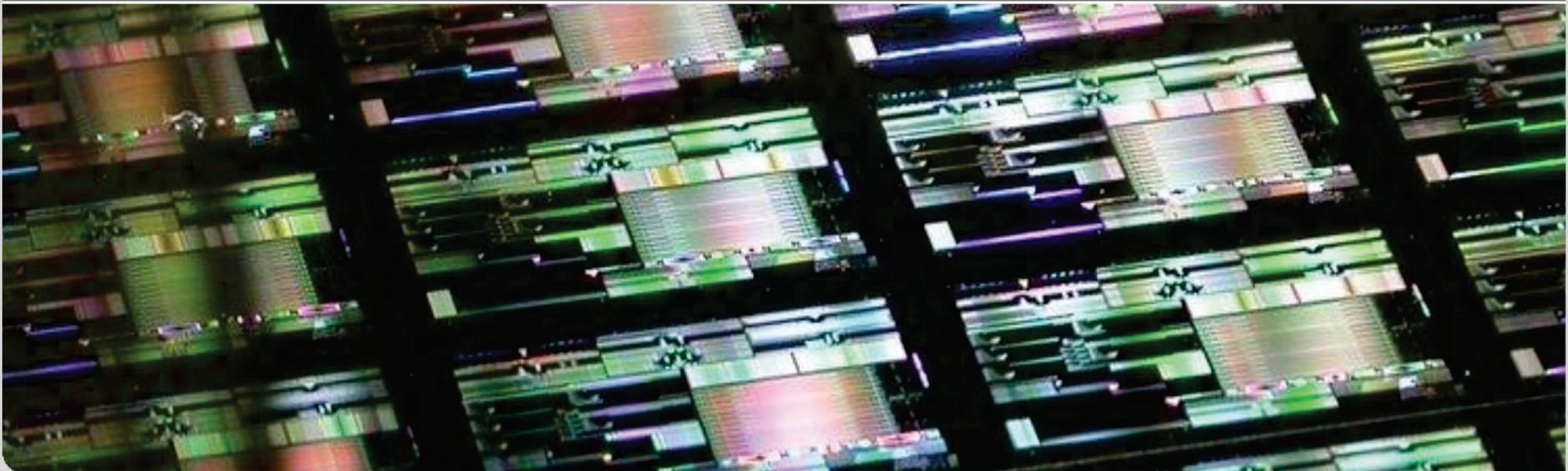


# Halbleiterbauelemente

Christian Koos

Institute of Photonics and Quantum Electronics



# Vorlesung 1

21.10.2013

- Siehe Informationsblatt, verfügbar unter [http://www.ipq.kit.edu/lectures\\_HLB.php](http://www.ipq.kit.edu/lectures_HLB.php)
- Übung:  
Erster Termin: Freitag, 08. November 2013, 14:00  
Gruppeneinteilung:

**Gruppe 1 (Nachnamen A – G)**  
AOC 101 (30.45) Betreuer: M. Lauer  
[matthias.lauer@kit.edu](mailto:matthias.lauer@kit.edu)

**Gruppe 2 (Nachnamen H – O)**  
AOC 201 (30.45) Betreuer: S. Schneider  
[simon.schneider@kit.edu](mailto:simon.schneider@kit.edu)

**Gruppe 3 (Nachnamen P – Z)**  
NTI (30.10) Betreuer: S. Mühlbrandt  
[sascha.muehlbrandt@kit.edu](mailto:sascha.muehlbrandt@kit.edu)

- Die Lösungen zu den Übungsblättern werden dreimal pro Semester unangekündigt eingesammelt. Wer mehr als 66% der Aufgaben sinnvoll bearbeitet hat, bekommt **jeweils einen Punkt** in der schriftlichen Prüfung gutgeschrieben.
- Bei den drei eingesammelten Übungsblättern werden insgesamt **maximal zwei Punkte** gutgeschrieben. Diese beiden Punkte müssen in einem Semester erworben werden, eine Addition der Punkte aus zwei Semestern ist nicht möglich.
- Die gesammelten Punkte **verfallen** in einem Zeitraum von 1 Jahr.  
Beispiel: Wurden die Übungsblätter im WS 13/14 abgegeben, können die daraus resultierenden Punkte letztmalig zur Klausur im Frühjahr 2015 angerechnet werden.
- **Pro Person** muss **eine Lösung** abgegeben werden; Gruppenarbeiten werden nicht anerkannt. Die gemeinsame Lösung in Lerngruppen ist selbstverständlich erwünscht!
- „**Sinnvoll bearbeitet**“ heißt:
  1. Aufgabenblatt ist klar beschriftet mit Name und Matrikelnummer und Aufgaben-Nr.
  2. Jede Lösung beginnt mit einer klaren Auflistung dessen, was gegeben ist (geg.: ...), und enthält eine mathematische Umsetzung dessen, was gesucht ist (ges.: ...)
  3. Es folgt eine Lösung, die aus einem mathematischen Ansatz und einer Lösung bzw. einem sinnvollen Lösungsversuch besteht. Es wird dabei nicht bewertet, ob das Ergebnis korrekt ist.

## **Festkörperphysikalische Grundlagen**

(vgl. auch Vorlesung „Festkörperlektronik“):

- Grundlegende Eigenschaften von Halbleitern
- Bandstruktur der Festkörper
- Eigenhalbleiter und dotierte Halbleiter

## **Ladungsträgertransport und Grundgleichungen:**

- Ladungsträgertransport im Halbleiter
- Die Grund-Gleichungen des Halbleiters

## **Der pn-Übergang und pn-Dioden**

## **Bipolartransistoren**

## **Halbleiter-Grenzschichten und Feldeffekttransistoren**

## Skript:

- Wird im Laufe des Semesters überarbeitet und in der jeweils aktuellen Fassung auf die Webseite gestellt
- Skript vom letzten Jahr ist ebenfalls auf der Webseite verfügbar

## Folien:

- Werden nach der Vorlesung auf der Webseite zum Download angeboten

## Übungsaufgaben:

- Werden in der Vorlesung / Übung verteilt und zusätzlich auf der Webseite zum Download angeboten

## Bücher:

- Sze, S. M. und Ng, Kwok K., „Physics of Semiconductor Devices“, Third Edition, John Wiley, 2006.
- Sze, S. M. und Lee, M. K.: „Semiconductor Devices, Physics and Technology“, Third Edition, John Wiley, 2012.
- H. Ibach, H. Lüth; „Festkörperphysik“, Springer, 2002
- F. Thuseit; Physik der Halbleiterbauelemente; Springer-Verlag, 2. Auflage, 2011
- B.G. Streetman, S.K. Banerjee; „Solid State Electronic Devices“, 6th ed., Pearson Prentice Hall, 2006
- Pierret, R.F.: „Semiconductor Device Fundamentals“. Addison Wesley 1996
- Reisch, M.: „Halbleiter-Bauelemente“. Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag 2005

# Halbleiter – Historie und Bedeutung

Halbleiterbauelemente werden in vielen **Anwendungen** eingesetzt:

- Prozessoren und Speicher
- Leistungselektronik
- Mobilfunkelektronik
- Leuchtdioden, Laser, Photodioden und andere optische Bauteile
- CCD und CMOS Kameras

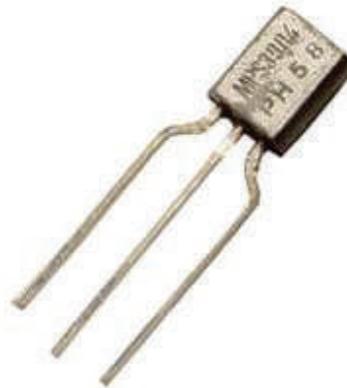
} **Elektronik**

} **Optoelektronik**

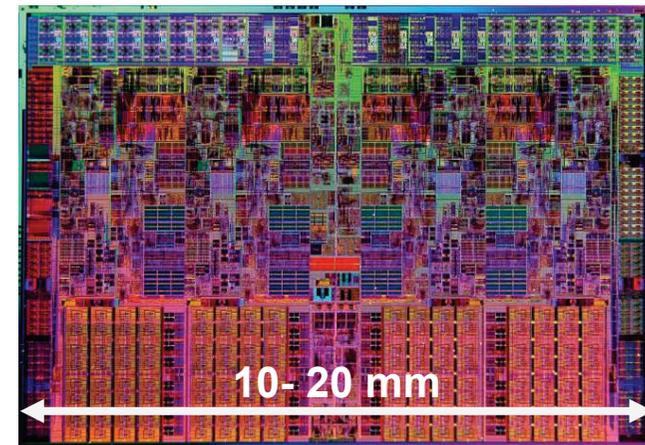
Sie werden als **diskrete Bauelemente** oder in integrierten Schaltungen verwendet:



Laserdiode



Transistor

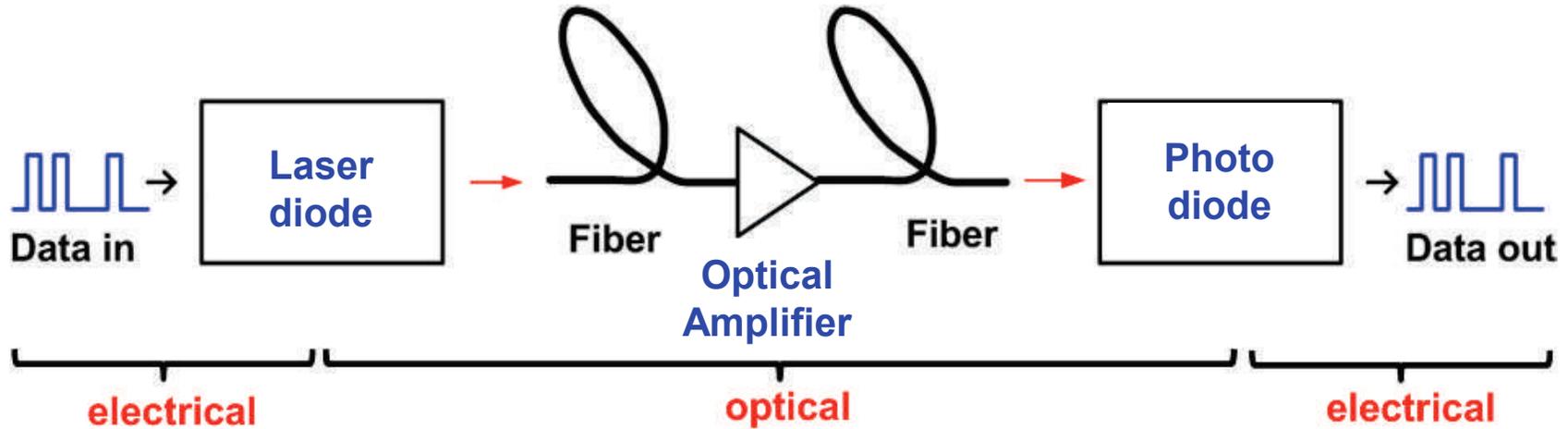


$10^9$  Transistoren (Intel Core i7-3820QM)

<http://www.pcmag.com>

# Halbleiterbauelemente – Anwendungsbeispiele in der Optoelektronik

## Optische Kommunikationstechnik



## Photovoltaik



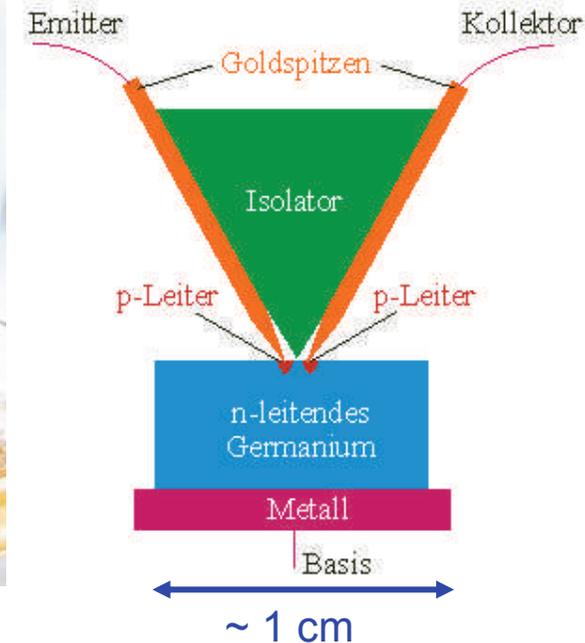
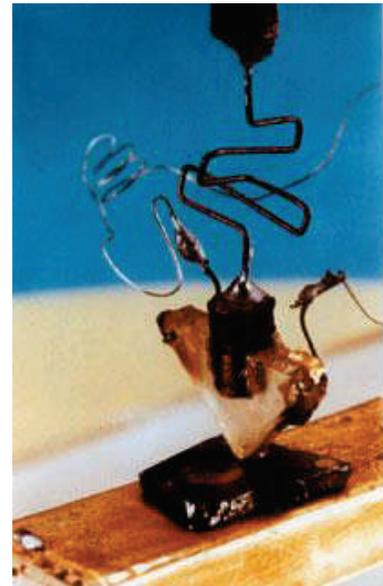
## Lichttechnik



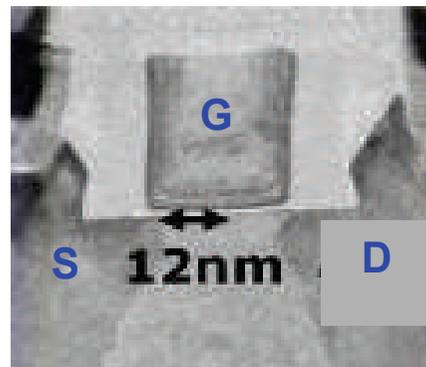
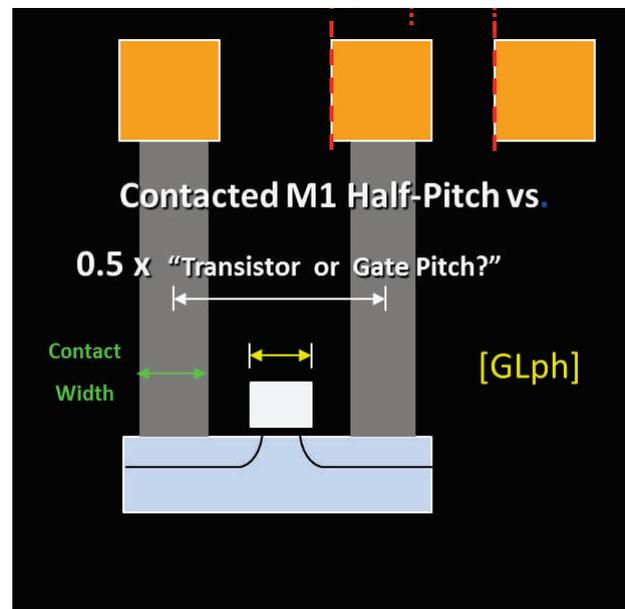


# Halbleiter – Historie und Bedeutung

**1947/48:** Erster Demonstrator eines Bipolar-Transistors durch Shockley, Bardeen und Brattain (Nobelpreis 1956)



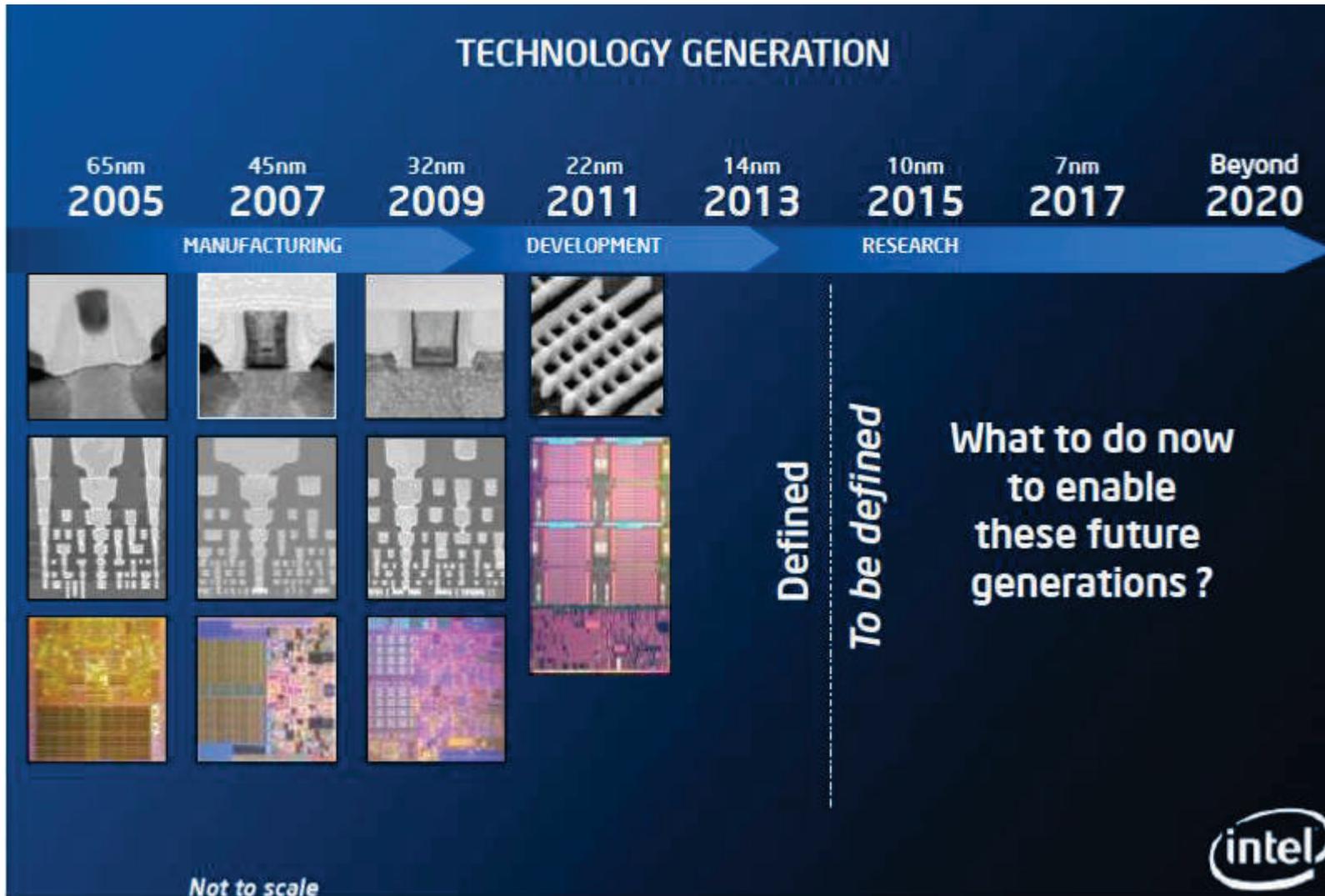
“Metal-contact half-pitch”



**Heute:** Feldeffekt-Transistoren mit Gate-Längen von ca. 20 nm

Definition von sog. **Technologieknoten** (Technology Nodes) über Abstand der Gate-Kontakte („Metal contact half pitch“) oder über halbe Gate-Weite („Gate half-pitch“).

# „Technology Nodes“ in der Halbleiterindustrie

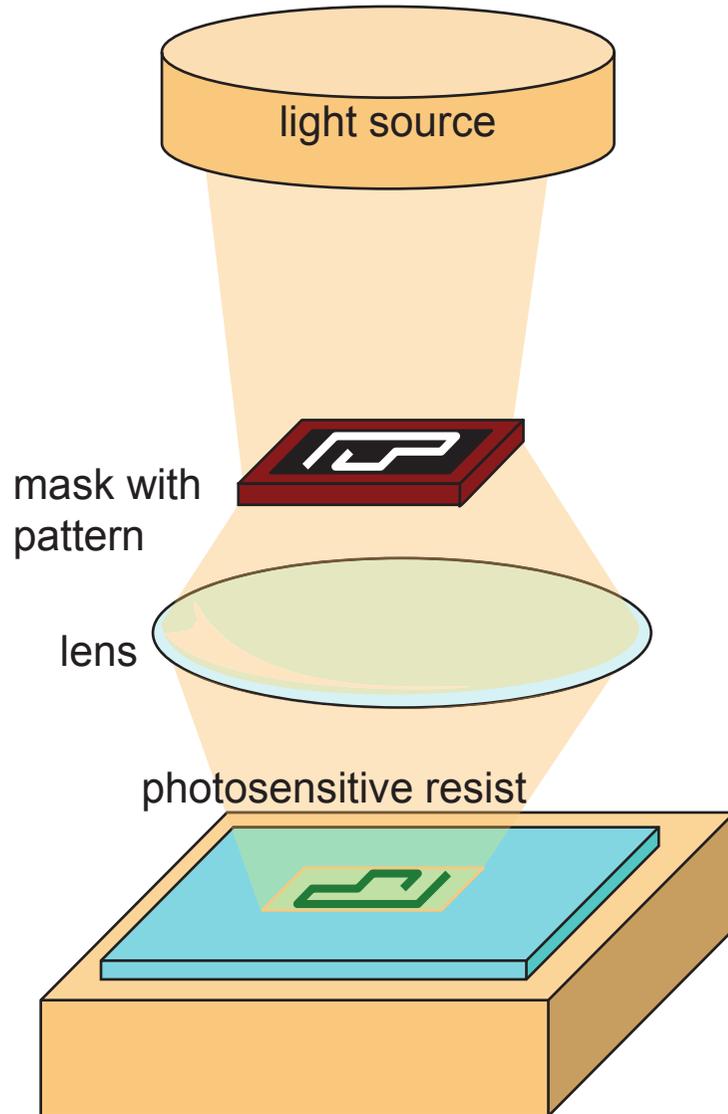


Quelle: Intel 2011

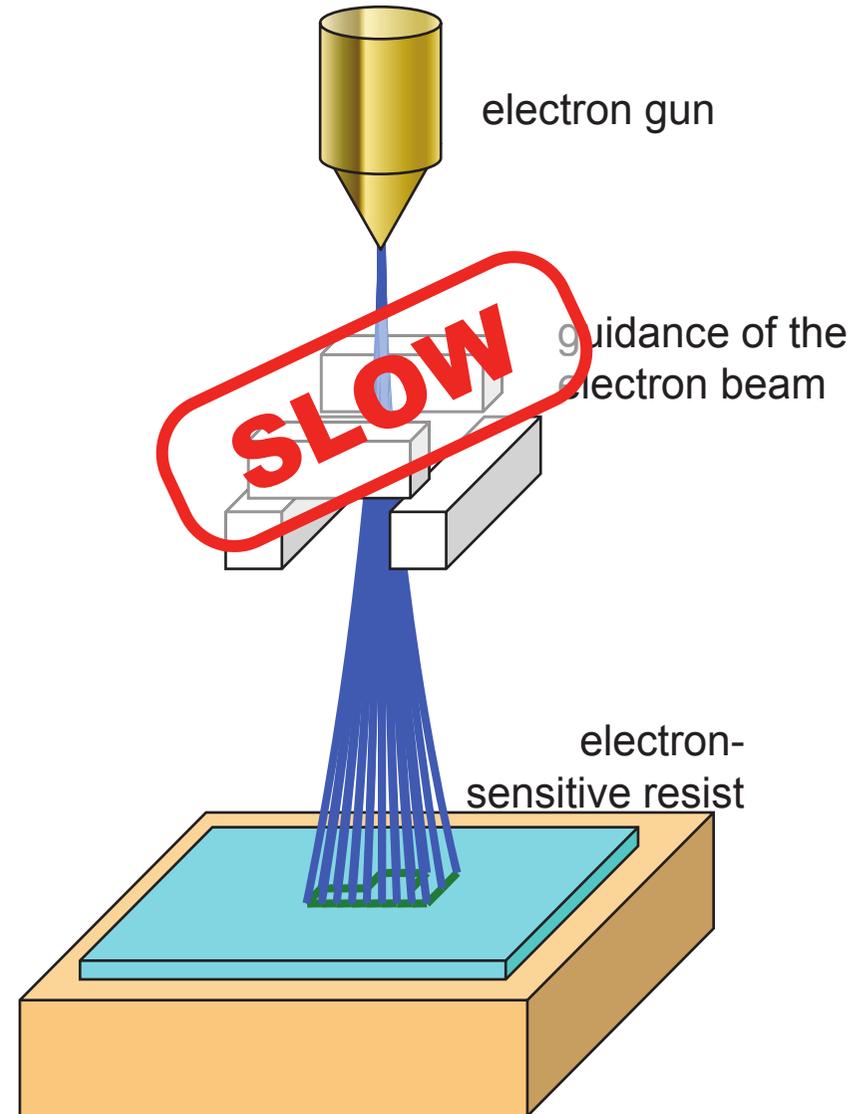
Siehe auch: International Technology Roadmap for Semiconductors (ITRS)

# Hochauflösende Lithographie mit hohem Durchsatz

## Optical lithography



## Electron-beam lithography



# Das derzeitige „Arbeitspferd“ der Halbleiterindustrie: Immersionslithographie bei einer Wellenlänge von 193 nm



$$\text{res} = k_1 \frac{\lambda}{\text{NA}}$$

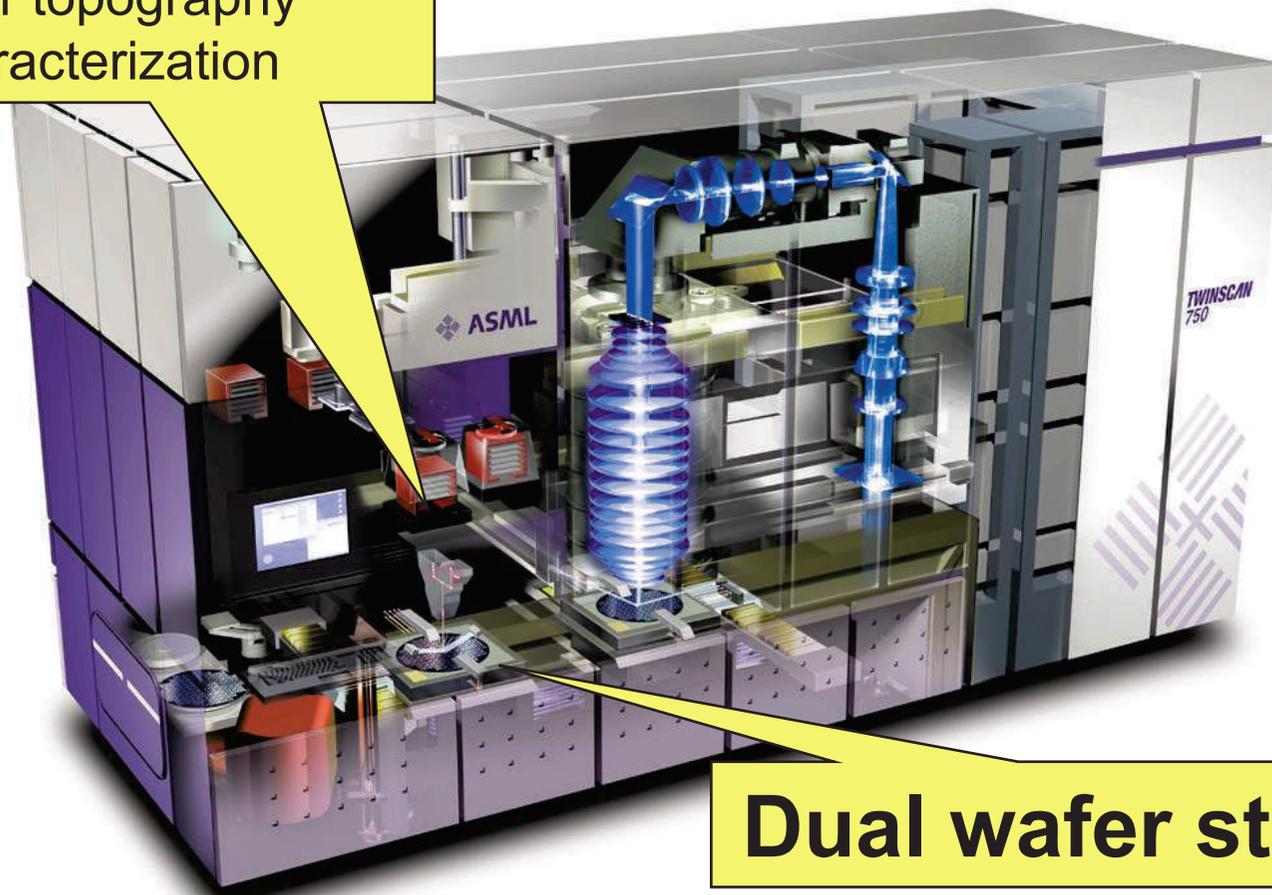
$\lambda = 193 \text{ nm}$ ,  $\text{NA} = 1.35$

Further improvement by reduction of technology parameter  $k_1$   
(e.g., by double patterning)

⇒ Resolution: 32 nm

# ASML Wafer Stepper TWINSKAN™: Deep-UV (DUV) Lithography at 193 nm

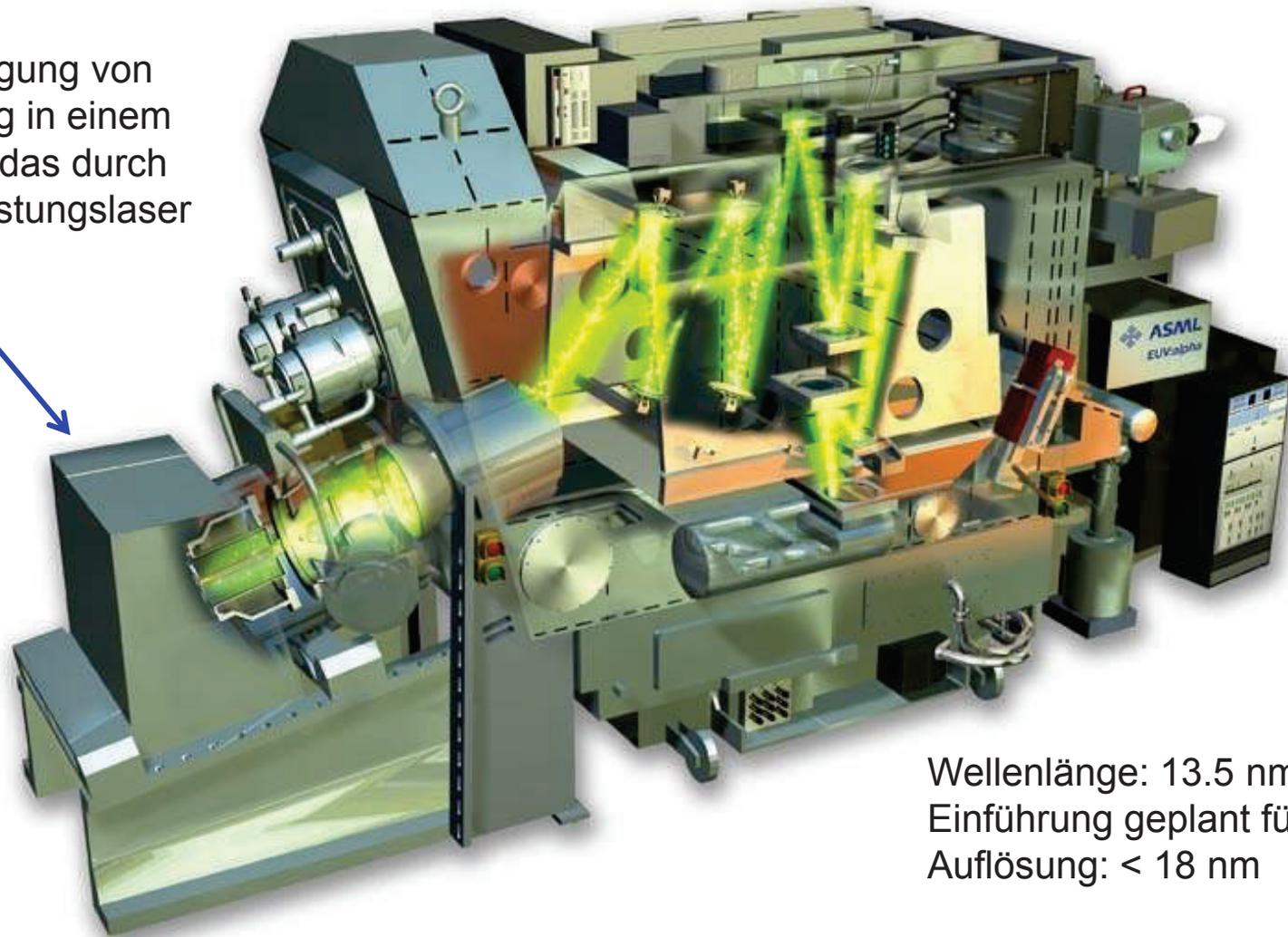
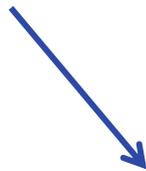
**Separate metrology  
wafer topography  
characterization**



**Dual wafer stage**

# Die Zukunft: Lithographie im extremen UV (EUV)

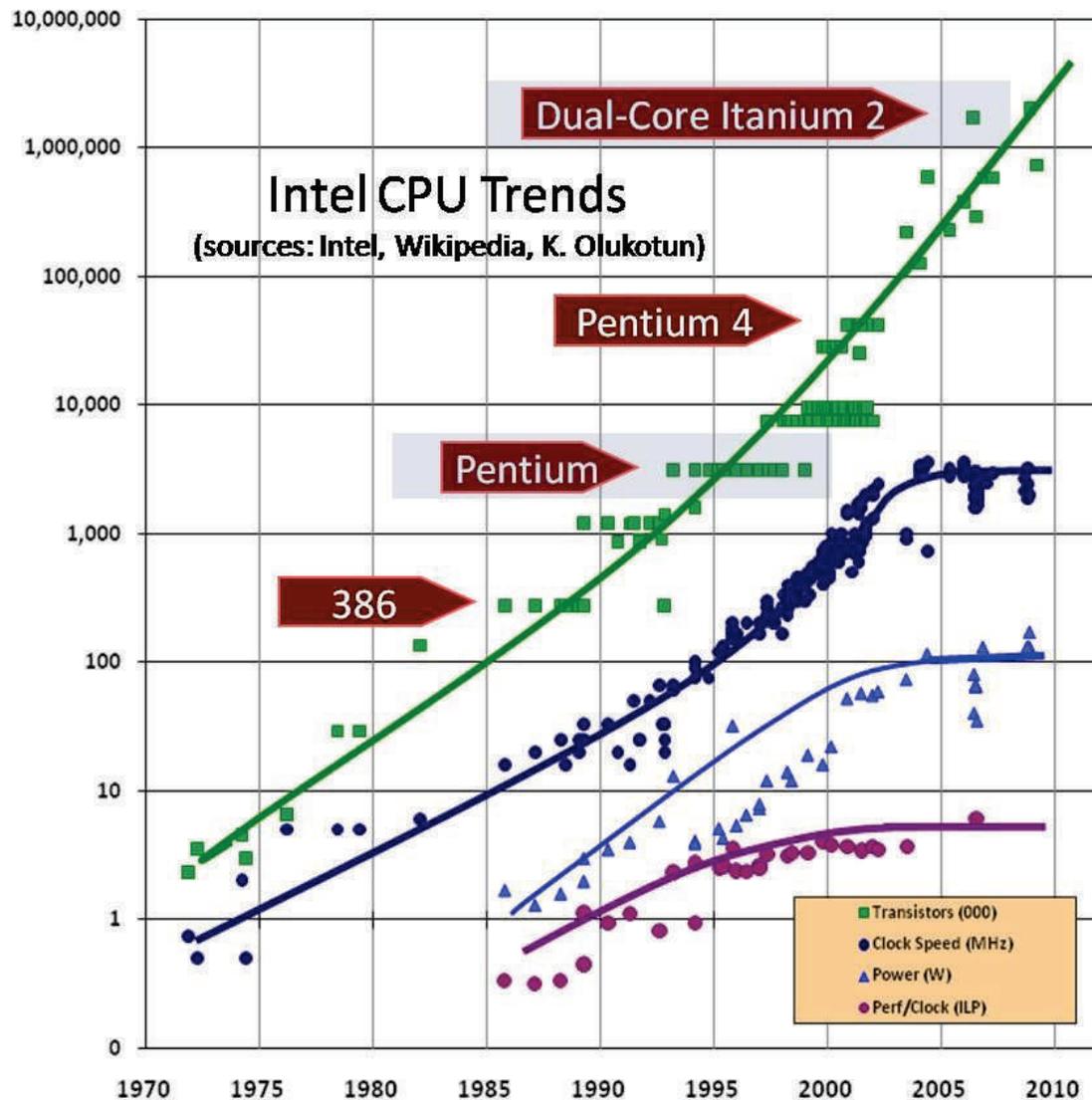
Quelle: Erzeugung von EUV-Strahlung in einem Zinn-Plasma, das durch einen Hochleistungslaser gepumpt wird.



