Musterlösung zu Übungsblatt 7

Aufgabe 1) **pn-Übergang**

Gegeben sei eine pn-Diode, deren p-Seite mit $n_A = 11 \cdot 10^{16}\,\mathrm{cm}^{-3}$ und n-Seite mit $n_D = 6 \cdot 10^{16}\,\mathrm{cm}^{-3}$ dotiert sind. Das gesamte Bauteil ist in Si ($n_i = 1{,}5 \cdot 10^{10}\,\mathrm{cm}^{-3}$; $\varepsilon_r = 12$) gefertigt und wird bei Raumtemperatur betrieben. Es gelten Störstellenerschöpfung und Schottky-Näherung.

a) Berechnen Sie die Diffusionsspannung U_D, die sich zwischen p- und n-Gebiet einstellt.

Lösung:

Geg.: $n_A = 11 \cdot 10^{16}\,\mathrm{cm}^{-3}$, $n_D = 6 \cdot 10^{16}\,\mathrm{cm}^{-3}$, $n_i = 1.5 \cdot 10^{10}\,\mathrm{cm}^{-3}$

Ges.: U_D

Die Diffusionsspannung kann aus den Dotierungen berechnet werden:

$$U_D = U_T \ln\left(\frac{n_A n_D}{n_i^2}\right) = 0.8\,\mathrm{V}$$

b) Skizzieren Sie den Verlauf der Raumladungsdichte $\rho(x)$ unter der Annahme der Schottky-Näherung. Berechnen Sie den Verlauf des elektrischen Feldes $E(x)$, wobei Sie für die Ausdehnungen der Raumladungszone (RLZ) in das p- und n-Gebiet zunächst die unbekannten Größen l_p und l_n annehmen. Berechnen Sie aus der elektrischen Feldstärke das Potential $\varphi(x)$.

Lösung:

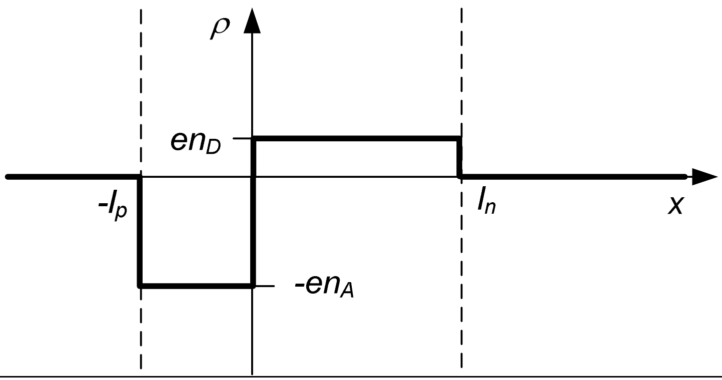
Ges.: Skizze für $\rho(x)$, $E(x)$, $\varphi(x)$

1) Raumladungsdichten ρ(x):

$$\rho(x) = e\left[n_D - n(x) - n_A + p(x)\right]$$

mit der Schottky Näherung $n(x) = p(x) = 0$ folgt

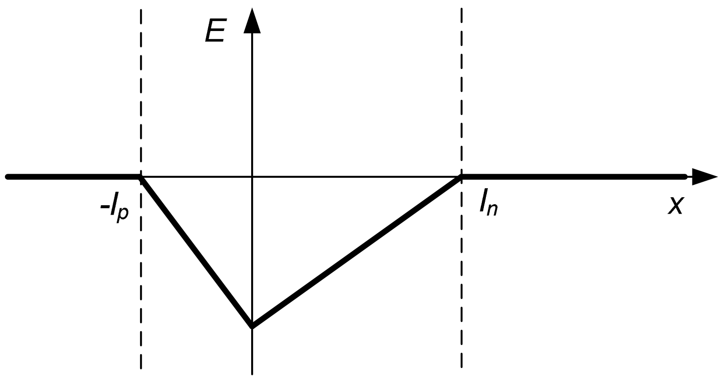
$$\rho(x) = \begin{cases} -en_A & -l_p < x < 0 \\ en_D \quad \text{für} & 0 < x < l_n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



2) Feldstärke E(x):

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \rightarrow \quad \frac{d(\varepsilon E)}{dx} = \rho$$

