

Musterlösung zu Übungsblatt 2

Aufgabe 1) Kurzfragen zu Kapitel 1-3

- a) Beschreiben Sie die Unterschiede zwischen Metallen und Halbleitern bezüglich ihrer Bandstruktur und der Lage des Fermi-Niveaus. Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für die elektrische Leitfähigkeit und deren Temperaturabhängigkeit?

Halbleiter	Metall
Valenz- und Leitungsband	Teilgefülltes höheres Band
Fermi-Niveau in der Bandlücke	Fermi-Niveau innerhalb Band
Isolierend bei niedrigen Temperaturen	Leitfähig, auch bei niedrigen Temperaturen

- b) Erläutern Sie die Unterschiede zwischen den Halbleitern Silizium und Galliumarsenid im Hinblick auf die Emission und Absorption von Licht.

Silizium	Galliumarsenid
Element-Halbleiter	Verbindungshalbleiter
Indirekter Halbleiter (Emission Absorption nur als Drei-Teilchen-Prozess mit Phonon möglich und unwahrscheinlich)	Direkter Halbleiter (Emission und Absorption möglich)
Diamantstruktur	Zinkblendestruktur

- c) Die Fermi-Verteilung kann für Energien weit oberhalb der Fermi-Energie W_F durch die Boltzmann-Verteilung angenähert werden. Berechnen Sie die Energiedifferenz $W - W_F$ in Einheiten von kT , ab welcher der relative Fehler zwischen den Verteilungen weniger als 5% beträgt.

Bem.: Die Boltzmann-Verteilung nähert die Fermi-Dirac-Verteilung für Energien mit einem hinreichenden Abstand von der Fermi-Energie an.

$$f_{FD}(W) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\Delta W}{kT}\right)},$$

Geg.: Fermi-Dirac-Verteilung

$$\text{Boltzmann-Vert. } f_B(W) = \exp\left(-\frac{\Delta W}{kT}\right),$$

dabei abgekürzt: $\Delta W = W - W_F$

Ges.: Verhältnis $\frac{\Delta W}{kT}$, ab welchem der relative Fehler $< 5\%$ beträgt.

$$\frac{f_B(W) - f_{FD}(W)}{f_{FD}(W)} = \exp\left(-\frac{\Delta W}{kT}\right) < 5\% \Rightarrow \frac{\Delta W}{kT} > 3$$

Lsg.:

- d) Wie groß ist die Besetzungswahrscheinlichkeit an der unteren Kante des Leitungsbandes für Silizium ($W_g = 1,12$ eV bei 300 K) wenn das Fermi-Niveau (i) in der Mitte des verbotenen Bandes bzw. (ii) 0,05 eV unter der Leitungsbandkante liegt?

Geg.: (i) $\Delta W = W - W_F = 0.5W_g = 0.56$ eV

(ii) $\Delta W = 0.05$ eV

$$f_{FD}(W) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\Delta W}{kT}\right)}$$

Ges.: $f_{FD}(0.56\text{eV}), f_{FD}(0.05\text{eV})$

Lsg.: (i) $f \approx 3.9 \cdot 10^{-10}$ (Boltzmann-Statistik auch benutzbar)

(ii) $f \approx 0.127$

- e) Erläutern Sie den Unterschied und die Ziele einer Lebensdauerdotierung und einer Leitfähigkeitsdotierung.

- (i) Dotanden in Bandmitte ermöglichen eine effektive Rekombination, die *Lebensdauer sinkt*.

Wird z.B. verwendet um schnelle Prozesse (Ein- und Ausschalten) zu ermöglichen oder isolierende Schichten zu erzeugen.

- (ii) Dotanden an der Bandkante ionisieren leicht und erzeugen viele Ladungsträger, die Folge ist eine *erhöhte Leitfähigkeit*.

Aufgabe 2) Dispersionsrelation für Elektronen im Halbleiter

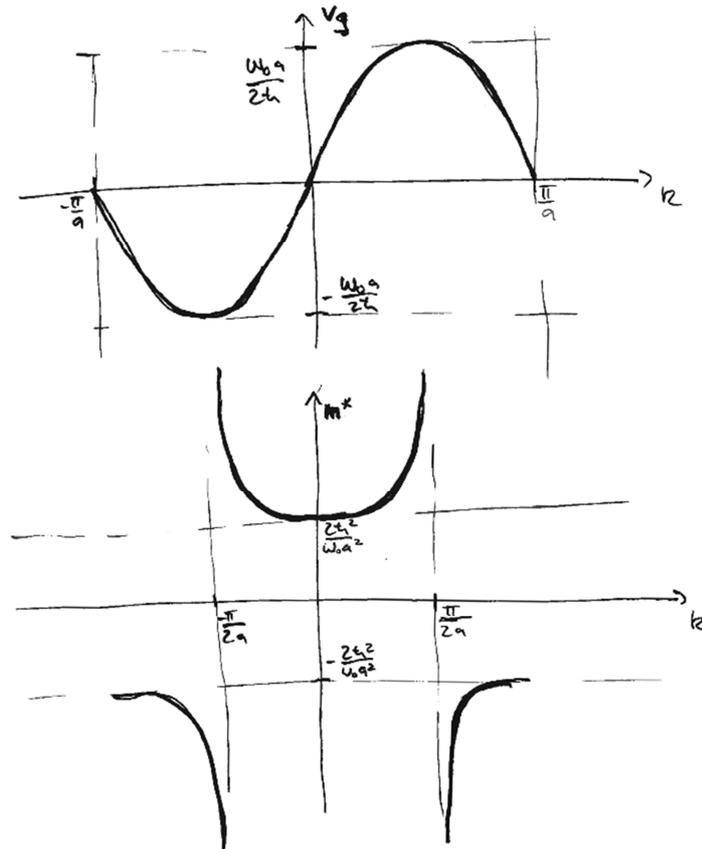
Gegeben sei eine vereinfachte eindimensionale Dispersionsrelation

$W(k) = \frac{W_0}{2} [1 - \cos(ka)]$ für ein Elektron im Halbleiter. Die Grenzen der ersten Brillouin-Zone sind $k = \pm\pi / a$.

