoch auch analog durch Synchronisationschaltungen, bei denen ein Oszillator die Ausgangsfrequenz  $f_a = f_e/N$  erzeugt, der durch die höhere Frequenz  $f_e$  synchronisiert wird. In allen Fällen sind vor allem die minimale Eingangsleistung und die maximal erzielbare Ausgangsleistung wichtige Beschreibungsgrößen.

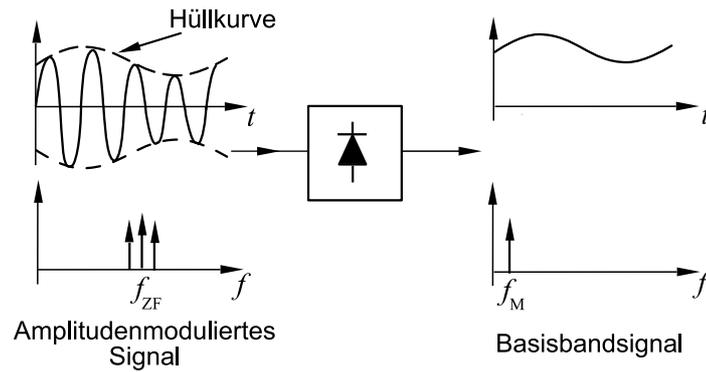


Bild 8.17.: Funktionsprinzip eines Hüllkurvendetektors

Ein Leistungsteiler teilt im Prinzip die von Port 1 kommende Leistung gleichmäßig auf die Ports 2 und 3 auf, erzeugt jedoch auch Verluste, die durch die Dämpfung beschrieben werden. In der Regel besteht eine feste Phasenbeziehung zwischen den beiden Ausgangsports, d.h. die an den Ports 2 und 3 ankommenden Signale haben je nach Bauweise die selbe Phase oder z.B. eine um  $180^\circ$  abweichende Phase. Der Phasenfehler beschreibt wie sehr die Differenz der beiden Ausgangsphasen vom erwünschten Wert abweicht. Äquivalent dazu wird die Amplituden-Balance als weiterer Parameter definiert.

# 9. Mikrowellensysteme

Die in Kapitel 8 eingeführten Komponenten können zu komplexeren Mikrowellensystemen zusammengesetzt werden. Anwendungen hierfür sind:

- Radarsysteme
- Kommunikationstechnik
- Radiometrie
- elektronische Kampfführung
- Mikrowellenheizung
- medizinische Anwendungen (z.B. Magnetresonanztomographie)

## 9.1. Funkkommunikationssysteme

Die Funkkommunikation hat sich seit der Entdeckung der elektromagnetischen Wellen durch Heinrich Hertz in Karlsruhe im Jahr 1886 rasant entwickelt. Wurde am Anfang des 20. Jahrhunderts im zivilen Bereich hauptsächlich Rundfunk und später auch Fernsehen über elektromagnetische Wellen verbreitet, so ist die Funkkommunikation aus unserer heutigen Zeit nicht mehr weg zu denken. Speziell die mobile Funkkommunikation hat das Ende des 20. Jahrhunderts geprägt. Daneben spielen aber auch weiterhin Rundfunk und Fernsehen (häufig auch über Satellit übertragen) sowie Richtfunk eine wichtige Rolle. Auf Grund der großen Zahl anderer Vorlesungen zu den Themen Mobilfunk, Satellitenkommunikation usw. wird hier auf weitere Ausführungen größtenteils verzichtet und nur auf ein paar grundlegende Dinge eingegangen. Darüber hinaus wird auf die jeweiligen Skripten bzw. die Literatur verwiesen.

### 9.1.1. Mikrowellensender und -empfänger

Dargestellt in Bild 9.1 ist ein einfaches Mikrowellenfunksystem basierend auf Amplitudenmodulation. Das Eingangssignal (im Basisband bei der Frequenz  $f_m$ ) besteht z.B. aus einem Sprach- oder Videosignal und wird durch einen Tiefpassfilter auf die gewünschten Frequenzanteile beschränkt. Das Basisbandsignal wird dann mit einem Lokaloszillatorsignal gemischt um das modulierte Trägersignal zu erzeugen. Der Mischer erzeugt im Wesentlichen ein Produktsi-

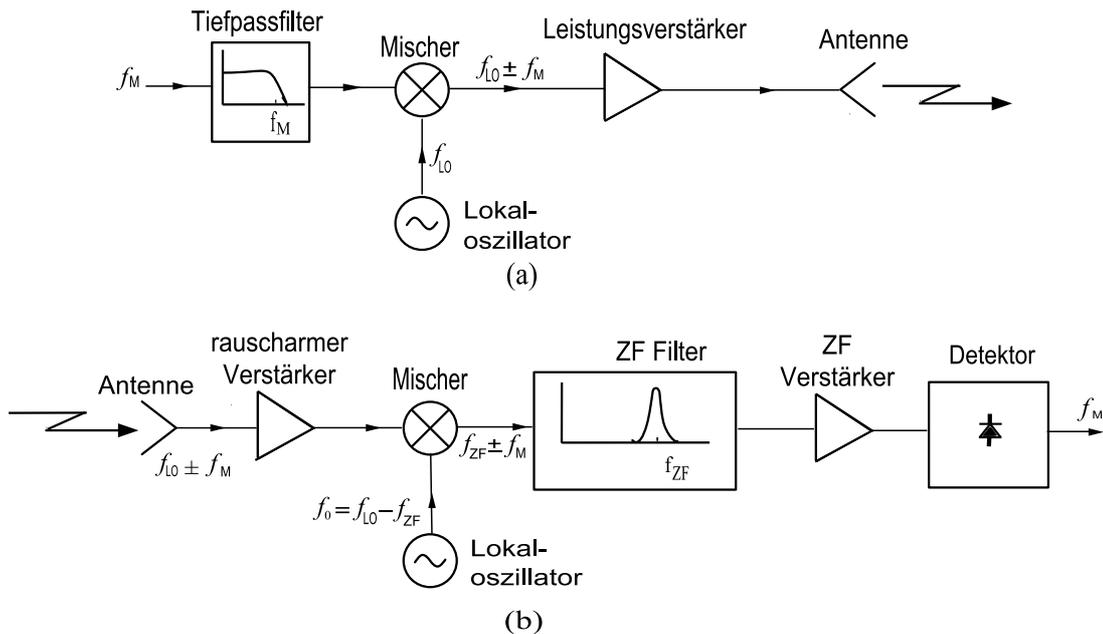


Bild 9.1.: Block Diagramm eines Mikrowellenfunksystems basierend auf Amplitudenmodulation bestehend aus Sender (a) und Empfänger (b)

gnal, das Anteile in den beiden Seitenbändern  $f_{LO} + f_m$  und  $f_{LO} - f_m$  besitzt. Diesen Vorgang nennt man Aufwärtsmischung. Das Signal des Lokaloszillators befindet sich in der Regel auf einer weit höheren Frequenz als das Basisbandsignal. Anschließend wird das modulierte Trägersignal vom Leistungsverstärker verstärkt und von der Antenne abgestrahlt.

Im Empfänger wird das empfangene Signal zuerst mit einem rauscharmen Verstärker verstärkt. Anschließend wird das Signal durch eine Abwärtsmischung auf die Zwischenfrequenz  $f_{ZF}$  gemischt. Um das zu erreichen, muss das Signal des hier verwendeten Lokaloszillators vom im Sender verwendeten LO um  $f_{ZF}$  abweichen. Nach dem Mischer wird das Signal von einem Bandpassfilter gefiltert, um unerwünschte harmonische Frequenzanteile, die im Mischvorgang entstanden sind, zu entfernen. Das gefilterte Signal im Zwischenfrequenzband wird danach erneut verstärkt, in diesem Fall von einem Verstärker mit geringerer Bandbreite und hoher Verstärkung. Der Detektor stellt daraufhin das Basisbandsignal bei  $f_m$  wieder her und ermöglicht die weitere Verarbeitung oder Verwendung des Signals.

Bild 9.2 zeigt das Blockschaltbild eines typischen modernen Funksystems (z.B. GSM oder UMTS). Im oberen Zweig ist der Sendepfad zu sehen. Es handelt sich hierbei um ein heterodynes Konzept, da die Basisbandsignale erst auf eine Zwischenfrequenz gebracht werden bevor sie dann auf die eigentliche Funkübertragungsfrequenz gemischt werden. Im Empfangspfad darunter werden die Signale hier allerdings direkt ins Basisband konvertiert. Man spricht demnach von einem *Direct Down Conversion Receiver*. Je nach Anforderung kommen in modernen Funksystemen unterschiedliche Konzepte zum Einsatz auf die hier nicht weiter eingegangen

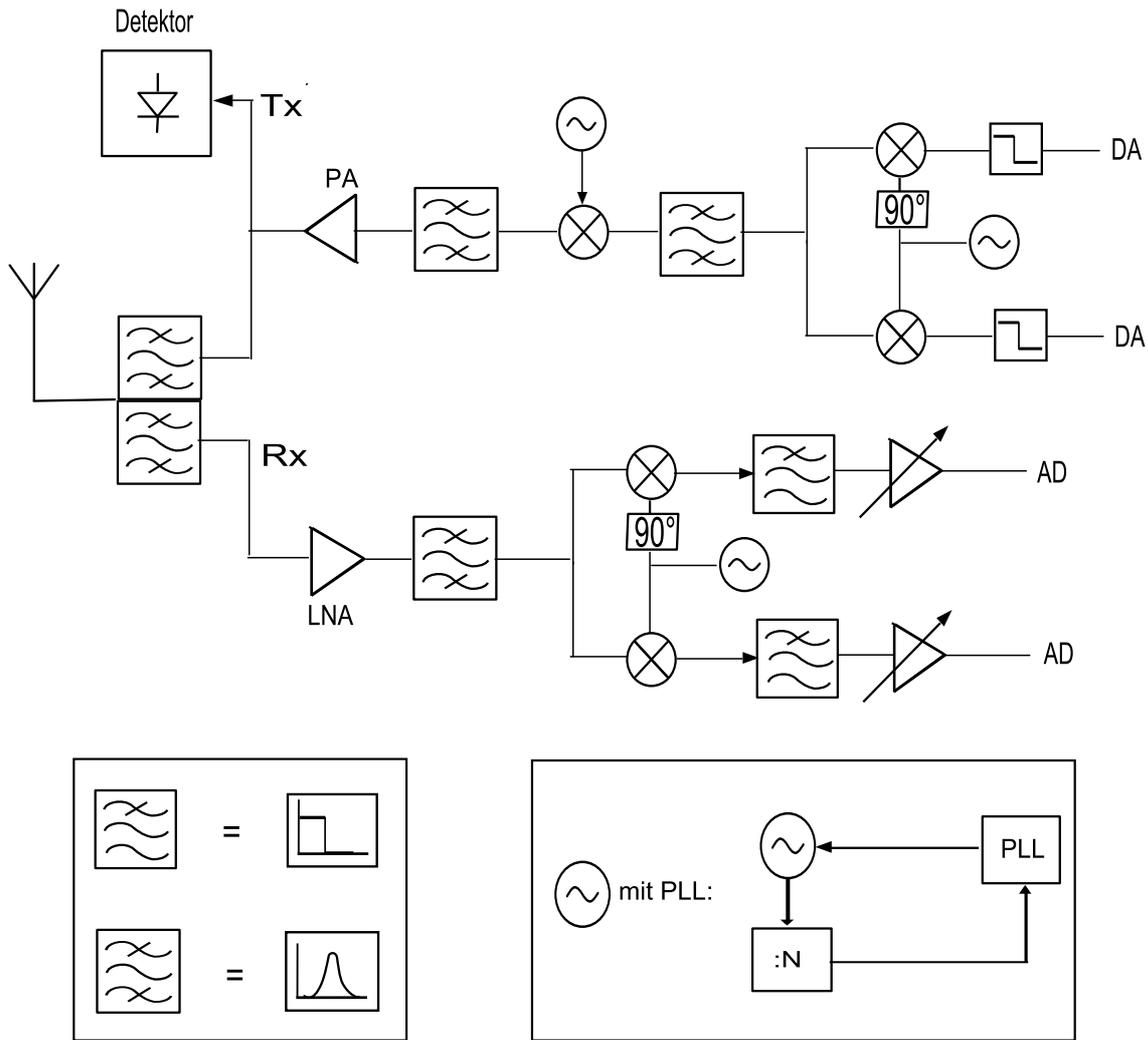


Bild 9.2.: Block Diagramm eines modernen Funkkommunikationssystems (z.B. GSM oder UMTS) für digitale Modulationsverfahren bestehend aus Sender (oberer Teil) und Empfänger (unterer Teil)

werden soll.

