

Musterlösung zu Übungsblatt 3

Aufgabe 1) Si-Halbleiterprobe

Eine Probe aus Silizium ist n-dotiert mit $n_D = 1 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ und befindet sich auf Raumtemperatur $T = 300 \text{ K}$. Die Eigenleitungsträgerdichte beträgt $n_i = 1.5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$.

- a) Nehmen Sie an, dass das Donatorniveau weit oberhalb der Fermi-Energie liegt und dass damit Störstellenerschöpfung vorliegt. Wie groß ist die Majoritäts- und Minoritätsträgerdichte in diesem Fall?

Lösung:

1) Störstellenerschöpfung (**SSE**): $n_D^+ = n_D = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$

2) n-Dotierung: $n_A = 0 \Rightarrow n_A^- = 0$

3) Ladungsneutralität (**LN**): $n + n_A^- = p + n_D^+$

4) Massenwirkungsgesetz (**MWG**): $n \cdot p = n_i^2$

5) Daraus ergibt sich die quadratische Gleichung $n = \frac{n_D^+}{2} + \sqrt{\frac{n_D^{+2}}{4} + n_i^2}$ und analog für p .

Daraus folgt für die Trägerdichten $n \cong n_D^+ = n_D = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, $p \cong \frac{n_i^2}{n} = 2.25 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-3}$

- b) Nehmen Sie nun an, dass der energetische Abstand zwischen Donator-Niveau und Fermi-Niveau nur noch $(W_D - W_F) = 2kT$ beträgt. Wie groß ist die Majoritäts- und Minoritätsträgerdichte jetzt?

Lösung:

- 1) Keine Störstellenerschöpfung: Die Wahrscheinlichkeit, dass Donatoren besetzt sind folgt mit

$$f_{B,D,A}(E) = \frac{1}{1 + 1/g \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)} \quad g = \begin{cases} 1 & \text{Bandzustände} \\ 2 & \text{Donatoren} \\ 1/2 & \text{Akzeptoren} \end{cases} \quad (3.33)$$

Für Donatoren ist $g = 2$ zu setzen. Die Wahrscheinlichkeit der Ionisierung, also Nicht-besetzung mit Elektronen liegt mit Gl. 3.34 (Skript) und $(W_D - W_F) = 2kT$ bei knapp 79%:

$$n_D^+ = n_D [1 - f_D(W_D)] = \frac{n_D}{1 + 2 \exp[(W_F - W_D)/kT]} = \frac{n_D}{1 + 2 \exp(-2)} = n_D \cdot 0.787$$

- 2) Ladungsneutralität (**LN**) $n + n_A^- = p + n_D^+$, wegen ausschließlicher n-Dotierung: $n = p + n_D^+$.

Da auch hier $p \ll n_D^+$ angenommen werden kann (vgl. 1a), ist $n \cong n_D^+$
→ Majoritätsträgerdichte $n \cong 0.787 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$

- 3) Mit **MWG** $n \cdot p = n_i^2$: → Minoritätsträgerdichte $p = \frac{n_i^2}{n} \cong 2.86 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-3}$

- c) Berechnen Sie für den in b) beschriebenen Fall den Abstand des Fermi-niveaus von der Leitungsbandkante. Die effektive Zustandsdichte des Leitungsbandes in Silizium beträgt $N_L = 3,2 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$.

Lösung:

Wir verwenden die Formel für die Ladungsträgerdichte im Leitungsband:

$$n = N_L \exp\left(-\frac{E_L - E_F}{kT}\right).$$

$$\text{Auflösen ergibt: } E_L - E_F = -\ln\left(\frac{n}{N_L}\right)kT = -\ln\left(\frac{0,787 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}}{3,2 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}}\right)kT = 156 \text{ meV}$$

- d) Berechnen Sie für den in c) genannten Fall die Besetzungswahrscheinlichkeit eines Leitungsbandzustandes an der Bandkante. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Besetzungswahrscheinlichkeit eines Donator Zustandes. Erklären Sie warum im Leitungsband signifikante Elektronendichten vorliegen, obwohl dieses energetisch sogar noch über den quasi unbesetzten Donatoren liegt.

Lösung:

Die Besetzungswahrscheinlichkeit eines Donators errechnete sich in b) zu 21,3%.

Die Besetzungswahrscheinlichkeit eines Zustandes an der Leitungsbandkante ist durch die Fermistatistik der Bandzustände gegeben:

$$f_B(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_L - E_F}{kT}\right)} = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{156 \text{ meV}}{25,9 \text{ meV}}\right)} = 0,0024$$

Es sind also nur 0,24% der Zustände an der Leitungsbandkante besetzt.