Wellenlänge: 13.5 nm  
Einführung geplant für 2015  
Auflösung: < 18 nm

<http://www.hardware-infos.com>

# Die Zukunft des Moore'schen „Gesetzes“ ...



## “Moore’s law will be dead within a decade”

(Robert Colwell, ehemals Chefarchitekt der Intel P6-Familie, August 2013)

- **Physikalische Grenzen** werden bei 5 – 7 nm vermutet (~ 2020)
- Schon heute kann die **Geschwindigkeit** der Transistoren nicht weiter erhöht werden
- Die **Zahl der Transistoren** pro Chip ist durch die Verlustleistung begrenzt

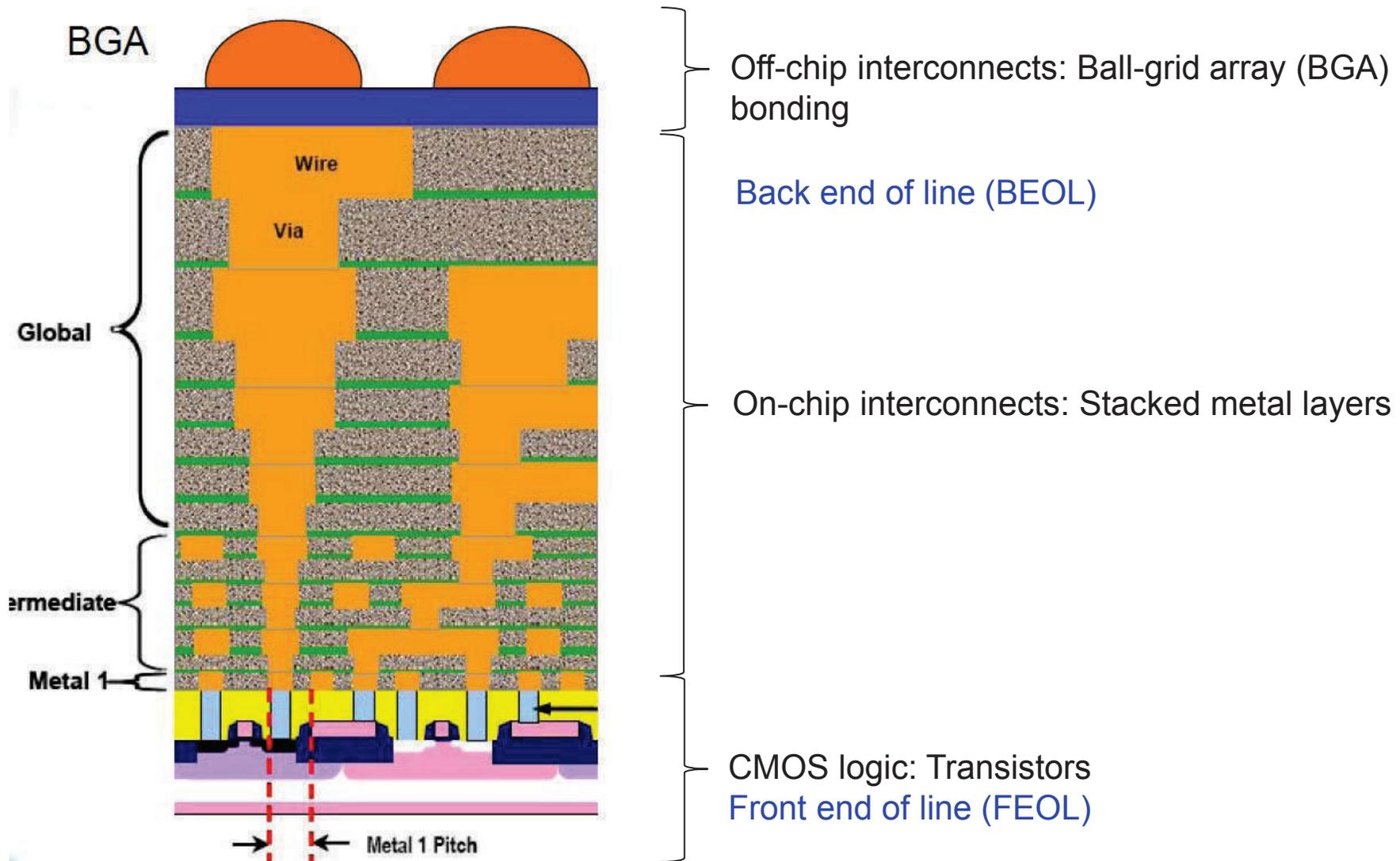
**Derzeit:** Steigerung der Leistungsfähigkeit von Prozessoren durch **Parallelisierung** („Multi-Core“)

⇒ Engpässe bei der Kommunikation zwischen den Prozessorkernen

⇒ **Optische Interconnects** (laufende Forschungsarbeiten am IPQ)

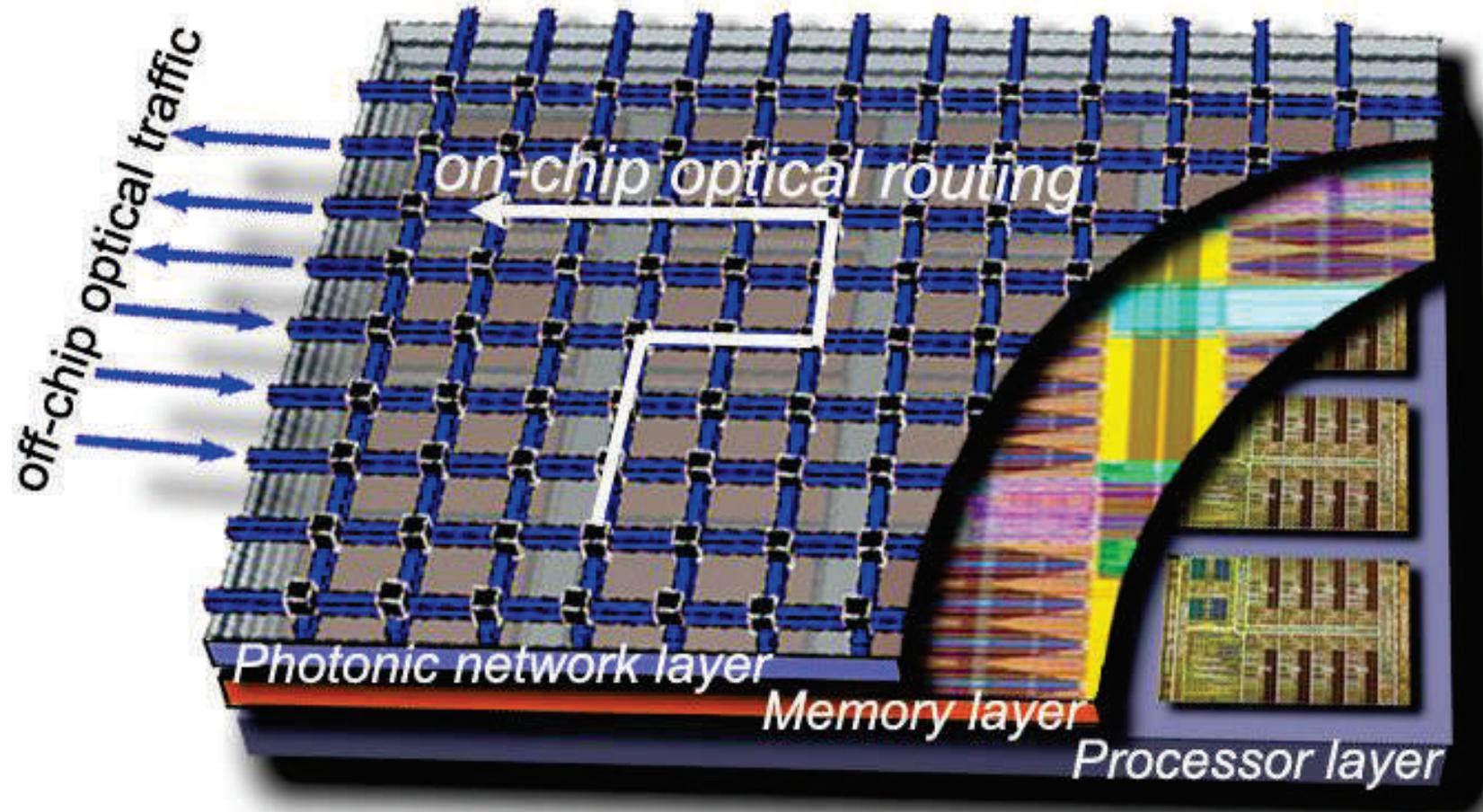
<http://www.extremetech.com>

# Der Flaschenhals: Verbindung der Transistoren



[http://domino.research.ibm.com/comm/research\\_projects.nsf/pages/photronics.index.html](http://domino.research.ibm.com/comm/research_projects.nsf/pages/photronics.index.html)

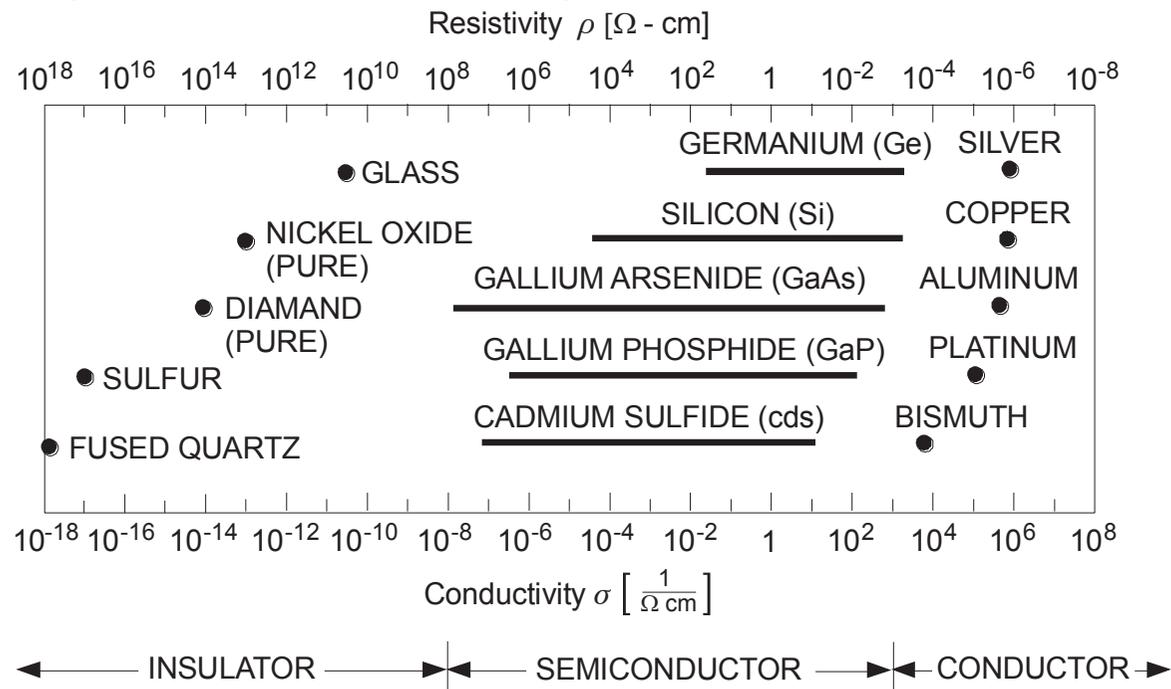
# Die Vision: Optische On-Chip Interconnects



[http://domino.research.ibm.com/comm/research\\_projects.nsf/pages/photonics.index.html](http://domino.research.ibm.com/comm/research_projects.nsf/pages/photonics.index.html)

# Halbleiter : Definition und Eigenschaften

Halbleiter (engl. “Semiconductor”): Elemente bzw. Verbindungen, deren Leitfähigkeit bei Zimmertemperatur und bei höchster Reinheit zwischen jener der Metalle und jener von Isolatoren liegt.



## Eigenschaften von Halbleitern:

- Leitfähigkeit ändert sich über mehrere Dekaden in Abhängigkeit von der Temperatur und der Reinheit
- Leitfähigkeit steigt mit Temperatur stark an (vgl. Metall: Leitfähigkeit sinkt mit Temperatur)

# Elementhalbleiter im Periodensystem der Elemente

**Das Periodensystem der Elemente**

Perioden	Hauptgruppen		Das Periodensystem der Elemente																		Hauptgruppen							
	I																				VIII							
	1	II																			III	IV	V	VI	VII	2		
	H																				5	6	7	8	9	10		
	3	4																			13	14	15	16	17	18		
	Li	Be																			Al	Si	P	S	Cl	Ar		
	11	12	Nebengruppen																		31	32	33	34	35	36		
		IIIA	IVA	VA	VIA	VIIA	VIII			IX	X	IA	IIA															
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36											
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr											
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54											
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe											
55	56	57	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86											
Cs	Ba	La	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn											
87	88	89	104	105	Wasserstoff													Alkalimetalle		Erdalkalimetalle		Metalle						
Fr	Ra	Ac	Ku	Ha	Halbmetalle													Nichtmetalle		Edelgase		radioaktiv						
				Halbleiter																								
Lanthanoide																												
		58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71													
		Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu													
Actinoide																												
		90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103													
		Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr													

- Elementhalbleiter bilden eine Untergruppe der Halbmetalle, die zwischen Metallen und Nichtmetallen stehen
- Die wichtigsten Halbleiter Silizium (Si) und Germanium (Ge) stehen in der vierten Hauptgruppe

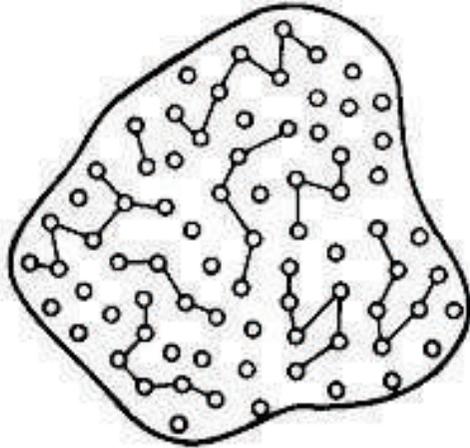
# Verbindungshalbleiter

General Classification	Semiconductor		
	Symbol	Name	
Element	Si	Silicon	
	Ge	Germanium	
Binary compound			
	IV-IV -----	SiC AlP AlAs AlSb GaN GaP GaAs GaSb InP InAs InSb	Silicon carbide Aluminum phosphide Aluminum arsenide Aluminum antimonide Gallium nitride Gallium phosphide Gallium arsenide Gallium antimonide Indium phosphide Indium arsenide Indium antimonide
II-VI -----	ZnO	Zinc oxide	
	ZnS	Zinc sulfide	
	ZnSe	Zinc selenide	
	ZnTe	Zinc telluride	
	CdS	Cadmium sulfide	
	CdSe	Cadmium selenide	
	CdTe	Cadmium telluride	
	HgS	Mercury sulfide	
	IV-VI -----	PbS	Lead sulfide
		PbSe	Lead selenide
		PbTe	Lead telluride
Ternary compound	$Al_xGa_{1-x}As$	Aluminum gallium arsenide	
	$Al_xIn_{1-x}As$	Aluminum indium arsenide	
	$GaAs_{1-x}P_x$	Gallium arsenic phosphide	
	$Ga_xIn_{1-x}N$	Gallium indium nitride	
	$Ga_xIn_{1-x}As$	Gallium indium arsenide	
	$Ga_xIn_{1-x}P$	Gallium indium phosphide	
Quaternary compound	$Al_xGa_{1-x}As_ySb_{1-y}$	Aluminum gallium arsenic antimonide	
	$Ga_xIn_{1-x}As_{1-y}P_y$	Gallium indium arsenic phosphide	

- **Verbindungshalbleiter** bestehen aus Verbindungen von Elementen der IV. Hauptgruppe, Elementen der III. und der V. Hauptgruppe, oder von Elementen der II. und VI. Hauptgruppe.
- **Binäre Halbleiter** bestehen aus zwei Elementen, z.B. GaAs
- **Ternäre Halbleiter** bestehen aus drei Elementen, z.B.  $Al_{1-x}Ga_xAs$  oder  $Al_{1-x}In_xAs$
- **Quaternäre Halbleiter** bestehen aus vier Elementen, z.B.  $In_{1-x}Ga_xAs_{1-y}P_y$

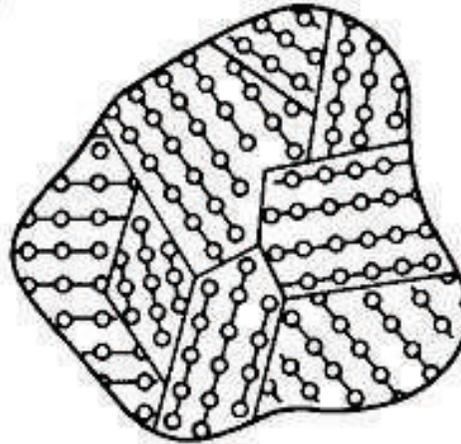
Quelle: Sze/Klee, Semiconductor Devices – Physics and Technology

(a)



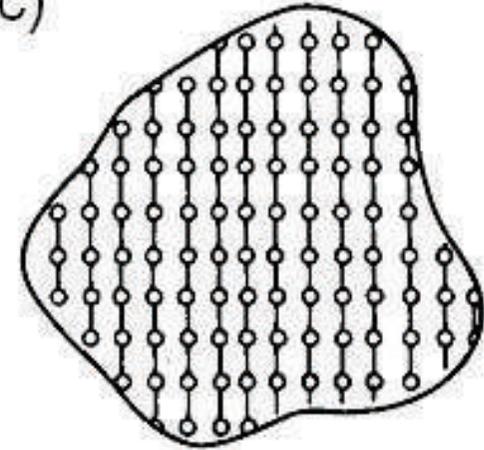
**Amorpher Festkörper:** Atome oder Molekülen bilden keine geordneten Strukturen, sondern ein unregelmäßiges Muster (lediglich Nahordnung, keine Fernordnung)

(b)



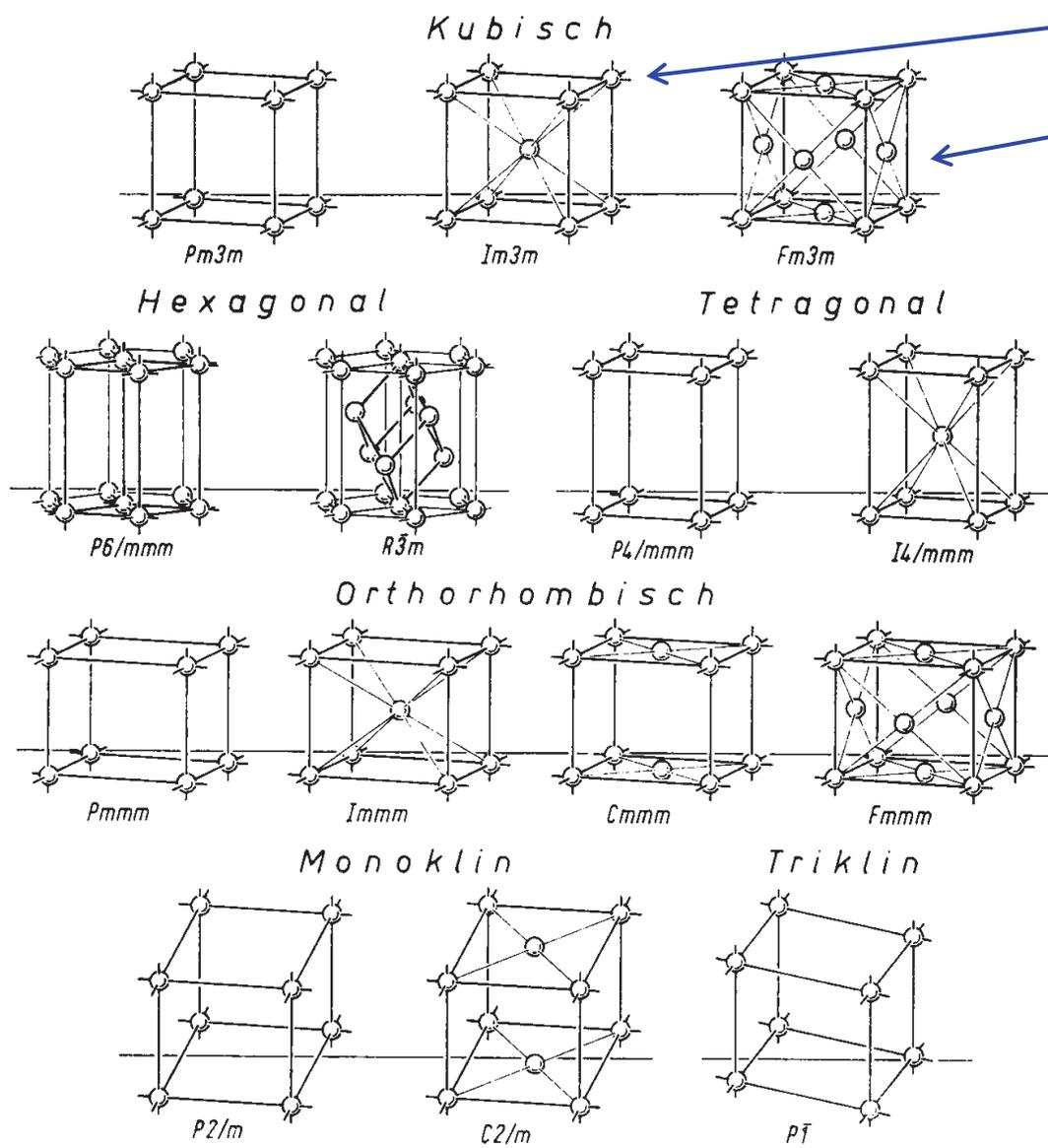
**Polykristalliner Festkörper:** Besteht aus kleinen Einzelkristallen (Kristalliten) besteht, die durch Korngrenzen voneinander getrennt werden.

(c)



**Kristalliner Festkörper:** Bausteine (Atome, Ionen oder Moleküle) sind regelmäßig in einer Kristallstruktur angeordnet.

# Bravais-Gitter und Kristallgitter



Kubisch-raumzentriert  
(body-centered cubic, bcc)

Kubisch-flächenzentriert  
(face-centered cubic, fcc)

## Bravais-Gitter (Translationsgitter):

- Gitterpunkte lassen sich durch eine Linearkombinationen von drei **Gittervektoren** beschreiben („In einem Bravaisgitter sieht man immer die gleiche Umgebung, wenn man sich auf einen Gitterpunkt stellt und in eine bestimmte Richtung schaut.“)
- In drei Dimensionen gibt es **14 Bravais-Gitter**
- **Kristallgitter** sind nicht notwendigerweise Bravaisgitter, lassen sich aber immer durch Translation einer **Einheitszelle** auf einem Bravais-Gitter beschreiben

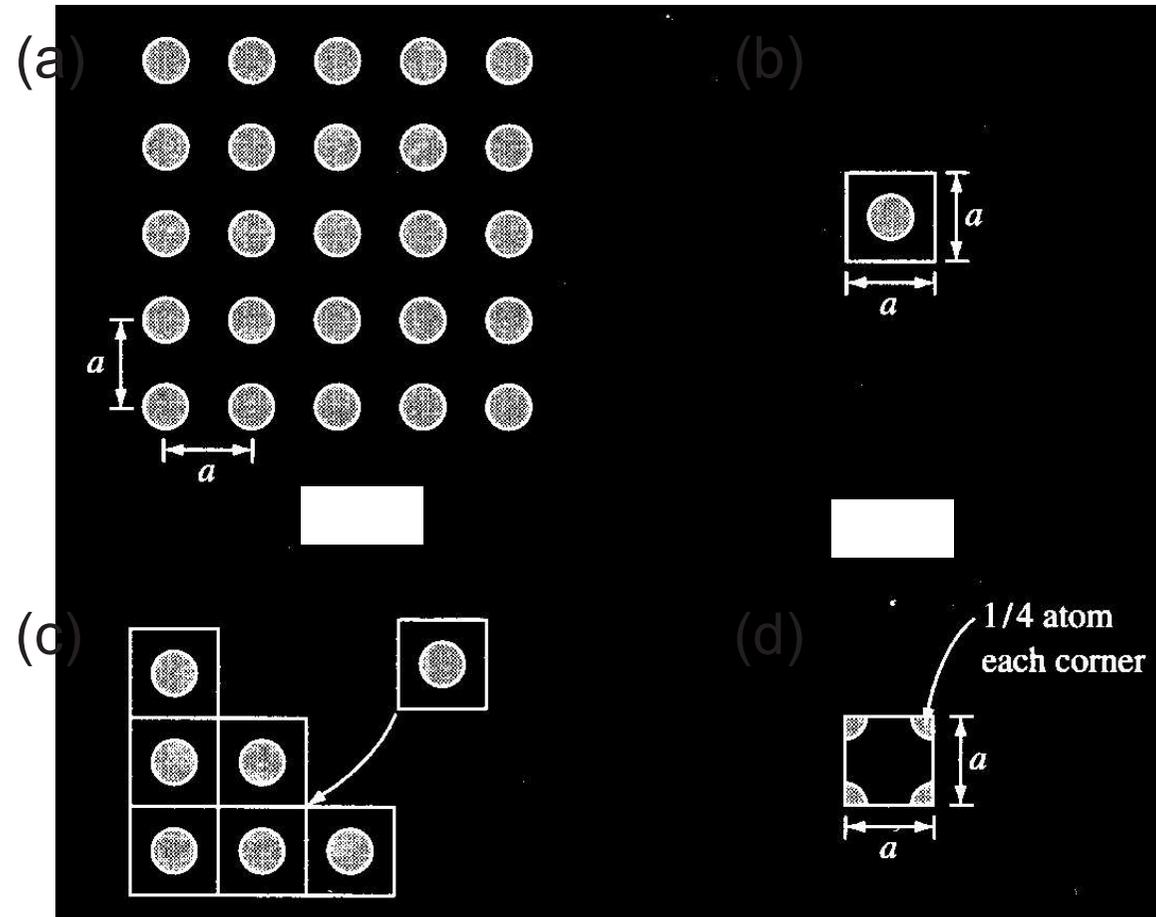
Quelle: <http://positron.physik.uni-halle.de>

# Beschreibung von Kristallgittern durch Einheitszellen

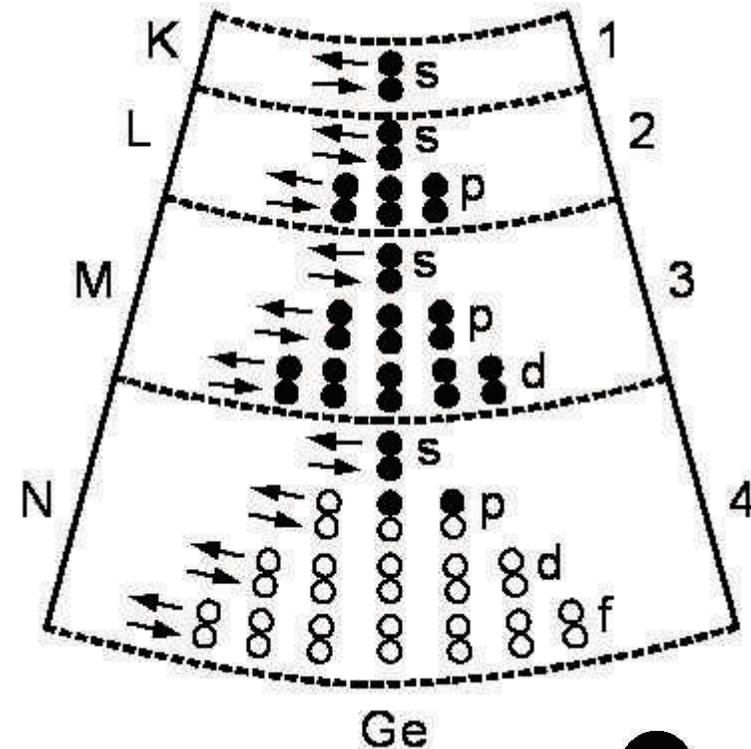
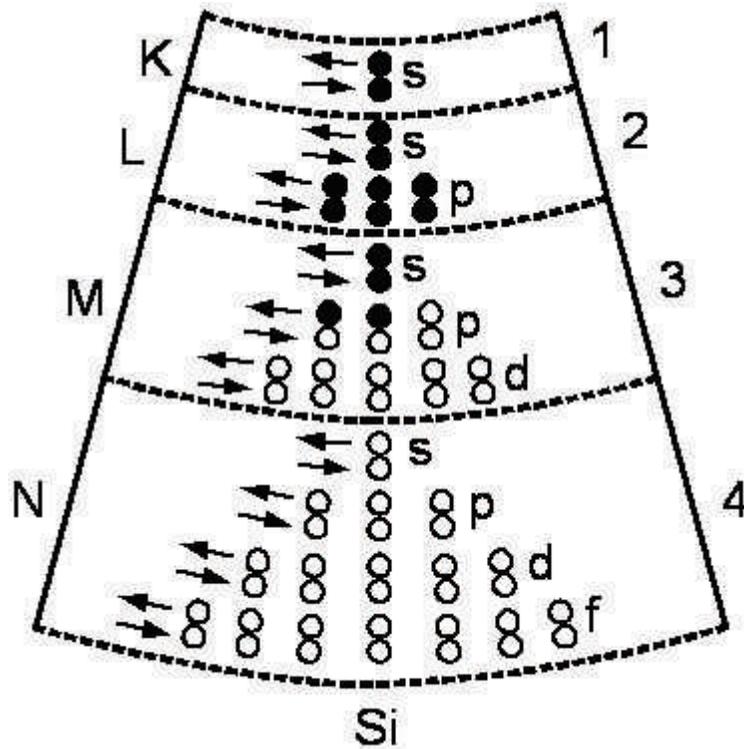
**Einheitszelle:** Volumenelement, aus dem sich durch Translation auf einem Bravaisgitter das gesamte Kristallgitter erzeugen lässt.

**Anmerkung:** Die Einheitszelle enthält sämtliche Symmetrieeigenschaften gesamtem Kristallgitters.

**Minimalbeispiel:** Einheitszelle besteht aus einem einzelnen Atom (Kristallgitter = Bravaisgitter), sog. **primitive Einheitszelle**

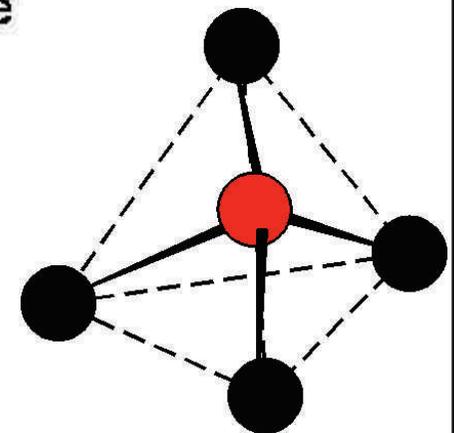


# Elektronenkonfiguration und Bindungen bei den Elementhalbleitern Silizium und Germanium

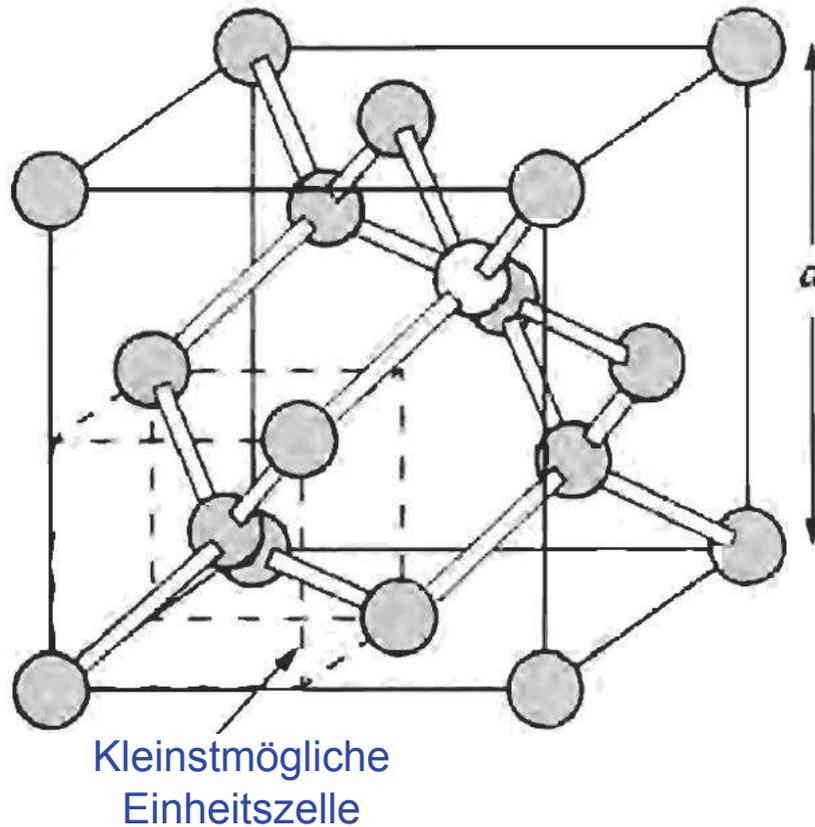


**Kovalente Bindungen:** Vollständig aufgefüllte Elektronenschalen stellen einen günstigeren Energiezustand dar („Edelgas-Zustand“); dies kann durch „gemeinsame Nutzung“ von Elektronen erreicht werden.

**Hier:** Bildung von vier **unterscheidbaren  $3sp^3$ -Hybridorbitalen**; diese richten sich tetraedrisch im Raum aus (Bindungswinkel ca.  $109.5^\circ$ )  
 ⇒ **Diamantgitter!**



# Kristallstruktur der Elementhalbleiter Silizium und Germanium

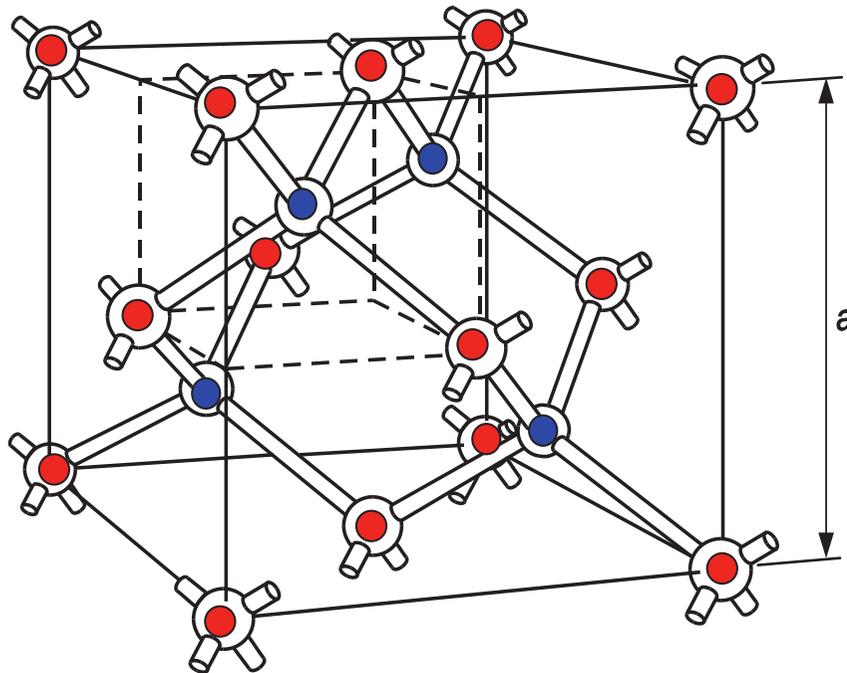


Si und Ge kristallisieren im  
Diamantgitter

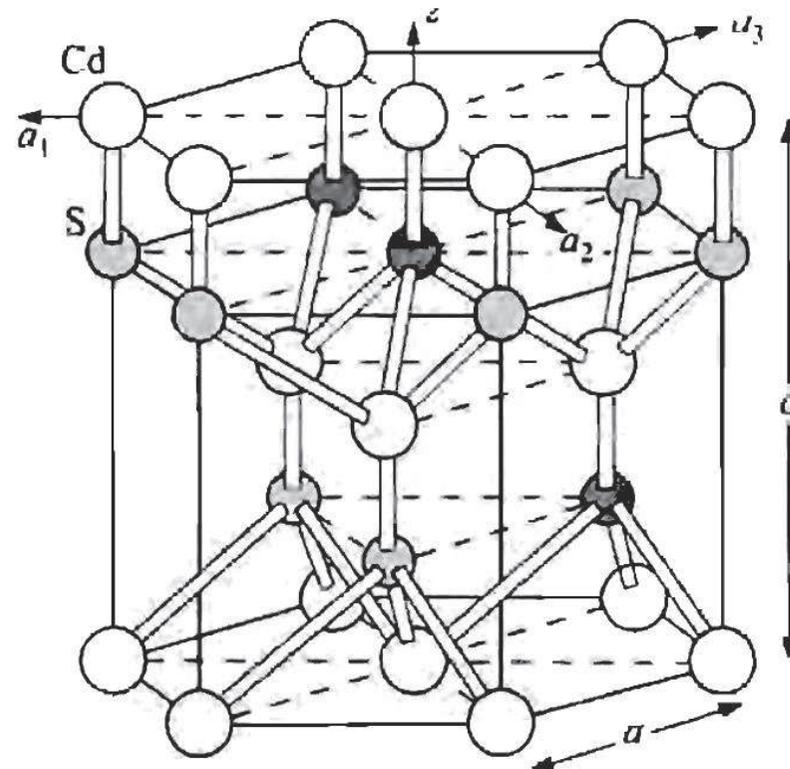
Anmerkungen:

- Die Diamantstruktur hat ein **kubisch-flächenzentriertes (fcc) Gitter** mit einer Einheitszelle, die aus zwei Atomen bei  $(0,0,0)$  und  $(1/4, 1/4, 1/4)a$  besteht
- **Äquivalente Aussage:** Die Diamantstruktur ist zusammengesetzt aus **zwei fcc-Gittern**, die gegeneinander um ein Viertel der Raumdiagonalen verschoben sind.

Quelle: Sze/Klee, Semiconductor Devices – Physics and Technology



**Zinkblendestruktur:** Eine gleiche Anzahl von **Ga** und **As** Atomen sind so auf einem Diamantgitter verteilt, dass jedes Atom vier Nachbarn der jeweils anderen Art hat; typisch für III-V-Halbleiter wie GaAs, InP, InGaAsP usw.



**Wurtzit-Struktur,** bestehend aus zwei Hexagonalgittern, die gegeneinander um  $1/3$  des Ebenenabstandes in Richtung der Längsachse verschoben sind, typisch für II-VI-Halbleiter wie CdS, ZnS etc.

Quelle: Sze/Klee, Semiconductor Devices – Physics and Technology

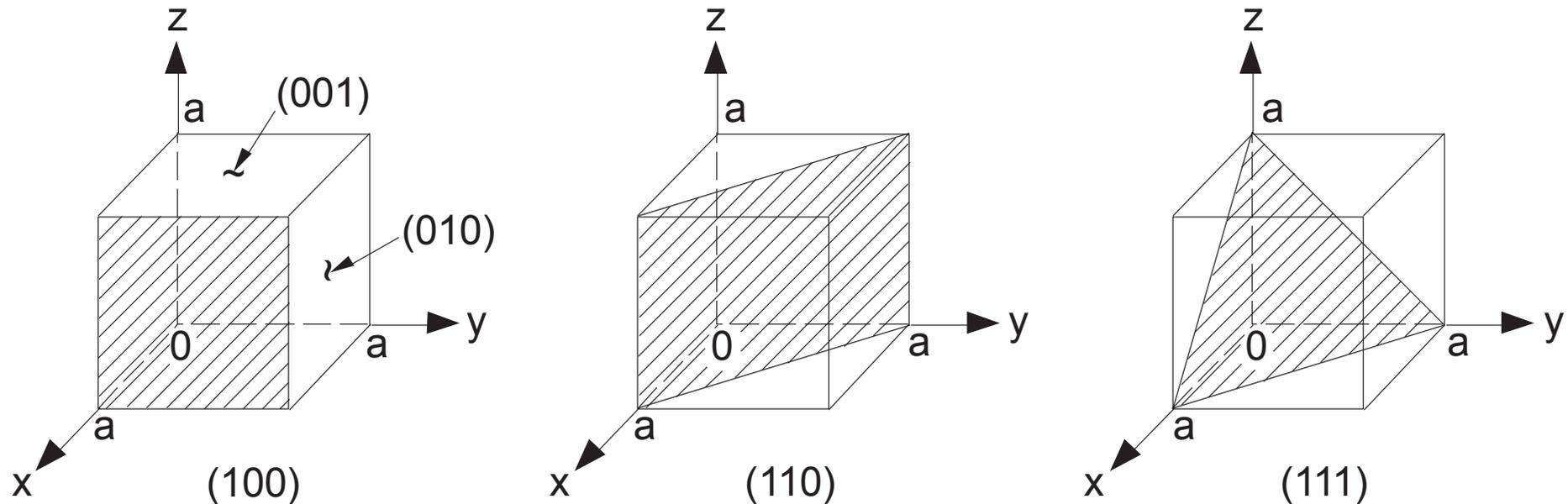
# Kristallstrukturen von Verbindungshalbleitern

Compound	Structure	Lattice parameter (Å)	Density (g/cm <sup>3</sup> )
AlN	wurtzite	$a = 3.11(1), c = 4.98(1)$	3.255
AlP	zinc blende	$a = 5.4635(4)$	2.40(1)
AlAs	zinc blende	$a = 5.660$	3.760
AlSb	zinc blende	$a = 6.1355(1)$	4.26
GaN	wurtzite	$a = 3.190, c = 5.187$	
GaP	zinc blende	$a = 5.4505(2)$	4.138
GaAs	zinc blende	$a = 5.65325(2)$	5.3176(3)
InN	wurtzite	$a = 3.5446, c = 5.7034$	6.81
InP	zinc blende	$a = 5.868(1)$	4.81
InAs	zinc blende	$a = 6.0583$	5.667
InSb	zinc blende	$a = 6.47937$	5.7747(4)

Kristallstrukturen, Gitterparameter und Dichten verschiedener **III-V Verbindungshalbleiter**. Die eingeklammerten Nachkommastellen deuten die Genauigkeit der Messungen an.