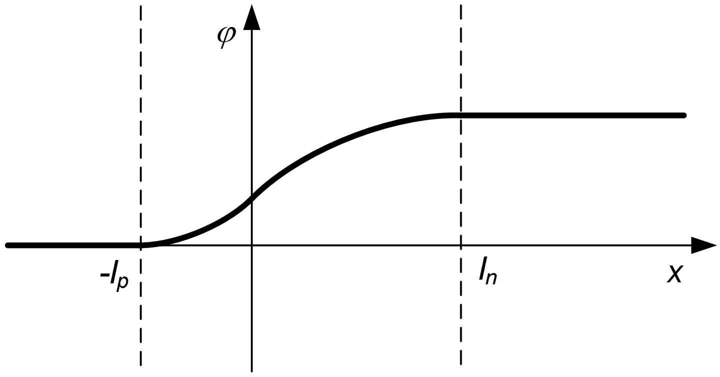
bzw. $\varepsilon E = \int \rho \, dx$



3) Potential φ(x):
Der Verlauf folgt mit

$$\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi \;\rightarrow\; \frac{d\varphi}{dx} = -E$$

bzw. $\varphi = -\int E\,dx$



c) Die Potentialdifferenz zwischen p- und n-Gebiet muss gerade U_D betragen. Berechnen Sie daraus die Gesamtlänge l der Raumladungszone und ihre jeweilige Ausdehnung in die n- und p-Halbleiter.

Lösung:
Ges.: l, l_n, l_p

$$l = \sqrt{\frac{2\varepsilon_r\varepsilon_0}{e}U_D\left(\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_D}\right)}, \quad l_p = \frac{n_D}{n_A+n_D}l, \quad l_n = \frac{n_A}{n_A+n_D}l$$

→ l = 165.4 nm, l_p = 58.4 nm, l_n = 107.0 nm

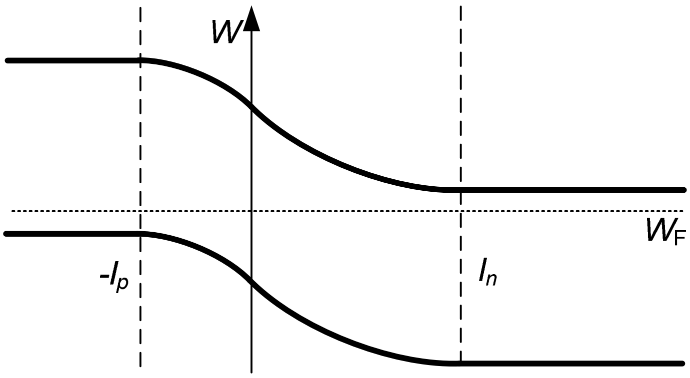
d) Skizzieren Sie das Banddiagramm für den Fall des thermischen Gleichgewichts. Dieses sollte die Fermi-Energie W_F und Verlauf der Bandkanten $W_{L,V}(x)$ enthalten.

Lösung:

Ges.: Banddiagramm $W(x)$

Banddiagramm W(x):

$$W_i(x) = W_i(-\infty) - e\varphi(x)$$

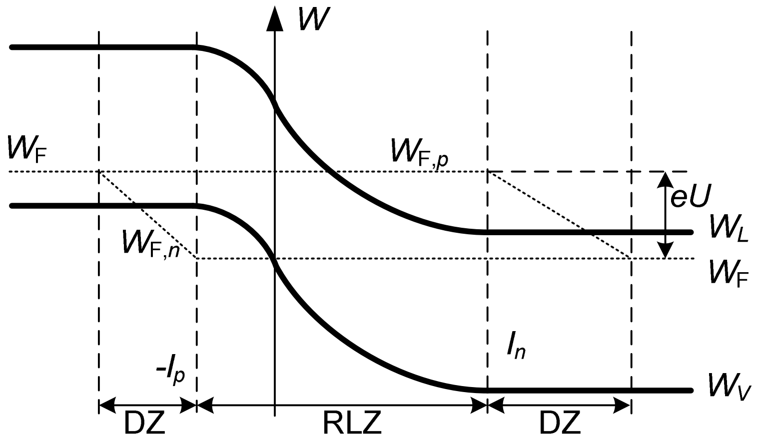


e) Die Diode wird nun mit einer Spannung von $U = -5\,\text{V}$ betrieben (Sperrrichtung). Wie groß ist die RLZ jetzt? Skizzieren Sie das Banddiagramm im Sperr-Betrieb und beschreiben Sie den Unterschied zur Ihrer Zeichnung aus d). Zeichnen Sie die Quasi-Fermi-Niveaus W_{Fn} und W_{Fp} sowie die äußere Spannung U ein.