In Bild (9.3) ist zum Abschluss noch das Blockschaltbild eines kommerziellen UMTS Chip-Satzes gezeigt.

### 9.1.2. Rauschcharakterisierung eines Mikrowellenempfängers

Mit den in Kapitel 8.1 hergeleiteten Formeln ist es nun möglich die Rauschcharakterisierung eines kompletten Mikrowellenempfängers durchzuführen. Der Mikrowellenempfänger, dargestellt in Bild 9.4 besteht aus einer Empfangsantenne, einer Verbindungsleitung und einem Empfangssystem. Die Rauschzahl des gesamten Systems setzt sich dabei zusammen aus Anteilen

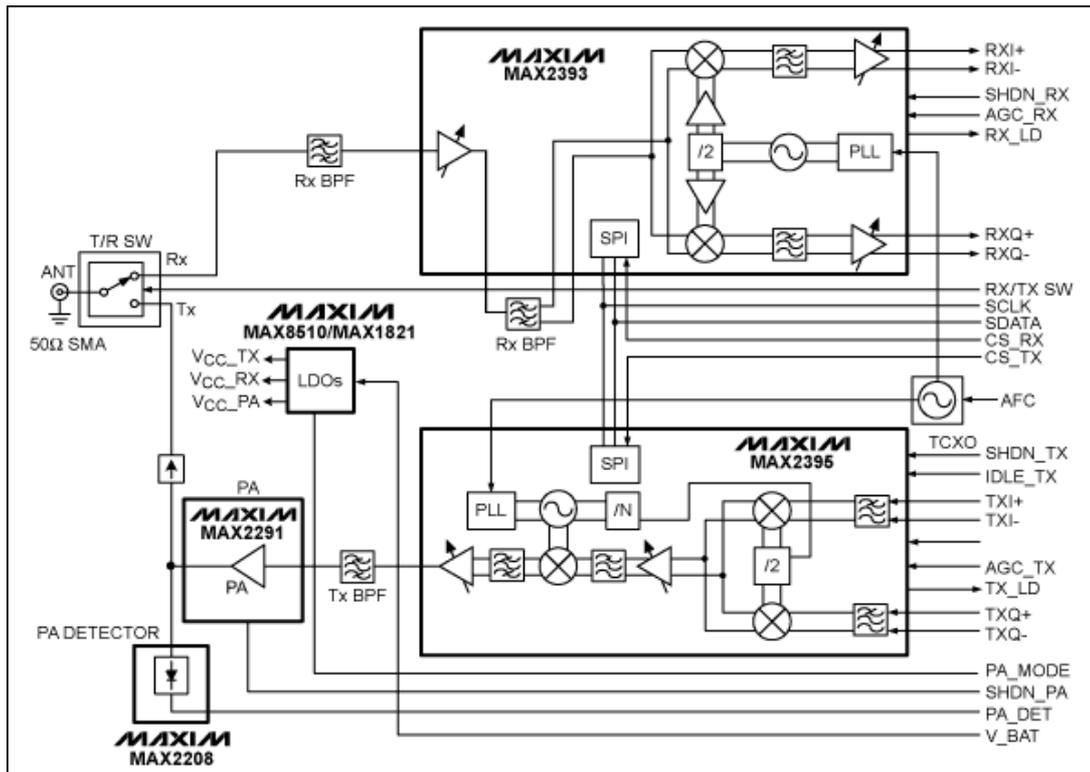


Bild 9.3.: Block Diagramm eines UMTS Frontends der Firma Maxim (Quelle: [http://www.maxim-ic.com/appnotes.cfm/an\\_pk/2233](http://www.maxim-ic.com/appnotes.cfm/an_pk/2233))

des Antennenrichtdiagramms, der Dämpfung in der Antenne und der Verbindungsleitung, sowie den Verlusten des Empfangssystems. Diese Rauschzahl bestimmt letztendlich den Minimalpegel des Empfangssignals der noch vom statistischen Rauschen unterschieden werden kann.

Das Empfängersystem in Bild 9.4 besteht aus einem RF Verstärker mit der Verstärkung  $G_{RF}$  und der Rauschtemperatur  $T_{RF}$ , einem Mischer mit der Durchgangsdämpfung  $L_M$  und der Rauschtemperatur  $T_M$ , sowie dem ZF Verstärker mit der Verstärkung  $G_{ZF}$  und der Rauschtemperatur  $T_{ZF}$ . Die Rauscheigenschaften der weiteren Stufen können vernachlässigt werden, da die Gesamt-Rauschzahl von den ersten Stufen bestimmt wird.

Nach (8.23) kann die äquivalente Rauschtemperatur des Empfängersystems als

$$T_{\text{Empf.}} = T_{RF} + \frac{T_M}{G_{RF}} + \frac{T_{ZF} L_M}{G_{RF}} \quad (9.1)$$

berechnet werden. Die Verbindungsleitung zwischen der Antenne und dem Empfängersystem weist eine Dämpfung  $L_L$  auf und hat die thermometrische Temperatur  $T_{\text{therm}}$ . Nach (8.18) ergibt sich somit ihre äquivalente Rauschtemperatur als

$$T_L = (L_L - 1)T_{\text{therm}} \quad (9.2)$$

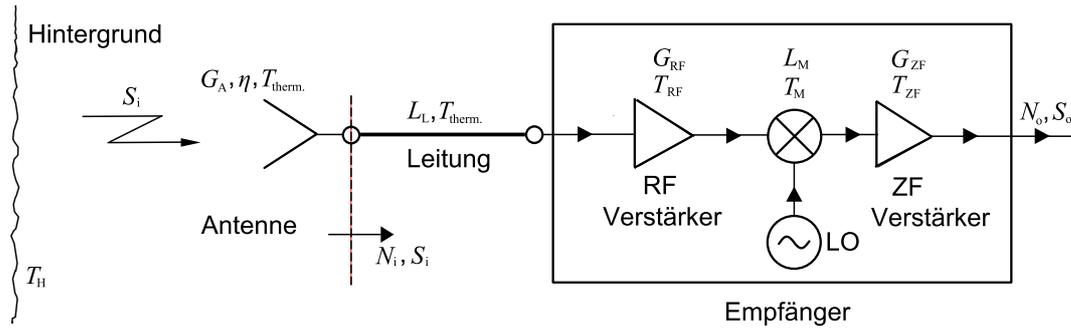


Bild 9.4.: Rauschcharakterisierung eines Mikrowellenempfängers inklusive Antenne und Leitung

Die Rauschtemperatur des Empfängersystems und der Verbindungsleitung ergibt sich dann als

$$T_{L+\text{Empf.}} = T_L + L_L T_{\text{Empf.}} = (L_L - 1)T_{\text{therm.}} + L_L T_{\text{Empf.}} \quad (9.3)$$

Prinzipiell nimmt die Antenne aus allen Winkelrichtungen Rauschleistung auf, abhängig davon welches Richtdiagramm sie hat. Wenn die Antenne sehr direktiv ist, ihre Hauptkeule in Richtung eines Hintergrunds mit der Hintergrundtemperatur  $T_H$  zeigt, und sie sich selbst in einer Umgebung mit der thermometrischen Temperatur  $T_{\text{therm}}$  befindet, kann die Rauschtemperatur der Antenne angenähert werden durch:

$$T_A = \eta T_H + (1 - \eta)T_{\text{therm.}} \quad (9.4)$$

wobei  $\eta$  der Antennenwirkungsgrad ist. Die empfangene Rauschleistung an den Antennenanschlüssen ergibt sich somit als

$$N_i = kBT_A = kB[\eta T_H + (1 - \eta)T_{\text{therm.}}] \quad (9.5)$$

wobei  $B$  die Systembandbreite darstellt. Wenn  $S_i$  die empfangene Signalleistung an der Antenne ist, kann man das Signal-zu-Rauschverhältnis an der Antenne als  $S_i/N_i$  berechnen. Die Ausgangssignalleistung  $S_o$  ergibt sich nach Verstärkung und Dämpfung der einzelnen Stufen als

$$S_o = S_i \frac{G_{\text{RF}} G_{\text{ZF}}}{L_L L_M} = S_i G_{\text{ges.}} \quad (9.6)$$

wobei  $G_{\text{ges.}}$  die Gesamtverstärkung des Systems darstellt. Die Ausgangsrauschleistung lässt

sich berechnen zu

$$\begin{aligned}
 N_o &= (N_i + kBT_{L+\text{Empf.}})G_{\text{ges.}} \\
 &= kB(T_A + T_{L+\text{Empf.}})G_{\text{ges.}} \\
 &= kB[\eta T_H + (1 - \eta)T_{\text{therm}} + (L_L - 1)T_{\text{therm}} + L_L T_{\text{Empf.}}]G_{\text{ges.}} \\
 &= kBT_{\text{ges.}}G_{\text{ges.}} ,
 \end{aligned} \tag{9.7}$$

wobei  $T_{\text{ges.}}$  als äquivalente Rauschtemperatur des Gesamtsystems definiert wurde. Folglich ergibt sich das Signal-zu-Rauschverhältnis am Ausgang zu

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{S_i G_{\text{ges.}}}{kBT_{\text{ges.}} G_{\text{ges.}}} = \frac{S_i}{kB[\eta T_H + (1 - \eta)T_{\text{therm}} + (L_L - 1)T_{\text{therm}} + L_L T_{\text{Empf.}}]} . \tag{9.8}$$

Die dargestellte Rechnung könnte statt über die Rauschtemperaturen auch über die Rauschzahlen durchgeführt werden, wobei man jedoch vorsichtig sein muss, da Rauschzahlen für  $N_i = kBT_0$  definiert sind, was in diesem Beispiel nicht der Fall ist. Der einfachere Weg führt in der Regel direkt über eine Betrachtung der Leistungspegel und der Rauschtemperaturen, wie sie hier vorgenommen wurde.

## 9.2. Radarsysteme

Radar (steht für **RA**dio **D**etection **A**nd **R**anging) ist neben der Kommunikation die wichtigste Anwendung der Mikrowellentechnologie. In grundlegender Ausführung sendet eine Antenne ein Signal aus, das von einem entfernten Körper – im Allgemeinen Ziel genannt – teilweise reflektiert und dann von einem empfindlichen Empfänger detektiert wird. Die Entfernung des Ziels wird durch die Laufzeit des Signals zum Ziel und zurück bestimmt. Die radiale Geschwindigkeit kann aus der Dopplerverschiebung ermittelt werden. Bei Verwendung einer stark gerichteten Antenne ist auch die Richtung des Ziels bekannt. Im Folgenden sind einige der typischen Anwendungen von Radarsystemen aufgelistet.

Zivile Anwendungen:

- Luftraumüberwachung
- Navigation für Flugzeuge und Schiffe
- Fahrerassistenzsysteme (z.B. Abstandsradar)
- Wetter-Radar
- Geschwindigkeitsmessung (z.B. im Straßenverkehr)
- Bewegungsmelder (z.B. Alarmanlage)

- Abstandsmessung in Fertigung, Füllstandsmessung
- Fernerkundung, Kartographie

Militärische Anwendungen:

- Luftraumüberwachung
- Navigation für Flugzeuge und Schiffe
- Detektion und Tracking von Flugzeugen, Raketen und Schiffen
- Lenksysteme für Raketen

Wissenschaftliche Anwendungen:

- Astronomie
- Kartographie
- Fernerkundung

Die intensive Nutzung von Radarsystemen begann mit dem zweiten Weltkrieg, in dessen Verlauf eine Vielzahl von Radarsystemen entwickelt wurden. Im Folgenden wird zuerst die Radargleichung hergeleitet und danach die am weitesten verbreiteten Radartypen vorgestellt.