Quelle: <http://cnx.org/content/m23905/latest/>

# Raumrichtungen und Miller-Indizes



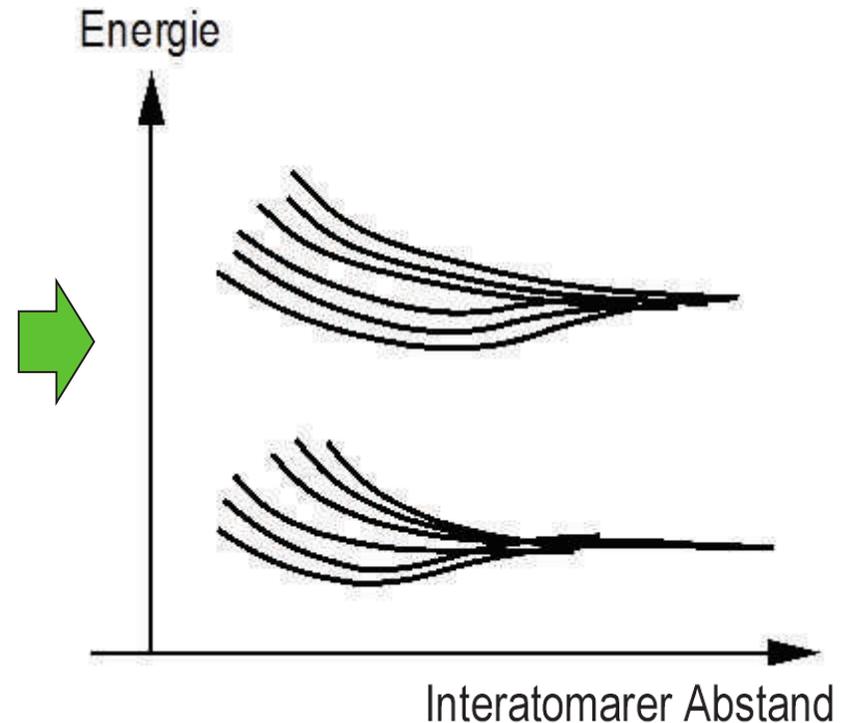
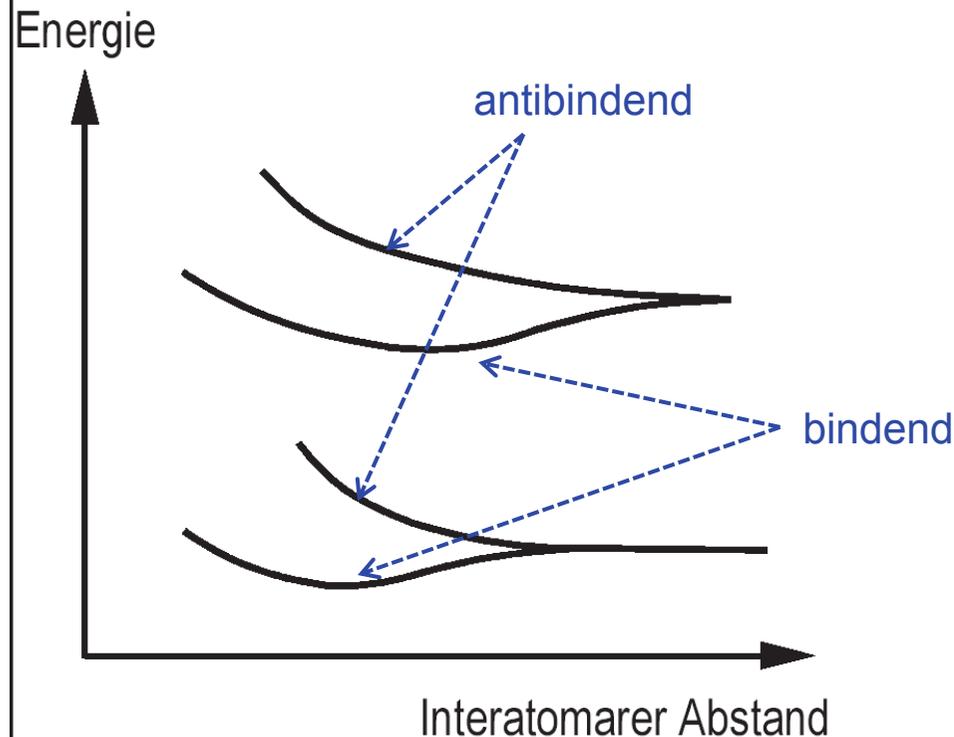
- [hkl] Angabe der **Richtung**, z.B. bezeichnet [100] die x-Achse
- $\langle hkl \rangle$  umfasst all zu [hkl] **äquivalenten Richtungen**
- (hkl) Angabe der **Gitterebene**, welche normal zur Achse [hkl] steht
- {hkl} umfasst all zu (hkl) **äquivalenten Gitterebenen**

# Vom Einzelatom zum Kristall: Aufspaltung von Energieniveaus durch Wechselwirkung

**Gedankenexperiment:** Annähern zweier gleicher Atome und Untersuchung der Energieniveaus der gekoppelten elektronischen Zustände

⇒ **Aufspaltung der Energieniveaus** in bindende und antibindende Zustände

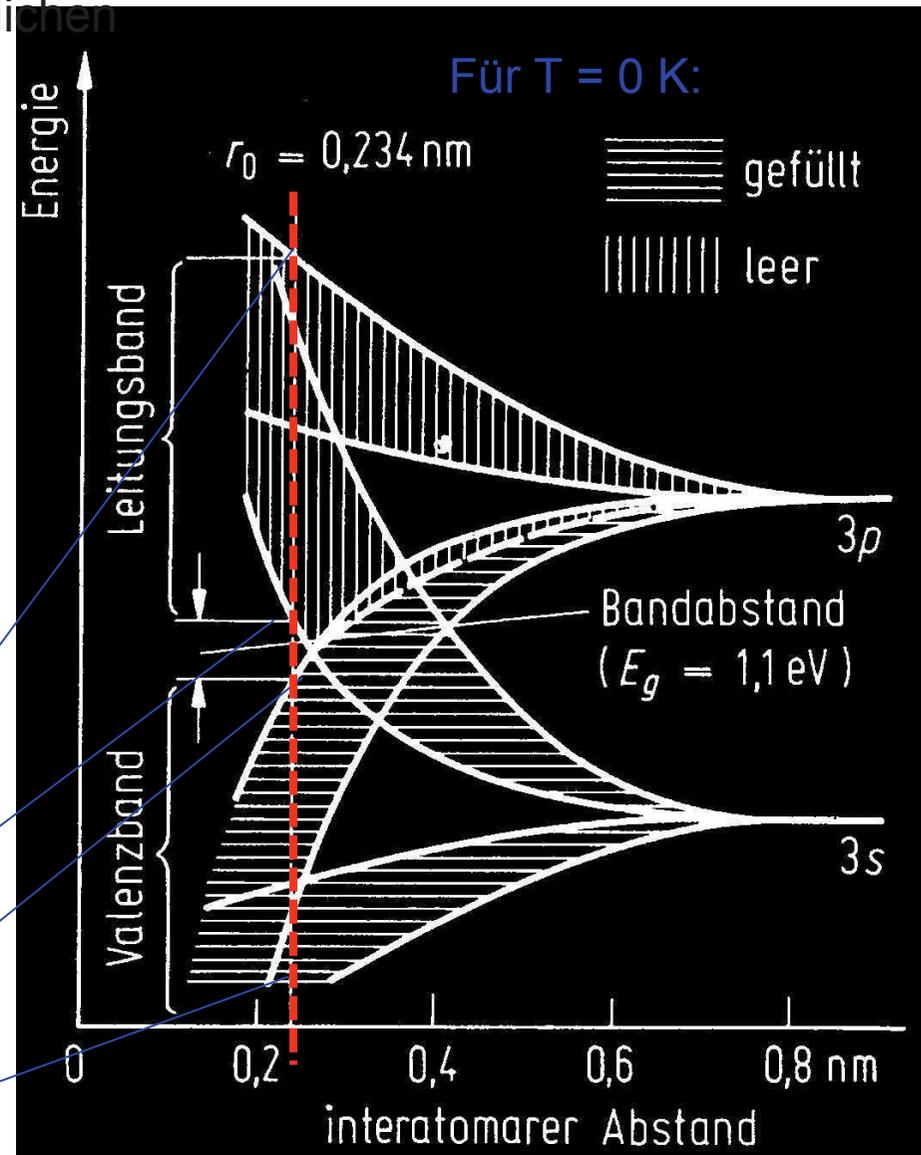
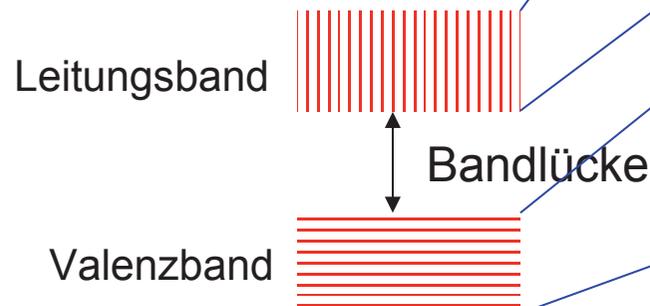
**Bei 6 Atomen:** Aufspaltung in 6 diskrete Energieniveaus

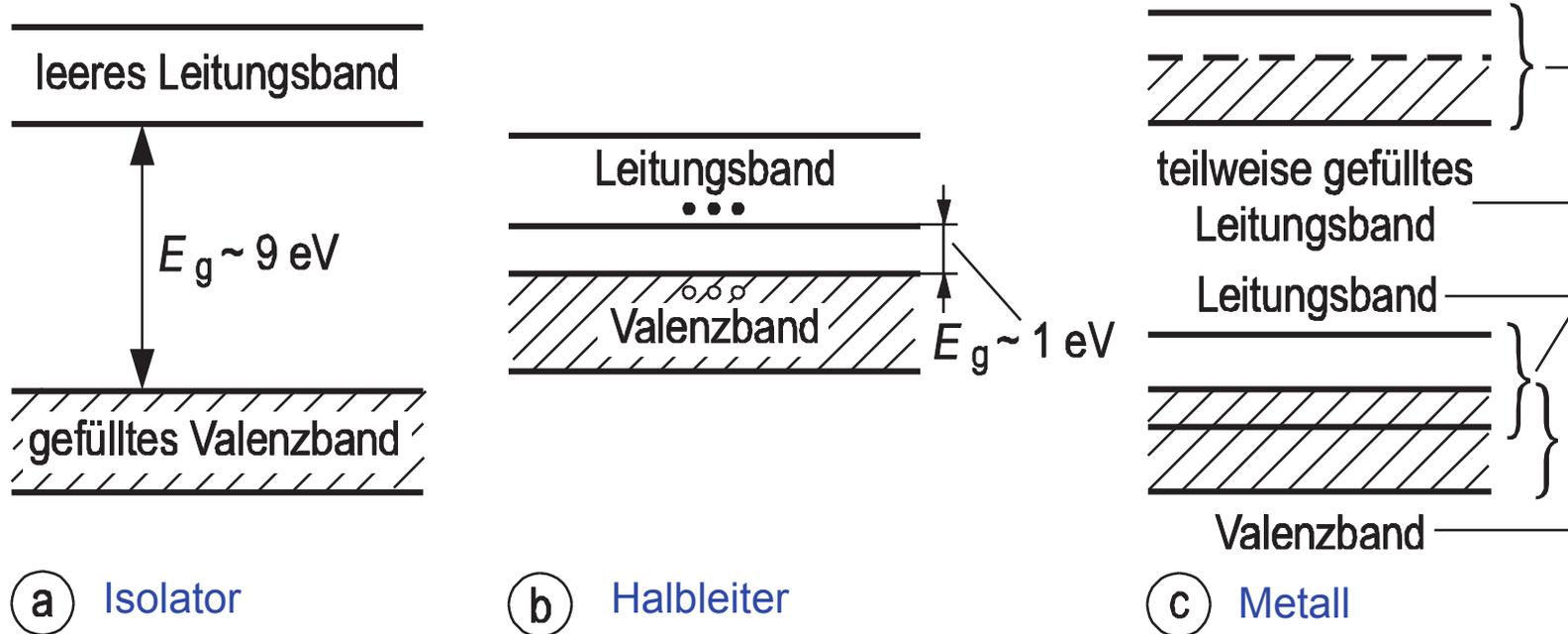


# Bildung von Energiebändern aus diskreten Energieniveaus

Bei  $10^{23}$  Atomen: Bildung von kontinuierlichen Energiebändern

- Die s-Bänder und p-Zustände des Si spalten sich sehr stark auf.
- Beim Atomabstand des Si ( $r = 0,234\text{nm}$  bei  $T = 0\text{K}$ ) bildet sich eine markante **Bandlücke**.
- **Valenzband** = Energetisch höchstes vollbesetztes Band bei  $T = 0\text{K}$
- **Leitungsband** = Energetisch tiefstes unbesetztes Band bei  $T = 0\text{K}$





## Bei Raumtemperatur:

- **Isolator**: (Nahezu) unbesetztes Leitungsband, volles Valenzband
- **Halbleiter**: Durch thermische Anregung teilweise besetztes Leitungs- und Valenzband
- **Metall**: Bereits bei  $T = 0$  nur besetztes Leitungsband bzw. oder Leitungs- und Valenzband überlappen

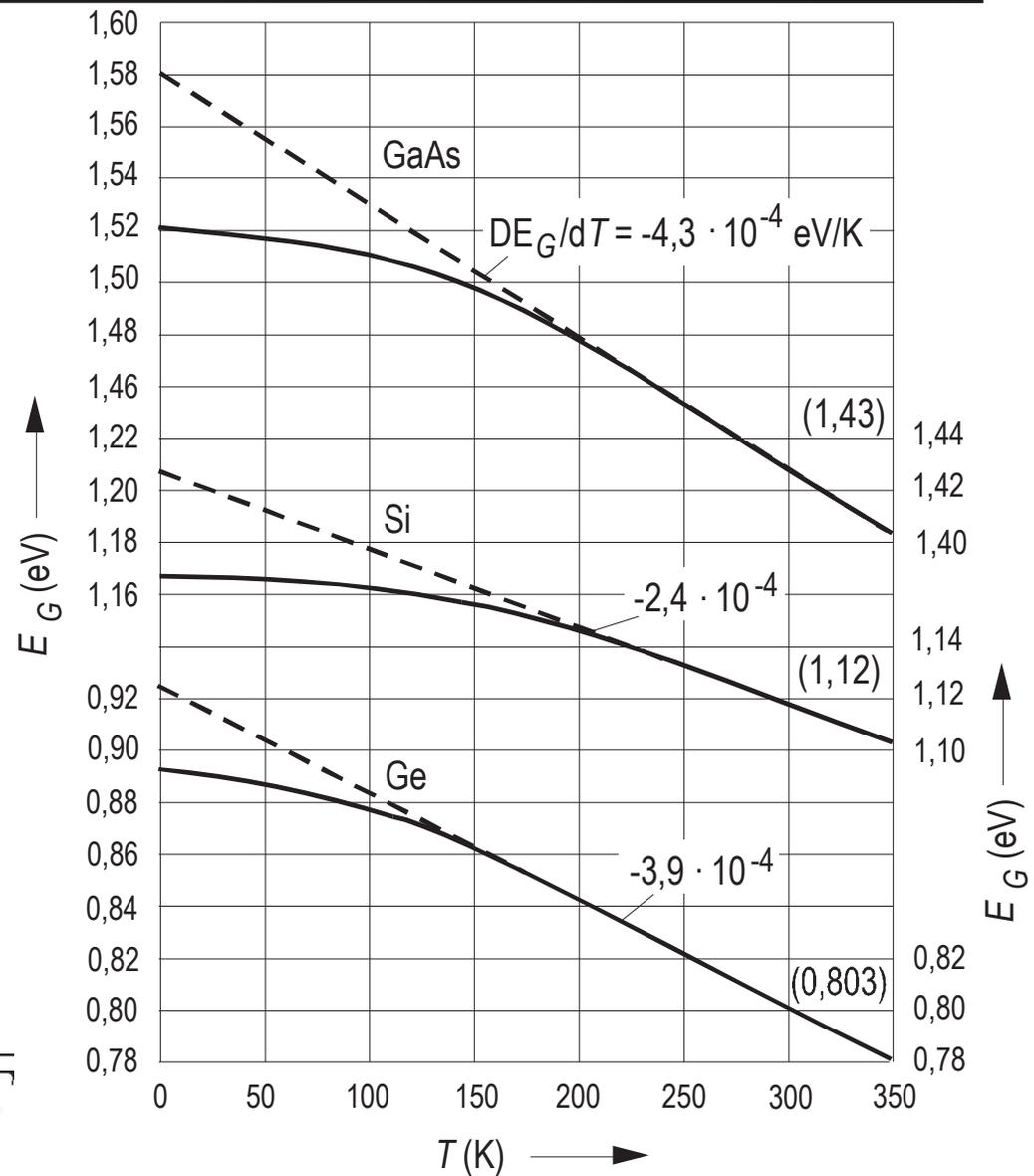
# Temperaturabhängigkeit der Bandlücke

- Die Bandlücke von Halbleiter nimmt üblicherweise mit zunehmender Temperatur ab!
- In der Umgebung der Raumtemperatur kann man die Temperaturabhängigkeit der Bandlücke durch eine lineare Funktion annähern:

$$E_g(T) = E_g(T_0) + \frac{dE_g}{dT} \Delta T$$

- Bei großen Temperaturschwankungen wird eine Näherung zweiter Ordnung verwendet:

$$E_g(T) = E_g(T = 0) - \frac{\alpha T^2}{\beta + T}$$



## Qualitatives Modell:

$T = 0 \text{ K}$ : Stabile Bindungen

$T > 0 \text{ K}$ : Kovalente Bindung kann „aufreißen“.

⇒ Zwei (Quasi-)Teilchen:

- Freies Elektron im Leitungsband
- Loch im Valenzband

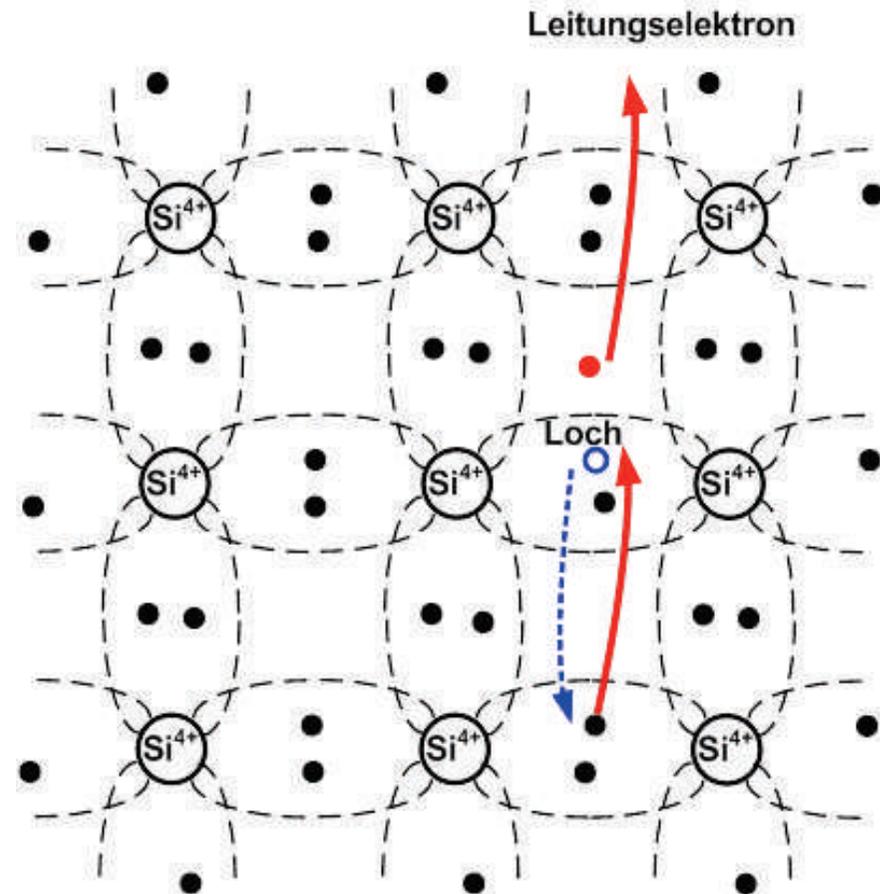
⇒ Zwei Anteile an Stromfluss und Leitfähigkeit

⇒ Leitfähigkeit steigt mit Temperatur

**Anmerkung:** Die Teilchen haben unterschiedliche Beweglichkeiten und tragen daher unterschiedlich stark zum Stromfluss bei!

**Problem:** Wie lassen sich diese Vorgänge quantitativ beschreiben?

⇒ Durch Lösung der Schrödinger-Gleichung für die Elektronen im Kristallgitter!



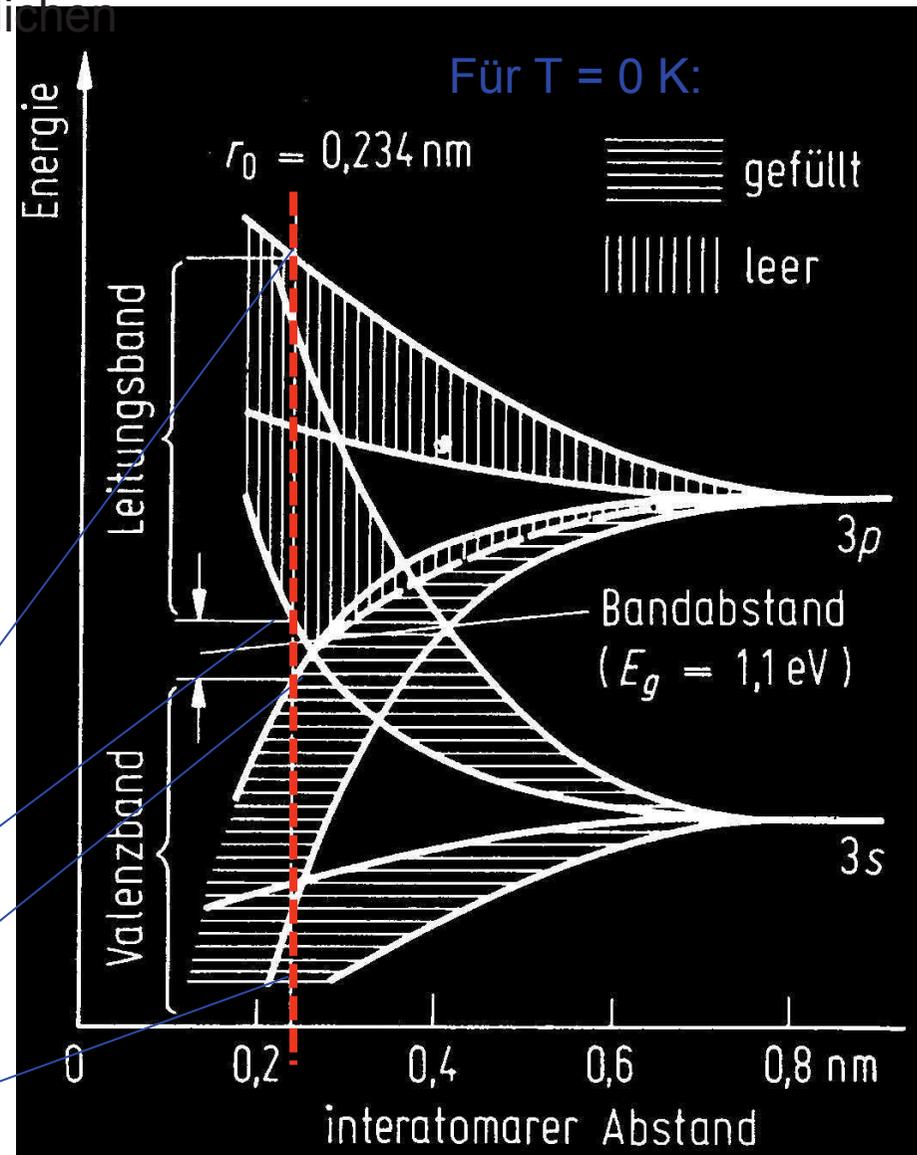
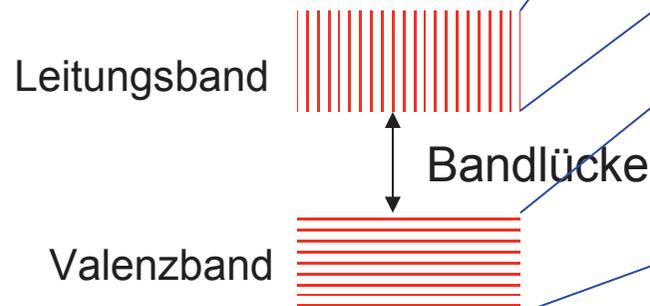
# Vorlesung 2

25.10.2013

# Bildung von Energiebändern aus diskreten Energieniveaus

Bei  $10^{23}$  Atomen: Bildung von kontinuierlichen Energiebändern

- Die s-Bänder und p-Zustände des Si spalten sich sehr stark auf.
- Beim Atomabstand des Si ( $r = 0,234\text{nm}$  bei  $T = 0\text{K}$ ) bildet sich eine markante **Bandlücke**.
- **Valenzband** = Energetisch höchstes vollbesetztes Band bei  $T = 0\text{K}$
- **Leitungsband** = Energetisch tiefstes unbesetztes Band bei  $T = 0\text{K}$



- Jedes Partikel in einen System wird durch eine **Wellenfunktion**  $\Psi(x,y,z,t)$  beschrieben. Diese Funktion ist stetig, endlich und wohldefiniert.
- Die Wahrscheinlichkeit, das durch  $\Psi(\mathbf{r},t)$  beschriebene Partikel im Volumenelement  $dx dy dz$  anzutreffen, ist gegeben durch  $|\Psi(\mathbf{r},t)|^2 dx dy dz$ .

$$|\Psi(\mathbf{r},t)|^2 = \text{Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte}$$

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \text{Wahrscheinlichkeitsdichteamplitude}$$

**Normierung:**  $\iiint |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 dx dy dz = 1$

- Klassische Größen wie z.B. die Energie  $W$  (in der englischsprachigen Literatur oft auch als  $E$  bezeichnet) oder der Impuls  $p$  entsprechen einem abstrakten **quantenmechanischen Operator**:

	Klassische Variable	Quantenmech. Operator
Ort	$x$	$x$
	$f(x)$	$f(x)$
Impuls	$p(x)$	$-j\hbar\nabla$
Energie	$W$	$j\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

- Der **Erwartungswert**  $\langle Q \rangle$  für eine Observable  $Q$  lässt sich aus der Wellenfunktion  $\Psi(x,y,z,t)$  mit Hilfe des zugehörigen Operators  $\mathbf{Q}_{op}$  berechnen,

$$\langle Q \rangle = \iiint \Psi^*(\mathbf{r}, t) \mathbf{Q}_{op} \Psi(\mathbf{r}, t) dx dy dz.$$

- Es gibt zu jeder Observablen  $Q$  einen Satz von speziellen Zuständen  $\Psi_Q$ , bei denen das Ergebnis einer Messung eindeutig feststeht. Ein solcher Zustand wird **Eigenzustand** der betreffenden Observablen genannt, und das zugehörige Messergebnis ist einer der **Eigenwerte des zur Observablen gehörenden Operators  $Q_{op}$** ,

$$Q_{op}\Psi_Q = Q\Psi_Q$$

Die **zeitabhängige Schrödinger-Gleichung** ergibt sich durch Ausnutzung der Tatsache, dass die Gesamtenergie des Partikels aus der Summe von kinetischer und potentieller Energie ergibt:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + W_{pot}(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}, t) = j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t)$$

Die **zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung** ergibt sich durch einen Separationsansatz der Form  $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})\phi(t)$  und Annahme einer harmonischen Zeitabhängigkeit  $\phi(t) = \phi_0 \exp(-jWt/\hbar)$  ( $W$  = Gesamtenergie des Partikels)

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + W_{pot}(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = W\psi(\mathbf{r})$$

Betrachte ein Elektron mit Gesamtenergie  $W$  in einem räumlich konstanten Potenzialfeld mit potentieller Energie  $W_{\text{pot}}$   
⇒ Lösung der (zeitabhängigen) Schrödinger-Gleichung:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \psi_0 e^{j\left(\mathbf{k}\mathbf{r} - \frac{W(k)t}{\hbar}\right)},$$

Die Dispersionsrelation beschreibt den Zusammenhang zwischen Gesamtenergie  $W$  und Impuls  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  des Elektrons bzw. zwischen Frequenz und Wellenzahl der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichtewelle,

$$W(k) = W_0 + \frac{(\hbar\mathbf{k})^2}{2m}$$

- Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $|\Psi(\mathbf{r},t)|^2$  des Elektrons ist räumlich konstant, d.h. es ist unmöglich, dem Elektron einen Aufenthaltsort zuzuschreiben. Dies ist eine Folge der Heisenberg'schen Unschärferelation, die die Varianzen im Ort und im Impuls miteinander verbindet

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2},$$

- Der Impuls eines lokalisierten Elektrons lässt sich also nur durch ein Spektrum an Wellenzahlen beschreiben.

# Wellenpakete und Gruppengeschwindigkeit

Das lokalisierte Elektron mit mittlerem Impuls  $\hbar\mathbf{k}$  lässt sich darstellen durch ein Wellenpaket mit mittlerem Wellenvektor  $\mathbf{k}$  und einer zeitlich-örtliche Einhüllenden  $a(x,t)$

$$\Psi(x, t) = a(x, t) e^{j\left(k_0 x - \frac{W(k_0)}{\hbar} t\right)}$$

Anmerkung: Betrachte Propagation in x-Richtung,  $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x$  (o.B.d.A).

Beschreibung der zeitlichen Evolution im  $k$ -Raum:

$$\Psi(x, 0) = a(x, 0) e^{jk_0 x}$$

$$\Psi(x, t) = a(x - v_g t, 0) e^{j\left(k_0 x - \frac{W(k_0)}{\hbar} t\right)}$$



$$\tilde{\Psi}(k, 0) = \tilde{a}(k - k_0, 0)$$



$$\tilde{\Psi}(k, t) = \tilde{a}(k - k_0, t) e^{-j\frac{W(k)}{\hbar} t}$$

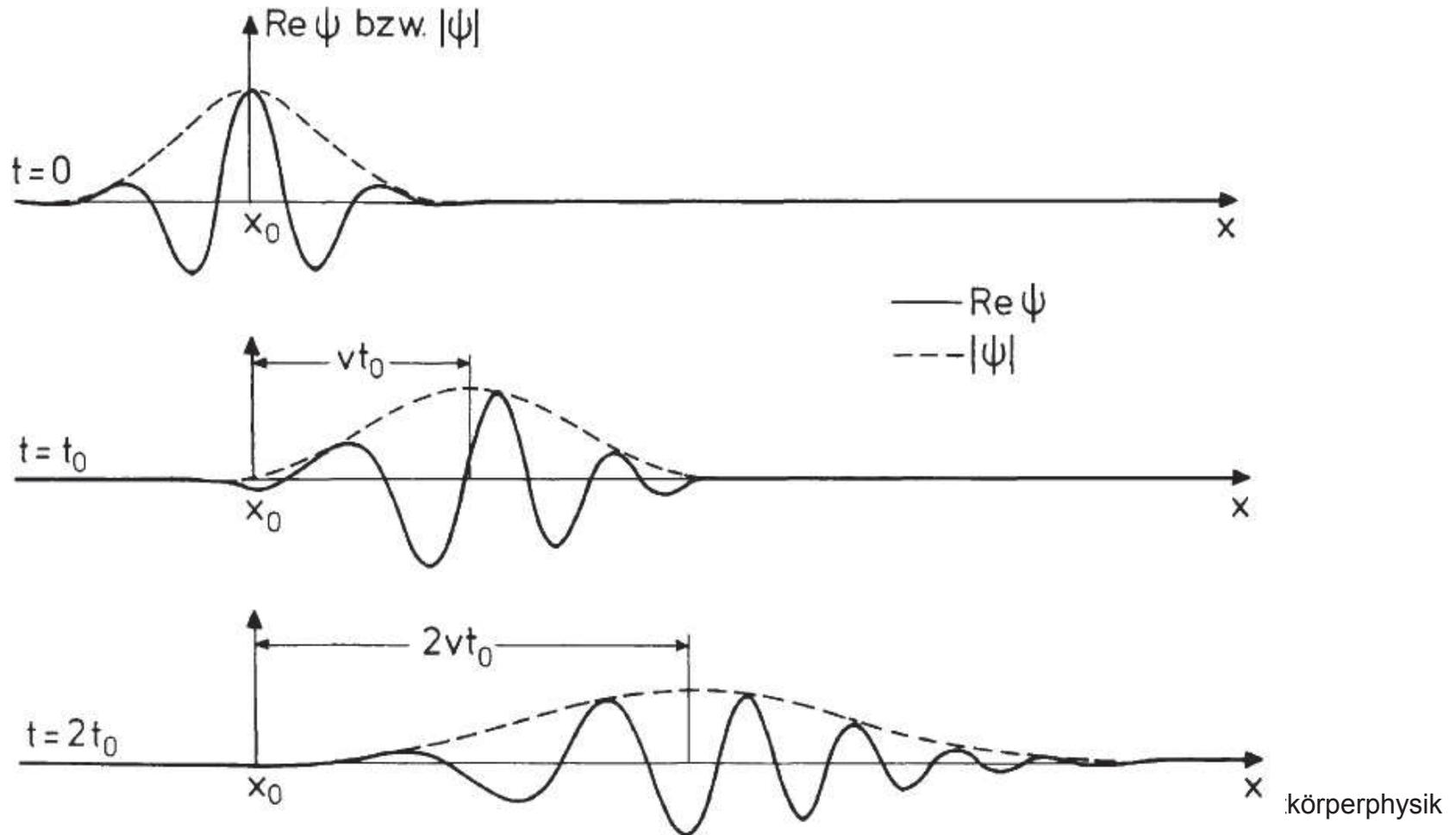
Taylor-Entwicklung der Dispersionsrelation um die mittlere Wellenzahl  $k_0$ :

$$W(k) = W(k_0) + \left. \frac{\partial W}{\partial k} \right|_{k=k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 W}{\partial k^2} \right|_{k=k_0} (k - k_0)^2$$

Gruppengeschwindigkeit:

$$v_g = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial W}{\partial k} \quad (\text{entlang } x)$$

$$\mathbf{v}_g = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} W(\mathbf{k}) \quad (\text{in 3D})$$



- Terme **zweiter und höherer Ordnung** in der Taylorentwicklung von  $W(k)$  führen aufgrund der anfänglichen Impulsverteilung zum „Zerfließen“ des Wellenpaketes für  $t > 0$

Impuls- und Geschwindigkeitszunahme im externen elektrischen Feld:

$$\frac{\partial (\hbar \mathbf{k})}{\partial t} = -e\mathbf{E}$$
$$\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial t} = m^* (-e\mathbf{E})$$

Die effektive **Masse  $m^*$**  ist invers proportional zur Krümmung der Dispersionsrelation:

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W(k)}{\partial k^2}$$

In der räumlichen Betrachtung ist die **inverse effektive Masse  $1/m^*$**  eine **3x3-Matrix**, die im wesentlichen der Hesse-Matrix der Dispersionsrelation entspricht,

$$\left( \frac{1}{m^*} \right)_{l,m} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W(k)}{\partial k_l \partial k_m}$$

Für das **freie Elektron** stimmt die effektive Masse  $m^*$  mit der Ruhemasse  $m$  des **Elektrons überein**. Für Elektronen in einem Halbleiterkristall kann die effektive Masse hingegen sehr unterschiedliche und insbesondere auch negative Werte annehmen.



