Musterlösung zu Übungsblatt 4

Aufgabe 1) **Driftstrom in einem dotierten Halbleiter**

Wir betrachten ein Halbleiterstäbchen aus Silizium der Länge $l = 8\ \mu\text{m}$. Die Stirnflächen haben die Dimensionen $3\ \mu\text{m} \times 4\ \mu\text{m}$. Der Halbleiter sei mit $2{,}5 \cdot 10^{16}\,\text{cm}^{-3}$ Bor-Atomen und mit $2 \cdot 10^{16}\,\text{cm}^{-3}$ Arsen-Atomen dotiert. Die effektive Masse der Elektronen und Löcher sei $0{,}33 \cdot m_0$ und $0{,}56 \cdot m_0$, wobei m_0 die freie Elektronenmasse ist. Es gilt Störstellenerschöpfung. Die Bandlücke ist $W_G = 1.12\ \text{eV}$, die Temperatur $T = 300\ \text{K}$.

a) Bestimmen Sie die Ladungsträgerkonzentrationen für die Elektronen und Löcher. Berechnen Sie dazu die äquivalenten Zustandsdichten und bestimmen Sie daraus n_i.
Lösung:
Geg: Es gilt Störstellenerschöpfung, Zahlenwerte aus Aufgabe
Ges.: Ladungsträgerkonzentrationen p und n

$$n_i^2 = N_L N_V \exp\left(-\frac{W_G}{kT}\right)$$

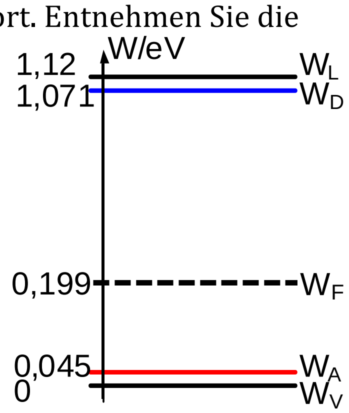
$$N_L = 2\left(\frac{2\pi \cdot m_n \cdot kT}{h^2}\right)^{3/2} (\approx 4{,}7 \cdot 10^{18}\,\text{cm}^{-3}),\quad N_V = 2\left(\frac{2\pi \cdot m_p \cdot kT}{h^2}\right)^{3/2} (\approx 1{,}1 \cdot 10^{19}\,\text{cm}^{-3})$$

$$n_i = 2{,}6 \cdot 10^{9}\,\text{cm}^{-3}$$

$$p = \sqrt{\left(\frac{n_D - n_A}{2}\right)^2 + n_i^2} - \left(\frac{n_D - n_A}{2}\right) = 5 \cdot 10^{15}\,\text{cm}^{-3}$$

$$n = \frac{n_i^2}{p} = 1{,}4 \cdot 10^{3}\,\text{cm}^{-3}$$

b) Zeichnen Sie das Banddiagramm mit Fermi-Niveau und den Energieniveaus der Dotieratome. Steht die Lage des Fermi-Niveaus im Einklang mit der Annahme, dass Störstellenerschöpfung vorliegt? Begründen Sie Ihre Antwort. Entnehmen Sie die Werte für die Störstellenniveaus aus den Vorlesungsfolien.



Lösung:

Geg.: Daten aus 1a), aus Folien lassen sich entnehmen:
Donator: $W_L - W_D = 49\ \text{meV}$, Akzeptor: $W_A - W_V = 45\ \text{meV}$
Ges.: Banddiagramm: Wo liegt W_F?
War Annahme SSE korrekt?

$$n_D^+ = n_D\left[1 - f_D(W_D)\right] = \frac{n_D}{1 + 2\exp\left[(W_F - W_D)/kT\right]}$$

$$n_A^- = n_A f_A(W_A) = \frac{n_A}{1 + 2\exp\left[(W_A - W_F)/kT\right]}$$

W_F ist noch zu bestimmen, Problem: $n = n(W_F)$, $p = p(W_F)$.

Genau genommen ist nur eine iterative Lösung möglich.
Vereinfachter Ansatz:

a. Annahme von SSE
b. Berechnen von Ladungsträgerdichten und W_F
c. Test, ob SSE gerechtfertigt war

mit $p \cong 5 \cdot 10^{15}\,\mathrm{cm}^{-3}$ aus 1a):

$$p = N_V \exp\left(-\frac{W_F - W_V}{kT}\right) \rightarrow W_F - W_V = -kT \ln\left(\frac{p}{N_V}\right) = 199\ \mathrm{meV}$$

Akzeptoren: $W_F - W_A = 154\ \mathrm{meV} \rightarrow n_A^- > 0.99 \cdot n_A$
Donatoren: $W_D - W_F = 872\ \mathrm{meV} \gg kT \rightarrow n_D^+ \cong n_D$
Ergebnis: Annahme von SSE war gerechtfertigt.