### 9.2.1. Radargleichung und Radarstreuquerschnitt

Bei Radarsystemen unterscheidet man zwischen dem monostatischen System, bei dem Sende- und Empfangsantenne identisch oder zumindest am gleichen Ort angebracht sind und bistatischen Radaren mit räumlich getrenntem Sender und Empfänger. Die meisten Radarsysteme sind monostatisch.

Zur Bestimmung der Radargleichung wird der monostatische Fall betrachtet, wobei der bistatische Fall sehr ähnlich ist. Strahlt ein Sender eine Leistung  $P_t$  durch eine Antenne mit dem Gewinn  $G_t$  ab, beträgt die Leistungsdichte  $S_t$  an einem Ziel in der Entfernung  $R$

$$S_t = \frac{P_t G_t}{4\pi R^2}. \quad (9.9)$$

Dabei wird davon ausgegangen, dass sich das Ziel in der Hauptstrahlrichtung der Sendeantenne befindet. Das Ziel streut die eingestrahlte Leistung in alle Raumrichtungen. Der Anteil der in einer bestimmten Richtung abgestrahlten Leistung  $P_s$  zur eingestrahlten Leistungsdichte  $S_t$  ist als Radarstreuquerschnitt

$$\sigma = \frac{P_s}{S_t} \quad (9.10)$$

definiert. Der Radarstreuquerschnitt hat damit die Einheit einer Fläche und ist eine Eigenschaft des Zielkörpers.  $\sigma$  hängt von Einfalls- und Abstrahlrichtung sowie Polarisation und natürlich

der Frequenz ab. Da das Ziel auch wieder als Punktquelle angenommen werden kann, nimmt die Leistungsdichte der gestreuten Welle auch wieder mit  $1/4\pi R^2$  vom Ziel weg ab. Daraus ergibt sich die Leistungsdichte des zum Radarsystem zurückgestreuten Signals zu

$$S_r = \frac{P_t G_t \sigma}{(4\pi R^2)^2}. \quad (9.11)$$

Mit (7.25) und (7.24) resultiert die Empfangsleistung zu

$$P_r = \frac{P_t G_t G_r \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 R^4}, \quad (9.12)$$

wobei in den meisten Fällen Sende- und Empfangsantenne identisch sind ( $G = G_t = G_r$ ), was zu der üblichen Form der Radargleichung führt:

$$P_r = \frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 R^4}. \quad (9.13)$$

Hierbei ist reine Freiraumausbreitung angenommen und alle möglichen Wellenausbreitungseffekte sind vernachlässigt worden. Der häufigste bei Radarsystemen zusätzlich zu beachtende Ausbreitungspfad ist die Reflektion am Boden (z.B. bei Schiffsradaren oder KFZ-Radaren).

Aus (9.13) erkennt man, dass die Empfangsleistung mit  $1/R^4$  abnimmt, was darauf hin deutet, dass entweder eine sehr große Sendeleistung oder ein sehr empfindlicher Empfänger benötigt wird. Das von der Antenne empfangene und das im Empfänger selbst erzeugte Rauschen führen zu einer minimal detektierbaren Empfangsleistung  $P_{r,\min}$ , woraus sich mit (9.13) ein maximaler Abstand für Ziele mit dem Radarstreuquerschnitt  $\sigma$  berechnet werden kann:

$$R_{\max} = \left[ \frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 P_{r,\min}} \right]^{1/4}. \quad (9.14)$$

Zusätzliche Signalprozessierung kann das minimal detektierbare Signal weiter reduzieren und so die nutzbare Reichweite vergrößern. Eine sehr gängige Methodik, wie sie im Zusammenhang mit Pulsradaren üblicherweise eingesetzt wird, ist die Integration mehrerer Pulse. Dabei wird der Rauschpegel reduziert, der einen verschwindenden Mittelwert hat, d.h. bei Integration von  $N$  Pulsen ergibt sich ein Verbesserungsfaktor von  $N$ .

### 9.2.2. Pulsradar

Ein Pulsradar ermittelt den Abstand zu einem Ziel durch Messung der Laufzeit eines gepulsten Mikrowellensignals. In Bild 9.5 ist das Blockdiagramm eines typischen Pulsradarsystems

gegeben. Der Sendeteil besteht aus einem Einseitenbandmischer, in dem das Mikrowellensignalsignal  $f_0$  mit einem Frequenzoffset von  $f_{ZF}$  zu einem Signal mit der Frequenz  $f_0 + f_{ZF}$  gemischt wird ( $f_{ZF} \ll f_0$ ). Nach zusätzlicher Verstärkung werden Pulse dieses Signals über eine Antenne gesendet. Der Sende-/Empfangsschalter wird von dem Pulsgenerator gesteuert um Sendepulse der Breite  $\tau$  mit einer Wiederholfrequenz (Pulse-Repetition-Frequency: PRF) von  $f_r = 1/T_r$  zu generieren. Damit werden kurze Sendepulse der Dauer  $\tau$  bei einer Signalfrequenz von  $f_0 + f_{ZF}$  gesendet. Der Sende-/Empfangsschalter erfüllt zwei Funktionen: Erzeugen der kurzen Sendepulse und umschalten der Antenne zwischen Sende- und Empfangsschaltung.

Im Empfangsfall wird das zurückgestreute Signal verstärkt und über einen Mischer mit  $f_0$  in das Zwischenfrequenzband herunter gemischt. Der Lokaloszillator für  $f_0$  wird für Sende- und Empfangszweig gleichermaßen genutzt. Dies vereinfacht zum Einen den Aufbau und vermeidet zum Anderen Probleme durch mögliche Frequenzverschiebungen im Oszillator. Das Zwischenfrequenzsignal wird weiter verstärkt und über einen Detektor in ein Videosignal umgewandelt.

Für die Wahl von Pulsdauer  $\tau$  und PRF  $f_r$  gelten folgende Zusammenhänge und Überlegungen:

- Kürzere Pulse resultieren in einer besseren Entfernungsauflösung aber in einem geringeren Signal-zu-Rausch-Verhältnis,
- eine größere PRF führt zu mehr Pulsen pro Zeit was die Performanz verbessert, aber zu Mehrdeutigkeiten in der Abstandsmessung führt.

### 9.2.3. Dopplerradar

Falls das Ziel eine Geschwindigkeitskomponente parallel zur Linie zwischen Radar und Ziel hat, wird das zurückreflektierte Signal auf Grund des Dopplereffekts eine Frequenzverschiebung aufweisen. Für eine Frequenz des gesendeten Radarsignals  $f_0$  und eine radiale Zielgeschwindigkeit  $v$  beträgt die Doppler-Frequenz:

$$f_D = \frac{2vf_0}{c_0} \quad (9.15)$$

wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Medium darstellt. Die Frequenz des vom Radar empfangenen Signals wird dann  $f_0 \pm f_D$  betragen, wobei das positive Vorzeichen zu Zielen gehört, die sich auf das Radar zu bewegen und das negative Vorzeichen zu sich vom Radar weg bewegenden Zielen.

Bild 9.6 zeigt das Prinzip eines Doppler-Radarsystems wie es z.B. zur Geschwindigkeitsmessung im Straßenverkehr eingesetzt wird. Man erkennt sofort, dass dieses Radarsystem deutlich einfacher zu realisieren ist als ein Pulsradar, da als Sendesignal ein einfaches hochfrequentes Sinussignal benötigt wird und dieses auch direkt für den Empfänger verwendet werden kann. Aus diesem Grund wird das Dopplerradar auch häufig als CW-Radar (CW: Continuous Wave)