Lösung der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung:

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) & \text{falls } 0 < x, y, z < L, \\ \rightarrow 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

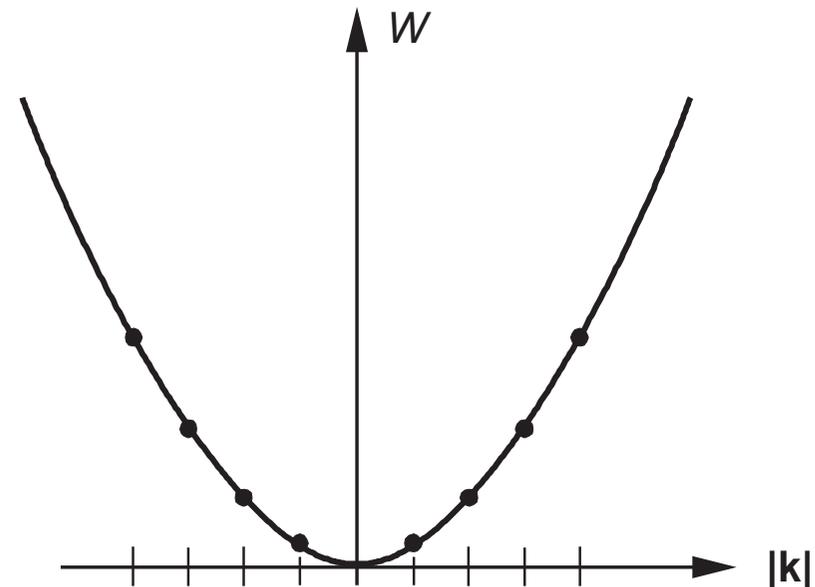
$$\text{wobei } k_x L = n_x \pi, \quad k_y L = n_y \pi, \quad k_z L = n_z \pi$$

Zugehörige Energien:

$$W = W_0 + \frac{|\mathbf{k}|^2}{2m},$$

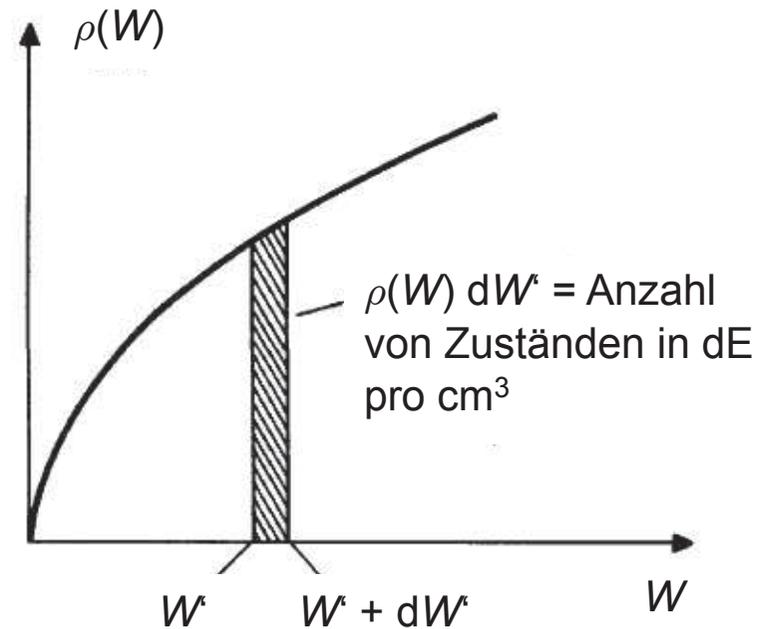
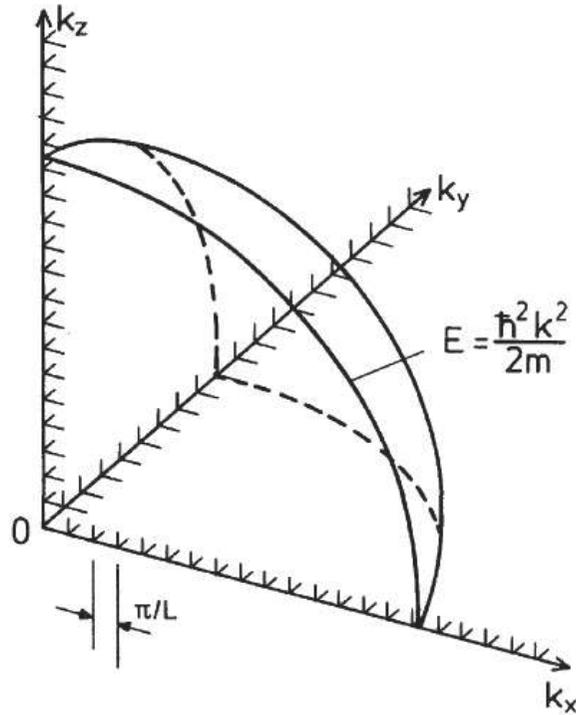
$$\text{wobei } |\mathbf{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

Für  $L \rightarrow \infty$ : Kontinuum an möglichen Energieniveaus anstelle diskreter Zustände  
 $\Rightarrow$  Betrachtung der **Zustandsdichte** als Funktion der Energie



# Zustandsdichte des freien Elektronengases

**Zustandsdichte:** Anzahl der besetzbaren Zustände pro Energieintervall und pro Volumen



$$\rho(W) = \frac{1}{V} \frac{dN}{dW} = 4\pi \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \sqrt{W - W_0}$$

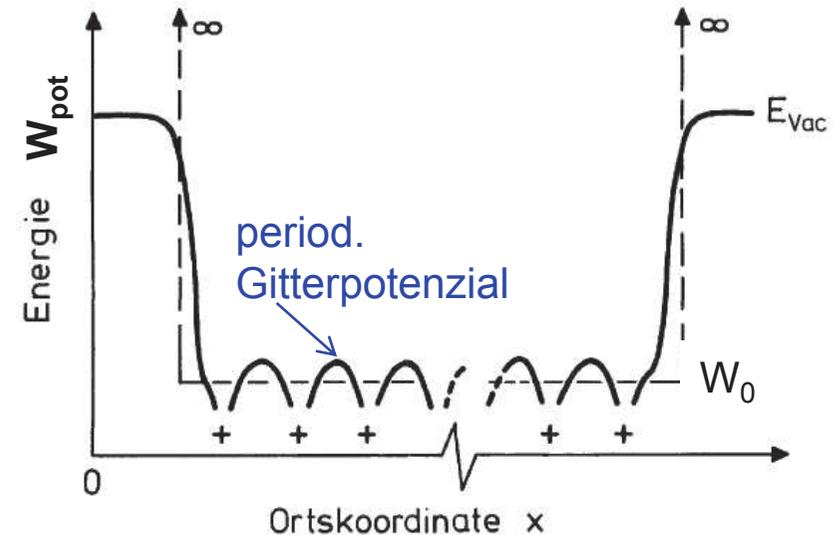
**Anmerkung:** Die Energie wird in der Literatur manchmal auch mit E bezeichnet!

Quelle: Ibach/Lüth, Festkörperphysik

## Bloch-Theorem:

Die Lösungen der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung für ein periodisches Potential  $W_{\text{pot}}(\mathbf{r}) = W_{\text{pot}}(\mathbf{r} + \mathbf{R})$  sind das Produkt aus einer ebenen Welle  $\exp(j\mathbf{k}\mathbf{r})$  und einer Funktion  $u_k(\mathbf{r})$ , die die gleiche Periodizität aufweist wie das Kristallgitter,

$$\psi_k(\mathbf{r}) = u_k(\mathbf{r}) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}},$$
$$u_k(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = u_k(\mathbf{r}).$$



**Veranschaulichung im Eindimensionalen:**  $\psi_k(x) = u_k(x) e^{jkx}$      $u_k(x + a) = u_k(x)$

- Die periodische Funktion  $u_k(x)$  lässt sich in eine Fourier-Reihe entwickeln:

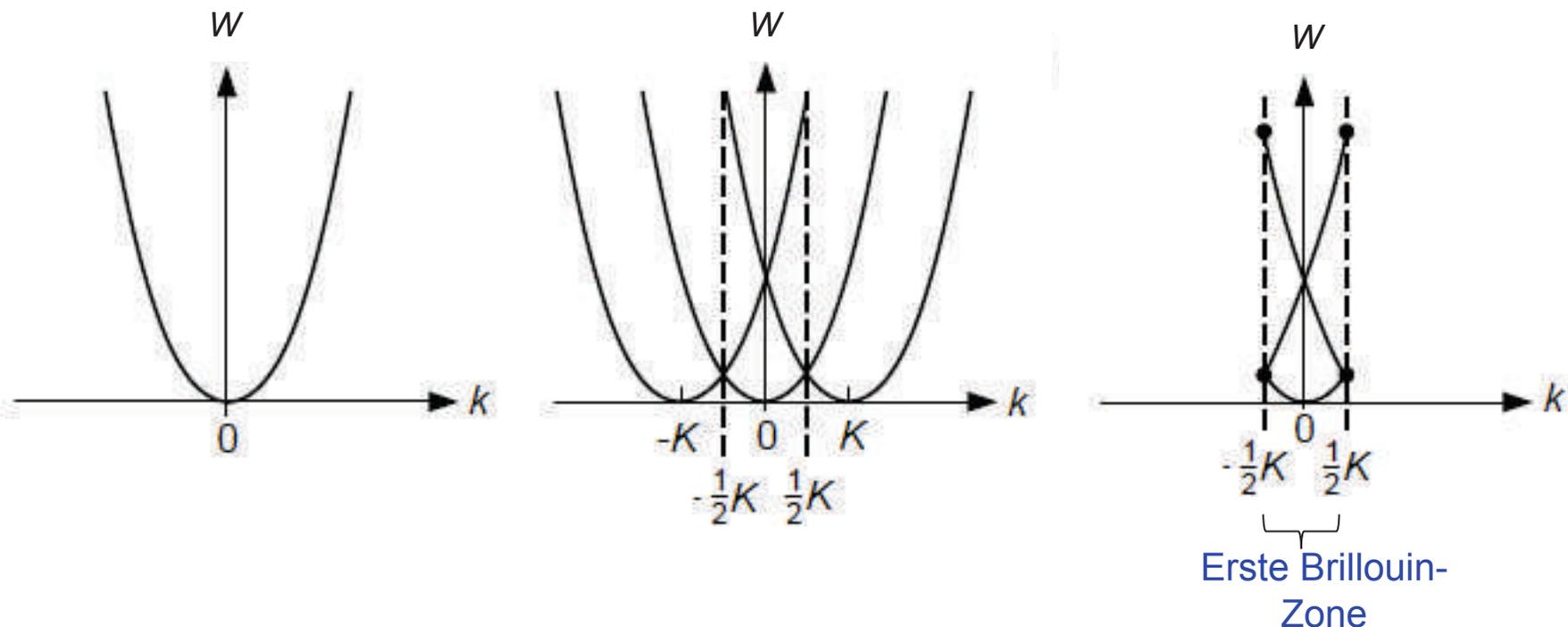
$$u_k(x) = \sum_{\nu} c_{k,\nu} e^{j\nu Kx}$$

⇒ Der mit der Wellenzahl  $k$  indizierte Zustand  $\psi_k(x)$  umfasst alle Wellenzahlen  $k + \nu K$  und damit auch die zugehörigen Energien!

- **Gedankenexperiment:** Betrachte ein freies Elektron in einem „infinitesimal schwachen“ periodischen Potenzial

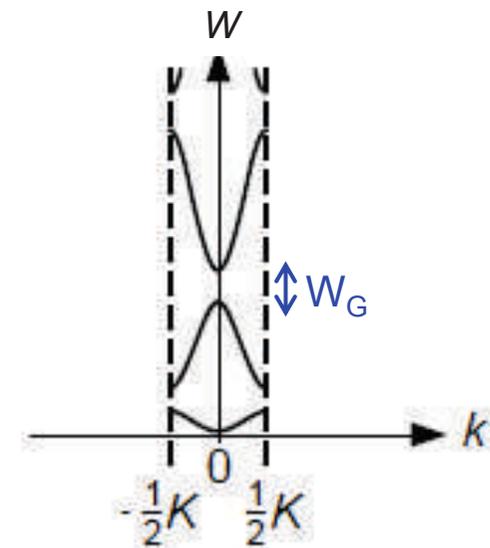
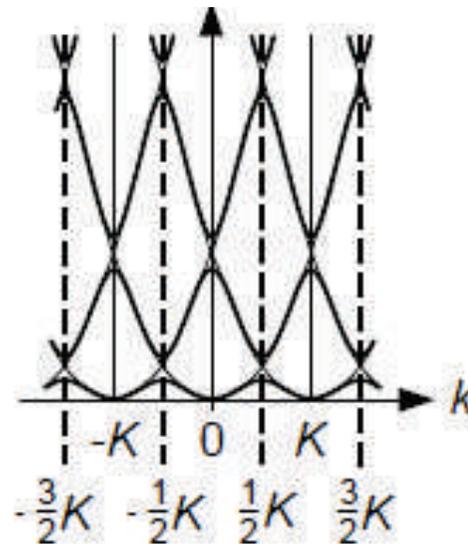
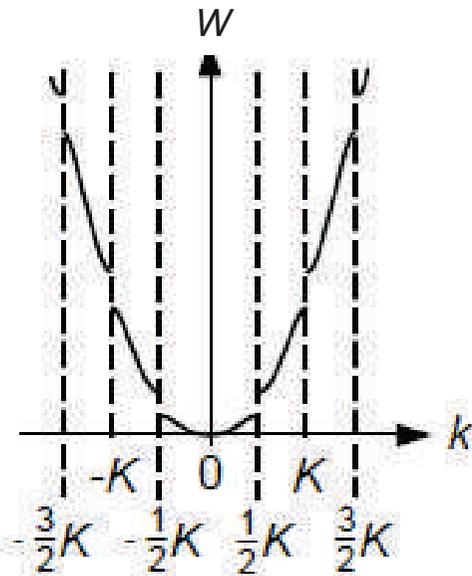
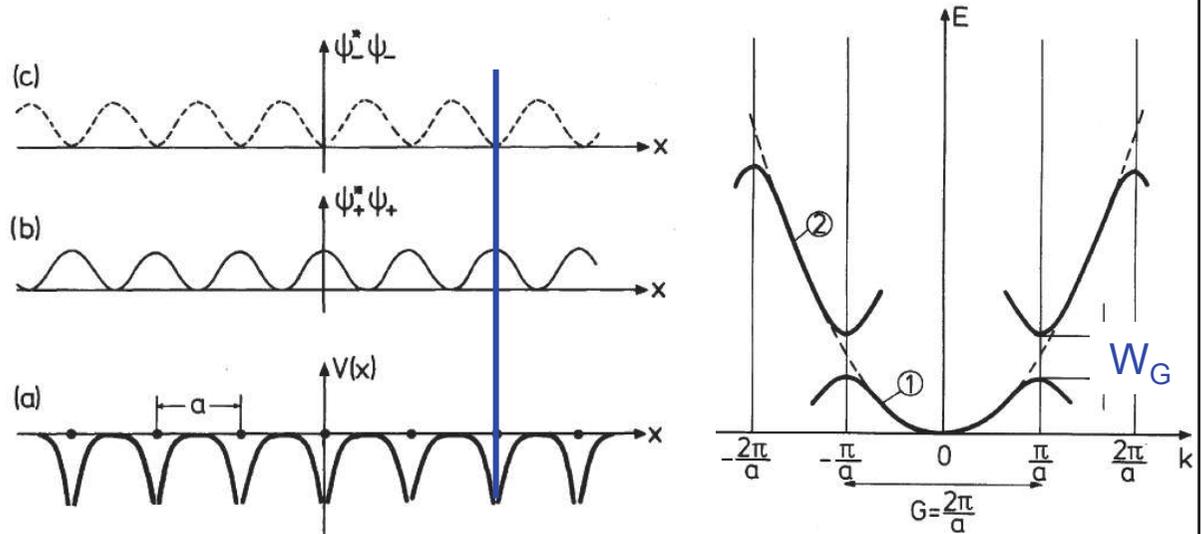
# Das freie Elektron im „infinitesimal schwachen“ periodischen Potential („leeres Gitter“)

- „Infinitesimal schwach“: Die parabelförmige Dispersionsrelation des freien Elektrons bleibt im wesentlichen erhalten<sup>^</sup>.  
⇒ Energien zum Zustand mit Wellenzahl  $k$ : 
$$W_\nu(k) = \frac{\hbar^2 (k + \nu K)^2}{2m}$$
- Aufgrund der Periodizität genügt eine Betrachtung des  $k$ -Raumes zwischen  $-K/2$  und  $K/2$  (sog. erste Brillouin-Zone)



# Das Elektron im „etwas stärkeren“ periodischen Potential

- Am Rand der ersten Brillouin-Zone ( $k = \pm K/2$ ): liegen **stehende Wellen** vor. Dies führt zur **Aufspaltung der Energiezustände** und damit zur Bildung einer **Bandlücke  $W_G$** .



Quelle: Ibach/Lüth, Festkörperphysik

# Banddiagramm in drei Dimensionen – das reiproke Gitter

**Kristallgitter:** Charakterisierung durch Translationsvektoren  $\mathbf{R}$  im Ortsraum (Gittervektoren)

$$\mathbf{R} = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2 + \mu_3 \mathbf{a}_3,$$



**Reziprokes Gitter:** Charakterisierung durch Translationsvektoren im  $k$ -Raum (inverse Gittervektoren)

$$\mathbf{K} = \nu_1 \mathbf{b}_1 + \nu_2 \mathbf{b}_2 + \nu_3 \mathbf{b}_3$$

wobei  $\mathbf{a}_\nu \cdot \mathbf{b}_\mu = 2\pi \delta_{\nu\mu}$

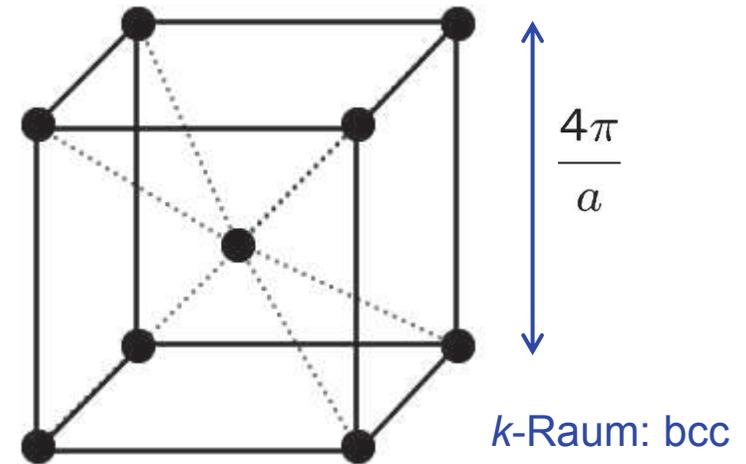
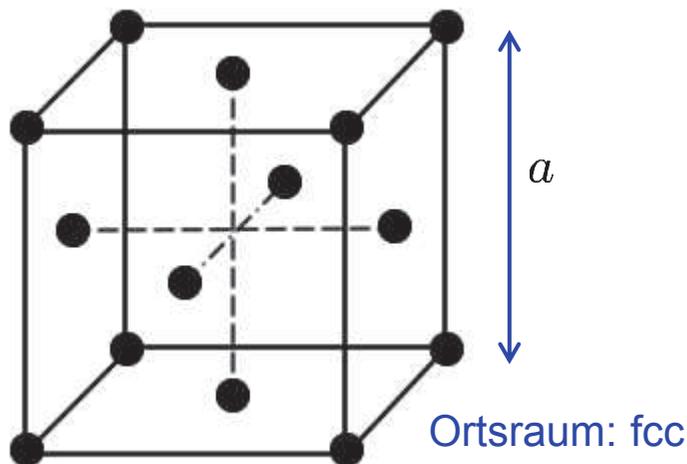
**Konstruktion des reziproken Gitters:**

$$\mathbf{b}_1 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)};$$

$$\mathbf{b}_2 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)};$$

$$\mathbf{b}_3 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}$$

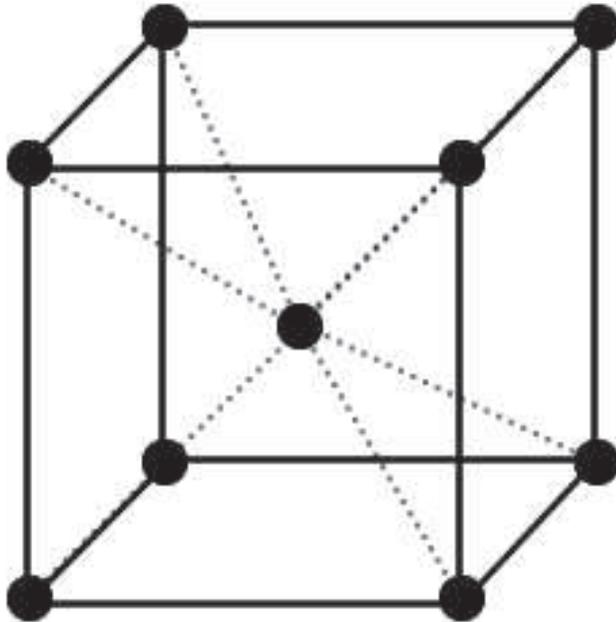
**Beispiel:** Zu einem kubisch-flächenzentrierten Kristallgitter im Ortsraum gehört ein kubisch-raumzentriertes reziprokes Gitter im  $k$ -Raum



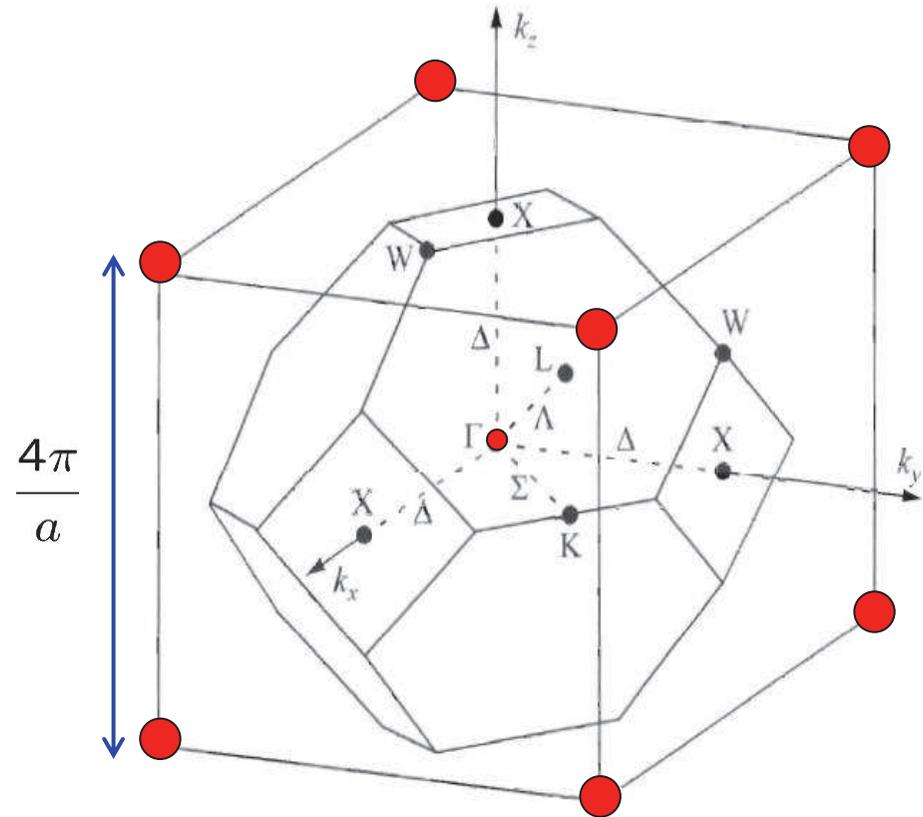
# Brillouin-Zone in drei Dimensionen

**Erste Brillouin-Zone:** Menge aller Punkte im  $k$ -Raum, die näher am Gitterpunkt  $(0,0,0)$  liegen als an irgendeinem anderen Gitterpunkt

⇒ Konstruktion mit Hilfe der **Mittellot-Ebenen** zwischen benachbarten Gitterpunkten

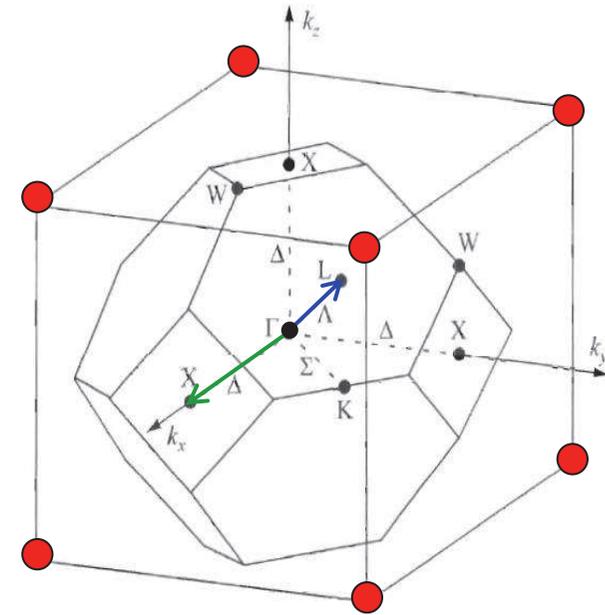
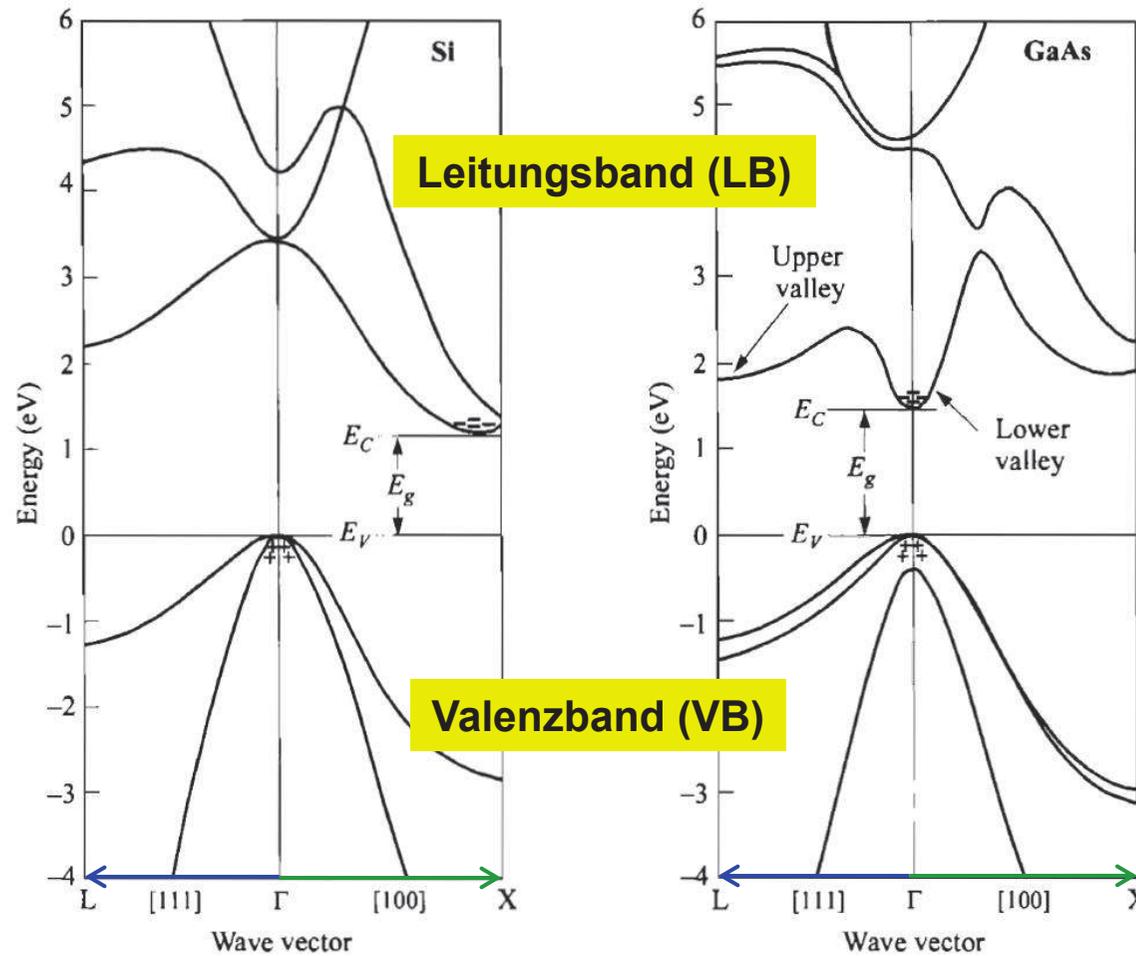


Reziprokes Gitter  
eines fcc-Gitters im Ortsraum



Brillouin-Zone des fcc-Gitters

# Bandstrukturen in 3D



Quelle: Sze, Semiconductor Devices

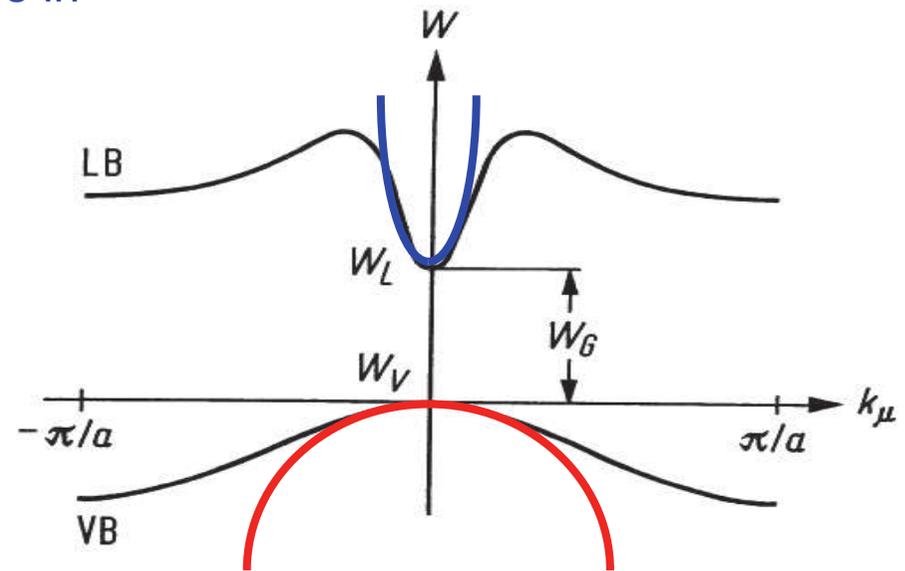
# Parabolische Bandnäherung

Parabolische Annäherung des Bandverlaufes in den Extrempunkten:

$$W_n(k) = W_n(k_0) + \frac{\hbar^2 (k - k_0)^2}{2m^*}$$

mit der effektiven Masse  $m^*$ ,

$$m^* = \hbar^2 \left( \frac{\partial^2 W_n(k)}{\partial k^2} \Big|_{k=k_0} \right)^{-1}$$



Im Valenzband:  $m^* < 0$

⇒ Ein unbesetzter Elektronenzustand mit **negativer Ladung** ( $-e$ ) und **negativer effektiver Masse**  $m_n = m^* < 0$  wird ersetzt durch ein Loch, also ein Zustand mit **positiver Ladung** ( $+e$ ) und **positiver effektiver Masse**  $m_p = |m^*| > 0$ .

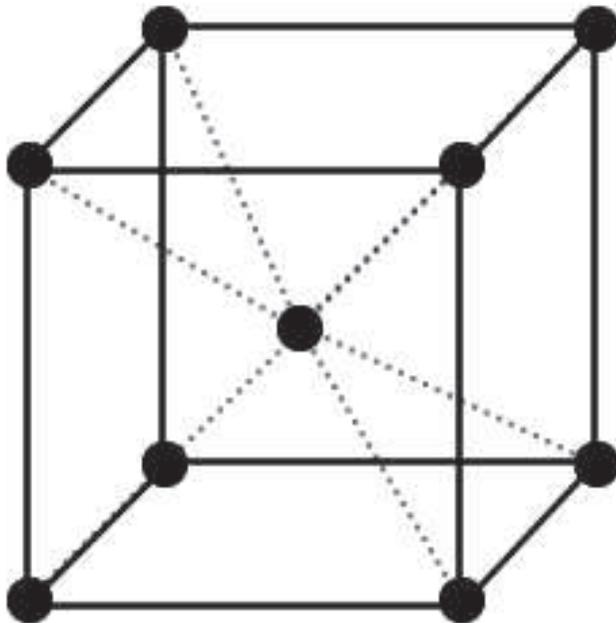
# Vorlesung 3

28.10.2013

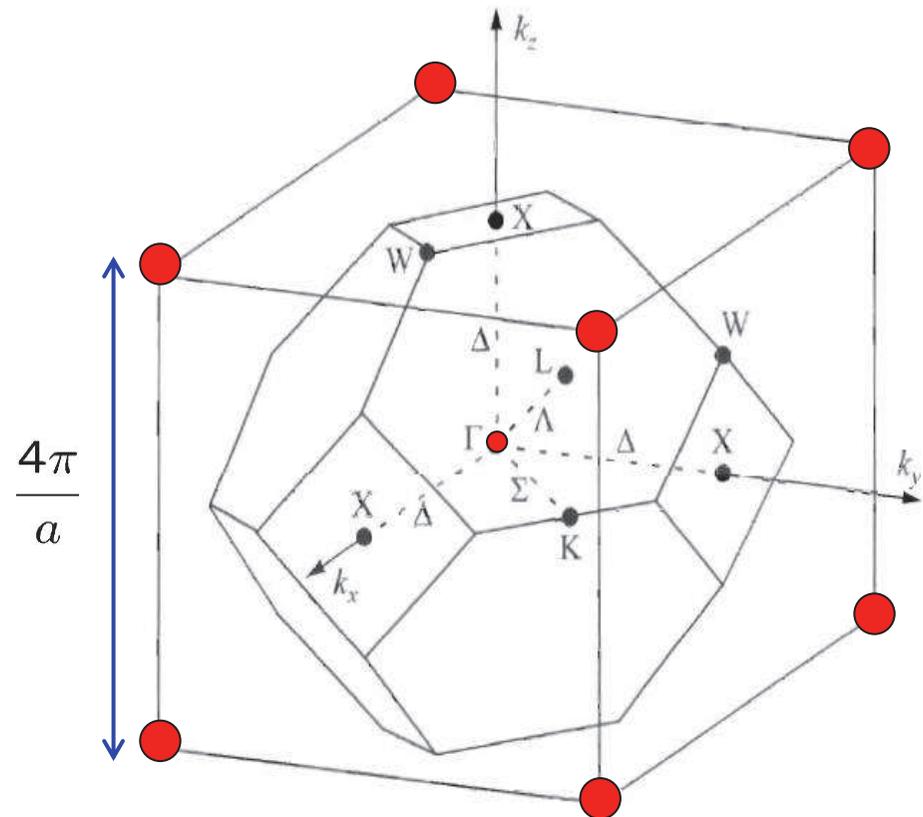
# Brillouin-Zone in drei Dimensionen

**Erste Brillouin-Zone:** Menge aller Punkte im  $k$ -Raum, die näher am Gitterpunkt  $(0,0,0)$  liegen als an irgendeinem anderen Gitterpunkt

⇒ Konstruktion mit Hilfe der **Mittellot-Ebenen** zwischen benachbarten Gitterpunkten

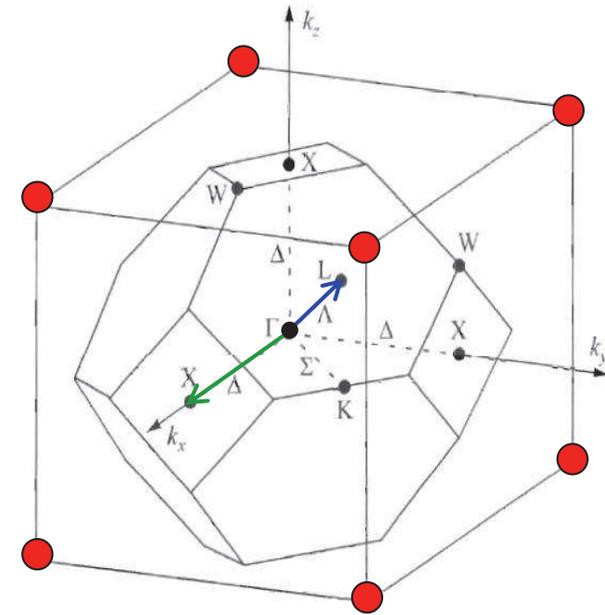
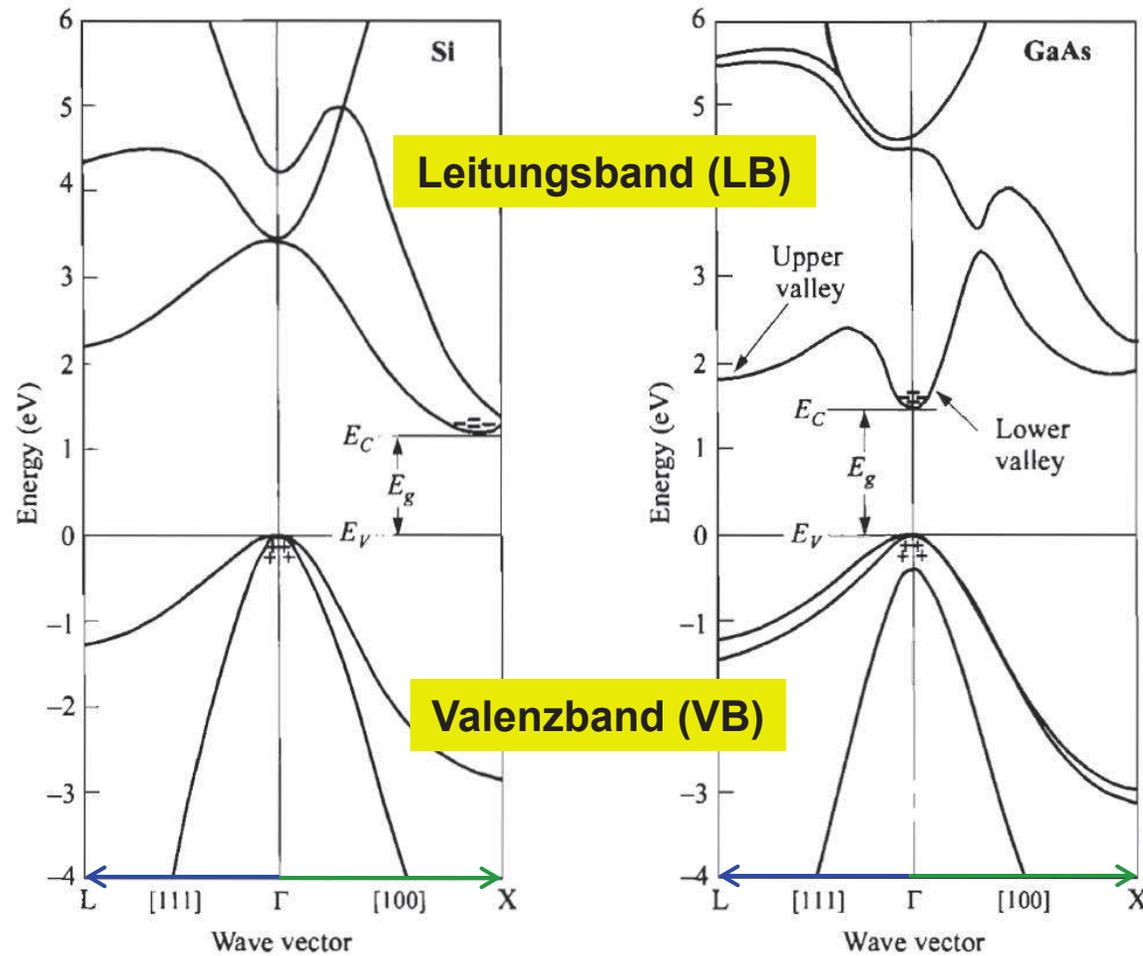


Reziprokes Gitter  
eines fcc-Gitters im Ortsraum

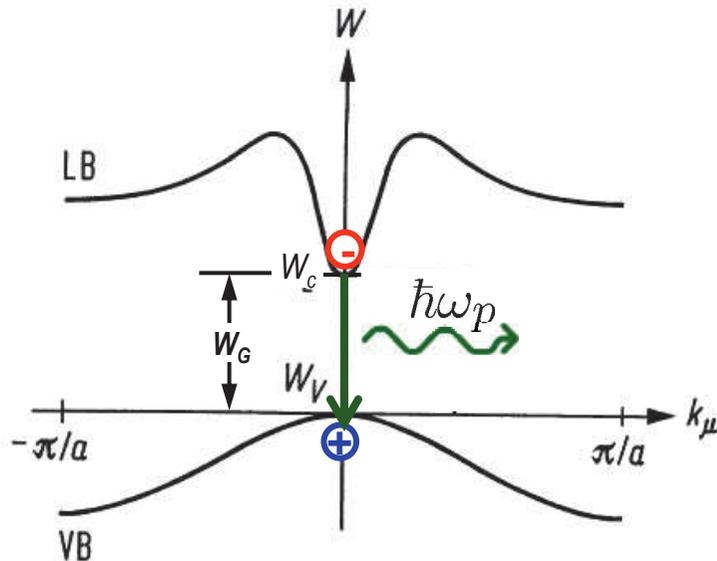


Brillouin-Zone des fcc-Gitters

# Bandstrukturen in 3D



Quelle: Sze, Semiconductor Devices



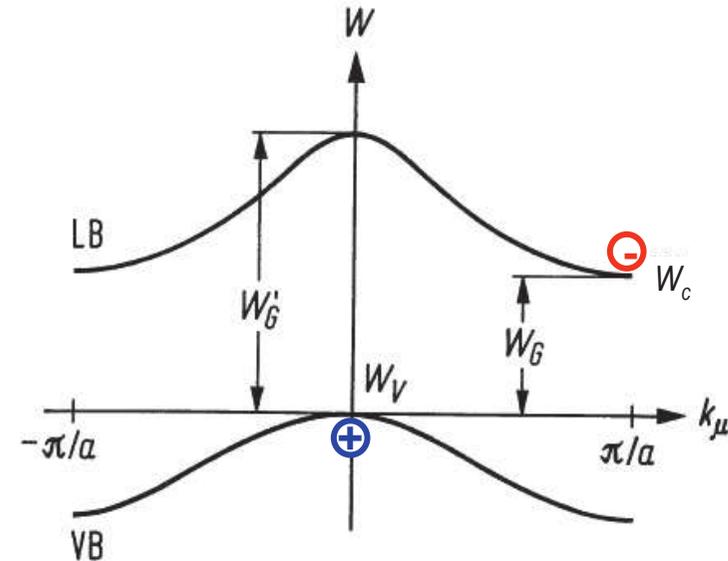
## Direkter Halbleiter, z.B. InP, GaAs...