Die Abhängigkeit der Ladungsträger-Driftgeschwindigkeit von der angelegten Feldstärke ist in Silizium gegeben durch die Beziehung

$$v_{n,p} = \frac{v_s}{\left[1 + \left(E_0 / E\right)^{\gamma}\right]^{1/\gamma}},$$

wobei die Sättigungsgeschwindigkeit $v_s = 1 \cdot 10^7$ cm/s beträgt, sowie für Elektronen und Löcher jeweils gelten: $E_{0,\mathrm{n}} = 7 \cdot 10^3$ V/cm, $E_{0,p} = 2 \cdot 10^4$ V/cm und $\gamma_n = 2,\ \gamma_p = 1$.

c) Berechnen Sie die Beweglichkeit der Elektronen und Löcher.

Für kleine Felder $E \ll E_0$ bestimmen die Beweglichkeiten die Driftgeschwindigkeiten.

$$v_{n,p} = \left.\frac{v_s}{\left[1 + \left(E_0 / E\right)^{\gamma}\right]^{1/\gamma}}\right|_{E \ll E_0} \approx \frac{v_s}{E_0 / E} = \frac{v_s E}{E_0}$$

Damit lassen sich die Beweglichkeiten ausdrücken als

$$\mu_{n,p} = \frac{v_{n,p}}{E} = \frac{v_s}{E_{0,n,p}}, \quad \mu_n = 1429 \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{Vs}}, \quad \mu_p = 500 \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{Vs}}.$$

d) Es wird nun eine Spannung $U = 60$ V zwischen den Stirnflächen angelegt. Bestimmen Sie die Driftgeschwindigkeiten der Elektronen und Löcher. Prüfen Sie dabei, ob die Geschwindigkeiten sich in der Nähe der Sättigungsdriftgeschwindigkeiten bewegen.

Lösung:

Geg.: Daten aus 1a), aus Skript Abb. 4.5 Auftragung Driftgeschwindigkeit über Feld: Ablesbar ist für Si bei 300 K eine Sättigungsgeschwindigkeit von $v_S = 10^7$ cm/s.
Ges.: Driftgeschwindigkeiten v_n und v_p. Sättigungsgeschwindigkeit?

$E = U/l = 75000$ V/cm, Vergleich mit Graphen aus Skript ergibt, dass Löcher und Elektronen sich bereits im Sättigungsbereich befinden.

Dann gilt: $v_{n,p} = \dfrac{v_S}{\left[1 + \left(E_0 / E\right)^{\gamma}\right]^{1/\gamma}}$ mit $v_s = 1 \cdot 10^7$ cm/s.

Elektronen: $E_0 = 7\cdot 10^3$ V/cm, $\gamma = 2$, damit $v_n = 9.96\cdot 10^6 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

Löcher: $E_0 = 2\cdot 10^4$ V/cm, $\gamma = 1$, damit $v_p = 7.89\cdot 10^6 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

e) Welcher Gesamtstrom fließt durch das Stäbchen?
Lösung:
Geg.: Daten aus 1a)
Ges.: Gesamtstrom I_{ges}
Homogen Dotiert, nur Driftstromdichten fallen an:
$J_F = en|v_n| + ep|v_p|$, $I_{\text{ges}} = J_F \cdot b \cdot h = 0.76$ mA

Aufgabe 2) **Dynamik von Überschussladungsträgerdichten in Silizium**

Ein nicht geerdetes n-dotiertes Silizium-Bauteil (n_i = 1,5·10^{10} cm^{-3}, n_D = 2·10^{15} cm^{-3}, μ_p = 460 cm^2/Vs, μ_n = 1350 cm^2/Vs) werde einmal kurz einem Lichtimpuls ausgesetzt. Der Lichtblitz generiert eine Überschussträgerdichte von $n' = p'$ = 10^{10} cm^{-3}, welche sich gleichmäßig über das ganze Bauteil verteilt. Die Dauer des Lichtblitzes sei sehr kurz und ist zu vernachlässigen. Es gilt Störstellenerschöpfung.

a) Handelt es sich hier um „schwache Injektion“ (*low-level injection*) oder „Hochinjektion“ (*high-level injection*)?
Lösung:
Ges.: $np \ll (n_D - n_A)^2$ (**LLI**) oder $n \gg |n_D - n_A|$ (**HLI**)?
SSE: $n = n_D$, $p = p_{th} + p' \approx p'$
LLI: $np \ll (n_D - n_A)^2$, $2\cdot 10^{15} 10^{10} \ll (2\cdot 10^{15})^2$ ist wahr, also LLI.

b) Wie groß ist die relative Leitfähigkeitsänderung der Probe unmittelbar nach dem Lichtblitz? Geben Sie einen formalen Ausdruck sowie einen numerischen Wert an.
Lösung:
Geg.: Beweglichkeiten μ_p, μ_n, Dotierung $n_D = 2\cdot 10^{15}\text{cm}^{-3}$
Ges.: Relative Leitfähigkeitsänderung $\Delta\sigma / \sigma$
Es werden Paare erzeugt: $n' = p'$.
$\sigma = en_{n,th}\mu_n + ep_{n,th}\mu_p$; Änderung: $\Delta\sigma = en'\mu_n + ep'\mu_p$