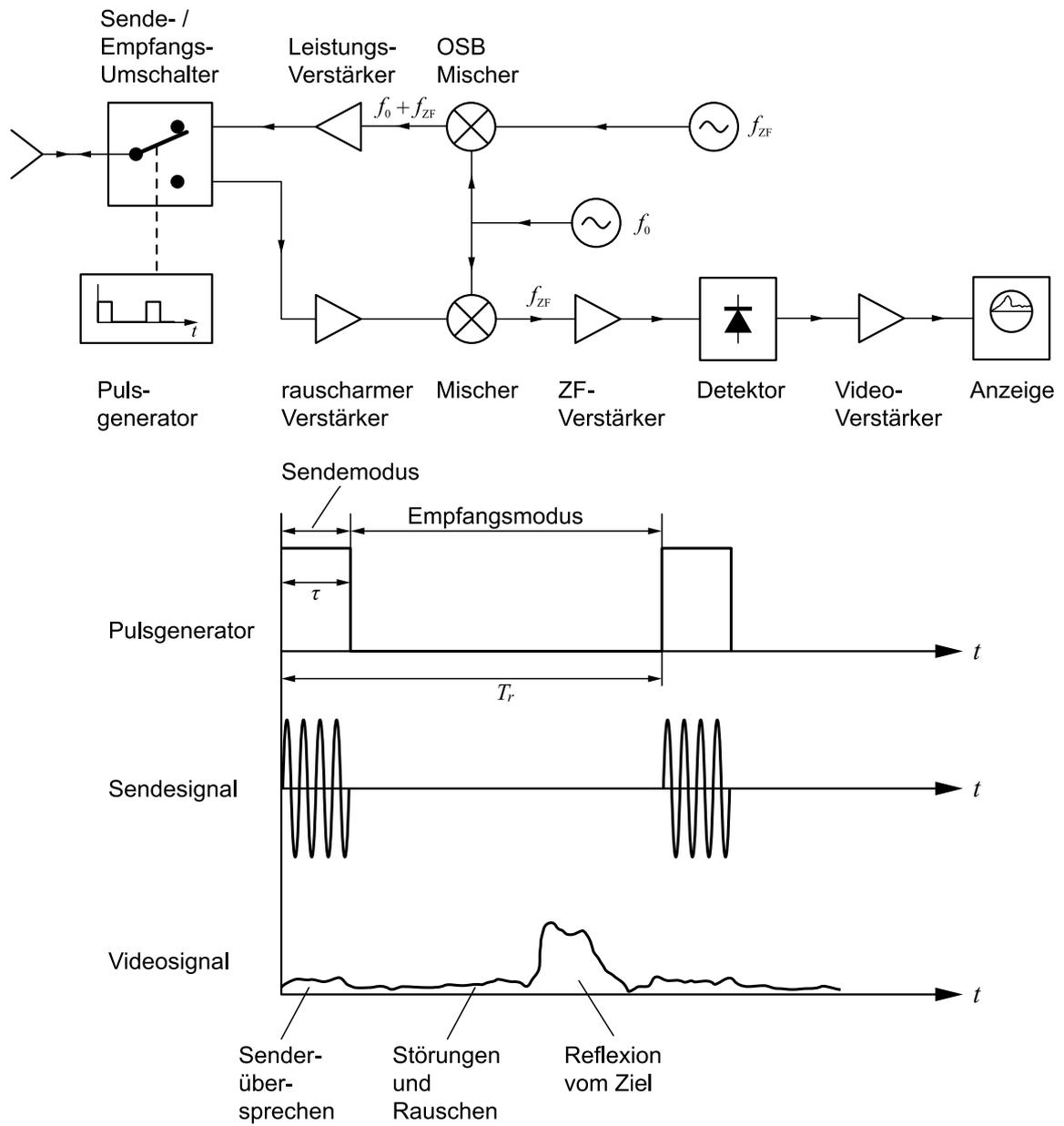


Bild 9.5.: Blockschaftbild eines typischen Pulsradarsystems

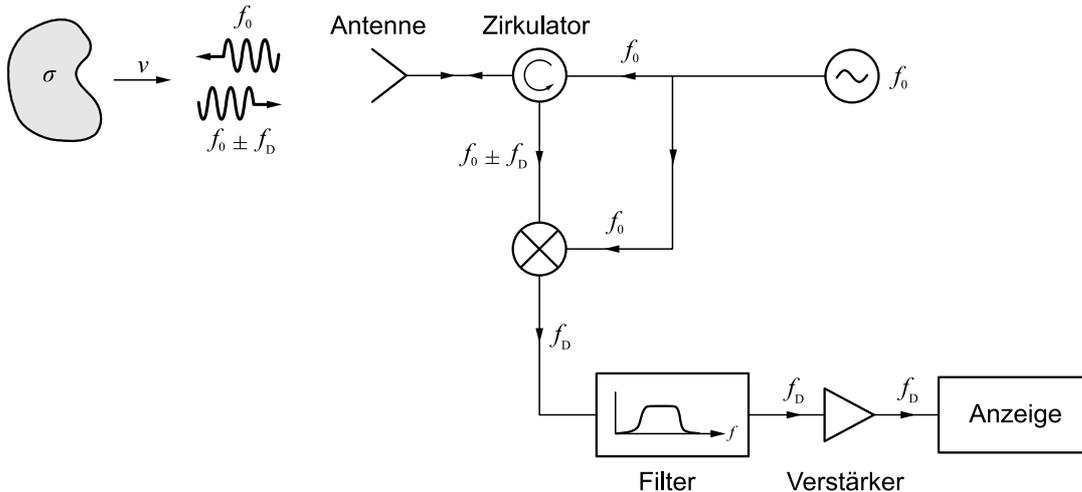


Bild 9.6.: Prinzip eines Doppler-Radars

bezeichnet. Am Mischer werden gesendete und empfangene Frequenz subtrahiert, d.h. es bleibt ein Signal mit der Frequenz  $f_d$ , die der Geschwindigkeit des Zieles entspricht. Das Filter hinter dem Mischer sollte einen Durchlassbereich passend zu den minimal und maximal zu erwartenden Dopplerefrequenzen bzw. Geschwindigkeiten haben. Wichtig ist hierbei eine sehr große Dämpfung für Gleichspannungssignale, da damit alle Rückstreuungen von statischen Objekten sowie Effekte durch Anteile des Sendesignals am Mischereingang auf Grund von Antennenfehl-anpassung oder begrenzter Isolation des Zirkulators unterdrückt werden. Das hier beschriebene Radar kann allerdings nicht zwischen sich nähernden und sich entfernenden Zielen gleicher Geschwindigkeit unterscheiden. Dies kann z.B. durch Verwendung eines speziellen Mixers erreicht werden, der Frequenzen unterhalb  $f_0$  und oberhalb  $f_0$  getrennt verarbeitet.

Nachdem auch das Empfangssignal eines Pulsradars von einem bewegten Ziel eine Dopplerverschiebung erfährt, ist es möglich, mit einem einzigen Radar Entfernung und Geschwindigkeit gleichzeitig zu messen. Solche Radarsysteme werden als Puls-Doppler-Radar bezeichnet.

#### 9.2.4. FMCW-Radar

Ein weiteres sehr verbreitetes Radarprinzip ist das sogenannte FMCW-Radar (FMCW: **F**requency **M**odulated **C**ontinuous **W**ave). In Bild 9.7 ist das Prinzip dargestellt, dass sich kaum vom CW-Radar (siehe Bild 9.6) unterscheidet. Im Gegensatz zum CW-Radar wird die Oszillatorfrequenz hier über der Zeit linear verändert. Man spricht dabei von einem Frequenz-Chirp. Hierzu wird die Steuerspannung eines spannungsgesteuerten Oszillators VCO (**V**oltage **C**ontrolled **O**scillator) entsprechend der – für gewöhnlich nicht linearen Spannungs-/Frequenzkennlinie – durchgestimmt.

Durch den Frequenzchirp haben die beiden am Mischer anliegenden Signale selbst bei stati-

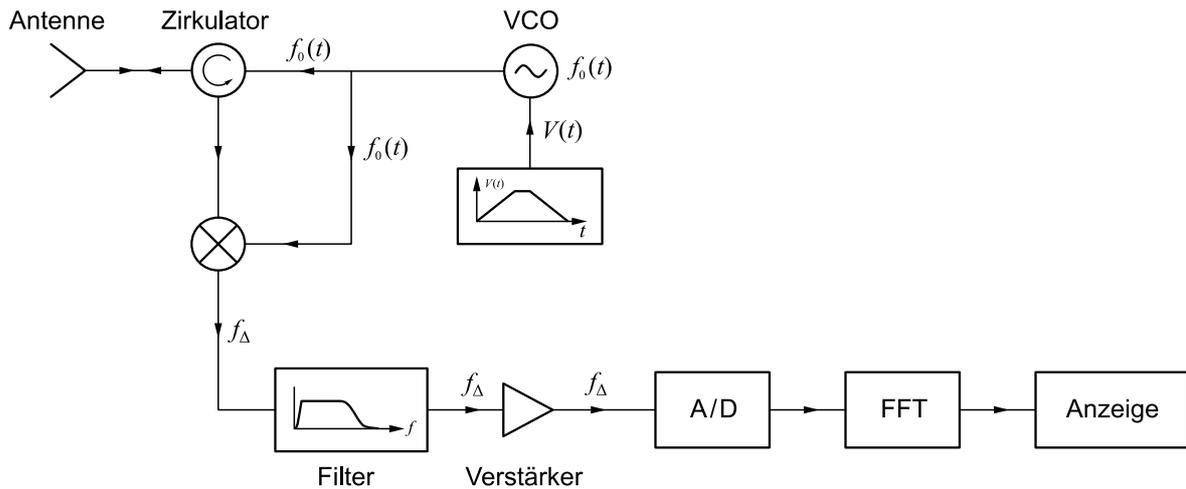


Bild 9.7.: Prinzip eines FMCW-Radars

schen Zielen auf Grund der Signallaufzeit unterschiedliche Frequenzen. Diese Differenzfrequenz  $f_{\Delta}$  ist während eines Frequenz-Chirps (siehe dazu Bild 9.8) konstant, d.h. die Frequenz am Mischerausgang ist zu dem Zielabstand proportional. Die Darstellung in Bild 9.8 ist dabei nicht maßstäblich gewählt, da  $f_{\Delta}$  sehr viel kleiner ist als die Mittenfrequenz  $\frac{1}{2}(f_{\min} + f_{\max})$  des Radars. Dadurch sind auch die gestrichelt gezeichneten Flanken des Ausgangssignals wesentlich steiler als dargestellt. Üblicherweise entspricht somit die Messzeit  $\tau_M$  der Sweep-Zeit  $T_{\text{sweep}}$ . Für einen Frequenzsweep von  $f_{\min}$  bis  $f_{\max}$  während der Zeit  $T_{\text{sweep}}$  ergibt sich die Differenzfrequenz während der Messzeit  $\tau_M$  für ein Ziel in einem Abstand  $R$  zu:

$$f_{\Delta} = \frac{f_{\max} - f_{\min}}{T_{\text{sweep}}} \cdot \tau \quad (9.16)$$

mit

$$\tau = \frac{2R}{c_0} \quad (9.17)$$

Das Signal der Differenzfrequenz wird anschließend digitalisiert und über eine Fouriertransformation (FFT) erhält man einen zu  $f_{\Delta}$  und damit zur Entfernung proportionalen Wert. Statt der Analog-/Digitalwandlung, kann  $f_{\Delta}$  auch auf eine Filterbank gegeben werden, in welcher jedem Entfernungsabschnitt ein Bandpassfilter zugeordnet wird.

Eine der Schwierigkeiten bei diesem Radarprinzip ist, dass sowohl Geschwindigkeit als auch Abstand zur Frequenz des Ausgangssignals proportional sind, d.h. aus einer bestimmten Frequenz am Radarausgang nicht eindeutig Geschwindigkeit oder Abstand ablesbar sind. Zur Lösung dieses Problems existieren verschiedene Verfahren, die hier nicht weiter diskutiert werden sollen. Außerdem wird das FMCW-Verfahren speziell bevorzugt unter Bedingungen eingesetzt,

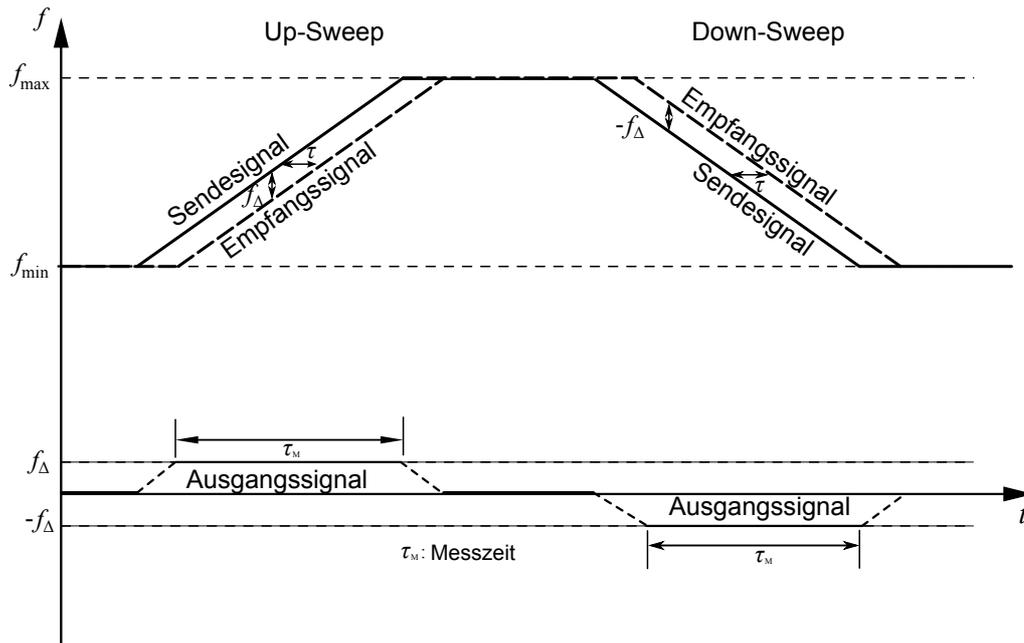


Bild 9.8.: Funktionsweise eines FMCW-Radars

bei denen keine relevanten Geschwindigkeiten zu erwarten sind, d.h. zur Abstandsmessung in quasi-statischer Umgebung (z.B. Füllstandsmessung in Tanks).

### 9.3. Radiometrie

Ein Radarsystem erhält Informationen über die Umgebung durch Empfang eines vorher gesendeten Mikrowellensignals. Radiometrie dagegen ist eine rein passive Technik, die ausschließlich aus der Mikrowellenstrahlung, die aus der Umgebung auf das Radiometer einfällt, Informationen ermittelt. Das Messsignal ist somit die von den Objekten selbst emittierte und daran reflektierte, natürlich erzeugte elektromagnetische Strahlung. Dielektrische Unterschiede von Objekten führen zu verschiedenem Emissions- und Reflexionsverhalten, so dass solche Unterschiede als lokale Intensitätsvariation sichtbar gemacht werden können. Intensitäten werden in der Radiometrie auch in äquivalenten (scheinbaren) Temperaturen ausgedrückt. Im Freien macht man sich z.B. hierfür die „kalte“ kosmische Hintergrundstrahlung zum Nutzen, deren Temperaturäquivalent etwa 3 K beträgt. Diese Hintergrundstrahlung wird an den jeweiligen Objekten reflektiert, und überlagert sich deren Eigenemission. In der Summe sind daher äquivalente Temperaturwerte von etwa 3 K bis 300 K beobachtbar.

Gegenüber den im „optischen“ Bereich arbeitenden Erkundungsverfahren hat die Mikrowellenradiometrie (ebenso wie Radarverfahren) den frequenzbedingten Vorteil der weitgehenden Allwetterfähigkeit und der möglichen Eindringtiefe unter die sichtbare Oberfläche. Vorteilhaft ist außerdem der größere Temperaturkontrast im Mikrowellenbereich. Von Nachteil ist hier – wegen der großen Wellenlängen – das grundsätzlich schlechtere Winkelauflösungsvermögen von Mikrowellensystemen, das vom Verhältnis aus Wellenlänge zu Aperturdurchmesser bestimmt wird.

Zu den Anwendungen der Radiometrie zählen unter anderem die Fernerkundung (z.B. Erdoberfläche, Wetter) und die militärische Aufklärung. Im Moment wird auch weltweit an Systemen zur Detektion von Waffen, zur Erhöhung der Sicherheit z.B. auf Flughäfen, gearbeitet.