Lösung:
Geg.: U = -5V
Ges.: l

$$l = \sqrt{\frac{2\varepsilon_r\varepsilon_0}{e}(U_D - U)\times\left(\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_D}\right)} \quad \rightarrow \quad l = 445\,\text{nm}$$

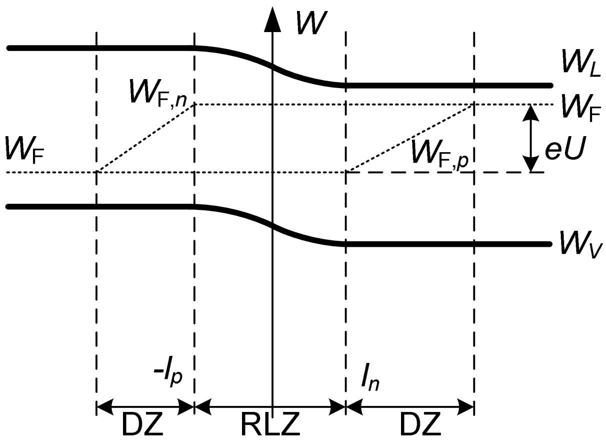
Die Sperrspannung verbiegt die Bänder noch weiter. Der Abstand zwischen dem Fermi-Niveau im p- und n-Bereich entspricht der Energie eU.
Die Verteilung von Ladungsträgern in der Raumladungszone und den Diffusionszonen kann mit Hilfe von Quasi-Fermi-Niveaus beschrieben werden. Im Sperrbetrieb läuft $W_{F,p}$ oben, d.h. es findet über einen größeren Raumbereich eine Verarmung von Ladungsträgern statt, da $p \propto \exp\left(-\frac{W_{F,p}-W_V}{k_B T}\right)$ gilt.



ACHTUNG:
Zeichnung nicht maßstäblich. Die Diffusionszonen (DZ) sind wesentlich länger als die Raumladungszone (RLZ).

f) Die Diode wird mit einer Spannung $U = +0{,}6\,\mathrm{V}$ betrieben (Flussrichtung). Wie groß ist die RLZ jetzt? Skizzieren Sie wiederum das Banddiagramm. Beschreiben Sie den Unterschied zur Ihrer Zeichnung aus d). Zeichnen Sie die Quasi-Fermi-Niveaus W_{Fn} und W_{Fp} sowie die äußere Spannung U ein.

<u>Lösung:</u>
Geg.: U = +0.6 V
Ges.: l, Banddiagramm
Die Spannung in Flussrichtung wirkt der Bandverbiegung durch die Diffusionsspannung U_D entgegen. Der Abstand zwischen dem Fermi-Niveau im p- und n-Bereich entspricht auch hier der Energie eU.
Wird die Diode in Vorwärtsrichtung betrieben, läuft $W_{F,p}$ unten, d.h. die Besetzungswahrscheinlichkeit für Löcher in der Raumladungszone ist höher, da auch hier $p \propto \exp\left(-\frac{W_{F,p}-W_V}{k_B T}\right)$ gilt.



ACHTUNG: Zeichnung nicht maßstäblich! Die Diffusionszonen (DZ) sind wesentlich länger als die Raumladungszone (RLZ)!

$$l = \sqrt{\frac{2\varepsilon_r\varepsilon_0}{e}(U_D - U)\times\left(\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_D}\right)} \quad \rightarrow \quad l = 82.7\,\mathrm{nm}$$

Aufgabe 2) **pn-Diode**

HINWEIS: Die für die Berechnung nötige Schottky-Näherung war mit Dotierstoffkonzentrationen von rund 1·16 cm^{-3} nicht gültig. Die Musterlösung beschreibt daher eine Lösung für Konzentrationen im Bereich von 1·18 cm-3.