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{n'\mu_n + p'\mu_p}{n_{n,th}\mu_n + p_{n,th}\mu_p} \cong \frac{n'\mu_n + n'\mu_p}{n_{n,th}\mu_n} = 6{,}7\cdot 10^{-6}$$

c) Im Halbleiter werden zunächst strahlende Prozesse betrachtet, die durch eine Netto-Rekombination $r_{sp} - g_s = B\cdot n_n p_n - B\cdot n_i^2$ beschrieben werden. Zeigen Sie, dass das Abklingen der Überschussladungsträgerdichte im vorliegenden Fall durch eine Lebensdauer beschrieben werden kann in der Form $r_{sp} - g_s = \frac{p'}{\tau_{sp}}$

Lösung:
Geg.: SSE, LLI, $n_i^2 = p_{n,th} n_{n,th}$

$$r_{sp} - g_s = B \cdot n_n p_n - B \cdot n_i^2 = B\left[\left(n_{n,th} + p'\right)\left(p_{n,th} + p'\right) - n_i^2\right]$$
$$= B\left[\left(n_{n,th} + p_{n,th} + p'\right)p'\right] \cong B\left[n_{n,th} p'\right] = \frac{p'}{\tau_{sp}}$$

d) Der Halbleiter soll zusätzlich tiefe Störstellen aufweisen, über die Shockley-Read-Hall Rekombination stattfindet. In diesem Fall ist die Netto-Rekombinationsrate gegeben durch $r_t - g_t = \dfrac{n_n \cdot p_n - n_i^2}{\left(n_n + n'_{th}\right)\tau_p + \left(p_n + p'_{th}\right)\tau_n}$

wobei die Hilfsgrößen n_{th}‘ und p_{th}‘ gegeben sind durch $n_{th}' = n_{th} \exp\left(\dfrac{W_T - W_F}{kT}\right)$ und $p_{th}' = p_{th} \exp\left(\dfrac{W_F - W_T}{kT}\right)$. Vereinfachen Sie den Ausdruck für den vorliegenden Fall und unter der Annahme $W_F - W_T = 10\ kT$ und zeigen Sie, dass sich die Rekombinationsrate schreiben lässt als $r_t - g_t = \dfrac{p'}{\tau_{SRH}}$, wobei $\tau_{SRH} = \tau_p$ ist. Nehmen Sie an, dass die Parameter τ_n und τ_p in der gleichen Größenordnung liegen.

Lösung:
Geg.: SSE, LLI, $n_i^2 = p_{n,th} n_{n,th}$, $n_{n,th} = n_D \gg n'_{th}, p'_{th}, p_{n,th}$
Für die Hilfsgrößen gilt:
$$n_{th}' = n_{th} \exp\left(\frac{W_T - W_F}{kT}\right) = 9,08 \cdot 10^{10}\ \text{cm}^{-3}$$
$$p_{th}' = p_{th} \exp\left(\frac{W_F - W_T}{kT}\right) = 2,49 \cdot 10^{9}\ \text{cm}^{-3}$$

$$r_t - g_t = \frac{n_n \cdot p_n - n_i^2}{\left(n_n + n'_{th}\right)\tau_p + \left(p_n + p'_{th}\right)\tau_n} = \frac{\left(n_{n,th} + p'\right)\left(p_{n,th} + p'\right) - n_i^2}{\left(n_{n,th} + p' + n'_{th}\right)\tau_p + \left(p_{n,th} + p' + p'_{th}\right)\tau_n}$$
$$\cong \frac{n_{n,th} p' - n_{th} p_{th}}{n_{n,th}\tau_p} \cong \frac{p' - \mathrm{p}_{th}}{\tau_p} \cong \frac{p'}{\tau_p} \triangleq \frac{p'}{\tau_{SRH}}$$

e) Schreiben Sie nun die Differentialgleichung auf, welche benötigt wird, um den zeitlichen Verlauf der Überschuss-Ladungsträgerkonzentration zu berechnen und geben Sie die formale Lösung der Differentialgleichung an. Berücksichtigen Sie dabei sowohl nicht-strahlende (Shockley-Read-Hall, Lebensdauer τ_{SRH}) als auch strahlende Prozesse (spontane Emission, Lebensdauer τ_{sp}).

Lösung:
$$\frac{\mathrm{d}p'(t)}{\mathrm{d}t} = g_{ext}(t) + g_s + g_t - r_{sp} - r_t = g_{ext}(t) - \left(\frac{1}{\tau_{sp}} + \frac{1}{\tau_{SRH}}\right)p'(t) = g_{ext}(t) - \frac{p'(t)}{\tau_{eff}}$$

Randbedingung: $p'(t_1 = 0) = p'_0$ → exponentieller Abfall
$$p'(t) = p'_0 \exp\left[-(t - t_1)/\tau_{\text{eff}}\right]$$

f) Skizzieren Sie die Entwicklung der Überschuss-Ladungsträgerkonzentrationen in der Probe als Funktion der Zeit. Skizzieren Sie außerdem qualitativ den zeitlichen Verlauf der Überschuss-Ladungsträgerkonzentration für den Fall, dass ein zweiter Lichtblitz auf die Probe trifft, bevor die Überschussladungsträger abgeklungen sind.