#### 9.3.1. Grundlagen der Radiometrie

Die thermische Strahlung eines Körpers wird durch das Plancksche Strahlungsgesetz beschrieben:

$$B = \frac{2hf^3}{c_0^2} \frac{1}{e^{hf/kT} - 1} \quad , \quad (9.18)$$

wobei  $B$  die Helligkeit in der Einheit  $\text{Wm}^{-2}\text{sr}^{-1}\text{Hz}^{-1}$  angibt. Die Variablen  $f$ ,  $c_0$ ,  $T$  geben die Frequenz, die Lichtgeschwindigkeit und die Temperatur an. Des Weiteren werden noch die Boltzmann-Konstante  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$  und die Plancksche Konstante  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  benötigt. In Bild 9.9 ist die thermische Strahlung gemäß Planckschem Strahlungsgesetz über der Frequenz für unterschiedliche Temperaturen aufgetragen. Für die Sonne mit einer Temperatur von  $T = 5780 \text{ K}$  ergibt sich die maximale Strahlung bei einer Wellenlänge von 502 nm (grünes

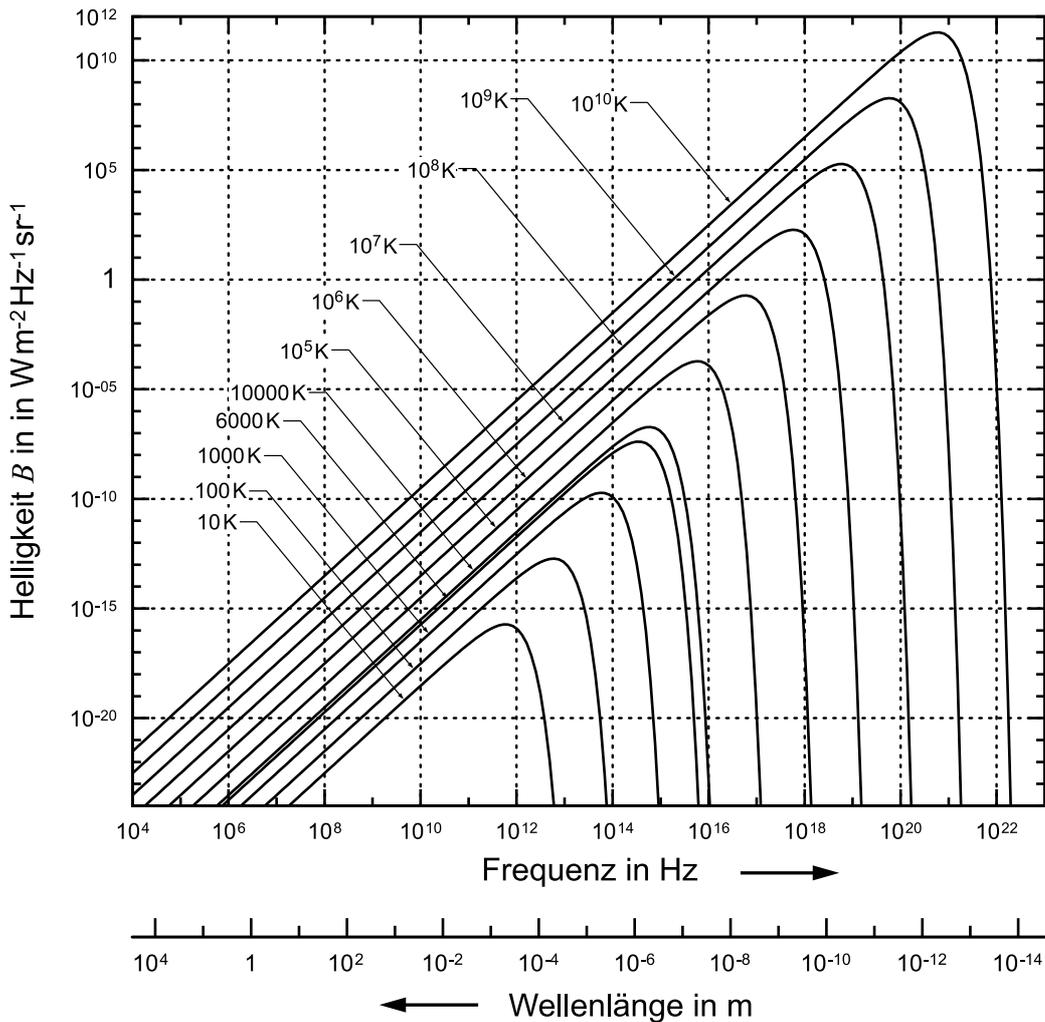


Bild 9.9.: Thermische Strahlung gemäß Planckschem Strahlungsgesetz

Licht). Die natürliche Mikrowellenstrahlung ist inkohärente Wärmestrahlung. Ihre Intensität liegt entsprechend dem Planckschen Strahlungsgesetz für den schwarzen Körper mehrere Größenordnungen unter jener der natürlichen Infrarot-Strahlung.

In Kapitel 8.1 wurde bereits diskutiert, dass jeder Körper mit der Temperatur  $T$  nach dem Planck'schen Strahlungsgesetz eine Rauschleistung abstrahlt. Im Mikrowellenbereich kann das Plancksche Strahlungsgesetz mit abnehmender Frequenz zunehmend besser durch das Gesetz von Rayleigh-Jeans approximiert werden, woraus dann wiederum abgeleitet werden kann, dass ein perfekter „schwarzer Körper“ die Leistung  $P = kTB$  abstrahlt (vgl. Gleichung (8.4)).  $B$  gibt hierbei die Systembandbreite des Radiometers an. Dies gilt genaugenommen nur für einen schwarzen Körper, der als idealer Körper definiert ist, der alle ankommende Strahlung absorbiert und keine Strahlung reflektiert.

Die vom Mikrowellenradiometer empfangene Strahlung resultiert in der Regel aus der vom Meßobjekt emittierten Strahlung (proportional zu seiner Eigentemperatur), der am Objekt re-

flektierten bzw. gestreuten Strahlung des Hintergrunds und der Umgebung sowie der vom Ausbreitungsmedium zwischen Objekt und Radiometer emittierten Strahlung. Da die Strahlungsleistungen der Objekte proportional zur Temperatur sind, wird in der Radiometrie im Allgemeinen mit Temperaturen (Helligkeitstemperaturen) gerechnet. Diese Helligkeitstemperatur ist dabei eine scheinbare Temperatur, die nur für einen idealen Absorber (schwarzer Körper) identisch mit der thermometrischen Temperatur ist.

### 9.3.2. Beispiel eines Radiometers

Im Folgenden wird der Aufbau und die Funktionweise eines Radiometers am Beispiel eines am Deutschen Luft- und Raumfahrtzentrum (DLR) entwickelten Systems erläutert.

#### Abbildungssystem

Radiometrische Aufnahmen sind vergleichbar mit Fotografien. Die Strahlung wird aus verschiedenen Raumrichtungen empfangen, und positionsrichtig zu einem Bild zusammengefügt. Während in der Optik alle Bildpunkte simultan mit einer Linse auf den Film projiziert werden, so müssen in der Mikrowellenradiometrie die Bildpunkte meist noch sequentiell über eine mechanische Bewegung erfasst werden.

Die Qualität einer Abbildung wird dominant vom räumlichen Auflösungsvermögen und der Empfindlichkeit der Messapparatur bestimmt. Ersteres wird in der Mikrowellenradiometrie durch die verwendbare Antennengröße definiert. Um eine zweidimensionale Abbildung zu erhalten wird daher meist die Antenne mechanisch so bewegt (z.B. rotiert, gedreht, gefahren, etc.), dass der durch die Antennengröße definierte Empfangswinkelbereich der Antenne, die Antennenkeule, über das Szenario geführt wird. Die Empfindlichkeit wird durch die Güte des Empfängers und die verfügbare Messzeit bestimmt.

Ein typischer Vertreter für ein radiometrisches Abbildungssystem ist z.B. der mechanische Zeilenabtaster (engl. Linescanner), wie in Bild 9.10 dargestellt. Links ist ein auf einem Flugzeug betriebenes System dargestellt. Durch die mechanische Hin- und Herbewegung quer zur Flugrichtung werden Bildzeilen erzeugt, die mit der Flugbewegung zusammen ein zweidimensionales Bild ergeben. Rechts ist ein vom Erboden aus betriebenes System gezeigt. Durch eine mechanische Rotation der Antenne werden Bildzeilen generiert, welche nun durch die zusätzliche azimutale Drehung der Gesamtanordnung die zweidimensionale Abbildung einer Hemisphäre erlauben. Radiometersysteme nach diesem Prinzip werden gegenwärtig neben bodengebundenen Einsätzen insbesondere auch auf Flugzeugen und Satelliten betrieben.

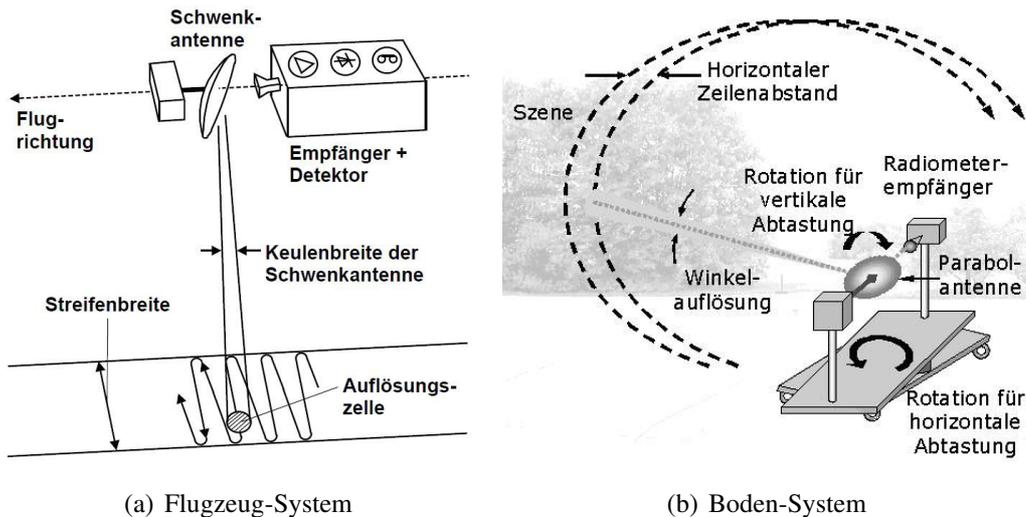


Bild 9.10.: Ausführungsformen von Zeilenabtastern

### Empfängertechnik

Ein Radiometer ist ein Messgerät zur Detektion elektromagnetischer Strahlungsleistung in einem bestimmten Wellenlängenbereich. Die zu beobachtenden Größen der thermischen Mikrowellenstrahlung sind sehr leistungsschwache Signale. Folglich sind Mikrowellenradiometer hoch verstärkende, frequenzselektive Leistungsmesser. Der einfachste Radiometertyp ist das sogenannte Total-Power-Radiometer, welches nachfolgend anhand Bild 9.11 kurz erläutert wird.

Ein Total-Power-Radiometer besteht prinzipiell aus einer Anordnung von Empfangsantenne, einem rauscharmen Vorverstärker, gegebenenfalls einem Mischer mit dazugehörigem Lokaloszillator, mehreren weiteren Verstärkerstufen, einem Bandpassfilter, einem Leistungsdetektor und einem Tiefpassfilter mit nachgeschaltetem Anzeige- und/oder Aufzeichnungsgerät. Die Antenne als eine Empfangsfläche betrachtet, dient dabei zur Aufnahme der thermischen Strahlungsleistung. Da jegliches Bauelement eigene Rauschbeiträge erzeugt, die etwa in der gleichen Größenordnung wie das Eingangssignal liegen, sollte das erste Bauelement nach der Antenne sehr rauscharm und mit hoher Verstärkung ausgeführt werden.

Speziell bei hohen Frequenzen (HF) ist die weitere Signalverarbeitung in diesem Frequenzbereich unmöglich bzw. technisch und finanziell zu aufwendig. Deshalb wird das Signal über einen Mischer in eine tiefere Frequenzlage umgesetzt. Vom Lokaloszillator wird dabei je nach Anwendung hohe Frequenzstabilität gefordert.