- Maximum des VB und Minimum des LB liegen beim gleichen Kristallimpuls
- **Strahlender Übergang erfüllt sowohl Energie- als auch Impulserhaltung**

$$\Delta W = \hbar\omega_p \gtrsim W_L - W_V$$

$$\Delta p \approx 0$$

⇒ **Effiziente Emission / Absorption von Licht**



## Indirekter Halbleiter, z.B. Si, Ge...

- Maximum des VB und Minimum des LB liegen bei unterschiedlichen Kristallimpulsen
- **Strahlende Übergänge unwahrscheinlich:** Impulserhaltung erfordert Wechselwirkung mit einem Phonon, das den Impuls aufnimmt ("Dreierstoß")

$$\Delta p = \underbrace{\hbar\pi/a}_{\text{Phonon}} \gg \underbrace{\hbar 2\pi/\lambda_p}_{\text{Photon}}$$

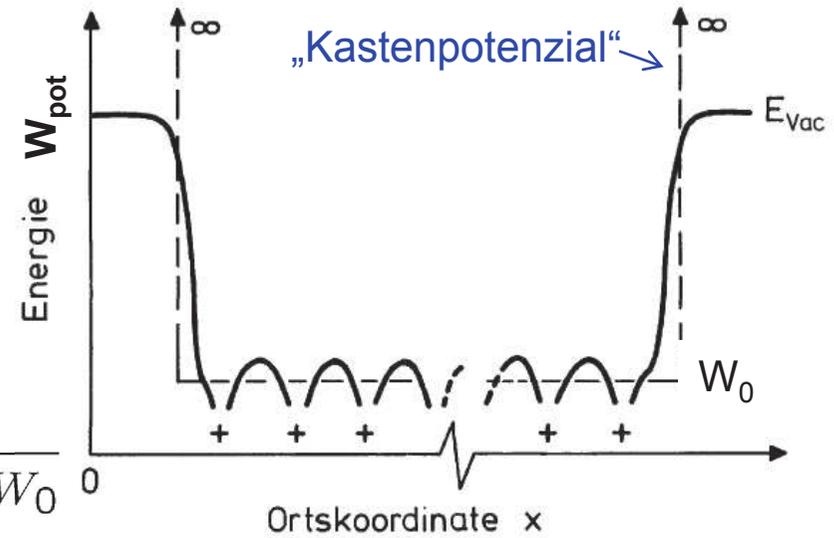
⇒ **Keine effiziente Emission / Absorption von Licht**

## Sommerfeld-Modell: Freies Elektron im Potentialkasten

- Das periodische Potenzial im Kristall wird vernachlässigt, die Austrittsarbeit an der Oberfläche wird mit  $\infty$  angenähert

⇒ Dispersionsrelation: 
$$W = W_0 + \frac{|\mathbf{k}|^2}{2m},$$

Zustandsdichte: 
$$\rho(W) = 4\pi \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \sqrt{W - W_0}$$



## Bloch-Theorem: Beschreibung der Elektronen im periodischen Potenzial des Kristalls

- Die Lösungen der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung für ein periodisches Potential  $W(\mathbf{r}) = W_{\text{pot}}(\mathbf{r} + \mathbf{R})$  sind das Produkt aus einer ebenen Welle  $\exp(j\mathbf{k}\mathbf{r})$  und einer Funktion  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ , die die gleiche Periodizität aufweist wie das Kristallgitter,

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}}, u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}).$$

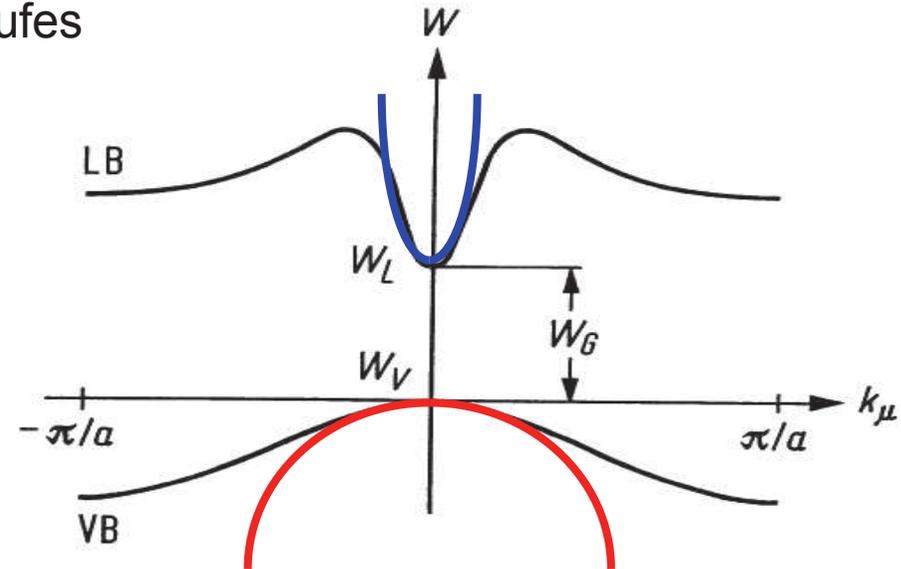
- Parabolische Annäherung des Bandverlaufes mit Hilfe der **effektiven Masse  $m^*$** :

$$W_n(k) = W_n(k_0) + \frac{\hbar^2 (k - k_0)^2}{2m^*} \quad m^* = \hbar^2 \left( \frac{\partial^2 W_n(k)}{\partial k^2} \Big|_{k=k_0} \right)^{-1}$$

- Parabolische Annäherung des Bandverlaufes mit Hilfe der **effektiven Masse**  $m^*$ :

$$W_n(k) = W_n(k_0) + \frac{\hbar^2 (k - k_0)^2}{2m^*}$$

$$m^* = \hbar^2 \left( \frac{\partial^2 W_n(k)}{\partial k^2} \Big|_{k=k_0} \right)^{-1}$$



⇒ **Kombination der beiden Modelle:** Zustandsdichte für das Leitungs- und Valenzband unter der Annahme einer parabolischen Annäherung des Bandverlaufes

$$W = W_L + \frac{|\mathbf{k}|^2}{2m_n}, \quad \frac{1}{m_n} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W_L(k)}{\partial k^2}, \quad \rho_n(W) = 4\pi \frac{(2m_n)^{3/2}}{h^3} \sqrt{W - W_L}$$

$$W = W_V - \frac{|\mathbf{k}|^2}{2m_p}, \quad \frac{1}{m_p} = -\frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W_V(k)}{\partial k^2}, \quad \rho_p(W) = 4\pi \frac{(2m_p)^{3/2}}{h^3} \sqrt{W_V - W}$$

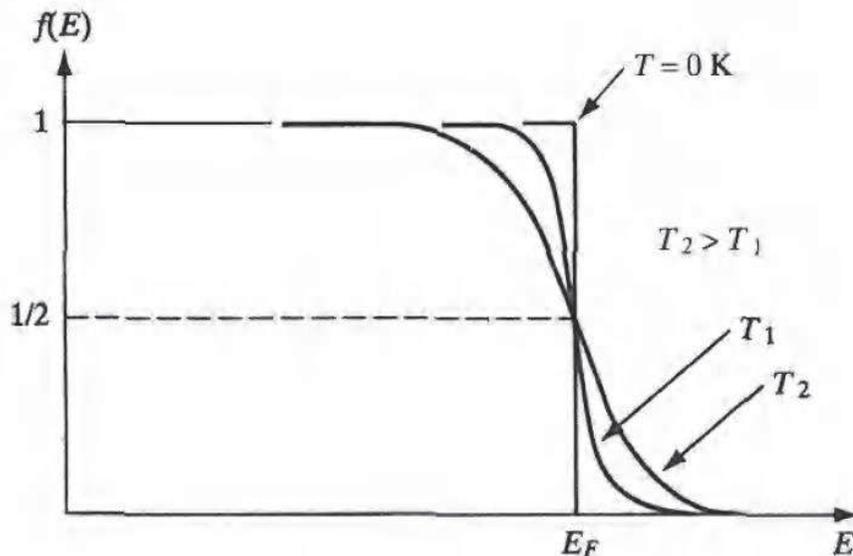
Besetzungswahrscheinlichkeit eines Zustandes mit Energie  $W$  ist gegeben durch die **Fermi-Dirac Verteilung**:

$$f(W) = \frac{1}{1 + e^{\frac{W - W_F}{kT}}}$$

$W_F$  = **Fermi-Energie** als freier Parameter (Energie mit Besetzungswahrscheinlichkeit 0.5)

## Grundlage der Fermi-Dirac-Verteilung: Quantenstatistik + zusätzliche Annahmen:

- Elektronen sind **ununterscheidbar**, d.h. die Vertauschung zweier Teilchen ergibt keinen neuen Zustand der in der statistischen Betrachtung extra gezählt werden muss.
- Fermionen (Teilchen mit halbzahligem Spin) gehorchen dem **Pauli-Prinzip**, d.h., jeder Zustand ist mit maximal einem Teilchen besetzt.
- Teilchen weisen **keine Wechselwirkung** auf („ideales Fermi-Gas“)



## Eigenschaften:

- Für  $T \rightarrow 0$  K nähert sich die Fermi-Verteilung einer Sprungfunktion an.
- Für Energien weit entfernt von  $W_F$  kann die Fermi-Dirac-Verteilung durch die **Boltzmann-Verteilung** angenähert werden:

$$W \gg W_F : \quad f(W) \approx e^{-\frac{(W - W_F)}{kT}}$$

$$W \ll W_F : \quad 1 - f(W) \approx e^{-\frac{(W_F - W)}{kT}}$$

Für  $|W - W_F| < 3 kT$  ist die Näherung besser als 5%!

Quelle: Streetman, Solid-State Electronic Devices

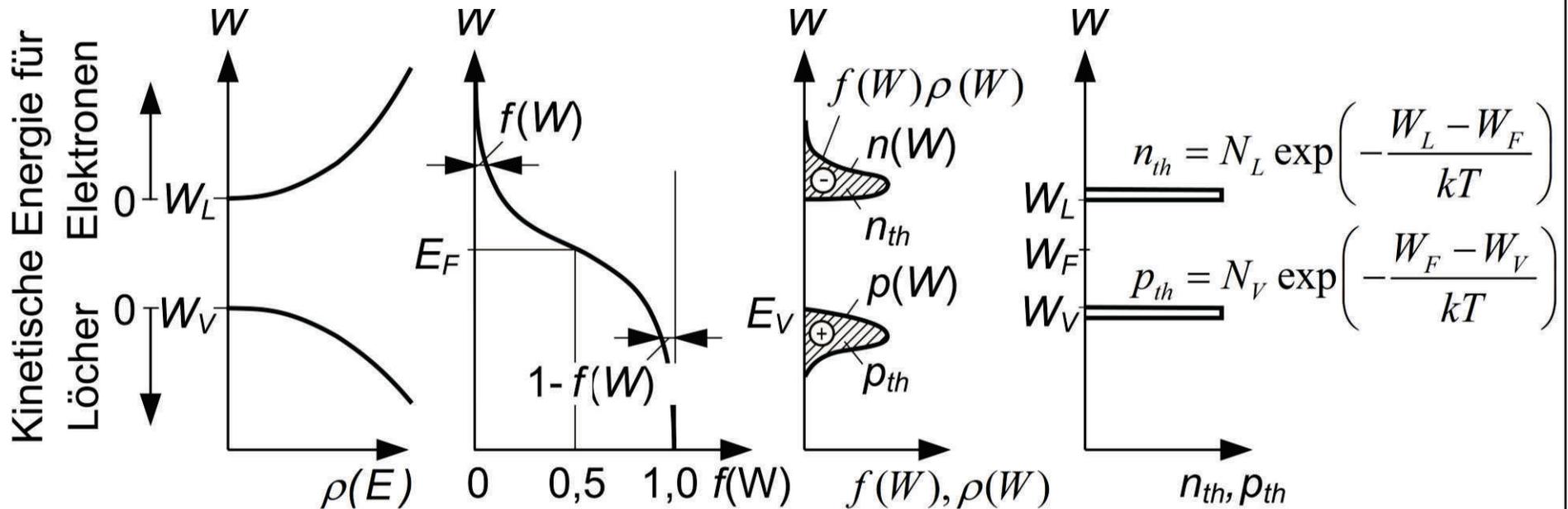
# Ladungsträgerkonzentration im intrinsischen Halbleiter

Die **Ladungsträgerkonzentration** erhält man aus der Gesamtzahl der besetzten Zustände:

$$n_{th} = \int_{W_L}^{\infty} f(W) \rho_n(W) dW \approx N_L e^{-\frac{W_L - W_F}{kT}} \quad \text{wobei} \quad N_L = 2 \left( \frac{2\pi m_n kT}{h^2} \right)^{3/2}$$

$$p_{th} = \int_{-\infty}^{W_V} (1 - f(W)) \rho_p(E) dW \approx N_V e^{-\frac{W_F - W_V}{kT}} \quad \text{wobei} \quad N_V = 2 \left( \frac{2\pi m_p kT}{h^2} \right)^{3/2}$$

Äquivalente Zustandsdichten



# Massenwirkungsgesetz

Im Halbleiter herrscht ein **dynamisches Gleichgewicht** zwischen der (temperaturabhängigen) Erzeugung von Elektron-Loch-Paaren durch „Aufreißen“ von kovalenten Bindungen und der Rekombination. Dieses lässt sich beschreiben durch

$$np = n_i^2(T) = N_L N_V \exp\left(-\frac{W_G}{kT}\right)$$

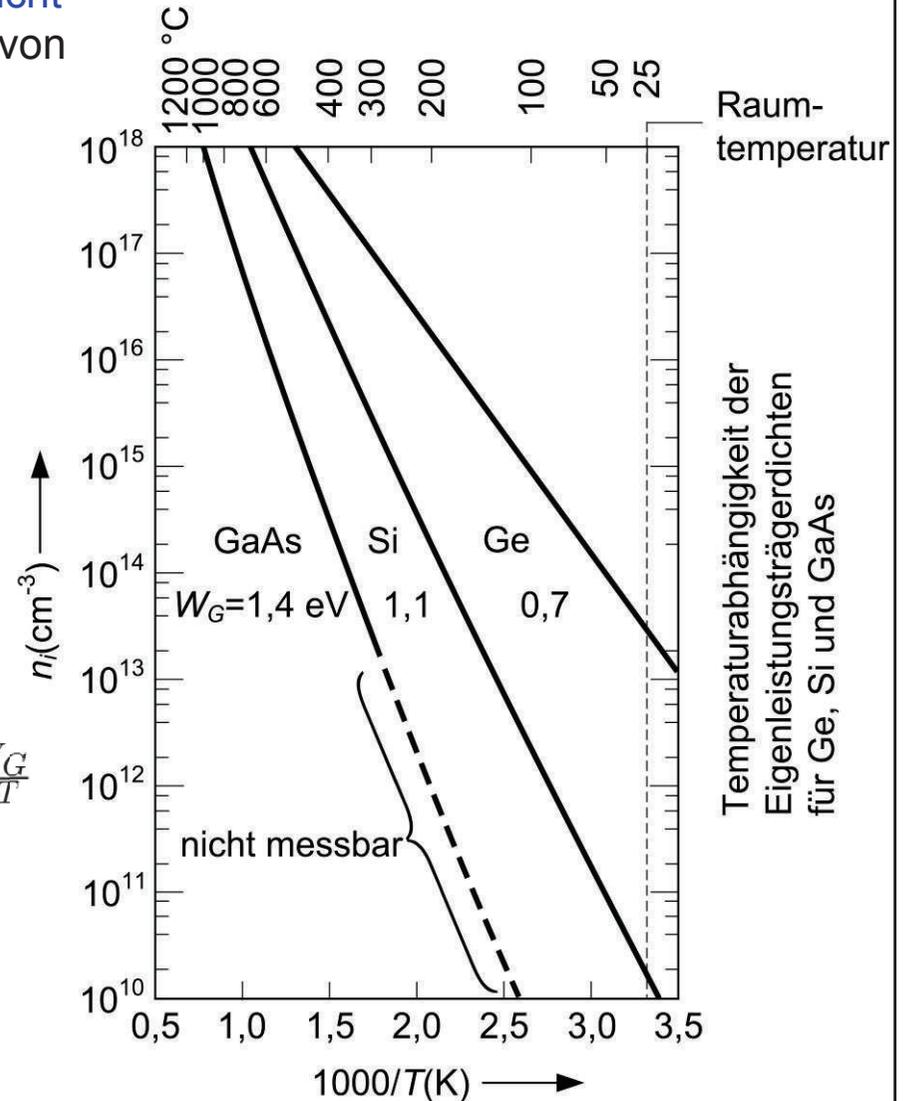
$n_i(T)$  ist eine durch das Material gegebene Konstante, die als **intrinsische Ladungsträgerdichte bzw. Eigenleitungsträgerdichte** bezeichnet wird.

Im intrinsischen (undotierten) Halbleiter gilt für die **thermisch erzeugten Elektronen- und Löcherdichten**  $p_{th}$  und  $n_{th}$ :

$$n_{th} = p_{th} = n_i(T); \quad n_i^2(T) = N_L N_V e^{-\frac{W_G}{kT}}$$

Bei Raumtemperatur (293 K):

Ge	$n_i = 2,4 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$
Si	$n_i = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$
InP	$n_i = 1,2 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-3}$
GaAs	$n_i = 1,8 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-3}$



# Lage des Fermi-Niveaus im intrinsischen Halbleiter

Aus der Forderung nach **Ladungsneutralität** ( $n = p = n_i$ ) ergibt sich die Lage des Fermi-Niveaus im intrinsischen Halbleiter:

$$W_F = \frac{1}{2}(W_V + W_L) + kT \ln \sqrt{\frac{N_V}{N_L}} = \frac{1}{2}(W_V + W_L) + \frac{3}{4}kT \ln \left( \frac{m_p}{m_n} \right)$$

- Bei  $T = 0 \text{ K}$  liegt das Fermi-Niveau **in der Mitte der Bandlücke**.
- Für **hohe Temperaturen** nähert sich das Fermi-Niveau dem Band mit der **kleineren Zustandsdichte bzw. der kleinere effektiven Masse**, da dieses schneller gefüllt werden muss.

# Dotierte Halbleiter

**Das Periodensystem der Elemente**

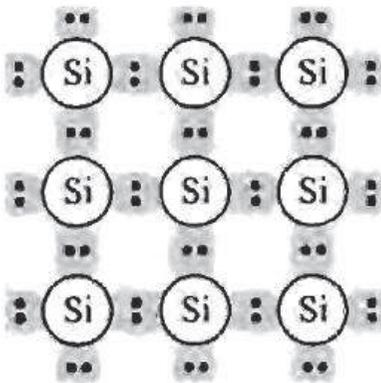
Perioden 1 2 3 4 5 6 7	Hauptgruppen										Hauptgruppen									
	I										VIII									
	II										II									
	III										III									
	IV										IV									
	V										V									
	VI										VI									
VII										VII										
VIII										VIII										
IX										IX										
X										X										
XI										XI										
XII										XII										
XIII										XIII										
XIV										XIV										
XV										XV										
XVI										XVI										
XVII										XVII										
XVIII										XVIII										
XIX										XIX										
XX										XX										
XXI										XXI										
XXII										XXII										
XXIII										XXIII										
XXIV										XXIV										
XXV										XXV										
XXVI										XXVI										
XXVII										XXVII										
XXVIII										XXVIII										
XXIX										XXIX										
XXX										XXX										
XXXI										XXXI										
XXXII										XXXII										
XXXIII										XXXIII										
XXXIV										XXXIV										
XXXV										XXXV										
XXXVI										XXXVI										
XXXVII										XXXVII										
XXXVIII										XXXVIII										
XXXIX										XXXIX										
XL										XL										
XLI										XLI										
XLII										XLII										
XLIII										XLIII										
XLIV										XLIV										
XLV										XLV										
XLVI										XLVI										
XLVII										XLVII										
XLVIII										XLVIII										
XLIX										XLIX										
L										L										
LI										LI										
LII										LII										
LIII										LIII										
LIV										LIV										
LV										LV										
LVI										LVI										
LVII										LVII										
LVIII										LVIII										
LVIX										LVIX										
LX										LX										
LXI										LXI										
LXII										LXII										
LXIII										LXIII										
LXIV										LXIV										
LXV										LXV										
LXVI										LXVI										
LXVII										LXVII										
LXVIII										LXVIII										
LXIX										LXIX										
LXX										LXX										
LXXI										LXXI										
LXXII										LXXII										
LXXIII										LXXIII										
LXXIV										LXXIV										
LXXV										LXXV										
LXXVI										LXXVI										
LXXVII										LXXVII										
LXXVIII										LXXVIII										
LXXIX										LXXIX										
LXXX										LXXX										
LXXXI										LXXXI										
LXXXII										LXXXII										
LXXXIII										LXXXIII										
LXXXIV										LXXXIV										
LXXXV										LXXXV										
LXXXVI										LXXXVI										
LXXXVII										LXXXVII										
LXXXVIII										LXXXVIII										
LXXXIX										LXXXIX										
LXXXX										LXXXX										
LXXXXI										LXXXXI										
LXXXXII										LXXXXII										
LXXXXIII										LXXXXIII										
LXXXXIV										LXXXXIV										
LXXXXV										LXXXXV										
LXXXXVI										LXXXXVI										
LXXXXVII										LXXXXVII										
LXXXXVIII										LXXXXVIII										
LXXXXIX										LXXXXIX										
LXXXXX										LXXXXX										

Variation der Ladungsträgerdichten durch **gezielte** Hinzugabe von Fremdatomen.

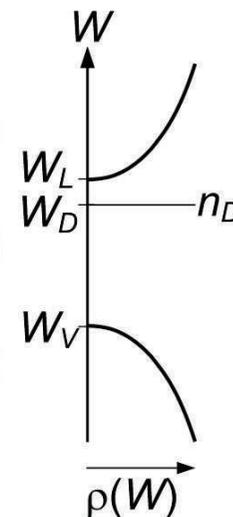
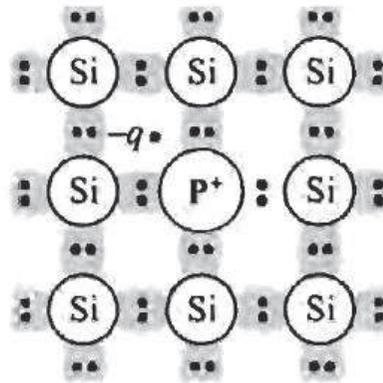
Beispiel: Silizium

- Donator-Dotierung (n-Dotierung) durch Elemente der V. Hauptgruppe (P, As,...)
- Akzeptor-Dotierung (p-Dotierung) durch Elemente der III. Hauptgruppe (B, Al, ...)

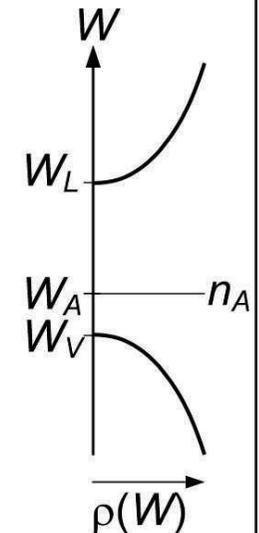
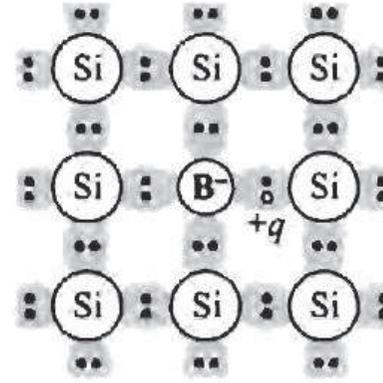
Intrinsisch:



n-Dotierung:

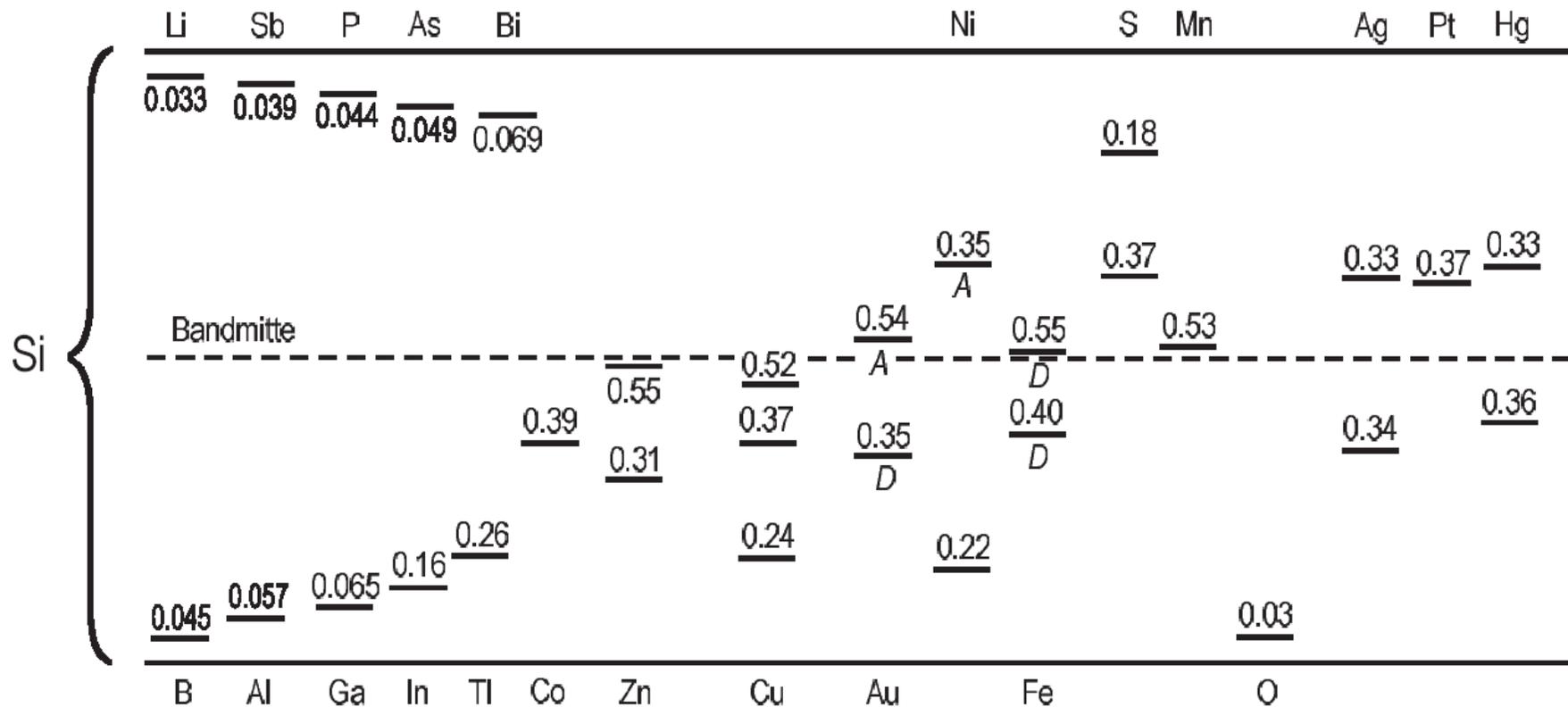


p-Dotierung:



Quelle: Sze, Physics of Semiconductor Devices

# Lage der Energieniveaus bei verschiedenen Dotanden

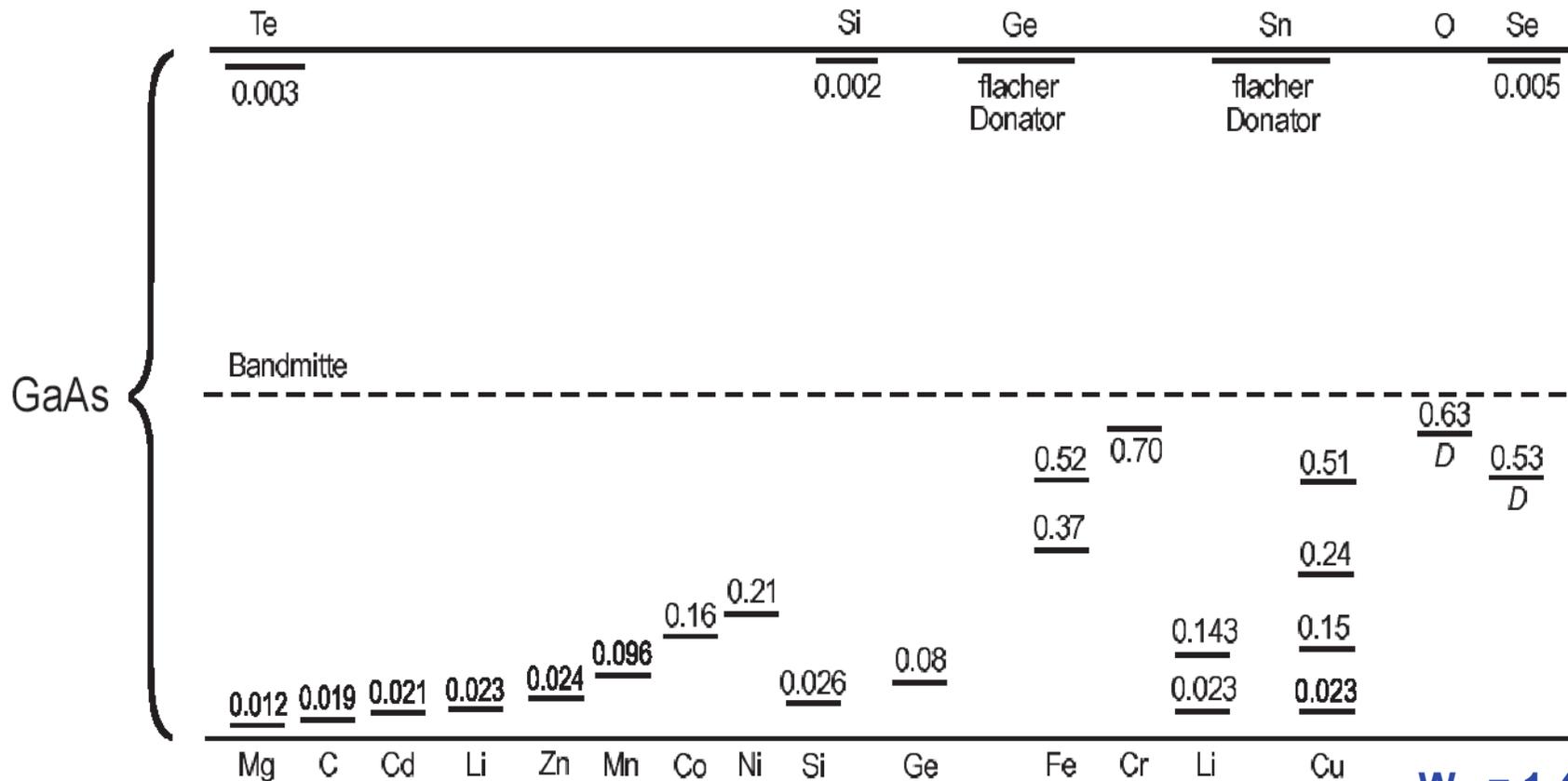


$W_G = 1.12 \text{ eV}$

Ionisierungsenergien in eV für verschiedene Dotanden in Si. Die Niveaus unter der Bandmitte sind von der oberen Bandkante des Valenzbandes gemessen und stellen Akzeptorniveaus dar, wenn nicht durch D (Donator) gekennzeichnet; die Niveaus über der Bandmitte sind von der unteren Bandkante des Leitungsbandes gemessen und stellen Donatorniveaus dar, wenn nicht durch A (Akzeptor) gekennzeichnet.



# Lage der Energieniveaus bei verschiedenen Dotanden



$W_G = 1.42 \text{ eV}$

Ionisierungsenergien in eV für verschiedene Dotanden in GaAs. Die Niveaus unter der Bandmitte sind von der oberen Bandkante des Valenzbandes gemessen und stellen Akzeptorniveaus dar, wenn nicht durch D (Donator) gekennzeichnet; die Niveaus über der Bandmitte sind von der unteren Bandkante des Leitungsbandes gemessen und stellen Donatorniveaus dar, wenn nicht durch A (Akzeptor) gekennzeichnet.

## Amphotere Dotierungen:

- In Verbindungshalbleitern können Fremdatome auf verschiedenen Gitterplätzen eingebaut werden und dort als Donator oder Akzeptor fungieren. Solche Störstellen nennt man **amphoter**.

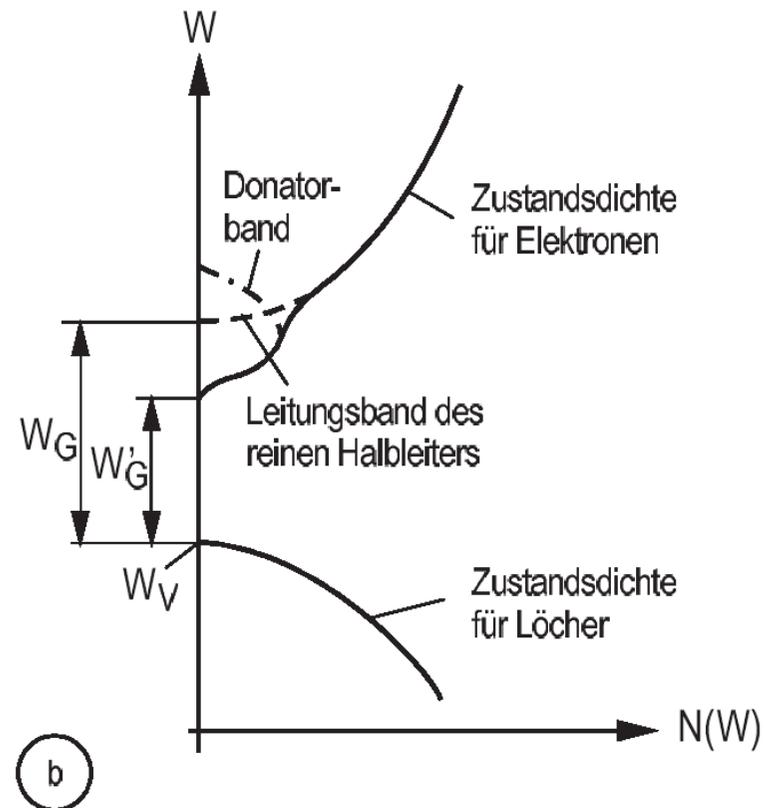
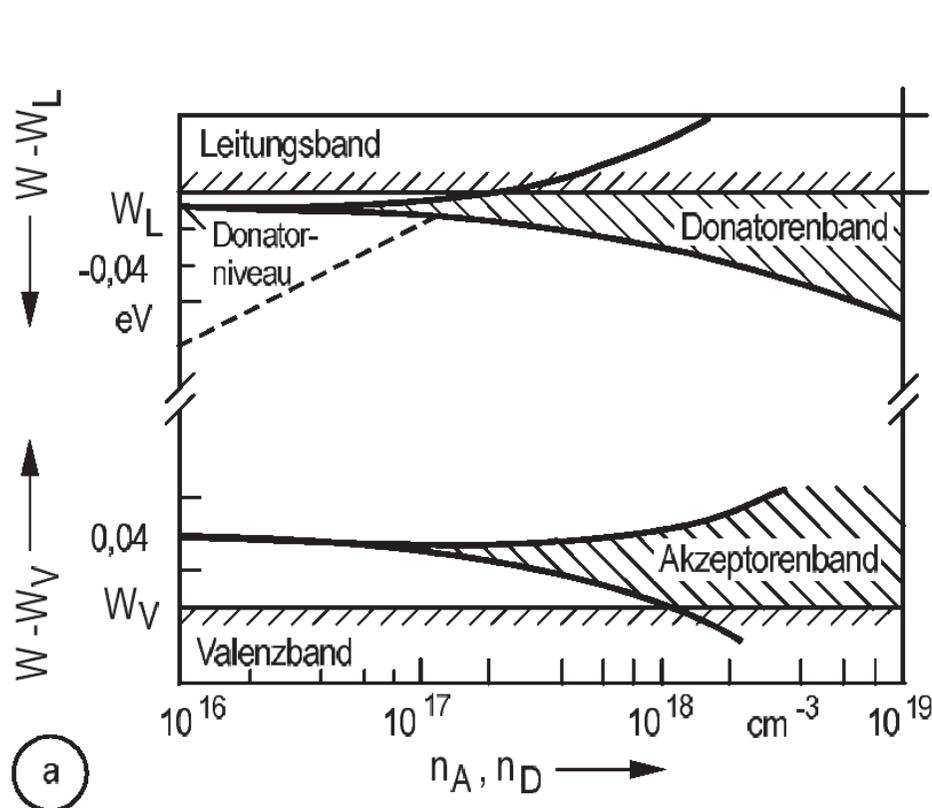
**Beispiel:** Elemente der IV-Gruppe (z.B. Si) können in einem III-V-Halbleiter als Donator (auf einem Ga-Platz) oder als Akzeptor (auf einem As-Platz) eingebaut werden.