Eine ideale, lange pn-Siliziumdiode ist auf der n-Seite ($x \geq 0\mu m$) mit $n_D = 10^{18}\,cm^{-3}$, auf der p-Seite mit $n_A = 5 \cdot 10^{18}\,cm^{-3}$ dotiert. Der Übergang ist abrupt bei $x = 0\mu m$. Die Eigenleitungsträgerdichte beträgt $n_i = 1{,}5 \cdot 10^{10}\,cm^{-3}$, die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_r = 12$, die Minoritätsträgerlebensdauern sind $\tau_n = \tau_p = 0{,}01\,\mu s$, die Diffusionskonstanten betragen $D_n = 23\ cm^2s^{-1}$ und $D_p = 12\ cm^2s^{-1}$. Führen Sie alle Rechnungen in eindimensionaler Näherung bei T = 300K unter der Annahme von Störstellenerschöpfung durch.

a) Berechnen Sie Diffusionsspannung U_D und die Gesamtlänge l der RLZ ohne angelegte Spannung. Nehmen Sie hier Schottky-Näherung an.

<u>Lösung:</u>
Unten stehende Formeln gelten nur bei konstanter Dotierung und abruptem Übergang!

1) $U_D = U_T \ln\left(\frac{n_A n_D}{n_i^2}\right) = 0.971V$

$$l = l_p + l_n = \sqrt{\frac{2\varepsilon_r\varepsilon_0}{e} U_D \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_D}\right)} = 39.3nm$$

2) Zusätzlich: Wie teilt sich die Raumladungszone auf die dotierten Bereiche auf.

$$l_p = l\frac{n_D}{n_A + n_D} = 6.55nm,\ l_n = l\frac{n_A}{n_A + n_D} = 32.75nm$$

b) Die Diode wird nun mit einer Durchlass-Spannung von $U = 0{,}51V$ betrieben. Berechnen Sie die Minoritätsträgerdichten an den Rändern der Raumladungszone. Skizzieren Sie den Verlauf der Minoritätsträgerdichten außerhalb der RLZ.

<u>Lösung:</u>

1) Durch Anlegen einer Durchlassspannung verkürzt sich die RLZ. Zuerst wird die neue Länge berechnet:

$$l = l_p + l_n = \sqrt{\frac{2\varepsilon_r\varepsilon_0}{e} (U_D - U) \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_D}\right)} = 27.1nm$$

$$l_p = l\frac{n_D}{n_A + n_D} = 4.5nm,\ l_n = l\frac{n_A}{n_A + n_D} = 22.6nm$$

2) Die Minoritätsträgerdichte am Rand der RLZ ist durch die angelegte Spannung gegeben:

$$n_p(-l_p) = n_{p,th} \exp\left(\frac{U}{U_T}\right) = 1.7 \cdot 10^{10}\,cm^{-3}$$

$$p_n(l_n) = p_{n,th} \exp\left(\frac{U}{U_T}\right) = 8.6 \cdot 10^{10}\,cm^{-3}$$

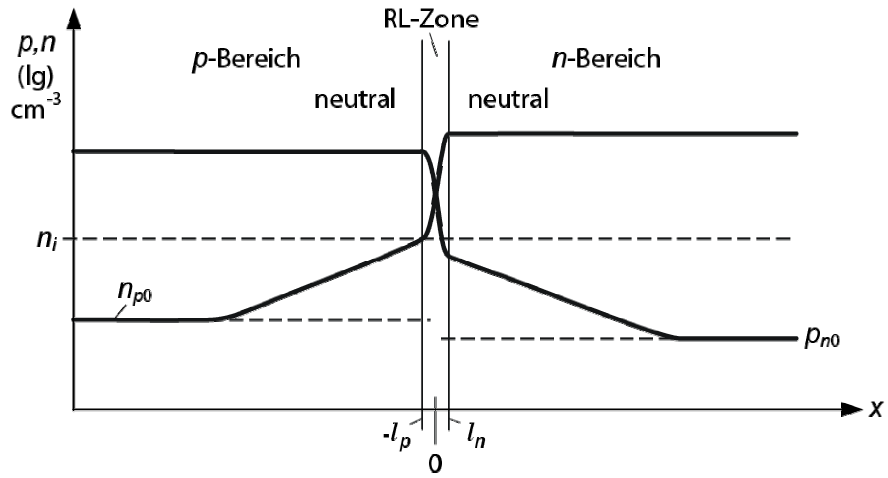
Durch Anlegen einer Durchlassspannung werden die jeweiligen Minoritätsträgerdichten am Rand der RLZ um den Faktor $\exp\left(\frac{U}{U_T}\right)$ erhöht. Der Gradient der Minoritätsträgerdichte hat einen Diffusionsstrom der Minoritäten zur Folge, der sich von der RLZ entfernt.