Im Zwischenfrequenzbereich (ZF) wird das Signal nun weiter verstärkt und bandpassgefiltert. Dies ist notwendig, da die empfangene Strahlungsleistung nur in einer bestimmten Bandbreite um die Mittenfrequenz interessiert und weil die anderen Komponenten meistens keine scharfe Bandbegrenzung vornehmen. Zur Leistungsdetektion wird die hochfrequente Rauschspannung

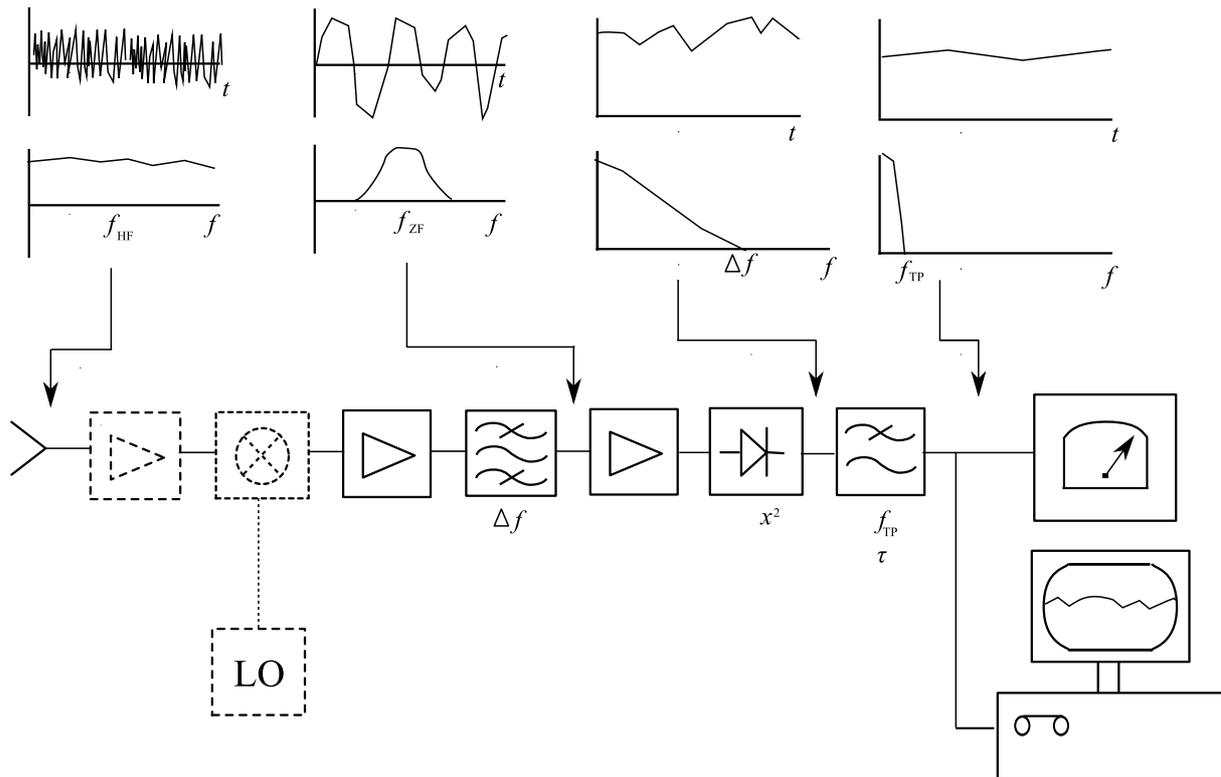


Bild 9.11.: Prinzip-Blockschaltbild eines Total-Power-Radiometers

nun einem Bauelement mit quadratischer Kennlinie (Detektor) zugeführt, das als Ausgangssignal eine zum Spannungsquadrat (also auch zur Leistung) proportionale Gleichspannung abgibt. Aufgrund der endlichen Bandbreite und des Rauschcharakters der Eingangsspannung treten am Ausgang zusätzlich niederfrequente Rauschschwankungen auf, die über das nachfolgende Tiefpassfilter in ihrer maximalen Frequenz begrenzt werden. Das so erhaltene Ausgangssignal kann jetzt mit einem Anzeigergerät beobachtet oder über einen A/D-Wandler zur Weiterverarbeitung in einem Computer erfasst werden.

## Abbildungen

Neben den Anwendungen in der Erderkundung können radiometrische Messverfahren auch in der Sicherheitstechnik von großem Nutzen sein. Im Folgenden sind einige Beispiele zu radiometrischen Abbildungen in Bild 9.12 illustriert. Diese zeigen zum einen links eine Panoramaaufnahme von einer komplexen Szene mit  $180^\circ$  Azimut- und  $60^\circ$  Elevationsbereich. Diese Art der radiometrischen Aufnahme kann z.B. zur Überwachung und Beobachtung sicherheitsrelevanter Infrastrukturen verwendet werden. Das optische Erscheinen des radiometrischen Bildes erlaubt dabei eine einfache Interpretation. Das radiometrische System hat dabei den deutlichen Vorteil gegenüber dem optischen System, dass die Aufnahme auch Nachts oder bei starkem

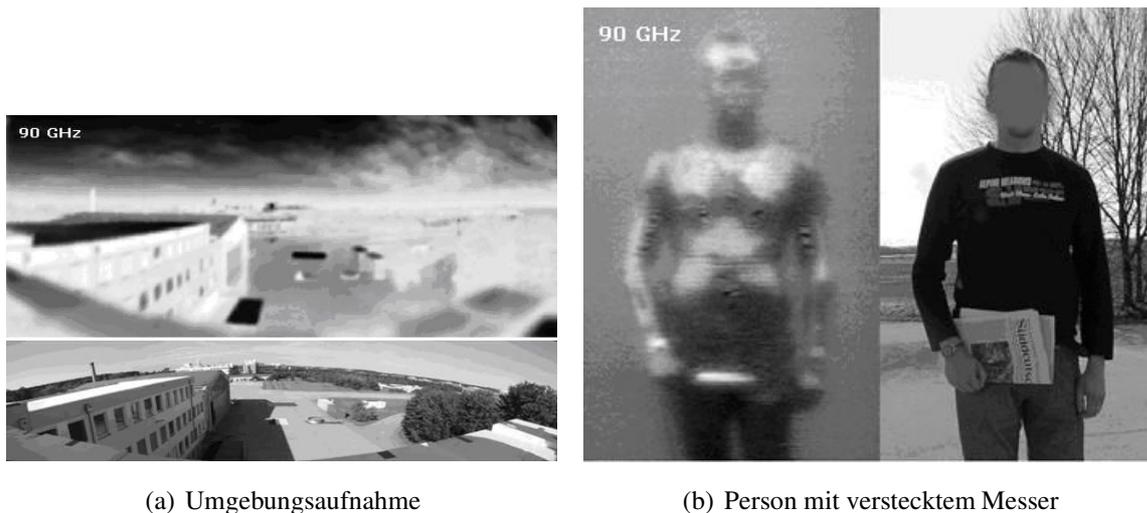


Bild 9.12.: Radiometrische Aufnahmen bei 90 GHz Mittenfrequenz und entsprechende Photographien der gleichen Szenarien.

Nebel erzeugt werden kann. Durch das Eindringvermögen von Mikrowellen können auch verborgene Objekte detektiert werden, wie die Abbildung rechts zeigt, bei der eine Person ein Messer in eine Zeitung eingewickelt hat. Dies erlaubt z.B. die Anwendung solcher Systeme zur Personenkontrolle an Eingangsportalen.

## 9.4. Erwärmen mit Mikrowelle

Hochfrequente elektromagnetische Felder mit hoher Leistung (im kW-Bereich oder sogar darüber) werden in unterschiedlichen Bereichen zum Erwärmen von Materie eingesetzt. Dazu gehören zum Beispiel

- industrielle Prozesse zur Erwärmung oder Trocknung von Materialien,
- Mikrowellenöfen in Küchen im Leistungsbereich um 1 kW zur Erwärmung von Speisen sowie
- Mikrowellenquellen mit Leistungen oberhalb 1 MW zur Heizung des Plasmas bei der Kernfusion.

Mikrowellenöfen bestehen prinzipiell aus einem in der Regel rundherum geschlossenen metallischen Gehäuse, welches den Austritt von Mikrowellenstrahlung verhindert. Innerhalb dieses Gehäuses befindet sich das zu erwärmende Material. Von einer Hochleistungsmikrowellenquelle werden die Mikrowellen in den Ofenraum eingekoppelt und dringen in das Material ein. Dort regt das elektromagnetische Feld die Moleküle zum Schwingen an, was sich als Wärme äußert. Besonders gut funktioniert dies, wenn die Moleküle polarisiert sind (z.B. bei Wasser). Materialien aus unpolaren Molekülen (z.B. einfache Kohlenwasserstoffe) eignen sich dagegen weniger

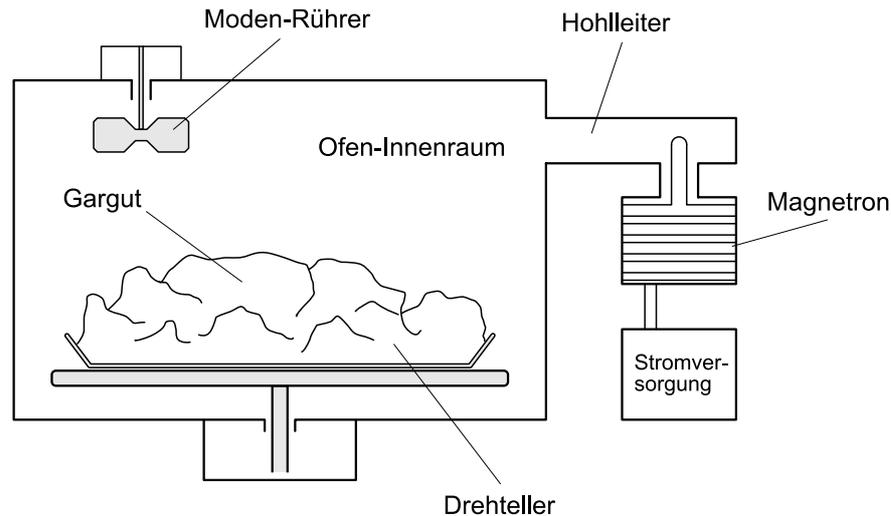


Bild 9.13.: Mikrowellenofen

zur Mikrowellenprozessierung. Da die Mikrowelle das zu prozessierende Material direkt, von innen heraus, erwärmt, ist die Mikrowellenheizung üblicherweise deutlich schneller als eine konventionelle Erwärmung durch Strahlung oder Heißluft, welche das Material grundsätzlich von außen erwärmen und somit auf die meist langsamere Wärmeleitung angewiesen sind.

In Bild 9.13 ist ein typischer Haushalts-Mikrowellenofen zur Speisenerwärmung dargestellt. Als Mikrowellenquelle wird ein sogenanntes Magnetron verwendet. Dabei handelt es sich um eine Elektronenröhre, welche ein hochfrequentes elektromagnetisches Feld erzeugt. Die Funktionsweise und weitere Mikrowellenröhren werden in [23] beschrieben. Die Frequenz beträgt hierbei, wie auch bei den meisten anderen Mikrowellenanwendungen, 2,45 GHz. Dabei handelt es sich um eine sogenannte ISM-Frequenz (**I**ndustrial **S**cientific **M**edical) welche lizenzfrei benutzt werden darf, solange die Abstrahlung gewisse Grenzen nicht überschreitet.

Eine wesentliche Anforderung an eine Mikrowellenprozessierungsanlage ist es, eine möglichst gleichmäßige Erwärmung zu erreichen. Insbesondere gilt es zu vermeiden, dass einzelne Bereiche stark überhitzen (sogenannte Hot Spots), während andere Bereiche kühl bleiben. Aufgrund der relativ kurzen Wellenlänge ( $\approx 12,2$  cm bei 2,45 GHz im Freiraum) gibt es im Material Interferenzen verschiedener Feldanteile, so dass sich ein inhomogenes elektrisches Feld mit verteilten Minima und Maxima ausbildet. Die daraus resultierende Erwärmung ist ebenfalls inhomogen. Dieses Problem kann umgangen werden, wenn man das zu prozessierende Material durch das Feld bewegt, so dass alle Teile die Minima und Maxima des Feldes im gleichen Maß durchlaufen. In Bild 9.13 ist dies durch einen Drehteller realisiert. Eine andere Möglichkeit besteht darin, das elektromagnetische Feld selbst zeitlich zu verändern, indem mechanisch bewegte Reflektoren, sogenannte Modenrührer (engl. Mode Stirrer) eingesetzt werden. Auch dieses Prinzip ist in Bild 9.13 gezeigt.