## Leitfähigkeitsdotierung:

- Abstand der Energieniveaus von der Bandkante liegt in der Größenordnung von  $W_L - W_D \approx kT$

## Semi-isolierende Dotierung / Lebensdauerdotierung:

- Energieniveaus der Störstellen liegen in der Mitte der Bandlücke und fungieren als Rekombinationszentren für Elektron-Loch-Paare anstatt durch Abgabe von Elektronen / Löchern zur Trägerkonzentration beizutragen
- **Beispiel: Semiisolierendes GaAs** mit sehr geringer Leitfähigkeit durch Dotierung von GaAs mit Cr (z.B. für HF-Bauteile)



- Bei sehr hoher Dotierung kommt es durch die Wechselwirkung der Störstellen zu einem **Aufspalten des Störstellenniveaus** und zu einer **Überlappung mit dem Leitungs- bzw. Valenzband**.
  - Außerdem rückt das Fermi-Niveau sehr nahe an die Bandkante heran bzw. dringt in das Band ein.
- ⇒ Halbleiter zeigt **metallähnliches Verhalten** (entarteter Halbleiter).

Bei der Berechnung der Besetzungswahrscheinlichkeiten muss die zweifache **Spin-Entartung des besetzten Donator- bzw. des unbesetzten Akzeptorzustandes** berücksichtigt werden:

$$\Rightarrow f_D(W_D) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{\frac{W_D - W_F}{kT}}}$$

$$f_A(W_A) = \frac{1}{1 + 2e^{\frac{W_A - W_F}{kT}}}$$

$$\left. \vphantom{\begin{matrix} f_D(W_D) \\ f_A(W_A) \end{matrix}} \right\} f_{B,D,A}(W) = \frac{1}{1 + \frac{1}{g}e^{\frac{W - W_F}{kT}}}$$

wobei  $g = \begin{cases} 1 & \text{Bandzustände (B)} \\ 2 & \text{Donatoren (D)} \\ \frac{1}{2} & \text{Akzeptoren (A)} \end{cases}$

⇒ Konzentration der **ionisierten Donator- bzw. Akzeptor-Atome**:

$$n_D^+ = n_D [1 - f_D(W_D)] = \frac{n_D}{1 + 2 \exp\left(\frac{W_F - W_D}{kT}\right)},$$

$$n_A^- = n_A f_A(W_A) = \frac{n_A}{1 + 2 \exp\left(\frac{W_A - W_F}{kT}\right)}.$$

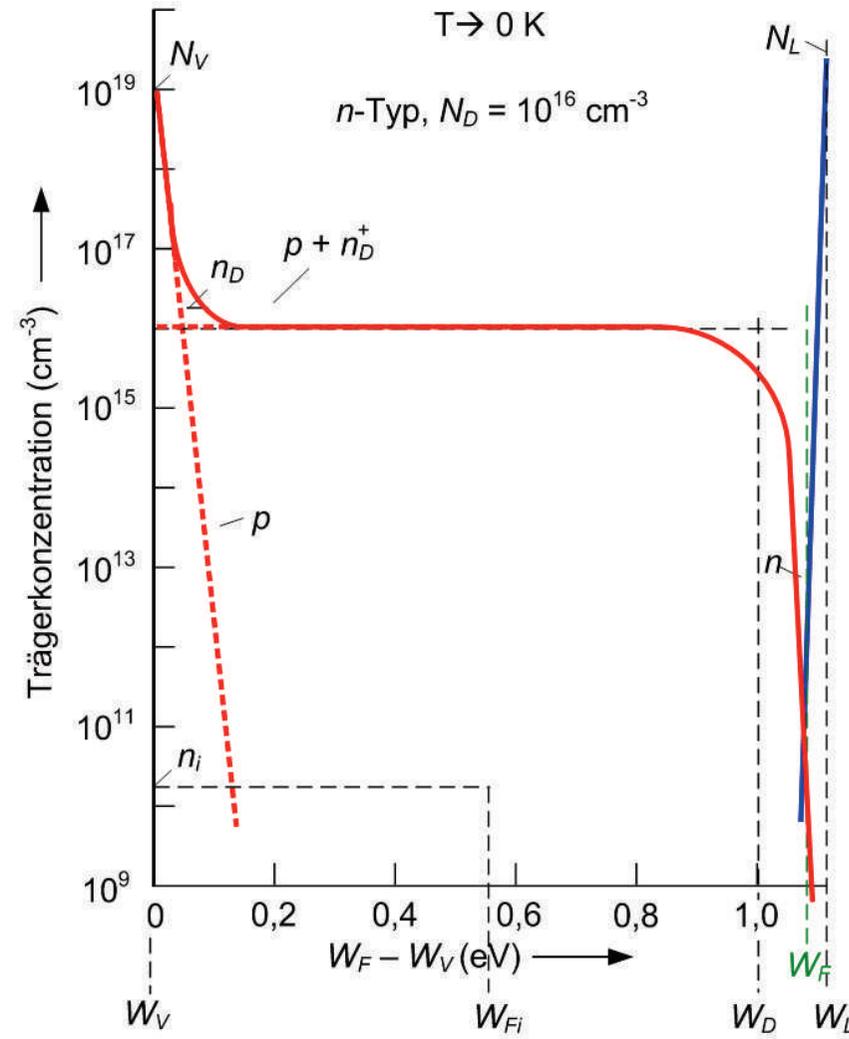
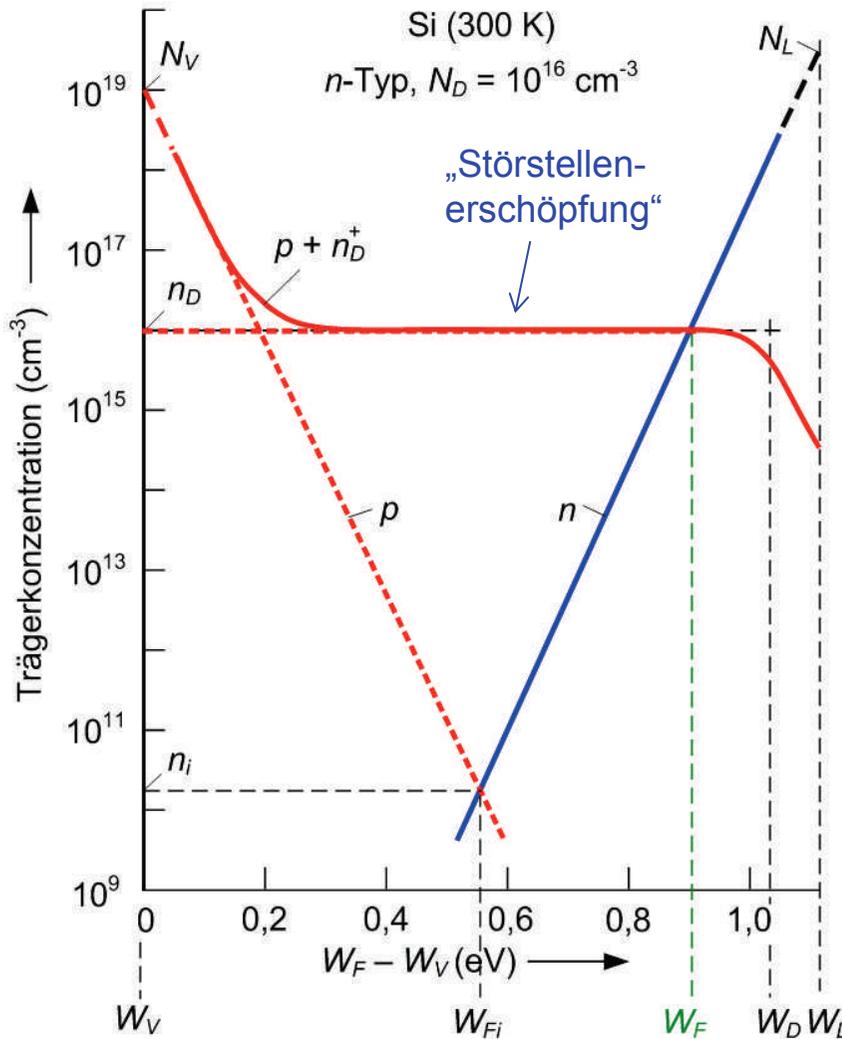
Implizite Bestimmungsgleichung für die Berechnung des Fermi-Niveaus aus der Bedingung der Ladungsneutralität:

$$n + n_A^- = p + n_D^+$$

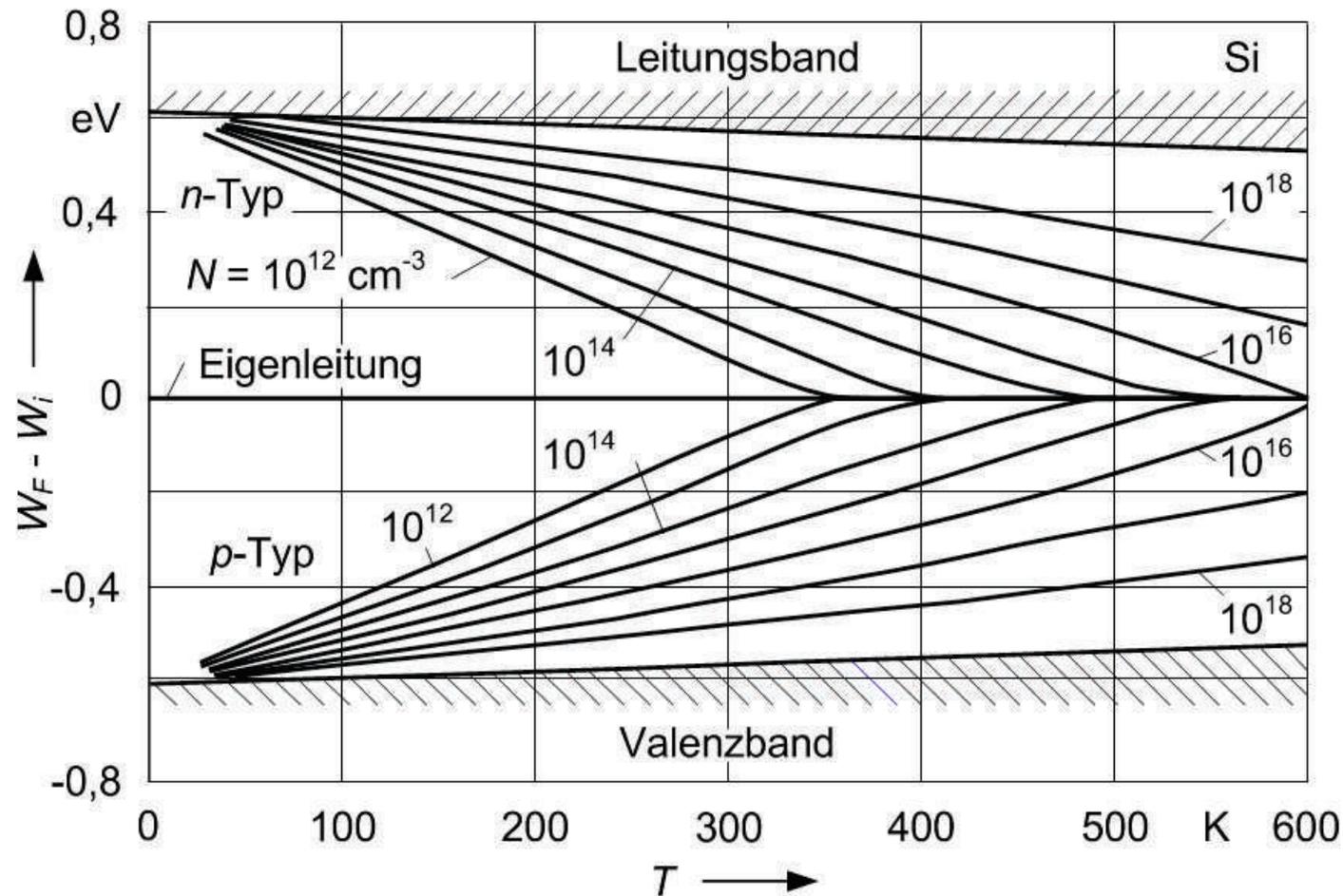
$$\begin{aligned} \Rightarrow & N_L \exp\left(-\frac{W_L - W_F}{kT}\right) + \frac{n_A}{1 + 2 \exp\left(\frac{W_A - W_F}{kT}\right)} \\ & = N_V \exp\left(-\frac{W_F - W_V}{kT}\right) + \frac{n_D}{1 + 2 \exp\left(\frac{W_F - W_D}{kT}\right)} \end{aligned}$$

# Graphische Lösung für den $n$ -Halbleiter

$$N_L \exp\left(-\frac{E_L - E_F}{kT}\right) = N_V \exp\left(-\frac{W_F - W_V}{kT}\right) + \frac{n_D}{1 + 2 \exp\left(\frac{W_F - W_D}{kT}\right)}$$

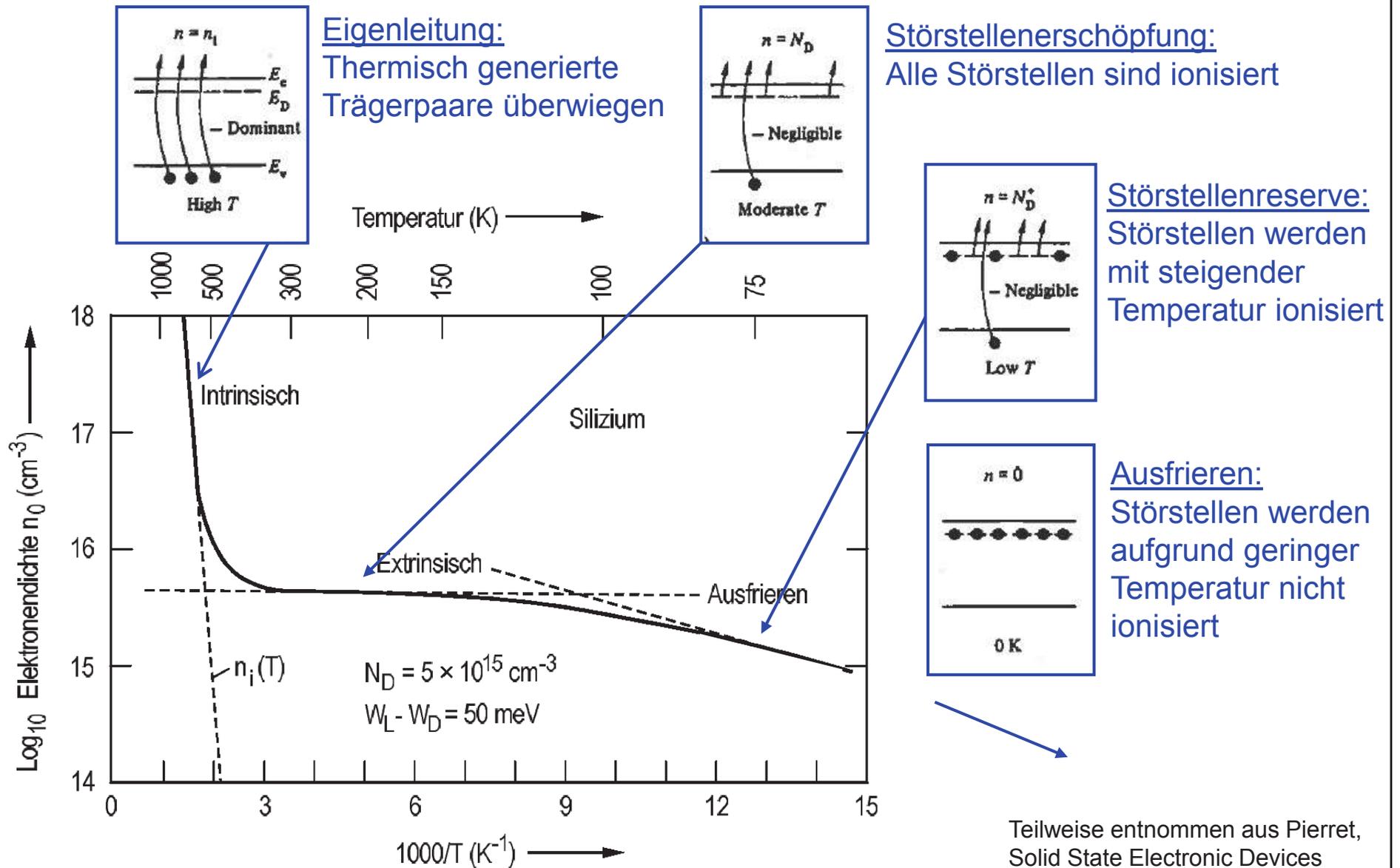


# Lage des Fermi-Niveaus im dotierten Halbleiter



- Mit steigender **Dotierung** (flache Störstellen): Fermi-Niveau wird zu Bandkante gezogen
- Mit steigender **Temperatur**: Fermi-Niveau bewegt sich zur Mitte der Bandlücke (Eigenleitung)
- **Bandlücke** nimmt mit steigender Temperatur ab

# Majoritätsträgerdichte im $n$ -Halbleiter



Teilweise entnommen aus Pierret, Solid State Electronic Devices

- Störstellenerschöpfung:  $n_D^+ = n_D$ ,  $n_A^- = n_A$

⇒ Majoritätsträgerdichten sind unabhängig von der Temperatur:

$$\left. \begin{aligned} n + n_A &= p + n_D \\ np &= n_i^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} n &= \sqrt{\left(\frac{n_D - n_A}{2}\right)^2 + n_i^2} + \frac{n_D - n_A}{2}, \\ p &= \sqrt{\left(\frac{n_D - n_A}{2}\right)^2 + n_i^2} - \frac{n_D - n_A}{2} \end{aligned}$$

- Starke Dotierung:  $|n_D - n_A| \gg n_i$

*n* – Halbleiter:

$$\left. \begin{aligned} n_n + n_A &= n_D \\ n_n p_n &= n_i^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} n_n &= n_D - n_A \\ p_n &= \frac{n_i^2}{n_D - n_A} \end{aligned};$$

$$W_F = W_L - kT \ln \left( \frac{N_L}{n_D} \right)$$

*p* – Halbleiter:

$$\left. \begin{aligned} n_A &= n_D + p_p \\ n_p p_p &= n_i^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} p_p &= n_A - n_D \\ n_p &= \frac{n_i^2}{n_A - n_D} \end{aligned};$$

$$W_F = W_V + kT \ln \left( \frac{N_V}{n_A} \right)$$

# Vorlesung 4

04.11.2013

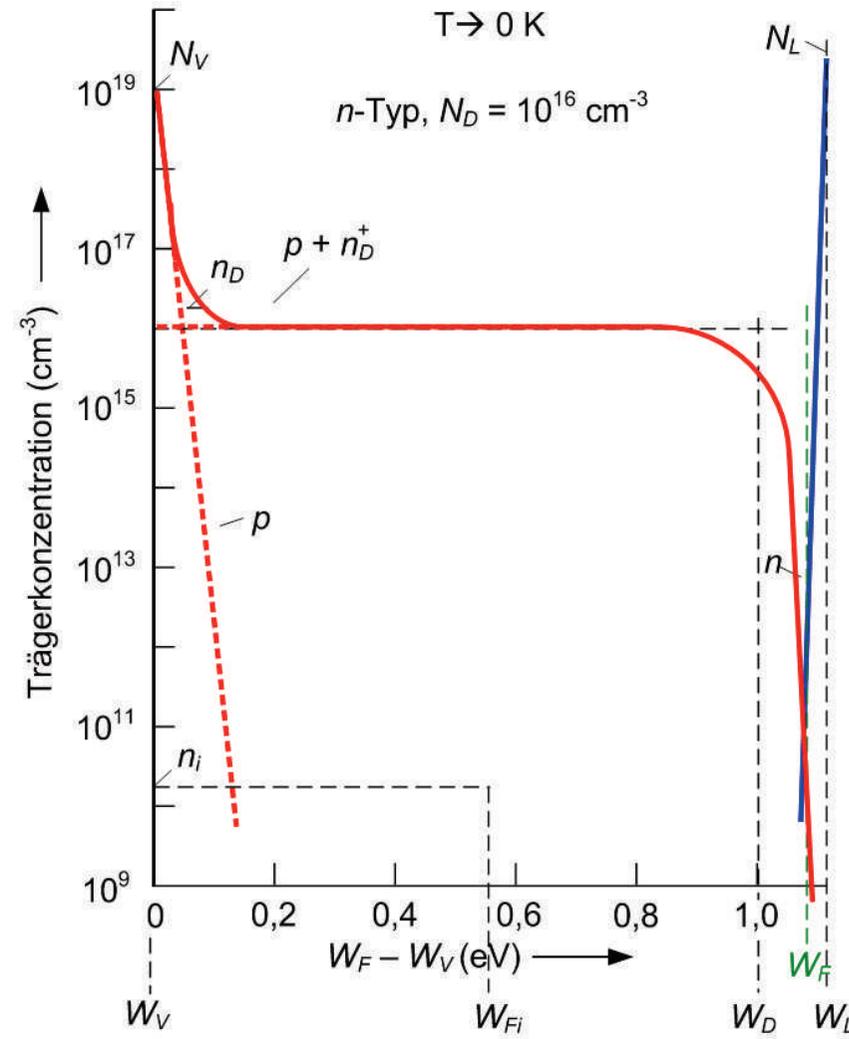
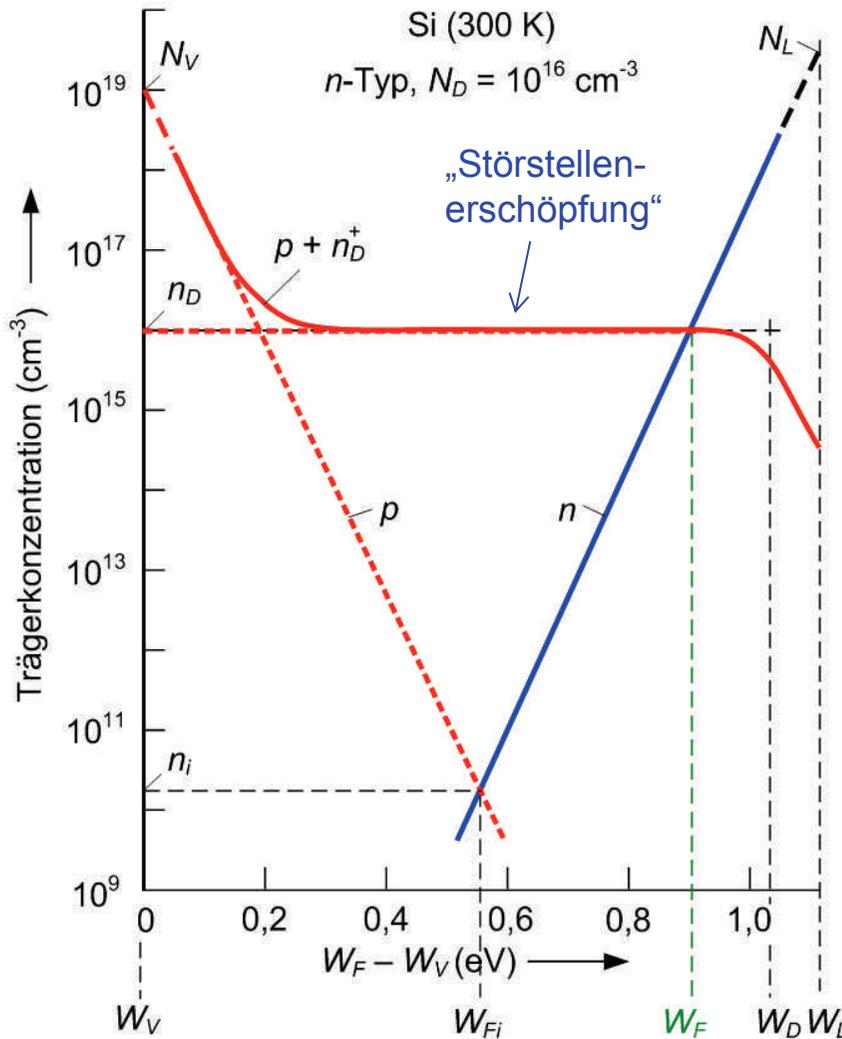
Implizite Bestimmungsgleichung für die Berechnung des Fermi-Niveaus aus der Bedingung der Ladungsneutralität:

$$n + n_A^- = p + n_D^+$$

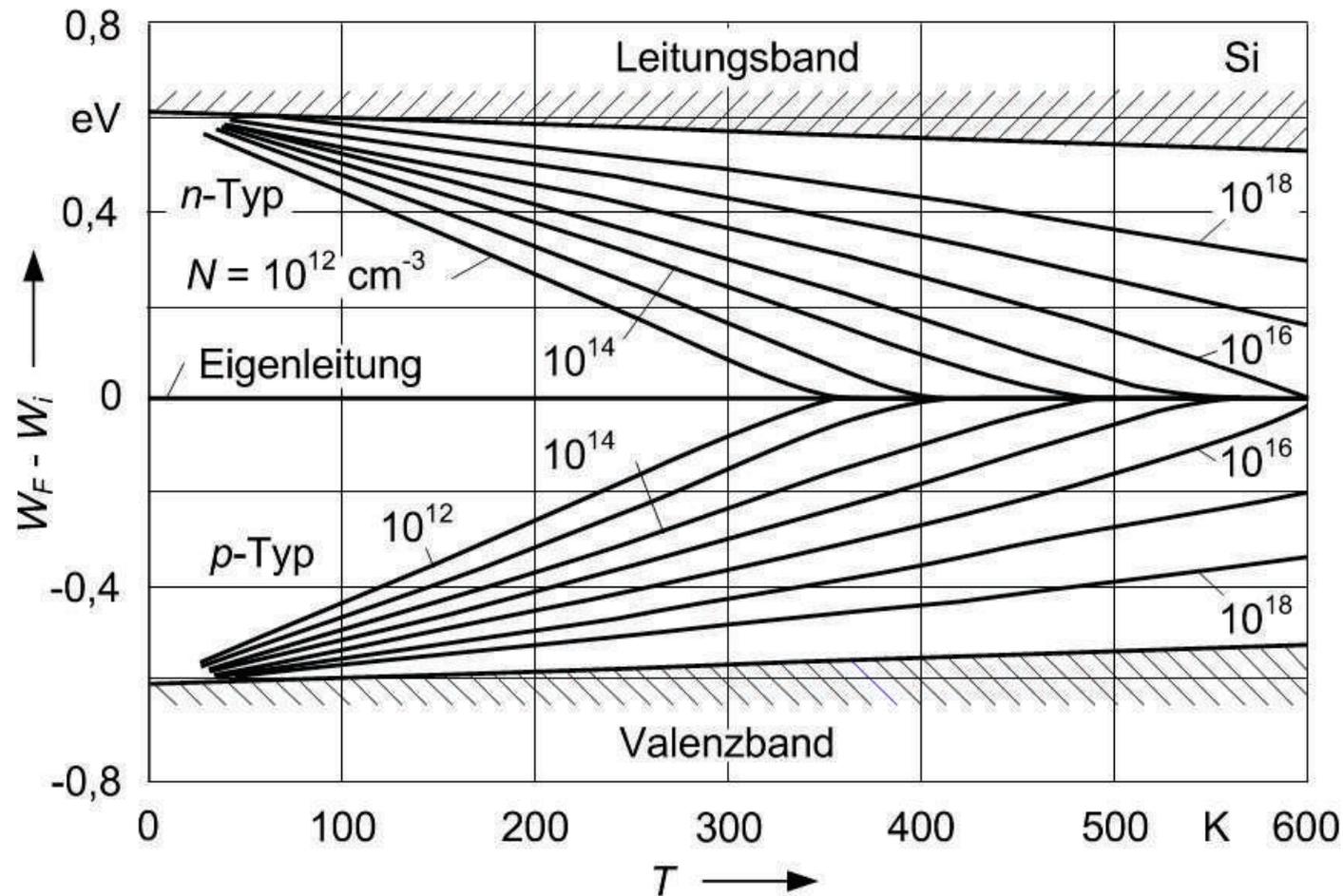
$$\begin{aligned} \Rightarrow & N_L \exp\left(-\frac{W_L - W_F}{kT}\right) + \frac{n_A}{1 + 2 \exp\left(\frac{W_A - W_F}{kT}\right)} \\ & = N_V \exp\left(-\frac{W_F - W_V}{kT}\right) + \frac{n_D}{1 + 2 \exp\left(\frac{W_F - W_D}{kT}\right)} \end{aligned}$$

# Graphische Lösung für den $n$ -Halbleiter

$$N_L \exp\left(-\frac{E_L - E_F}{kT}\right) = N_V \exp\left(-\frac{W_F - W_V}{kT}\right) + \frac{n_D}{1 + 2 \exp\left(\frac{W_F - W_D}{kT}\right)}$$

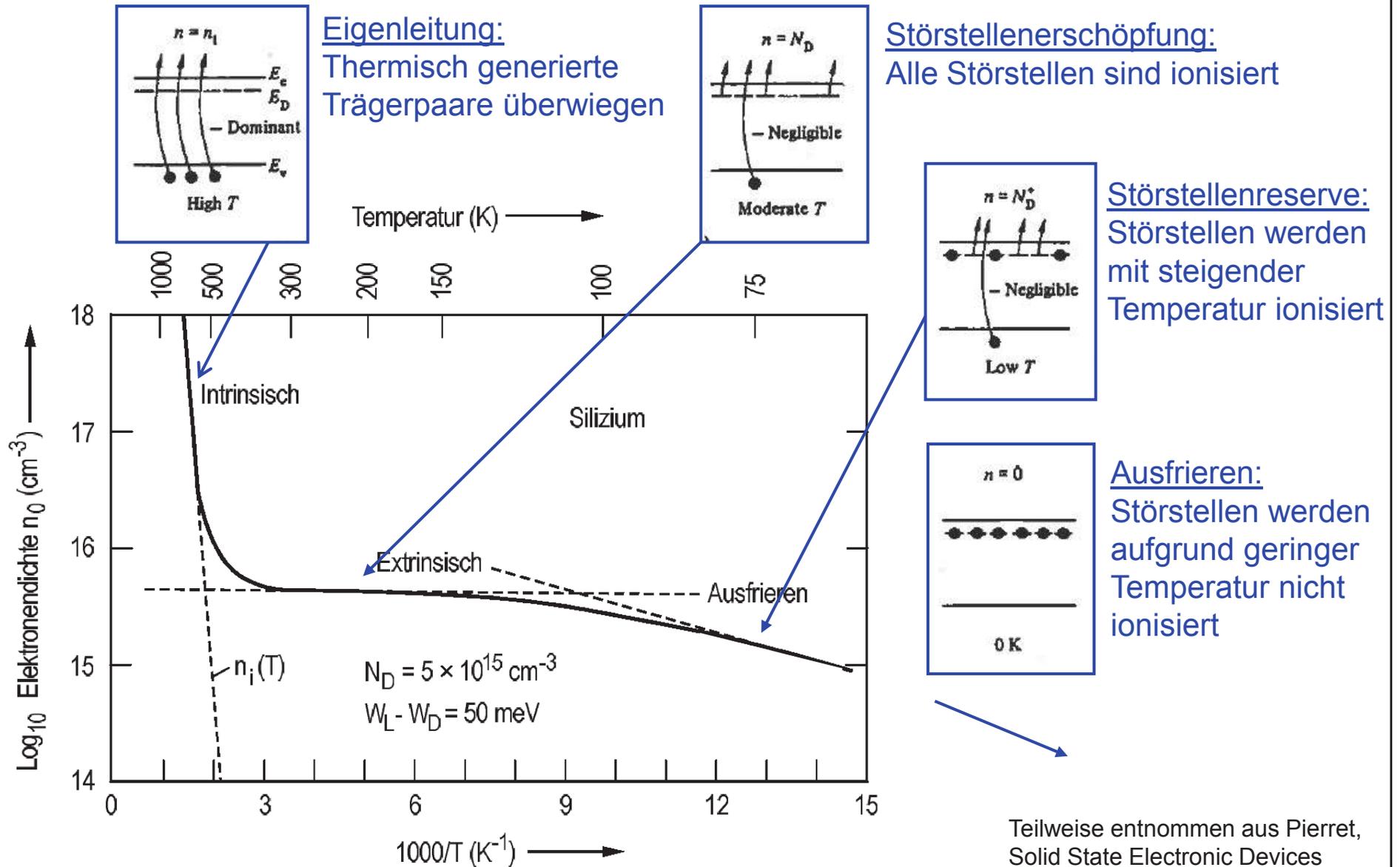


# Lage des Fermi-Niveaus im dotierten Halbleiter

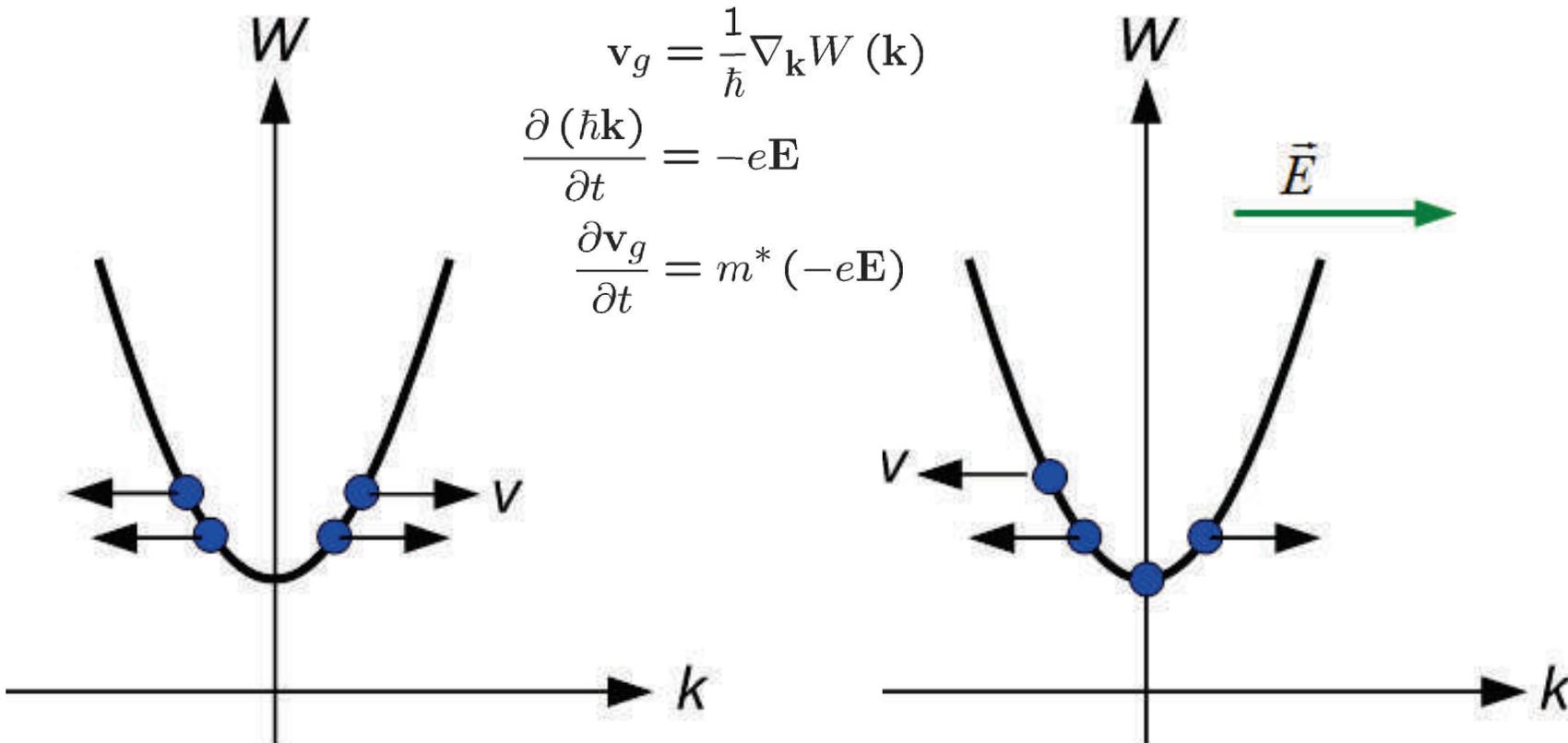


- Mit steigender **Dotierung** (flache Störstellen): Fermi-Niveau wird zu Bandkante gezogen
- Mit steigender **Temperatur**: Fermi-Niveau bewegt sich zur Mitte der Bandlücke (Eigenleitung)
- **Bandlücke** nimmt mit steigender Temperatur ab

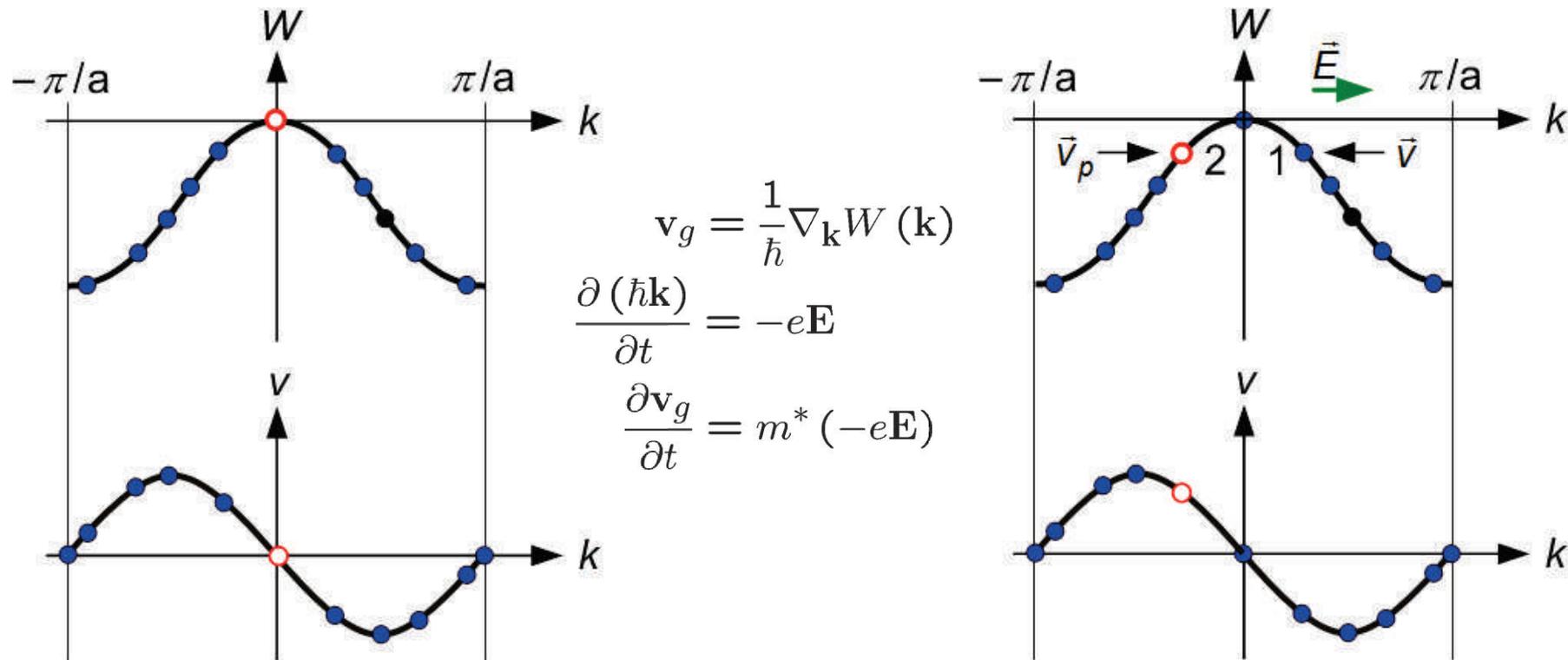
# Majoritätsträgerdichte im $n$ -Halbleiter