3) Mit den bekannten Minoritätsträgerdichten an den Grenzen der RLZ und der Kontinuitätsgleichung lässt sich der Verlauf der Überschussdichte $p_\mathrm{n}'(x)$ in der Diffusionszone berechnen:

$$p_\mathrm{n}'(x) = \left(p_\mathrm{n}(l_\mathrm{n}) - p_{\mathrm{n},0}\right)\cdot \exp\left(-\frac{x-l_\mathrm{n}}{L_p}\right) = \left(p_{\mathrm{n},0}\exp\left(\frac{U}{U_\mathrm{T}}\right) - p_{\mathrm{n},0}\right)\exp\left(-\frac{x-l_\mathrm{n}}{L_p}\right), \text{ für } x>l_\mathrm{n}$$

analog für die p-Seite:

$$n_\mathrm{p}'(x) = \left(n_\mathrm{p}(-l_\mathrm{p}) - n_{p,0}\right)\cdot \exp\left(+\frac{x+l_\mathrm{p}}{L_\mathrm{n}}\right) = \left(n_{p,0}\exp\left(\frac{U}{U_\mathrm{T}}\right) - n_{p,0}\right)\exp\left(+\frac{x+l_\mathrm{p}}{L_\mathrm{n}}\right), \text{ für } x<-l_\mathrm{p}$$



c) Berechnen Sie die Position $x_{n,\mathrm{BG}}$, bei der im n-dotierten Teil der Diode das n-Bahngebiet beginnt? Der Beginn des Bahngebietes ist so definiert, dass die Überschuss-Minoritätsträgerdichte p' an dieser Position genau den Wert der ungestörten Minoritätsträgerdichte p_{n0} annimmt. Vergleichen Sie die Länge des Diffusionsgebiets mit der Länge der RLZ.

Lösung:

Ges.: Bei welcher Position $x_{\mathrm{n,BG}}$ fängt in der Diode das n-Bahngebiet an?

Lösung:

1) Die erhöhte Minoritätsträgerdichte am Rand der RLZ gegenüber dem Gleichgewichtsfall führt zu einer anschließenden Diffusionszone**.** Dort ist zwar die Raumladung abgeklungen, aber die Trägerdichten sind noch erhöht. Die Minoritätsträgerdichte verhält sich dort in Analogie zu Gl. (5.73) wie

$$p_\mathrm{n}'(x) = \Delta p(l_n)\cdot \exp\left(-\frac{x-l_n}{L_p}\right) \text{ mit } L_p = \sqrt{D_p\tau_p} = 3.46\ \mu\mathrm{m}.$$

2) Es gilt

$$\Delta p(l_n) = p_n(l_n) - p_{n,0}$$

und mit dem Ergebnis aus 2b)

$$\Delta p(l_n) = \frac{n_i^2}{n_D}\exp\left(\frac{U}{U_T}\right) - p_{n0} = \frac{n_i^2}{n_D}\left[\exp\left(\frac{U}{U_T}\right) - 1\right]$$

3) Prinzipiell ist in der unbegrenzt langen Diode die Diffusionszone unendlich weit ausgedehnt. Wir können aber *willkürlich* festlegen, dass das Bahngebiet etwa da beginnt,

wo p_n' in die gleiche Größenordnung kommt wie die Gleichgewichts-Minoritätsträgerdichte p_{n0}:

$$p_\mathrm{n}'(x_{n,BG}) = p_{n0} = \frac{n_i^2}{n_D}$$

4) Einsetzen von 1) und 2) in 3) und Auflösen nach $x_{n,BG}$ ergibt:

$$\Delta p(x_{n.BG}) \approx n_i^2 / n_D \cdot \exp\left(\frac{U}{U_T} - \frac{x_{n,BG} - l_n}{L_p}\right)$$

und damit

$$x_{n,BG} \approx \frac{U}{U_T} L_P + l_n = 62.42\mu\mathrm{m}$$

d) Berechnen Sie die stationäre Löcherverteilung p_n als Funktion von x in der RLZ des n-Gebietes. Nehmen Sie an, dass das Quasi-Fermi-Niveau W_{Fn} für Elektronen in der RLZ konstant ist und verwenden Sie den in der Vorlesung hergeleiteten Verlauf des Potentials $\varphi(x)$. Erläutern Sie, wie dieses Ergebnis mit den Annahmen der Schottky-Näherung in Einklang zu bringen ist.
Lösung:

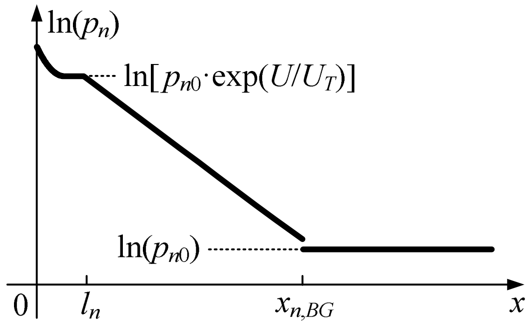
Mit der Debye-Länge $L_{Dn} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r U_T}{e n_D}} = 0.013\ \mu\mathrm{m}$ lässt sich die Minoritätsträgerdichte für das gesamte n-Gebiet schreiben als:

$$p_n(x) = n_i^2 / n_D \cdot \begin{cases} \exp\left(\frac{U}{U_T}\right) \exp\left(\frac{1}{2}\left[\frac{x - l_n}{L_{Dn}}\right]^2\right), & 0 \le x < l_n \\ \left[\exp\left(\frac{U}{U_T}\right) - 1\right] \exp\left(-\frac{x - l_n}{L_p}\right) + 1, & l_n \le x < x_{n.BG} \\ 1, & x \ge x_{n.BG} \end{cases}$$

Die Schottky-Näherung nimmt eine komplett von Trägern entvölkerte RLZ an. Vergleicht man $p_n(0) = 7.6 \cdot 10^{11}\,\mathrm{cm}^{-3}$ mit der Majoritätsträgerdichte außerhalb der RLZ, so sieht man dass diese größer ist und sich die Raumladung damit hauptsächlich aus ionisierten Dotanden zusammensetzt.

e) Skizzieren Sie die Löcherverteilung $p_n(x)$ im gesamten n-Gebiet.
<u>Lösung:</u>

Die rechts dargestellte Skizze ist hier nur qualitativ dargestellt, da sich die Längen der einzelnen Bereiche um Größenordnungen unterscheiden.



f) Berechnen Sie die Löcherstromdichte und die Elektronenstromdichte bei $x = 3\,\mu\text{m}$.

Lösung:

1) Die Stelle $x = 3\ \mu\text{m}$ befindet sich in der Diffusionszone, und dort ist die Löcherstromdichte maßgeblich vom Diffusionsstrom bestimmt, da das Feld (annähernd) nur über der RLZ abfällt. Es folgt somit

$$J_p \approx -eD_p \frac{dp'}{dx} = eD_p \frac{p'(l_n)}{L_p} \exp\left(-\frac{x-l_n}{L_p}\right) \quad \rightarrow \quad J_p(3\,\mu\text{m}) \approx 1{,}01\ \text{A/cm}^2$$

2) Die Elektronenstromdichte kann man sich aus dem Gesamtstrom berechnen:

$$J = J_n + J_p \Rightarrow J_n = J - J_p = I / A - J_p$$

Der Gesamtstrom durch die Diode wird nach Gl. (6.44) und (6.48) berechnet:

$$I = I_S \left[\exp\left(\frac{U}{U_T}\right) - 1\right] \quad \text{mit} \quad I_S = A e n_i^2 \left(\frac{D_n}{L_n n_A} + \frac{D_p}{L_p n_D}\right)$$

Die dafür benötigten Größen wurden entweder schon oben berechnet oder sind in der Aufgabenstellung gegeben, und der Zahlenwert für die Elektronenstromdichte wird damit

$$J_n \approx e n_i^2 \left(\frac{D_n}{L_n n_A} + \frac{D_p}{L_p n_D}\right)\left[\exp\left(\frac{U}{U_T}\right) - 1\right] - J_p = 1{,}95\ \text{A/cm}^2.$$