### 9.4.1. Grundlagen der Mikrowellenheizung

Ausschlaggebend für eine Erwärmung durch Mikrowellen sind die durch das elektrische Feld hervorgerufenen Ströme (ohmsche Verluste) und dielektrischen Umpolarisierungsverluste. Beide Mechanismen können zusammengefasst und durch einen effektiven Verlustfaktor [24] ausgedrückt werden

$$\varepsilon_{r,\text{eff}}'' = \varepsilon_r'' + \frac{\kappa}{\omega\varepsilon_0} \quad . \quad (9.19)$$

$\varepsilon_r''$  charakterisiert dabei die dielektrischen Verluste und  $\kappa$  ist die Leitfähigkeit des Materials. Die innerhalb eines Volumenelementes  $\Delta V$  in Wärme umgesetzte Leistung ergibt sich damit zu

$$P_W = \frac{1}{2} \omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r,\text{eff}}'' |E|^2 \Delta V \quad . \quad (9.20)$$

Diese ist damit proportional zum effektiven Verlustfaktor  $\varepsilon_{r,\text{eff}}''$  und der Frequenz. Damit bewirkt eine höhere Frequenz auch eine höhere Wärmewirkung. Dies folgt daraus, dass bei jedem Umpolarisierungszyklus die gleiche Wärme umgesetzt wird. Je mehr Umpolarisierungen pro Zeiteinheit stattfinden, desto höher ist die mittlere Wärmeleistung. Es ist dabei aber zu beachten, dass  $\varepsilon_r''$  und damit  $\varepsilon_{r,\text{eff}}''$  im Allgemeinen selbst sehr stark frequenzabhängig sind und für sehr hohe Frequenzen gegen Null gehen.

Eine weitere sehr wichtige Größe ist die Eindringtiefe. Wenn die Mikrowelle in ein Material eindringt und dabei Energie in Form von Wärme abgibt, wird sie gedämpft. Der Wert, bei dem die Leistungsdichte auf einen relativen Wert von  $e^{-1} \approx 37\%$  bezogen auf die Materialoberfläche abgeklungen ist bezeichnet man als Eindringtiefe  $D_p$ . Für eine angenommene ebene Welle gilt näherungsweise

$$D_p = \frac{c_0 \sqrt{\varepsilon_r'}}{\omega \varepsilon_{r,\text{eff}}''} \quad . \quad (9.21)$$

Je höher die Frequenz ist, desto geringer ist die Eindringtiefe. Für eine homogene Heizung sollte die Materialdicke kleiner als die Eindringtiefe sein, da ansonsten die Heizung nur in der Nähe der Oberfläche erfolgt und damit keine Vorteile mehr gegenüber der konventionellen Heizung aufweist.



# A. Schreibweise orts- und zeitabhängiger Größen

## A.1. Beliebige Orts- und Zeitabhängigkeit

$U_0$  Amplitude, Scheitelwert, Gleichgröße  
 $\vec{U}$  allgemeine beliebige orts- und zeitabhängige Größe oder nur ortsabhängige Größe

$$\vec{U} = \vec{U}(\vec{r}, t) \quad \text{oder} \quad \vec{U} = \vec{U}(\vec{r}) \quad (\text{A.1})$$

z.B. in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{U} = U_x(\vec{r}, t) \vec{e}_x + U_y(\vec{r}, t) \vec{e}_y + U_z(\vec{r}, t) \vec{e}_z \quad (\text{A.2})$$

$$\text{mit} \quad \vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \quad (\text{A.3})$$

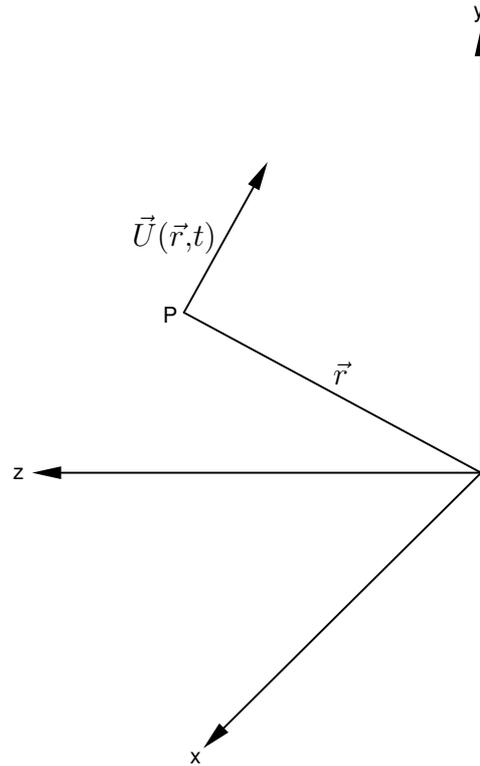


Bild A.1.: Vektorielle Größe im kartesischen Koordinatensystem

## A.2. Bei harmonischer Zeitabhängigkeit

$\bar{u}(\vec{r}, t)$  reelle Schreibweise der orts- und zeitabhängigen Größe

$$\bar{u}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{U}(\vec{r}) e^{j\varphi} e^{j\omega t} \right\} = \vec{U}(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{A.4})$$

$\vec{u}$  komplexe Schreibweise der orts- und zeitabhängigen Größe

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{U}(\vec{r}) [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] \\ &= \vec{U}(\vec{r}) e^{j\omega t + \varphi} = \vec{U}(\vec{r}) e^{j\varphi} e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$\vec{U}$  komplexe Amplitude

$$\vec{U} = \vec{U}(\vec{r}) e^{j\varphi} \quad (\text{A.6})$$

(U steht stellvertretend für H, E, B, D, etc.)

Eine sehr gute Einführung in den Umgang mit komplexen Wechselgrößen befindet sich in [7].

## B. Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen

Symbol	Bedeutung	Einheit
$a$	Breitenabmessung eines Rechteckhohlleiters	m
$a_n$	hinlaufende Leistungswelle in Tor $n$	$\sqrt{W}$
$\vec{A}$	Vektorpotential	Vs/m
$A$	Fläche	m <sup>2</sup>
$A_W$	Antennenwirkfläche	
[A]	ABCD-Matrix	
$\vec{B}$	magnetische Induktion	Vs/m <sup>2</sup>
$b$	Höhenabmessung eines Rechteckhohlleiters	m
$b_n$	rücklaufende (reflektierte) Welle aus Tor $n$	$\sqrt{W}$
$B$	einfache Bandbreite	Hz
$B$	Blindleitwert	S
$B_p$	parallel geschalteter Blindleitwert	S
$C$	Kapazität	F
$C'$	Kapazität pro Längeneinheit	F/m
$C'_0$	Kapazität pro Längeneinheit einer luftgefüllten Leitung	F/m
$c$	Lichtgeschwindigkeit im Medium	m/s
$c_0$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ( $c_0 = 2,9979 \cdot 10^8$ m/s)	m/s
$\vec{D}$	elektrische Verschiebungsdichte	As/m <sup>2</sup>
$\vec{E}$	elektrische Feldstärke	V/m
[E]	Einheitsmatrix	
$\vec{e}_k$	Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle	
$f$	Frequenz	Hz
$f_c$	Cutoff-Frequenz	Hz
$f_D$	Dopplerfrequenz	Hz
$f_{ZF}$	Zwischenfrequenz	Hz
$G$	reeller Leitwert (ohmscher Leitwert)	S

Symbol	Bedeutung	Einheit
$G$	Antennengewinn	
$G'$	auf die Längeneinheit bezogener Leitwert	S/m
$\vec{H}$	magnetische Feldstärke	A/m
$h$	Plancksche Konstante ( $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Js)	Js
$h$	Substrathöhe bei Mikrostreifenleitung	m
$I$	elektrischer Strom	A
$\vec{J}$	Stromdichte	A/m <sup>2</sup>
$\vec{J}_F$	Flächenstromdichte (Strombelag)	A/m
$\vec{J}_V$	Verschiebungsstromdichte	A/m <sup>2</sup>
$j$	imaginäre Einheit $j = \sqrt{-1}$	
$k$	Boltzmannkonstante $k = 1,381 \cdot 10^{-23}$ Ws/K	Ws/K
$k$	Wellenzahl (Freiraumwelle)	m <sup>-1</sup>
$l$	Leitungslänge	m
$L$	Induktivität	H
$L'$	auf die Längeneinheit bezogene Induktivität	H/m
$m$	Anpassungsfaktor	
$n$	Brechungsindex	
$N_F$	Rauschzahl (Noise Figure)	
$P_W$	Wirkleistung	W
$Q$	Blindleistung	var = 1 W
$Q$	elektrische Ladung	As
$R$	reeller Widerstand (ohmscher Widerstand)	$\Omega$
$R$	Abstand (Radar)	m
$R'$	auf die Längeneinheit bezogener Widerstand	$\Omega/m$
$r$	Reflexionsfaktor	
$r$	Abstand	m
$s$	Welligkeitsfaktor (VSWR)	
$S$	Scheinleistung	VA = 1 W
$\vec{S}$	Poynting-Vektor	VA/m <sup>2</sup>
[S]	Streumatrix	
$s_{mn}$	Streuparameter	
$T$	Periodendauer	s
$T$	Temperatur	K
$t$	Zeit	s
$t$	Metallisierungshöhe bei Mikrostreifenleitung	m
[T]	Transmissions-Matrix	

Symbol	Bedeutung	Einheit
$U$	Spannung	V
VSWR	Stehwellenverhältnis ( $s$ )	
$v_G$	Gruppengeschwindigkeit	m/s
$v_P$	Phasengeschwindigkeit	m/s
$W$	Energie	J = 1 Ws
$w$	Energiedichte	Ws/m <sup>3</sup>
$w$	Leiterbreite Mikrostreifenleitung	m
$X$	Blindwiderstand	$\Omega$
$X_s$	seriell geschalteter Blindwiderstand	$\Omega$
$Y$	komplexer Leitwert (Admittanz)	S
$Y_L$	Leitungswellenleitwert	S
$Y_0, Y_B$	Bezugsleitwert	$\Omega$
$[\mathbf{Y}]$	Admittanz-Matrix	
$Z$	komplexer Widerstand (Impedanz)	$\Omega$
$Z_L$	Leitungswellenwiderstand	$\Omega$
$Z_0, Z_B$	Bezugswiderstand	$\Omega$
$[\mathbf{Z}]$	Impedanz-Matrix	
$\alpha$	Dämpfungskonstante einer Leitung	m <sup>-1</sup>
$\beta$	Phasenkonstante einer Leitung (Wellenzahl)	m <sup>-1</sup>
$\beta_c$	Cutoff-Wellenzahl	m <sup>-1</sup>
$\beta_z$	Wellenzahl im Hohlleiter ( $z$ -Richtung)	m <sup>-1</sup>
$\gamma$	komplexe Leitungskonstante $\gamma = \alpha + j\beta$	m <sup>-1</sup>
$\delta$	Verlustwinkel	rad
$\tan \delta$	Verlustfaktor	
$\varepsilon$	Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$	As/Vm
$\varepsilon_0$	Permittivität des Vakuums $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm	As/Vm
$\varepsilon_r$	relative Permittivität (Dielektrizitätszahl)	
$\varepsilon_{r,\text{eff}}$	effektive relative Permittivität	
$\varepsilon'_r$	Realteil der komplexen Permittivität	
$\varepsilon''_r$	dielektrischer Verlustfaktor	
$\varepsilon''_{r,\text{eff}}$	effektiver Verlustfaktor	
$\theta$	Winkel im Kugelkoordinatensystem (Elevation)	rad
$\kappa$	elektrische Leitfähigkeit	S/m
$\lambda$	Wellenlänge	m
$\lambda_0$	Freiraum-Wellenlänge	m
$\lambda_z$	Wellenlänge im Hohlleiter ( $z$ -Richtung)	m