- a) Berechnen und skizzieren Sie die Gruppengeschwindigkeit des zum Elektron gehörenden Wellenpakets und die effektive Masse m^* als Funktion der Wellenzahl k .

Gruppengeschwindigkeit: $v_g(k) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial W}{\partial k} = \frac{W_0 a}{2\hbar} \sin(ka)$

Effektive Masse: $\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W}{\partial k^2}, \Rightarrow m^* = \frac{2\hbar^2}{W_0 a^2} \frac{1}{\cos(ka)}$



- b) Zur Zeit $t_0 = 0$ wird ein elektrisches Feld E eingeschaltet. Berechnen Sie die zeitabhängige Wellenzahl $k(t)$ unter der Annahme, dass das Elektron vom Minimum der Bandkante bei $k = 0$ startet. Können Sie eine Aussage über den Ort des Elektrons treffen?

Impuls des Elektrons verändert sich aufgrund des von außen angelegten E-Feldes

linear: $k(t) = k(0) - \frac{eEt}{\hbar}$.

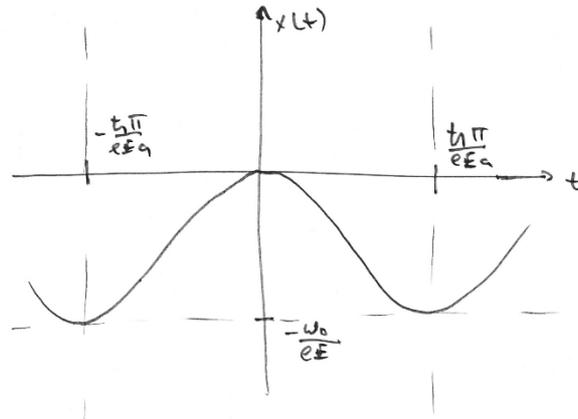
Da die Wellenzahl und damit der Impuls des Teilchens exakt bekannt sind, ist der Aufenthaltsort des Teilchens maximal unbestimmt. (Unschärferelation)

- c) Betrachten Sie nun ein lokalisiertes Elektron. Dieses wird repräsentiert durch ein Wellenpaket, das zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ im Ortsraum bei $x_0 = 0$ zentriert ist, und dessen mittlerer k -Vektor sich im Impulsraum gemäß der in Teilaufgabe b) berechneten Beziehung entwickelt. Berechnen und skizzieren Sie den mittleren Aufenthaltsort des Elektrons $x(t)$ als Funktion der Zeit. Vernachlässigen Sie dabei ein „Zerfließen“ des Wellenpaketes im Ortsraum infolge unterschiedlicher Anfangsimpulse.

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v_g(t') dt' = \int_0^t \frac{W_0 a}{2\hbar} \sin(k(t') a) dt'$$

$$x(t) = \frac{W_0 a}{2\hbar} \int_0^t \sin\left(-\frac{eEt'a}{\hbar}\right) dt' = \frac{W_0 a}{2\hbar} \left[\cos\left(\frac{eEt'a}{\hbar}\right) \frac{\hbar}{eEa} \right]_0^t$$

$$x(t) = \frac{W_0}{2eE} \left(\cos\left(\frac{eEa t}{\hbar}\right) - 1 \right)$$



Die vorstehende Betrachtung gilt für ein ideales Kristallgitter, in dem die Wechselwirkung von Elektronen mit dem Gitter vollständig durch die effektive Masse beschrieben werden kann. Im Gegensatz dazu führen bei einem realen Kristall Gitterdefekte und Gitterschwingungen dazu, dass Elektronen durch Wechselwirkung mit dem Gitter Impuls abgeben. Dies lässt sich durch einen zusätzlichen Term in der Bewegungsgleichung für k beschreiben

$$\frac{d(\hbar k)}{dt} = -eE - \frac{\hbar k}{\tau_{LB}}, \quad (1)$$

wobei τ_{LB} die Intrabandimpulsrelaxationszeit des Leitungsbandes ist.

- a) Berechnen Sie den stationären Kristallimpuls $\hbar k_{stat}$ der sich für ein zeitlich konstantes elektrisches Feld einstellt. Berechnen Sie den zugehörigen Zahlenwert für Silizium mit $\tau_{LB} = 0,2$ ps und einem typischen elektrischen Feld von 5 kV/cm und vergleichen Sie diesen mit dem Kristallimpuls am Rand der Brillouin-Zone (die Gitterkonstante von Silizium sei $a = 0,543$ nm). Was bedeutet dies für die parabolische Näherung der Dispersionsrelation?

$$\frac{d(\hbar k)}{dt} = -eE - \frac{\hbar k}{\tau_{LB}} = 0$$

Stationärer Fall:

$$eE = -\frac{\hbar k_{stat}}{\tau_{LB}} \Rightarrow k_{stat} = -\frac{eE\tau_{LB}}{\hbar} = -1,52 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}$$

$$k_{BZ} = \frac{\pi}{a} = 5,79 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

$$\frac{k_{stat}}{k_{BZ}} = 2,63\%$$

Das Elektron nimmt weniger Impuls auf, als nötig wäre, um die erste Brillouin-Zone zu verlassen. Das bedeutet, Bloch-Oszillationen sind unter diesen Bedingungen nicht möglich. Die parabolische Näherung ist aufgrund der Nähe zum Ursprung gültig.