Teilweise entnommen aus Pierret, Solid State Electronic Devices



- **Ohne äußeres Feld** heben sich die Bewegungen der Elektronen gegenseitig auf; der Driftstrom verschwindet.
- **Unter Einwirkung eines äußerem Feldes** ergibt sich eine asymmetrische Impulsverteilung, die zu einem Netto-Stromfluss in Richtung des angelegten Feldes führt



- Unter dem Einfluss eines äußeren elektrischen Feldes verschieben sich die Elektronen im W-k-Diagramm nach links.
- In der Gesamtbilanz bleiben nur diejenigen Elektronen (1) übrig, deren Bewegung nicht durch ein in entgegengesetzter Richtung propagierendes Elektron (2) kompensiert wird
- Diese Elektronen weisen eine negative effektive Masse auf; **der Strombeitrag dieser Elektronen lassen sich durch Löcher mit positiver Ladung und positiver effektiver Masse modellieren**

# Driftstrom und Beweglichkeit

Driftstrom:

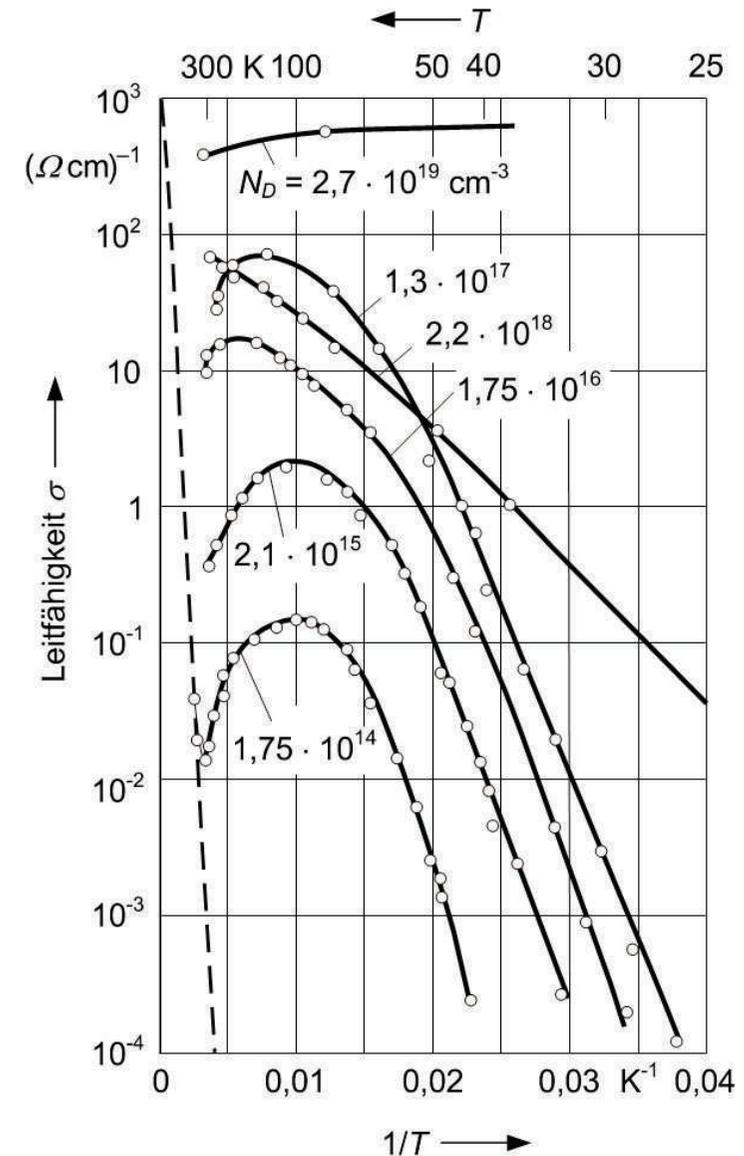
$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_F &= \mathbf{J}_{n,F} + \mathbf{J}_{p,F} \\
 &= -en\mathbf{v}_n + ep\mathbf{v}_p \\
 &= [en\mu_n + ep\mu_p] \mathbf{E} \\
 &= \sigma \mathbf{E}
 \end{aligned}$$

Leitfähigkeit:  $\sigma = en\mu_n + ep\mu_p$

Beweglichkeit für Elektronen und Löcher:

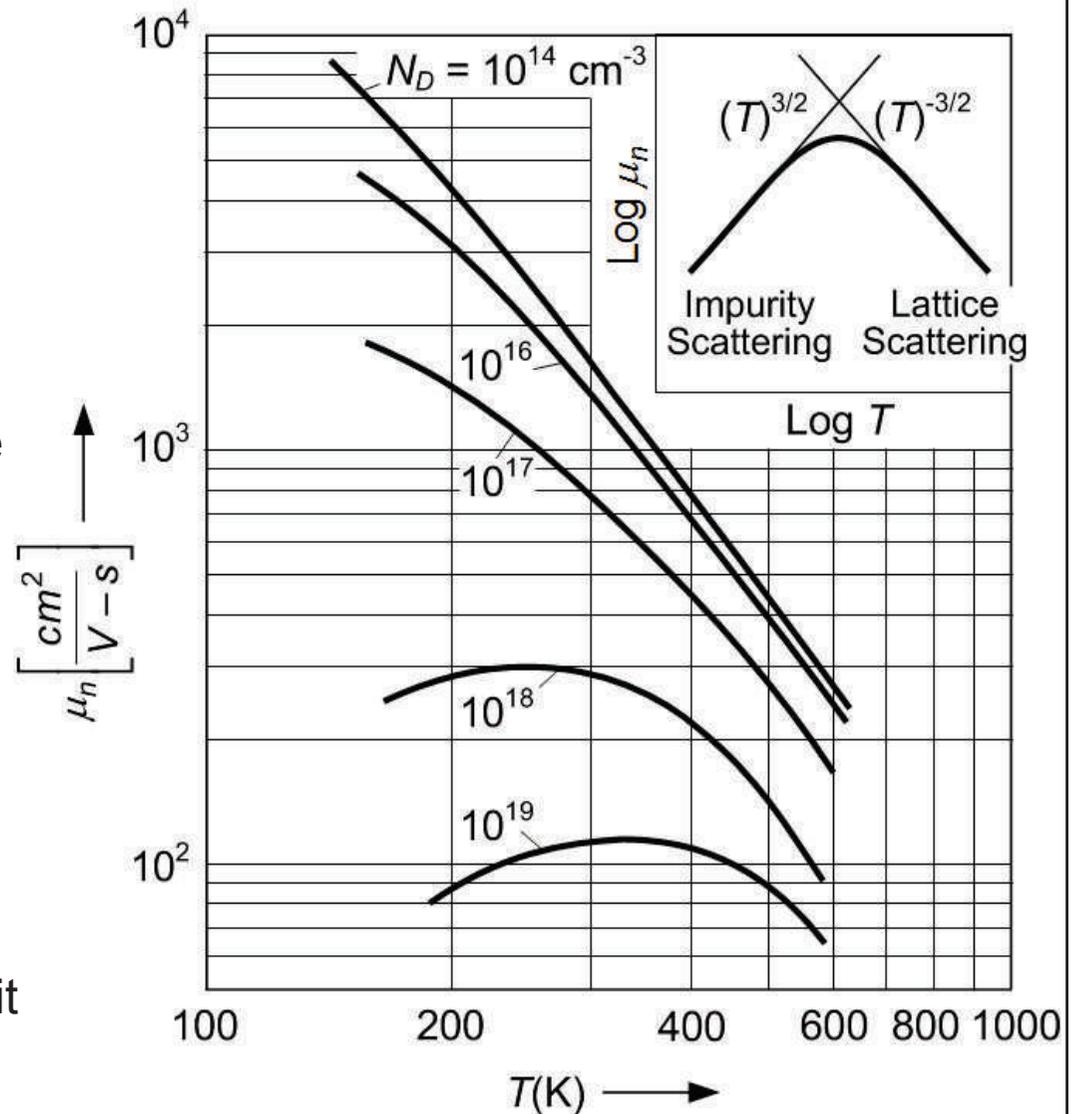
$$\mu_n = \frac{e\tau_{LB}}{m_n} \quad \mu_p = \frac{e\tau_{VB}}{m_p}$$

$\tau_{LB}, \tau_{VB}$  = Intradbandimpulsrelaxationszeit im LB bzw. CB, abhängig von Temperatur und Dotierung  
 $\neq$  Energierelaxationszeiten im LB bzw. VB

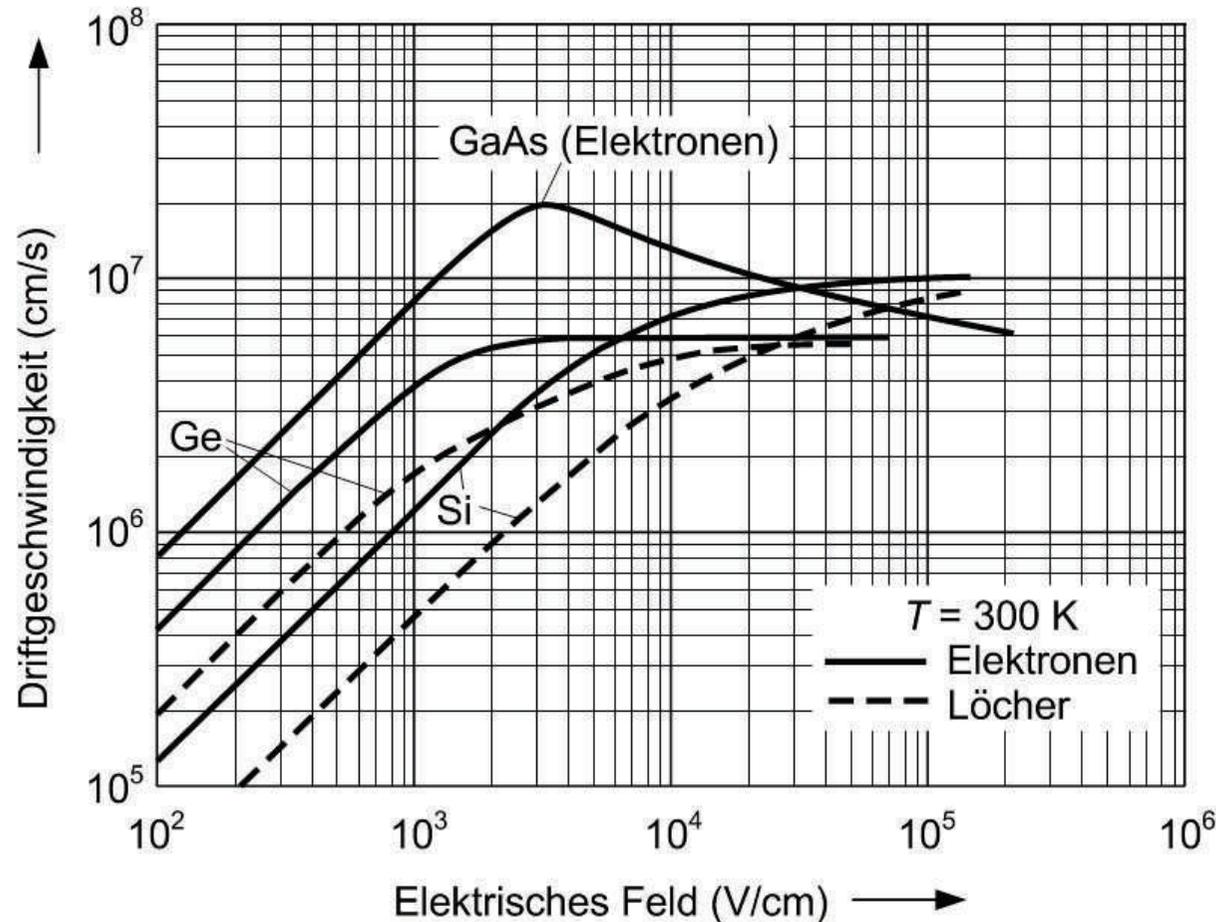


# Beweglichkeit im dotierten Halbleiter

- **Hohe Dotierungen** verringern die Beweglichkeit aufgrund von Wechselwirkungen mit Dotanden („Impurity Scattering“)
- **Bei tiefen Temperaturen** dominiert die Wechselwirkung mit ionisierten Donator- bzw. Akzeptoratomen; die entsprechende Querschnittsfläche nimmt mit der Bewegungsgeschwindigkeit der Elektronen (Temperatur) ab ( $\mu \propto T^{3/2}$ )
- **Hohe Temperatur** verringert die Beweglichkeit durch Wechselwirkungen mit Gitterschwingungen („Phonon Scattering“); dieser Effekt nimmt mit der Temperatur zu ( $\mu \propto T^{-3/2}$ )



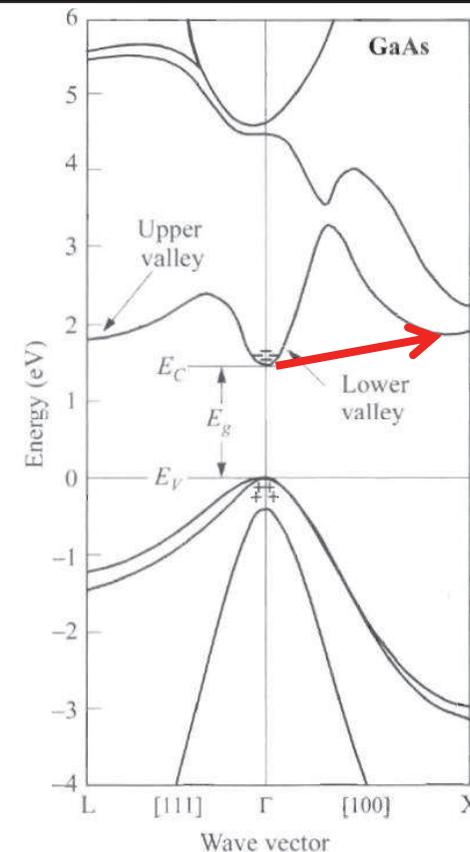
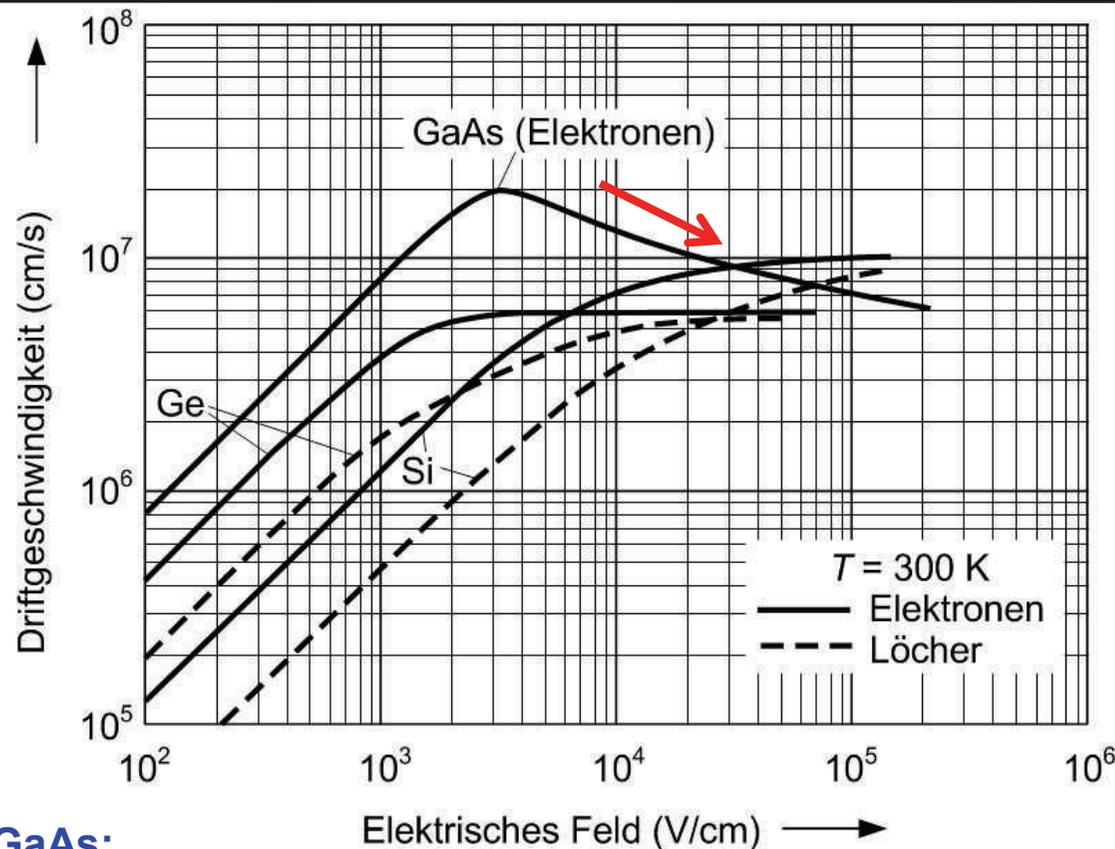
# Driftgeschwindigkeiten bei starken elektrischen Feldern



- **Hohe Feldstärken:** Wechselwirkung mit energiereichen longitudinal-optischen (LO) Phononen  
 ⇒ Driftgeschwindigkeiten nähern sich der Sättigungsdriftgeschwindigkeit  $v_s$  an:

$$v_{n,p} = \frac{v_s}{[1 + (E_0/E)^\gamma]^{1/\gamma}}$$

# Driftgeschwindigkeiten bei starken elektrischen Feldern

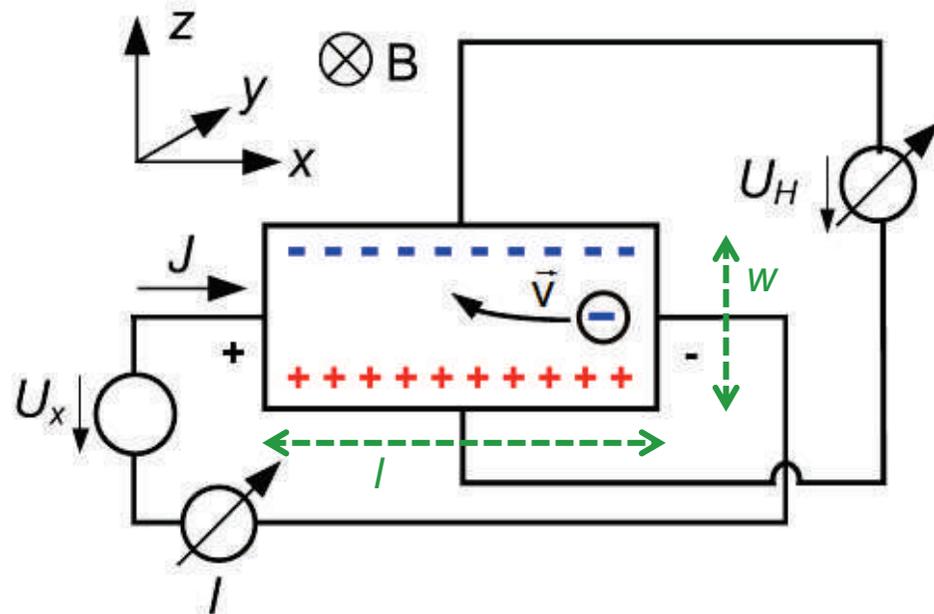


## GaAs:

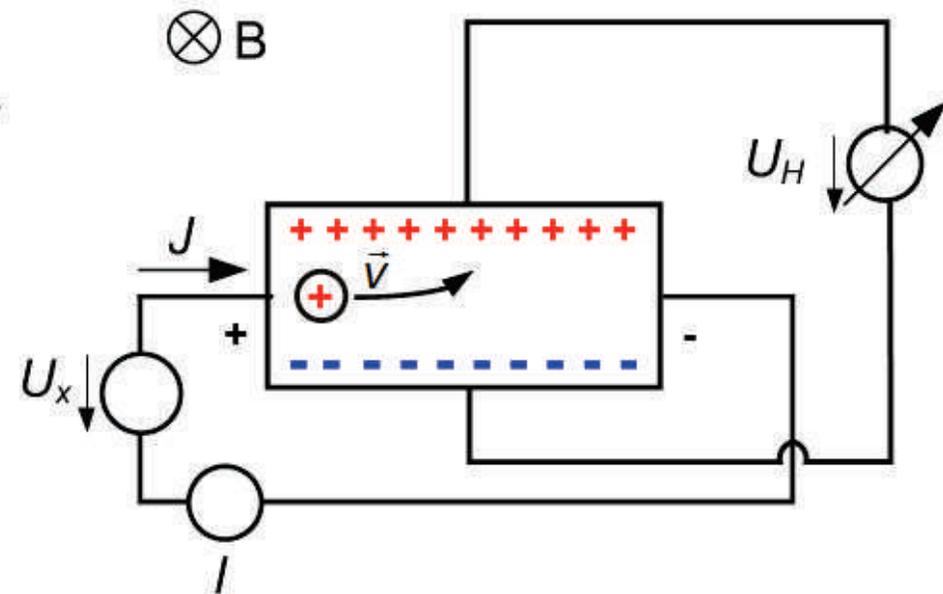
- Hohe Beweglichkeit, d.h. hohe Driftgeschwindigkeit
- ⇒ Vorteilhaft für Hochfrequenzbauteile: Kürzere Transitzeiten, höhere Schaltgeschwindigkeiten
- Negative differentielle Driftgeschwindigkeit durch Streuung von Elektronen in ein zweites Minimum des LB, das eine höhere effektive Masse aufweist.
- ⇒ Negativer differentieller Widerstand; kann für HF-Oszillatoren verwendet werden (Gunn-Diode)

$$m^* = \hbar^2 \left( \frac{\partial^2 W_n(k)}{\partial k^2} \Big|_{k=k_0} \right)^{-1}$$

*n*-Halbleiter



*p*-Halbleiter



Krafteinwirkung auf Elektronen bzw. Löcher:

$$\mathbf{F}_n = -e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_n \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{F}_p = e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_p \times \mathbf{B})$$

Driftbewegung und Stromdichten für Elektronen:

$$\mathbf{v}_n = \mu_n \frac{\mathbf{F}}{e} \quad \mathbf{J}_n = -en\mathbf{v}_n$$

Elektrisches Feld:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}_n}{en\mu_n} + \frac{\mathbf{J}_n}{en} \times \mathbf{B}$$

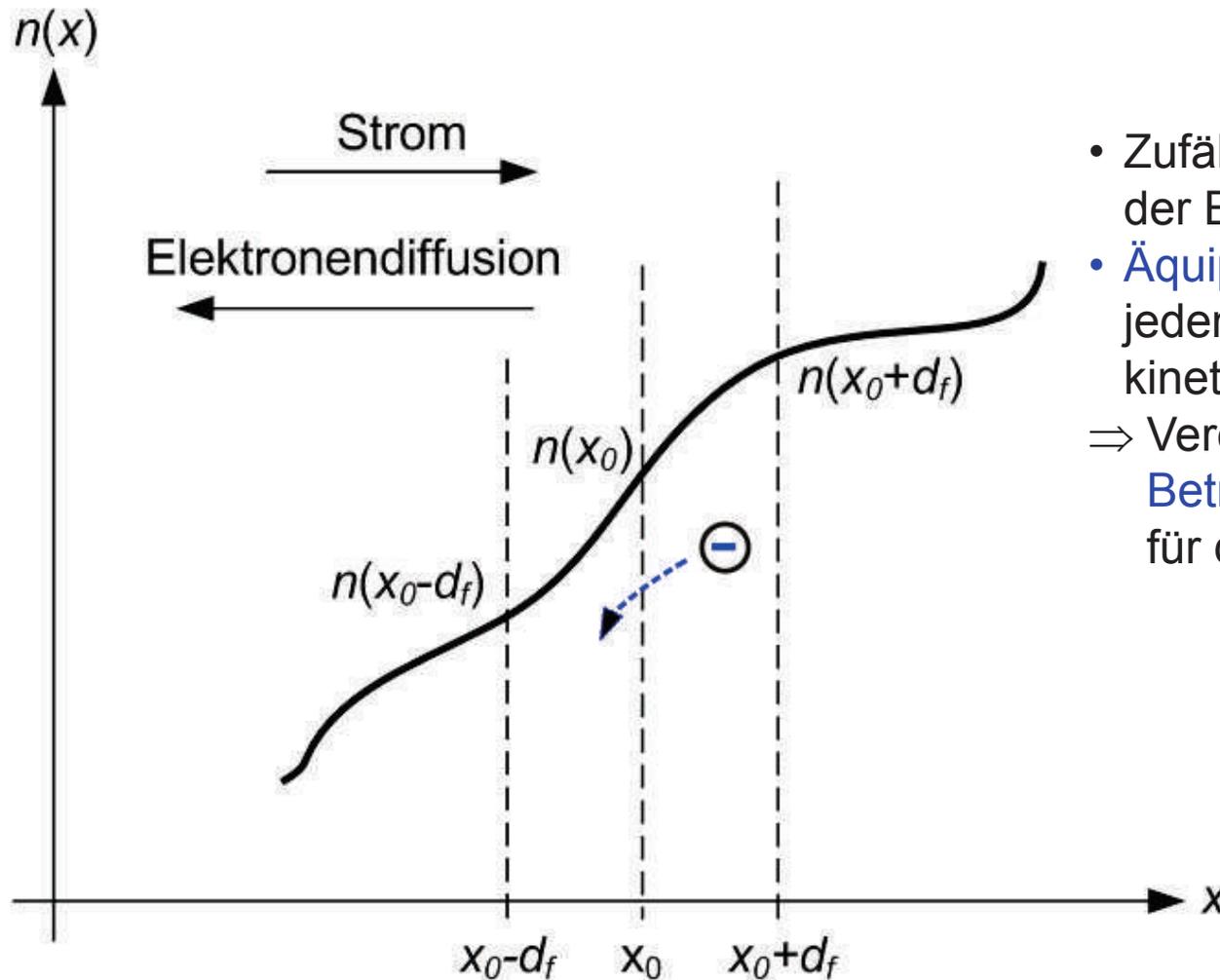
Im stationären Zustand:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_n &= J_z \mathbf{e}_z \\ \mathbf{B} &= -B \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} U_x &= E_x l = \frac{J_n l}{en\mu_n} \\ U_H &= -E_z w = -\frac{J_n B w}{en} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \mu_n = -\frac{U_H}{U_x} \frac{l}{B w}$$

Analoge Ableitung für p-HL:

$$\begin{aligned} U_x &= E_x l = \frac{J_p l}{ep\mu_p} \\ U_H &= -E_z w = \frac{J_p B w}{ep} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \mu_p = \frac{U_H}{U_x} \frac{l}{B w}$$

- Das Vorzeichen der Hall-Spannung gibt den Halbleiter-Typ an.
- Messung der Hall-Spannung erlaubt die getrennte Ermittlung der Ladungsträgerbeweglichkeit und der Ladungsträgerkonzentration.
- Hall-Sensoren werden zur Messung des magnetischen Feldes eingesetzt.



- Zufällige thermische Bewegung der Elektronen
  - Äquipartitionstheorem: Auf jeden Freiheitsgrad entfällt die kinetische Energie  $kT$
- ⇒ Vereinfachte **eindimensionale Betrachtung entlang  $x$** , wobei für die kinetische Energie gilt:

$$\frac{1}{2} m_n v_{th}^2 = kT$$

Betrachte **Netto-Flussdichte** der Elektronen in positive x-Richtung:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\tau_{\text{LB}}} \frac{d_f}{dx} \left[ n \left( x - \frac{d_f}{2} \right) - n \left( x + \frac{d_f}{2} \right) \right] \approx -D_n \frac{\partial n(x)}{\partial x}$$

wobei  $D_n = \frac{kT}{m_n} \tau_{\text{LB}} = \frac{kT}{e} \mu_n$  **Diffusionskonstante**

„Einstein-Beziehung“ für Elektronen

Zugehöriger **Diffusionsstrom** der Elektronen in drei Dimensionen:

$$\mathbf{J}_{D,n} = eD_n \nabla n(\mathbf{r})$$

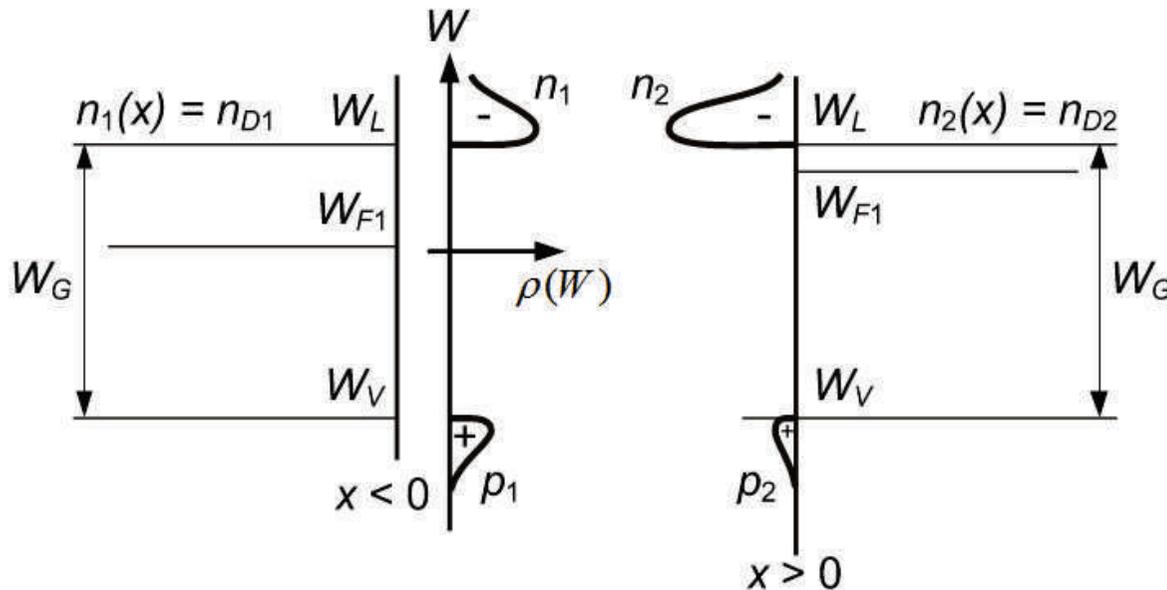
Analog: Diffusionsstrom der **Löcher**

$$\mathbf{J}_{D,p} = -eD_p \nabla p(\mathbf{r})$$

$$D_p = \frac{kT}{m_p} \tau_{\text{LB}} = \frac{kT}{e} \mu_p$$

**Diffusionskonstante und „Einstein-Beziehung“ für Löcher**

# Halbleiter mit Konzentrationsgradient im thermischen Gleichgewicht



Im thermischen  
Gleichgewicht:

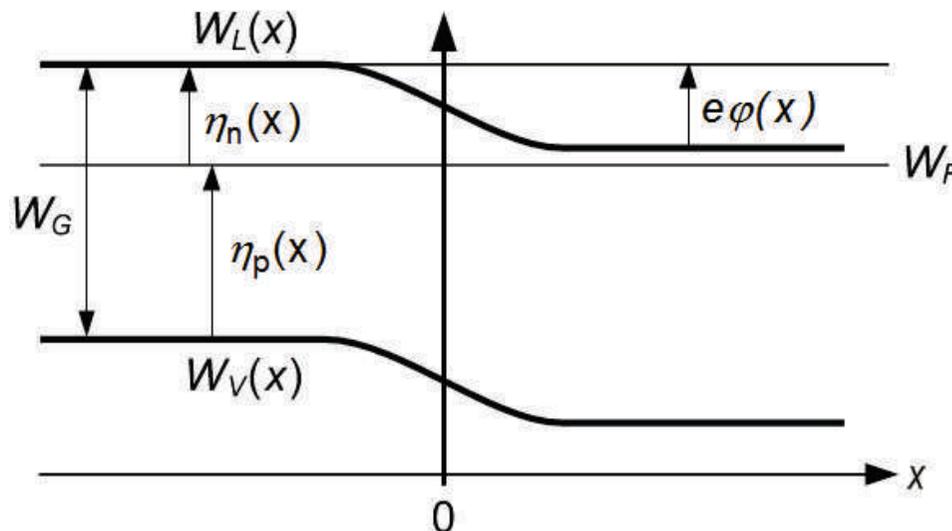
$$\begin{aligned} \mathbf{J}_n &= eD_n \nabla n + e\mu_n n \mathbf{E} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Trägerverteilung und  
Potentialverlauf  $\phi(x)$ :

$$n(x) = n_0 e^{\frac{e\phi(x)}{kT}}$$

Potentialdifferenz über der  
Grenzfläche:

$$\varphi_D = W_{L1} - W_{L2}$$



# Vorlesung 5

11.11.2013

## Terminänderung Tutorium

Neuer Ort: **kleiner ETI Hörsaal, Geb. 11.10**

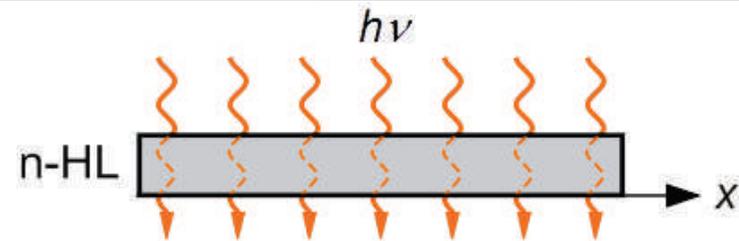
Neue Zeit: **Dienstags, 15:45 Uhr**

Gültig ab sofort.

Ort und Termin für **Übung und Vorlesung unverändert.**

# „Einschuss“ oder Erzeugung von freien Ladungsträgern

Halbleiter im Nichtgleichgewicht:  $pn > n_i^2$



Zwei wichtige Fälle:

- Halbleiter unter schwacher Injektion (Low-Level Injection, LLI):

Die zusätzlich generierten Überschussträgerdichten sind klein gegenüber der Majoritätsträgerdichte im thermischen Gleichgewicht. Unter Annahme von Störstellenerschöpfung im dotierten Halbleiter gilt dann:

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{n-HL:} \quad n = n_{th} + n' \cong |n_D - n_A| \\
 \quad \quad p = p_{th} + p' \ll |n_D - n_A| \\
 \\
 \text{p-HL:} \quad n = n_{th} + n' \ll |n_D - n_A| \\
 \quad \quad p = p_{th} + p' \cong |n_D - n_A|
 \end{array} \right\} \Rightarrow n_i^2 < np \ll (n_D - n_A)^2$$

- Starke Injektion (High-Level Injection, HLI):

Überschussträgerdichten sind vergleichbar zu oder wesentlich größer als die Majoritätsträgerdichte,

$$n, p \gg |n_D - n_A|$$

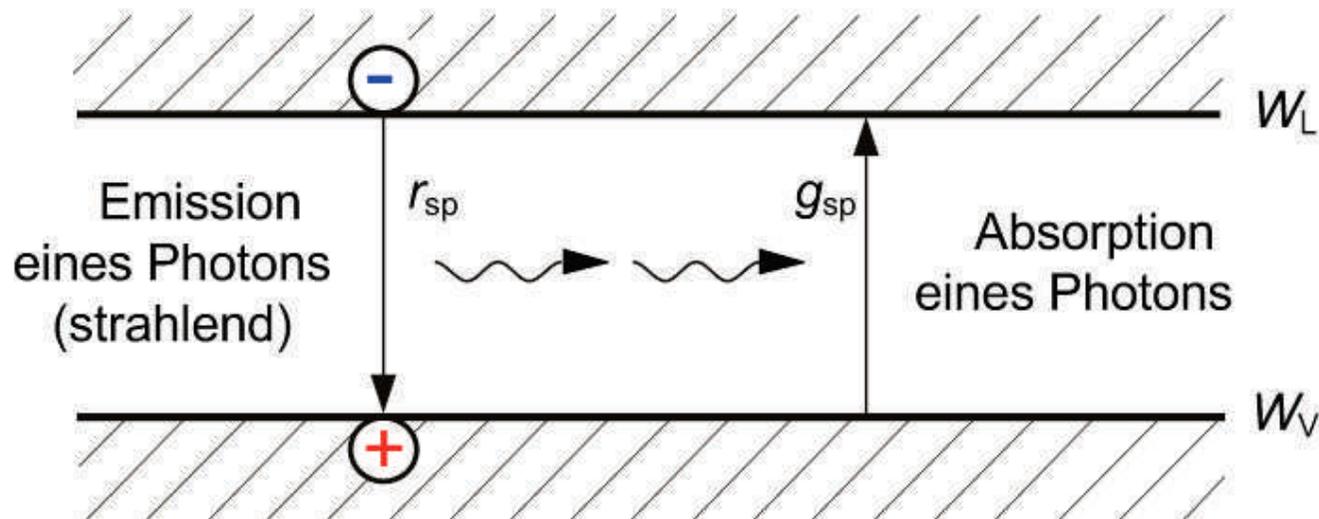
Die **Relaxation der Überschussträgerdichten** wird durch die Differenz zwischen der Generationsrate  $g$  und Rekombinationsrate  $r$  bestimmt:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{dp}{dt} = g - r$$

wobei  $g = g_{\text{opt}} + g_{\text{t}} + g_{\text{Auger}} \dots$

$$r = r_{\text{opt}} + r_{\text{t}} + r_{\text{Auger}} \dots$$

- Zu jedem **Generationsprozess** muss es auch einen entsprechenden **Rekombinationsprozess** geben.
- Prinzip des **detaillierten Gleichgewichts**: Im thermischen Gleichgewicht sind die Generationsraten  $g_n$  und  $g_p$  für jeden Einzelprozess gleich den zugehörigen Rekombinationsrate  $r_n$  und  $r_p$



Band-Band-Rekombination („spontane Rekombination“):

- **Direkte Rekombination eines Elektrons mit einem Loch** unter Aussendung eines Photons (und ggf. eines Phonons im Fall indirekter Halbleiter)
- **Rekombinationsrate** ist proportional zur Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Elektron und ein Loch begegnen, also proportional zum Produkt der beiden Dichten

$$r_{sp} = B_{sp}np$$

- Unter Berücksichtigung der spontanen Generationsrate im thermischen GGW ergibt sich die **Netto-Generationsrate** zu:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{dp}{dt} = -B_{sp} \left( np - n_i^2 \right)$$

# Band-Band-Übergänge im Falle schwacher Injektion

Vereinfachung im für den Fall schwacher Injektion:

$$\frac{dn'}{dt} = \frac{dp'}{dt} = \begin{cases} -\frac{p'}{\tau_{mjn}} & \text{im n-Halbleiter} \\ -\frac{n'}{\tau_{min}} & \text{im p-Halbleiter} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\tau_{min}} = \begin{cases} B_{sp} n_{th} & \text{im n-Halbleiter} \\ B_{sp} p_{th} & \text{im p-Halbleiter} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\tau_{min}} \approx B_{sp} (n_{th} + p_{th}) \quad \text{im i-Halbleiter}$$

- Im Falle schwacher Injektion kann die Majoritätsträgerdichte als konstant angenommen werden; nur die Minoritätsträgerlebensdauer  $\tau$  unterliegt einer Dynamik.
- Die Minoritätsträgerlebensdauer  $\tau_{min}$  hängt von der jeweiligen Majoritätsträgerdichte ab.
- Typische Zahlenwerte:
  - Ge:  $10^{-6}$  s bis  $10^{-3}$  s
  - Si:  $10^{-10}$  s bis  $10^{-3}$  s
  - GaAs:  $10^{-10}$  s bis  $10^{-8}$  s.