Trotz der viel kleineren Besetzungswahrscheinlichkeit liegen in den Bandzuständen höhere Trägerdichten vor. Die Ursache findet sich in den entsprechenden Zustandsdichten, die sich um Größenordnung unterscheiden. Die Donatorzustände sind energetisch lokalisierte und zahlenmäßig kleine Zustände innerhalb der Bandlücke ($n_D = 1 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$). Im Kontrast dazu ist die Zustandsdichte im Band durch die quasi-kontinuierliche Dispersionsrelation des Halbleiters gegeben (äquivalente Zustandsdichte $N_L = 3,2 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$).

Aufgabe 2) Fermi-Niveau und Trägerverteilung

Es werden die Besetzungswahrscheinlichkeiten für Elektronen im Leitungsband und Löcher im Valenzband von einem Material im thermischen Gleichgewicht betrachtet. Man findet in dem betrachteten Material, dass die Besetzungswahrscheinlichkeit für Elektronen an der Leitungsbandkante gerade gleich groß ist wie die Besetzungswahrscheinlichkeit für Löcher, welche kT unterhalb der Valenzbandkante sind.

- a) Berechnen Sie die Lage des Fermi Niveaus relativ zur Mitte der Bandlücke. Gesucht ist ein formaler Ausdruck. Welche zwei Möglichkeiten gibt es für Temperaturen $T > 0 \text{ K}$, die Abweichung des Fermi-niveaus von der Mitte der Bandlücke zu erklären?

Lösung:

Exakte Lösung durch Gleichsetzen ergibt Bestimmungsgleichung

$$f_n(W_L) = f_p(W_V - kT)$$

$$\frac{1}{1 + \exp\left[\left(W_L - W_F\right) / kT\right]} = 1 - \frac{1}{1 + \exp\left[\left(W_V - kT - W_F\right) / kT\right]}$$

Auflösen/Vergleichen liefert: $W_F = \frac{W_L + W_V - kT}{2}$, mit Boltzmann Näherung:

$$\exp\left[-\left(W_L - W_F\right) / kT\right] = \exp\left[-\left(W_F - W_V + kT\right) / kT\right]$$

$$\left(W_L - W_F\right) / kT = \left(W_F - W_V + kT\right) / kT$$

$$W_F = \left(W_L + W_V - kT\right) / 2$$

W_F muss in der Mitte zwischen W_L und $W_V - kT$ liegen, da $f_n(W_L) = f_p(W_V - kT)$

Mögliche Gründe, warum das Fermi Niveau nicht exakt in der Mitte der Bandlücke liegt:

- Dotierung des Halbleiters
- Unterschiedliche effektive Masse des Valenz und Leitungsbandes bei $T > 0$, das Fermi-Niveau nähert sich dem Band mit dem kleineren Bandgewicht.

Aufgabe 3) Maximum der Elektronenverteilung

Wenn man die Zustandsdichte und die Besetzungswahrscheinlichkeiten für Elektronen im Leitungsband kennt, kann man die Verteilung der Elektronen als Funktion der Energie berechnen. Wie weit ist das Maximum dieser Verteilung von der Leitungsbandkante entfernt? Gesucht ist ein formaler Ausdruck. Gehen Sie davon aus, dass die Boltzmann-Näherung gültig ist.

Lösung:

Zahl der Elektronen im Leitungsband bei gegebener Energie W (vgl. Zeichnungen)

$$n(W) = \rho_n(W) \cdot f_n(W)$$

wird maximal, wenn die Ableitung verschwindet:

$$0 = \frac{d}{dW} n(W) = \frac{d}{dW} [\rho_n(W) \cdot f_n(W)]$$

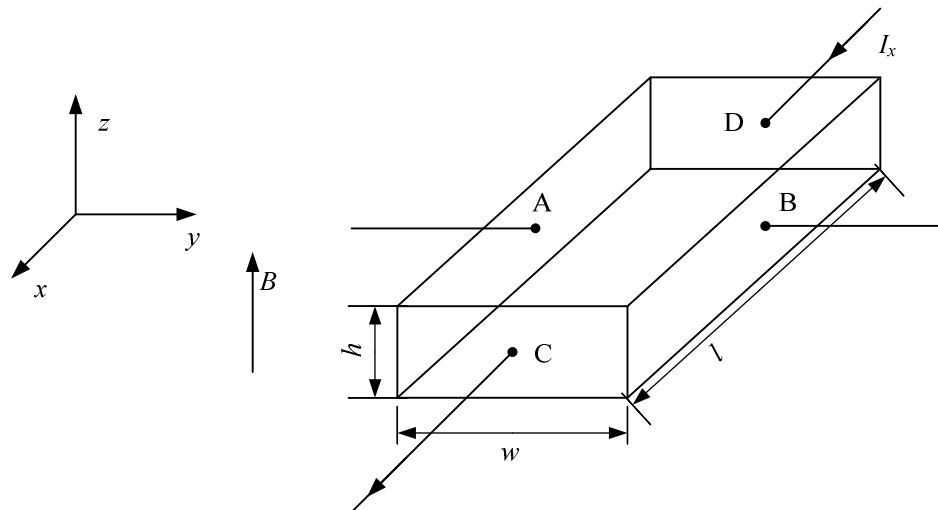
$$= \frac{d}{dW} \left[\frac{4\pi(2m_n)^{3/2}}{h^3} \sqrt{W - W_L} \cdot \exp\left(-\frac{W - W_F}{kT}\right) \right] = 0$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{W - W_L}} - \frac{1}{kT} \sqrt{W - W_L} = 0$$

$$W = W_L + \frac{kT}{2}$$

Aufgabe 4) Hall-Effekt

Gegeben sei ein dotierter Halbleiter mit Breite $w = 2 \text{ mm}$, Höhe $h = 1 \text{ mm}$ und Länge $l = 5 \text{ mm}$. Es liege eine magnetische Flussdichte $B = 40 \text{ mT}$ in z -Richtung an (siehe Skizze) und ein Strom $I_x = 10 \text{ mA}$ fließe der Länge nach in $+x$ -Richtung durch den Halbleiter. Zwischen A und B wird eine Spannung $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = 1 \text{ mV}$ gemessen und zwischen D und C eine Spannung $U_{DC} = 500 \text{ mV}$.



- a) Welche Art der Dotierung liegt im Halbleiter vor?

Lösung

Gegeben: Potentialdifferenz $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = 1 \text{ mV}$, $U_{DC} = 500 \text{ mV}$, $I_x = 10 \text{ mA}$

Gesucht: Dotiertyp

Durch U_{AB} kennt man die Polarität der Hallspannung: A ist positiv geladen, B negativ. Da die Stromrichtung I_x bekannt ist, kann man mit der Rechte-Hand-Regel (bzw. Linke-Hand-Regel) testen, ob sich das korrekte Vorzeichen der Hallspannung für einen Löcherstrom (bzw. Elektronenstrom) ergibt. Mit der Rechte-Hand-Regel (Bewegung in $+x$ Richtung, Vermittlung in $+z$, Kraftwirkung in $-y$ Richtung) ergibt sich die korrekte Polarität U_{AB} , sodass der Halbleiter p-dotiert ist.

- b) Berechnen Sie die Beweglichkeit der Majoritätsträger in dieser Probe. Wie groß ist die Ladungsträgerdichte?

Lösung

Gegeben: $U_{AB} = U_H = 1 \text{ mV}$, $U_{DC} = 500 \text{ mV}$, $B = 40 \text{ mT}$, $l = 5 \text{ mm}$, $w = 2 \text{ mm}$, $h = 1 \text{ mm}$

Gesucht: Beweglichkeit μ_p , p

Die Beweglichkeit ist durch die Formel $\mu_p = \frac{U_H l}{U_{DC} B w} = 1250 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$ gegeben (siehe Skript).

Aus der Stromdichte lässt sich damit auf die Ladungsträgerdichte schließen:

$$J_p = ep\mu_p \frac{U_{DC}}{l}$$

$$\Rightarrow p = \frac{J_p l}{ep\mu_p U_{DC}} = 2,5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$$

- c) Erwarten Sie eine Hall Spannung für den Fall eines undotierten Halbleiters, bei dem die Elektronen eine größere Beweglichkeit aufweisen als die Löcher? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

Bei einem undotierten Halbleiter tragen beide Ladungsträgerarten n, p zum Driftstrom bei, wobei der jeweilige Anteil durch die Beweglichkeiten μ_p bzw. μ_n gegeben ist. Beide Ladungsträgerarten werden durch das Magnetfeld in die gleiche Richtung abgelenkt. Da die Hallspannung aber von der jeweiligen Stromdichte der Ladungsträger abhängt, dominiert die Hallspannung des Ladungsträgers mit der größeren Beweglichkeit. So kann es auch im undotierten Fall eine Hallspannung geben.