---

Symbol	Bedeutung	Einheit
$\mu$	Permeabilitätskonstante $\mu = \mu_0 \mu_r$	Vs/Am
$\mu_0$	Permeabilität des Vakuums $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am	Vs/Am
$\mu_r$	relative Permeabilität	
$\rho$	Raumladungsdichte	As/m <sup>3</sup>
$\sigma$	Radarstreuquerschnitt	m <sup>2</sup>
$\tau$	Zeitkonstante	s
$\varphi$	Phasenwinkel	rad
$\psi$	Winkel im Kugelkoordinatensystem (Azimut)	rad
$\omega$	Kreisfrequenz, Winkelgeschwindigkeit	s <sup>-1</sup>

## **C. Leitungsdiagramme**

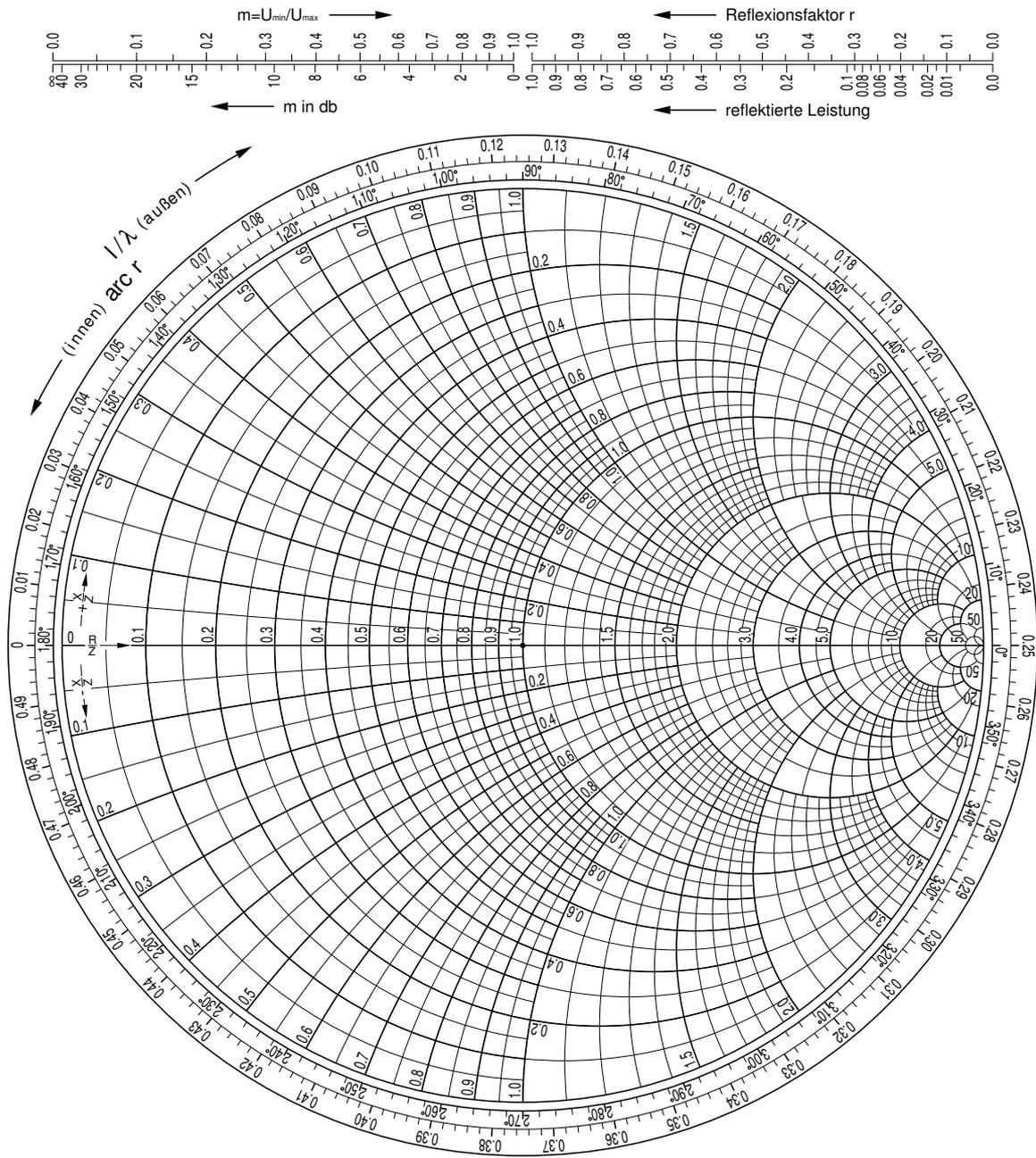


Bild C.1.: Smith Diagramm in Widerstandsform

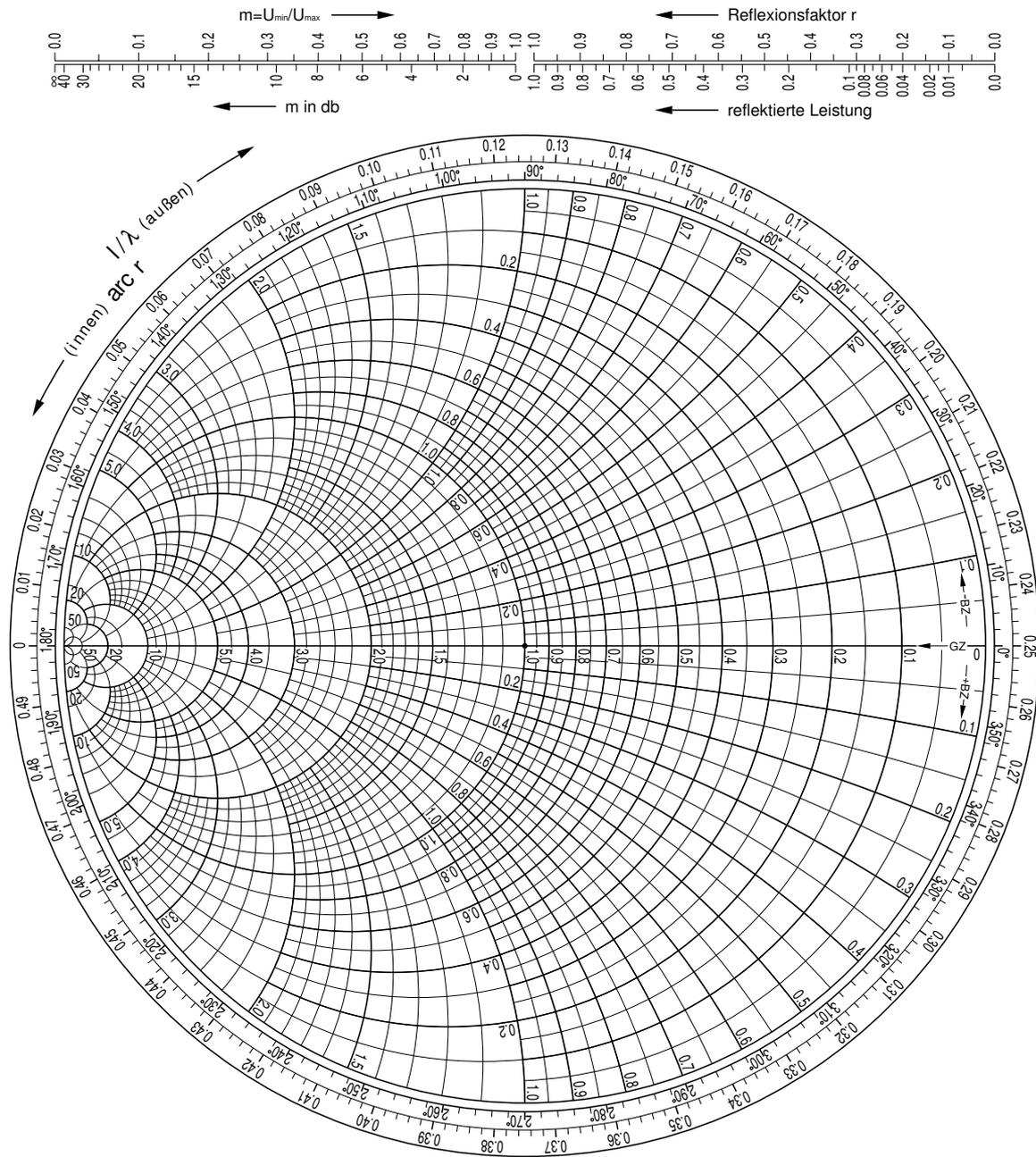


Bild C.2.: Smith Diagramm in Leitwertform



# Literaturverzeichnis

- [1] Meinke, Gundlach: *Taschenbuch der Hochfrequenztechnik*; Springer Verlag
- [2] Unger: *Theorie der Leitungen*; Vieweg & Sohn, Braunschweig
- [3] Meinke: *Einführung in die Elektrotechnik höherer Frequenzen, Band 1 (Bauelemente und Stromkreise) und Band 2 (Elektromagnetische Felder und Wellen)*; Springer Verlag
- [4] Zinke, Brunswig: *Lehrbuch der Hochfrequenztechnik, Band 1 (Hochfrequenzfilter, Leitungen, Antennen)*; Springer Verlag
- [5] Unger: *Elektromagnetische Wellen, Band 1 und 2*, Vieweg & Sohn, Braunschweig
- [6] Zwick, Wiesbeck: *Skriptum zur Vorlesung „Hochfrequenztechnik“*; Institut für Höchstfrequenztechnik und Elektronik, Uni Karlsruhe
- [7] Dössel: *Skriptum zur Vorlesung „Lineare elektrische Netze“*; Institut für Biomedizinische Technik, Uni-Karlsruhe
- [8] Trommer: *Skriptum zur Vorlesung „Felder und Wellen“*; Institut für Theoretische Elektrotechnik und Systemoptimierung, Uni-Karlsruhe
- [9] Michel: *Zweitor-Analyse mit Leistungswellen*; Teubner Studienbücher Elektrotechnik, Stuttgart
- [10] Balanis: *Advanced Engineering Electromagnetics*; John Wiley & Sons, New York
- [11] Balanis: *Antenna Theory: Analysis and Design*; John Wiley & Sons, New York
- [12] Zwick, Wiesbeck: *Skriptum zur Vorlesung „Antennen und Antennensysteme“*; Institut für Höchstfrequenztechnik und Elektronik, Uni Karlsruhe
- [13] Wiesbeck: *Skriptum zur Vorlesung „Radar Systems Engineering“*; Institut für Höchstfrequenztechnik und Elektronik, Uni Karlsruhe
- [14] Thumm: *Skriptum zur Vorlesung „Hoch- und Höchstfrequenz-Halbleiterschaltungen“* Institut für Höchstfrequenztechnik und Elektronik, Uni Karlsruhe
- [15] Younis: *Skriptum zur Vorlesung „Advanced Radio Communications I“* Institut für Höchstfrequenztechnik und Elektronik, Uni Karlsruhe
- [16] Hoffmann: *Integrierte Mikrowellenschaltungen*; Springer Verlag, Berlin, Heidelberg
- [17] Stirner: *Antennen, Band 1 (Grundlagen) und Band 2 (Praxis)*; Hüthig Verlag, Heidelberg

- [18] Collin: *Antenna Theory, Band 1 und 2*, McGraw Hill, New York
- [19] Kühn: *Mikrowellenantennen*, VEB Verlag Technik, Berlin
- [20] Geng: *Planungsmethoden für die Mobilkommunikation*; Springer Verlag, Berlin, Heidelberg
- [21] Süß: *Skriptum zur Vorlesung „Mikrowellenradiometrie“*; Institut für Höchsthfrequenztechnik und Elektronik, Uni Karlsruhe
- [22] Pozar: *Microwave Engineering*; Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts
- [23] Thumm: *Skriptum zur Vorlesung „Ausgewählte Kapitel der Hochfrequenztechnik“*; Institut für Höchsthfrequenztechnik und Elektronik, Uni Karlsruhe
- [24] Metaxas: *Industrial Microwave Heating*; Peter Peregrinus Ltd., UK
- [25] Detlefsen: *Grundlagen der Hochfrequenztechnik*; Oldenbourg Verlag, München
- [26] Razavi: *RF microelectronics*; Prentice Hall, USA