Zusammenfassung: n-Typ

$$\begin{aligned} n_n &\gg p_n \\ n_n &\approx n_{n,th} \\ p_n &= p_{n,th} + p' \end{aligned}$$

$$\tau_{min}^{-1} \sim B n_n$$

i-Typ

$$\begin{aligned} p &= n \\ n &\approx n_{th} + n' \\ p &\approx p_{th} + p' \end{aligned}$$

$$\tau_{min}^{-1} = B [p_{th} + n_{th}]$$

p-Typ

$$\begin{aligned} p_p &\gg n_p \\ n_p &= n_{p,th} + n' \\ p_p &\approx p_{p,th} \end{aligned}$$

$$\tau_{min}^{-1} \sim B p_p$$

# Band-Band-Übergänge im Falle starker Injektion

Differentialgleichung für das Abklingen der Trägerdichtestörung:

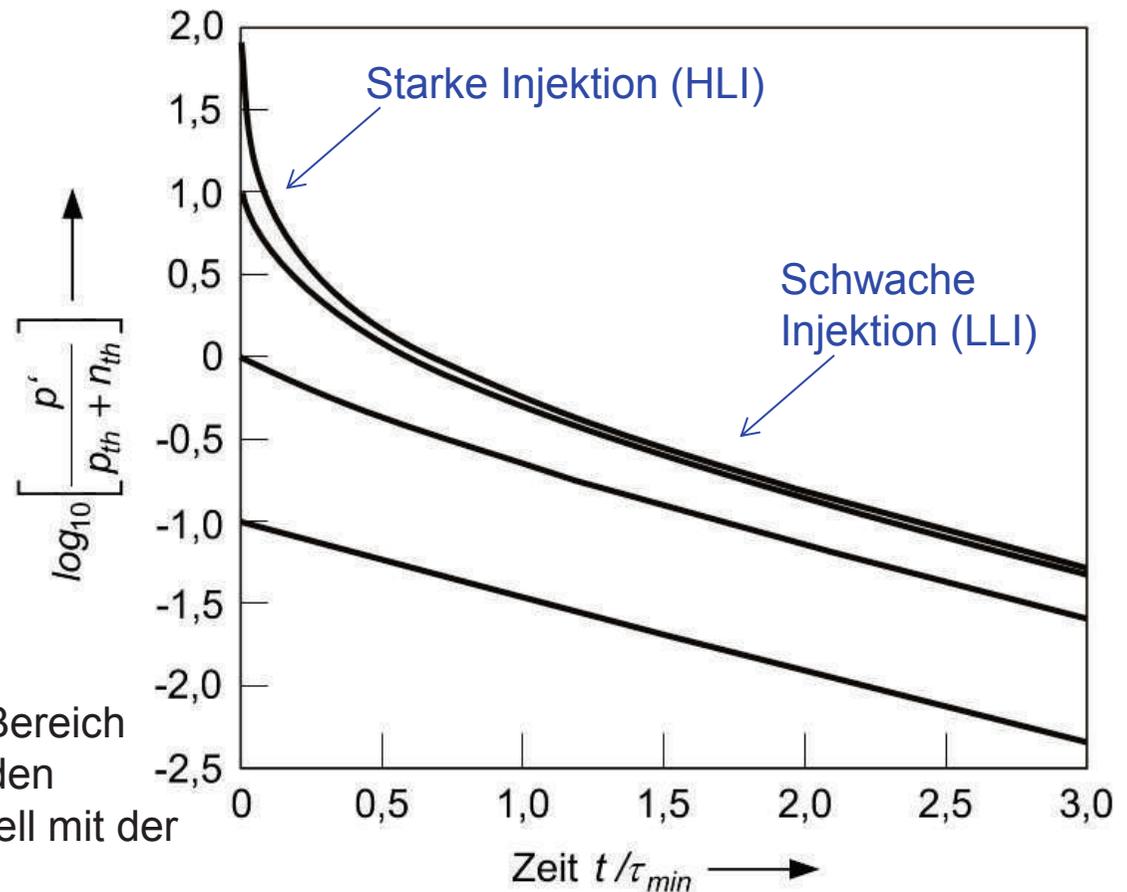
$$\frac{dn'}{dt} = \frac{dp'}{dt} = -\frac{1}{\tau_{\min}} \left( 1 + \frac{n'}{n_{\text{th}} + p_{\text{th}}} \right) n'$$

Anfängliche Abnahme der Trägerdichtestörung (transienter Vorgang):

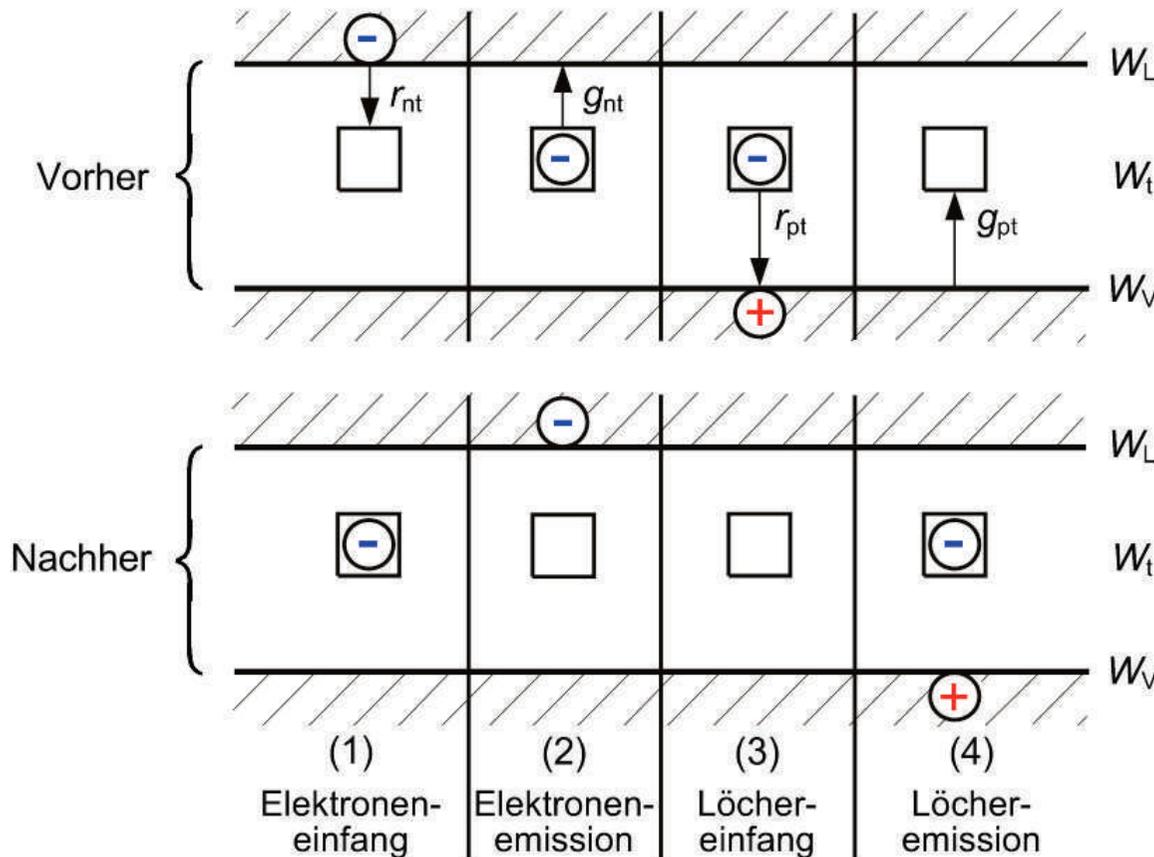
$$\frac{dn'}{dt} = \frac{dp'}{dt} = -\frac{1}{\tau_{\min}} \frac{n'^2}{n_{\text{th}} + p_{\text{th}}}$$

$$n'(t) = \frac{n'(0)}{1 + \left( \frac{n'(0)}{n_{\text{th}} + p_{\text{th}}} \frac{t}{\tau_{\min}} \right)}$$

- Bei starker Injektion zerfällt die **Überschussträgerdichte innerhalb von  $\tau_{\min}$  auf die Majoritätsträgerdichte** - unabhängig von ihrem Anfangswert!
- Danach befindet sich die Probe im Bereich schwacher Injektion; die verbleibenden Überschusdichte zerfällt exponentiell mit der Zeitkonstante  $\tau_{\min}$ .



# Rekombination über Störzentren / Shockley-Read-Hall-Rekombination



Ansätze für die Generations- und Rekombinationsraten:

$$g_{nt} = A_{gn} n_t w$$

$$g_{pt} = A_{gp} n_t (1 - w)$$

$$r_{nt} = A_{rn} n n_t (1 - w)$$

$$=: \frac{n (1 - w)}{\tau_n},$$

$$r_{pt} = A_{rp} p n_t w$$

$$=: \frac{p w}{\tau_p}$$

$w$  = Wahrscheinlichkeit, mit der die Störstelle durch ein Elektron besetzt ist.

**Weitere Analyse:** Betrachtung im Fall des thermischen Gleichgewichtes

- Detailliertes Gleichgewicht der Generations- und Rekombinationsrate:
- Verwendung der Fermi-Verteilung zur Bestimmung von  $w$

# Rekombination über Störzentren / Shockley-Read-Hall-Rekombination

Betrachte **stationären Zustand unter externer Trägergeneration**  $g_{\text{ext}}$  ( $\neq$  thermisches Gleichgewicht!):

$$\frac{dn}{dt} = g_n - r_n = g_{\text{ext}} + g_{nt} - r_{nt} = 0$$

$$\frac{dp}{dt} = g_p - r_p = g_{\text{ext}} + g_{pt} - r_{pt} = 0$$

**Netto-Generationsrate über Störstellen:**

$$g_t - r_t = g_{pt} - r_{pt} = g_{nt} - r_{nt} = \frac{n_i^2 - np}{(n + n'_{th})\tau_p + (p + p'_{th})\tau_n}$$

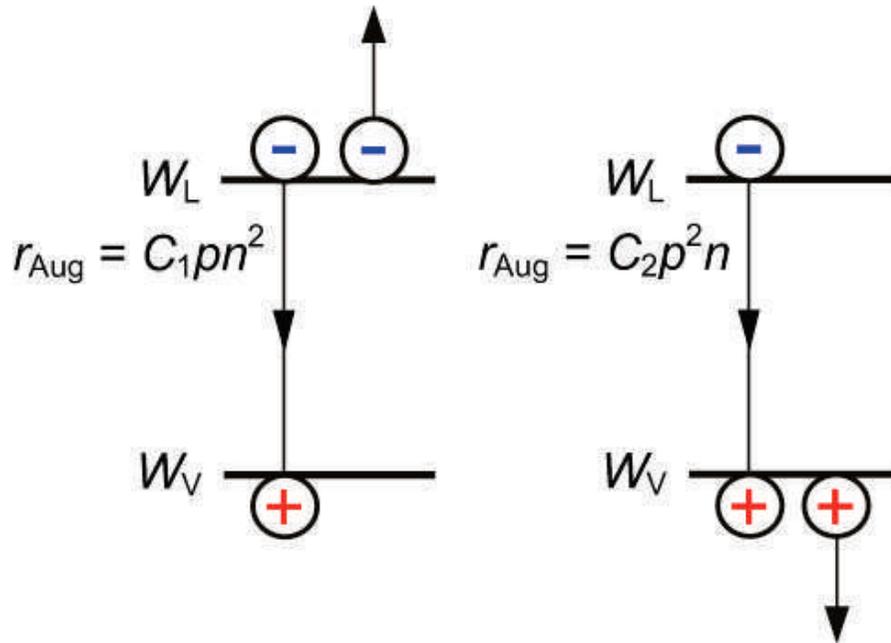
wobei  $n'_{th} = n_{th} \exp\left(\frac{W_T - W_F}{kT}\right)$ ,  $p'_{th} = p_{th} \exp\left(\frac{W_F - W_T}{kT}\right)$

**Maximale Rekombinationsrate falls  $W_T = W_F$ , d.h.,  $n'_{th} = p'_{th} = n_i$ :**

$$g_t - r_t = \frac{n_i^2 - np}{(n + n_i)\tau_p + (p + n_i)\tau_n}$$

**Für schwache Injektion:** Beschreibung mit Hilfe einer **Minoritätsträgerlebensdauer**  $\tau_{\text{min}}$ , die für den n-HL (p-HL) mit der Zeitkonstante  $\tau_p$  ( $\tau_n$ ) übereinstimmt

$$g_t - r_t = \begin{cases} \frac{p'}{\tau_{\text{min}}}, \tau_{\text{min}} = \tau_p & \text{für n-Typ} \\ \frac{n'}{\tau_{\text{min}}}, \tau_{\text{min}} = \tau_n & \text{für p-Typ} \end{cases}$$



Rekombination unter Energie-Abgabe an ein Elektron im Leitungsband oder an ein Loch im Valenzband.

Rekombinationsrate:

$$r_{\text{Aug}} = C_1 n p^2 + C_2 n^2 p$$

⇒ Auger-Rekombination wird relevant, wenn sowohl Elektronen- als auch Löcherdichten sehr groß werden. Injizierte Ladungsträger sind dabei wichtiger als Dotierungen!

„Ladungsträgerlebensdauer“:

- Betrachtung bei konstanter externer Generationsrate  $g_{\text{ext}}$ , die zu stationären Elektronen- und Löcherdichten  $n_0$  bzw.  $p_0$  führt
- Annahme: Hochinjektion,  $n_{\text{th}}, p_{\text{th}} \ll n_0 \approx p_0$
- Betrachte Relaxation bei Störung des stationären Zustandes

$$\frac{d\Delta n}{dt} = \frac{d\Delta p}{dt} = -\frac{1}{\tau_{\text{eff}}} \Delta n \quad \text{wobei} \quad \frac{1}{\tau_{\text{eff}}} = 3(C_1 + C_2)n_0^2$$

effektive Lebensdauer

## Ziele:

- Geringe Leitfähigkeit falls kein Lichteinfall
- Hohe Leitfähigkeit bei kleinem Lichteinfall
- Linearer Zusammenhang zwischen Lichteinfall und Leitfähigkeit

**Funktionsweise:** *p*-dotierter Halbleiter mit tiefen Donatoren in der Bandlücke

- **Tiefe Donatoren** wirken als Rekombinationsstörstelle und verringern die Trägerlebensdauer der Minoritätsträger

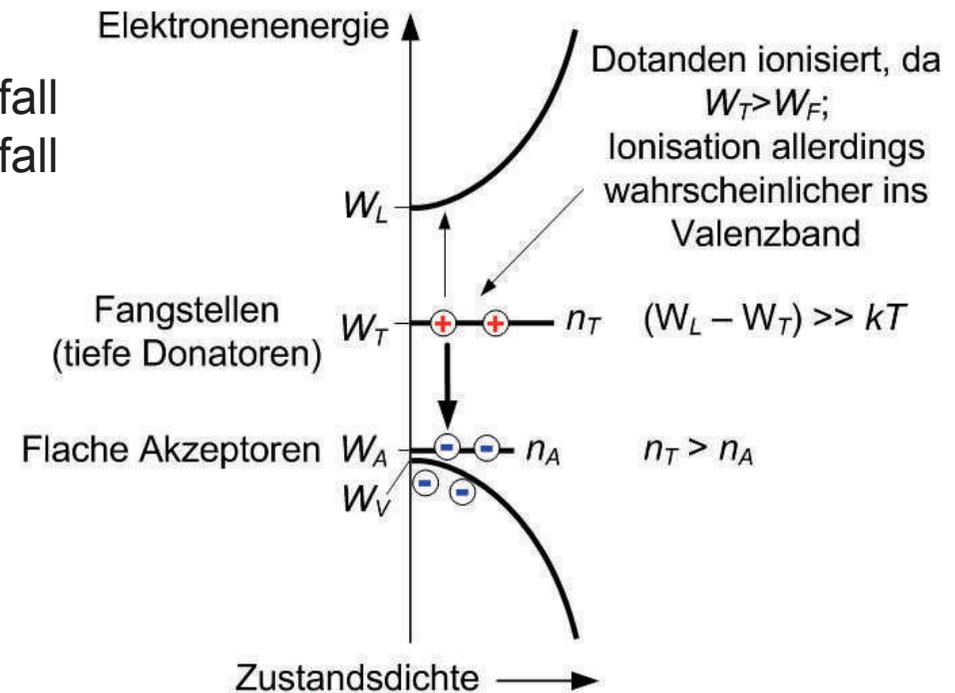
⇒ **Geringe Elektronendichte!**

- Ionisierung der tiefen Donatoren nur, wenn dadurch ein Loch vernichtet werden kann

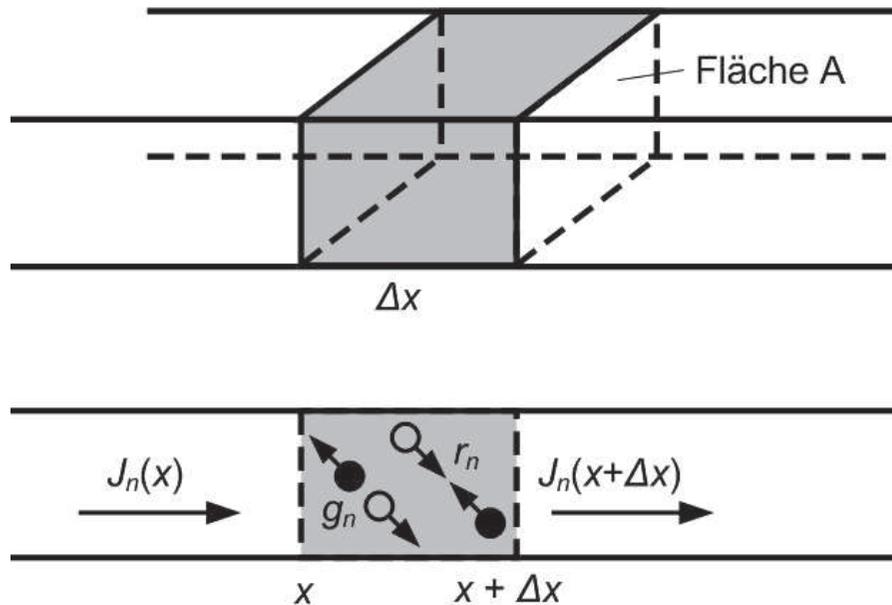
$$n_D^+ = n_A$$

⇒ **Ortsfeste ionisierte Donatoren übernehmen die Rolle der Löcher!**

- Bei Erzeugung eines Elektron-Loch-Paares:
  - Loch wird sofort durch ein Elektron eines tiefen Donators vernichtet;
  - Elektron trägt als „Minoritätsträger“ zur Leitfähigkeit bei (schwache Injektion!)



# Die Kontinuitätsgleichung



## Kontinuitätsgleichungen:

In 1D:  $\frac{\partial(ep)}{\partial t} + \frac{\partial J_p(x)}{\partial x} = e(g_p - r_p)$

In 3D:  $\frac{\partial(ep)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_p = e(g_p - r_p)$   
 $\frac{\partial(-en)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_n = -e(g_n - r_n)$

$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = e(g_n - r_n) - e(g_p - r_p)$

## Vereinfachte Form der Kontinuitätsgleichung:

Voraussetzung: Es herrscht Gleichgewicht ( $g_n = r_n$  und  $g_p = r_p$ ) oder Träger werden nur in Paaren erzeugt oder vernichtet ( $g_n - r_n = g_p - r_p$ )

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0$$

## Kontinuitätsgleichungen:

$$\frac{\partial(ep)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_p = e(g_p - r_p)$$

$$\frac{\partial(-en)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_n = -e(g_n - r_n)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{J} = e(g_n - r_n) - e(g_p - r_p)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0 \quad \text{im Gleichgewicht } (g_n = r_n, g_p = r_p) \text{ oder bei paarweiser Erzeugung / Vernichtung von Elektronen und Löchern } (g_n - r_n = g_p - r_p)$$

## Ladungsträgertransport durch Drift und Diffusion:

$$\mathbf{J}_n = \mathbf{J}_{nF} + \mathbf{J}_{nD}, \quad \mathbf{J}_n = en\mu_n\mathbf{E} + eD_n\nabla n,$$

$$\mathbf{J}_p = \mathbf{J}_{pF} + \mathbf{J}_{pD}, \quad \mathbf{J}_p = ep\mu_p\mathbf{E} - eD_p\nabla p,$$

## Poisson-Gleichung (in Abwesenheit von Magnetfeldern):

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} = -\frac{e}{\varepsilon}(p + n_D^+ - n - n_A^-)$$

**Schwache Injektion:** Majoritätsträgerdichte ändert sich kaum; Minoritätsträgerdichte ist wesentlich kleiner als die Majoritätsträgerdichte

⇒ Majoritätsträgerdichte kann als **unverändert** angenommen werden

Driftstrom der Minoritätsträger vernachlässigbar

Beschreibung von Rekombinationsvorgängen mit Hilfe der

Minoritätsträgerlebensdauer

n-Halbleiter	p-Halbleiter
$n_n \approx n_{n,th} \gg p_n$ $\mathbf{J}_n = en_n\mu_n\mathbf{E} + eD_n\nabla n_n,$	$p_p \approx p_{pth} \gg n_p$ $\mathbf{J}_n = eD_n\nabla n_p,$
$\mathbf{J}_p = -eD_p\nabla p_n.$	$\mathbf{J}_p = ep_p\mu_p\mathbf{E} - eD_p\nabla p_p,$
$\frac{\partial(p_n)}{\partial t} + \frac{1}{e}\nabla \cdot \mathbf{J}_p = -\frac{\Delta p_n}{\tau_p} + g_{ext}$ $\frac{\partial(n_n)}{\partial t} - \frac{1}{e}\nabla \cdot \mathbf{J}_n = -\frac{\Delta p_n}{\tau_p} + g_{ext}$	$\frac{\partial(p_p)}{\partial t} + \frac{1}{e}\nabla \cdot \mathbf{J}_p = -\frac{\Delta n_p}{\tau_n} + g_{ext}$ $\frac{\partial(n_p)}{\partial t} - \frac{1}{e}\nabla \cdot \mathbf{J}_n = -\frac{\Delta n_p}{\tau_n} + g_{ext}$

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} = -\frac{e}{\varepsilon}(p + n_D^+ - n - n_A^-)$$

Energieaustausch innerhalb eines Bandes (**Intraband-Energierelaxationszeit**, **typischerweise im fs-Bereich**) erfolgt sehr viel schneller als zwischen den Bändern (**Minoritätsträgerlebensdauer**, **ps bis ms**)

⇒ Bei einer Störung stellt sich sehr schnell wieder ein Gleichgewicht innerhalb der beiden Bänder ein, das durch individuelle Fermi-Verteilungen mit sog. **Quasi-Fermi-Niveaus**  $W_{Fn}$  und  $W_{Fp}$  beschrieben werden kann:

$$f_n(W) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{W - W_{Fn}}{kT}\right)}$$

$$f_p(W) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{W - W_{Fp}}{kT}\right)}$$

**Ladungsträgerdichten** bei Nichtentartung:

$$n(x) = N_L e^{-\frac{W_L - W_{Fn}}{kT}}$$

$$p(x) = N_V e^{-\frac{W_{Fp} - W_V}{kT}}$$

Bei ortsabhängigem Potenzial  $\Phi(x)$ :

$$n(x) = N_L e^{-\frac{W_L - e\varphi(x) - W_{Fn}}{kT}}$$

$$p(x) = N_V e^{-\frac{W_{Fp} - (W_V - e\varphi(x))}{kT}}$$

Vorteil des Konzepts der Quasi-Fermi-Niveaus: Ladungsträgerdichten  $n$  und  $p$  schwanken abhängig von Dotierung und Trägerinjektion um Dekaden. Die Quasi-Fermi-Niveaus ändern sich dagegen nur um wenige meV!

⇒ Einfachere numerische Behandlung!

# Stromfluss, Ladungsträgerkonzentrationen und äquivalente Spannungen

Elektronen und Löcherströme sind proportional zu den **Gradienten der Quasi-Fermi-Niveaus**; dabei wird nicht zwischen Diffusions- und Driftstrom unterschieden:

$$\mathbf{J}_n = -en\mu_n\nabla\Phi + eD_n\nabla n = n\mu_n\nabla W_{F_n}$$

$$\mathbf{J}_p = -ep\mu_p\nabla\Phi - eD_p\nabla p = p\mu_p\nabla W_{F_p}$$

Der **Abstand zwischen den Quasi-Fermi-Niveaus** ist ein Maß für die Überschussdichten für Elektronen und Löcher; er kann durch eine **äquivalente Spannung  $U$**  beschrieben werden:

$$np = n_i^2 e^{\frac{W_{F_n} - W_{F_p}}{kT}} = n_i^2 e^{\frac{U}{U_T}} \quad U = \frac{W_{F_n} - W_{F_p}}{e}$$

Je nach Injektionsdichte hängen die Überschussträgerdichten unterschiedlich von der äquivalenten Spannung  $U$  ab:

- **Schwache Injektion** (hier in einen n-HL bei Störstellenerschöpfung)

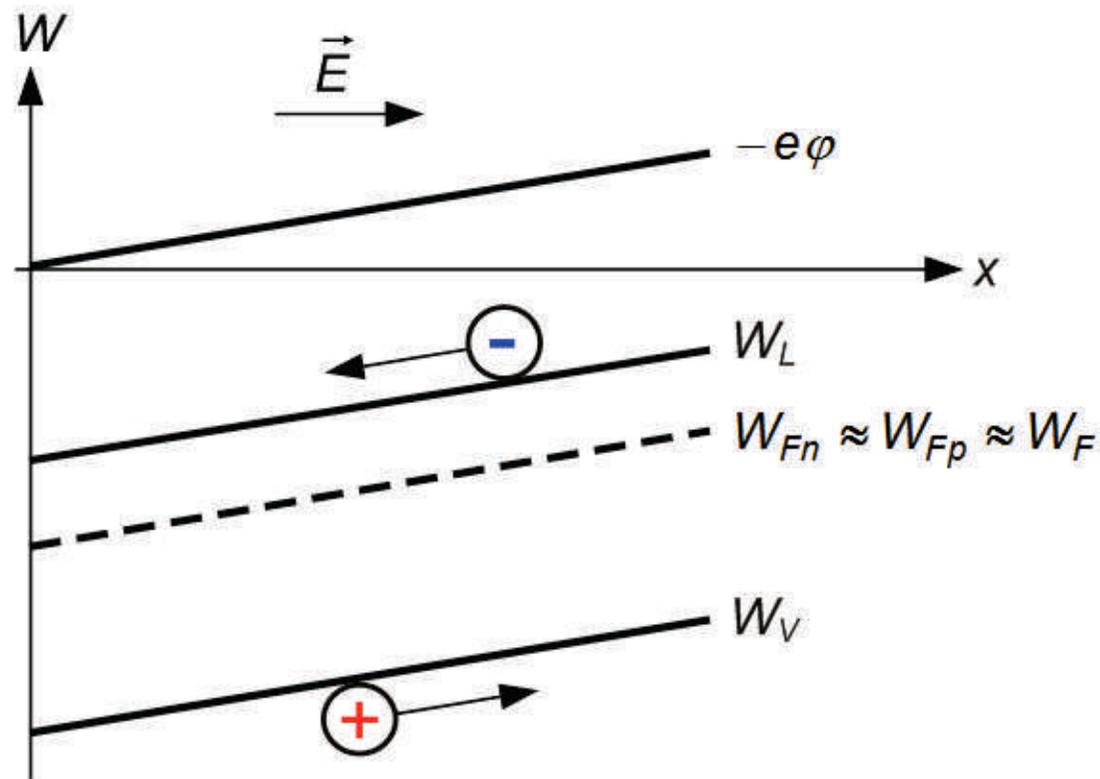
$$p' = \frac{n_i^2}{n_D} e^{\frac{U}{U_T}}$$

- Gleiches gilt auch bei **starker Injektion von lediglich einer einzigen Trägersorte**
- Bei **sehr hoher Injektion** ( $n, p \gg |n_D - n_A|$ ) von beiden Ladungsträgersorten gilt unabhängig vom Halbleitertyp:

$$p' \approx n' \approx n_i e^{\frac{U}{2U_T}}$$

**Annahme:** n-dotierter Halbleiter, in dem der Stromfluss vom Feldstrom der Elektronen getragen wird.

$$\Rightarrow \nabla W_{F_n} = \nabla W_{F_p} = -e \nabla \Phi$$



# Vorlesung 6

18.11.2013

## Terminänderung Tutorium

Neuer Ort: **kleiner ETI Hörsaal, Geb. 11.10**

Neue Zeit: **Dienstags, 15:45 Uhr**

Gültig ab sofort.

Ort und Termin für **Übung und Vorlesung unverändert.**

## Neuer Klausurtermin

Klausur Halbleiterbauelemente  
**Montag, 24.03.2013, 11:00 – 13:00 Uhr**

# Rekombination über Störzentren / Shockley-Read-Hall-Rekombination

Betrachte **stationären Zustand unter externer Trägergeneration**  $g_{\text{ext}}$  ( $\neq$  thermisches Gleichgewicht!):

$$\frac{dn}{dt} = g_n - r_n = g_{\text{ext}} + g_{\text{nt}} - r_{\text{nt}} = 0$$

$$\frac{dp}{dt} = g_p - r_p = g_{\text{ext}} + g_{\text{pt}} - r_{\text{pt}} = 0$$

**Netto-Generationsrate über Störstellen:**

$$g_t - r_t = g_{\text{pt}} - r_{\text{pt}} = g_{\text{nt}} - r_{\text{nt}} = \frac{n_i^2 - np}{(n + n'_{\text{th}})\tau_p + (p + p'_{\text{th}})\tau_n}$$

wobei  $n'_{\text{th}} = n_{\text{th}} \exp\left(\frac{W_T - W_F}{kT}\right)$ ,  $p'_{\text{th}} = p_{\text{th}} \exp\left(\frac{W_F - W_T}{kT}\right)$

**Beispiel:** Dotierter Halbleiter mit tiefen Störstellen ( $W_T$  in Bandmitte) unter schwacher Injektion

$$n'_{\text{th}} \ll n_{\text{th}}, \quad p_{\text{th}} \ll p'_{\text{th}} \ll n_{\text{th}}$$

$\Rightarrow$  Beschreibung mit Hilfe einer **Minoritätsträgerlebensdauer**  $\tau_{\text{min}}$ , die für den n-HL (p-HL) mit der Zeitkonstante  $\tau_p$  ( $\tau_n$ ) übereinstimmt

$$g_t - r_t = \begin{cases} \frac{p'}{\tau_{\text{min}}}, & \tau_{\text{min}} = \tau_p & \text{für n-Typ} \\ \frac{n}{\tau_{\text{min}}}, & \tau_{\text{min}} = \tau_n & \text{für p-Typ} \end{cases}$$

## Kontinuitätsgleichungen:

$$\frac{\partial(ep)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_p = e(g_p - r_p)$$

$$\frac{\partial(-en)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_n = -e(g_n - r_n)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{J} = e(g_n - r_n) - e(g_p - r_p)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0 \quad \text{im Gleichgewicht } (g_n = r_n, g_p = r_p) \text{ oder bei paarweiser Erzeugung / Vernichtung von Elektronen und Löchern } (g_n - r_n = g_p - r_p)$$

## Ladungsträgertransport durch Drift und Diffusion:

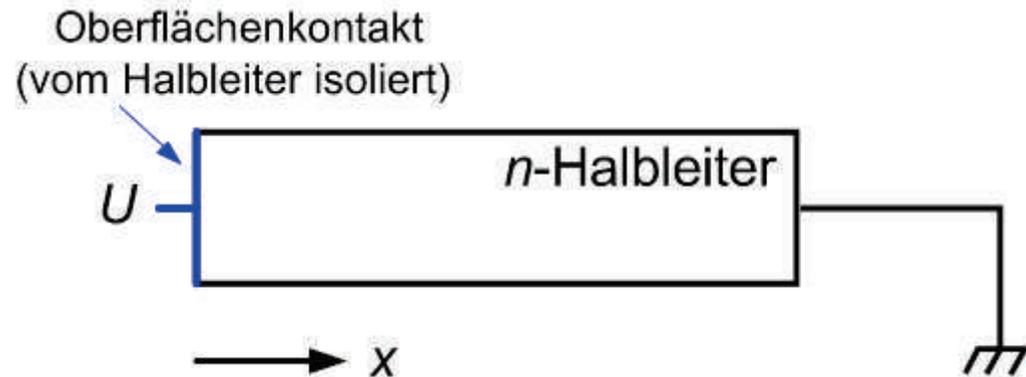
$$\mathbf{J}_n = \mathbf{J}_{nF} + \mathbf{J}_{nD}, \quad \mathbf{J}_n = en\mu_n\mathbf{E} + eD_n\nabla n,$$

$$\mathbf{J}_p = \mathbf{J}_{pF} + \mathbf{J}_{pD}, \quad \mathbf{J}_p = ep\mu_p\mathbf{E} - eD_p\nabla p,$$

## Poisson-Gleichung (in Abwesenheit von Magnetfeldern):

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} = -\frac{e}{\varepsilon}(p + n_D^+ - n - n_A^-)$$

**Gedankenexperiment:** n-Halbleiter, bei dem das Oberflächenpotential auf einem bestimmten Wert festgehalten wird.  
 ⇒ Potentialverlauf im Halbleiter ?



Abschirmung des Oberflächen-potenzials durch **Rearrangieren der Majoritätsträger:**

$$\Phi(x) = \Phi(0) e^{-\frac{x}{L_D}}$$

wobei  $L_{Dn} = \sqrt{\frac{\epsilon U_T}{en_D}}$

Debye-Länge im n-Halbleiter (bei Störstellenerschöpfung!)

$$L_{Di} = \sqrt{\frac{\epsilon U_T}{2en_i}}$$

Debye-Länge im **intrinsischen Halbleiter**

**Beispiele für Debye-Längen:**

- Silizium:**
- Intrinsisch ( $n = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ ):  $L_D = 40 \text{ } \mu\text{m}$
  - Schwach dotiert ( $n = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ ):  $L_D = 40 \text{ nm}$
  - Hoch dotiert (entartet,  $n = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ):  $L_D = 1 \text{ nm}$  (zwei Gitterkonstanten!)

**Metalle:** Potentialstörungen werden praktisch innerhalb einer Gitterkonstante abgeschirmt

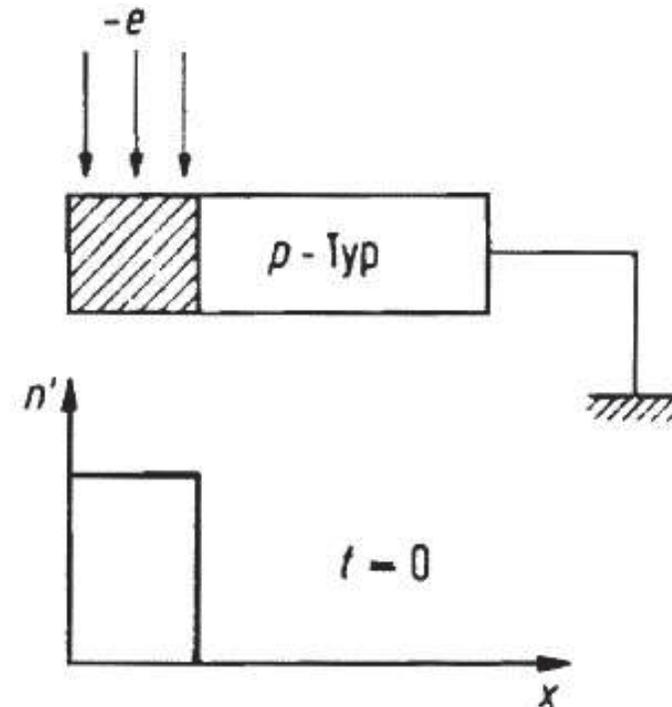
# Zeitliche Dynamik der Abschirmung von Potentialstörungen, Dielektrische Relaxationszeit

**Gedankenexperiment:** Injektion von Elektronen bei  $t = 0$  in einen Teilbereich eines  $p$ -Halbleiters  
⇒ Zeitliche Entwicklung der Raumladungsvorteilung im Halbleiter ?

**Exponentielles Abklingen** der Raumladungsdichte durch **Rearrangieren** der Majoritätsträger:

$$\rho(x, t) = \rho(x, 0) e^{-\frac{t}{\tau_R}}$$

wobei  $\tau_R = \frac{\epsilon}{\sigma_p}$  **Dielektrische Relaxationszeit** im  $p$ -Halbleiter  
(1 fs ... 100 ps)

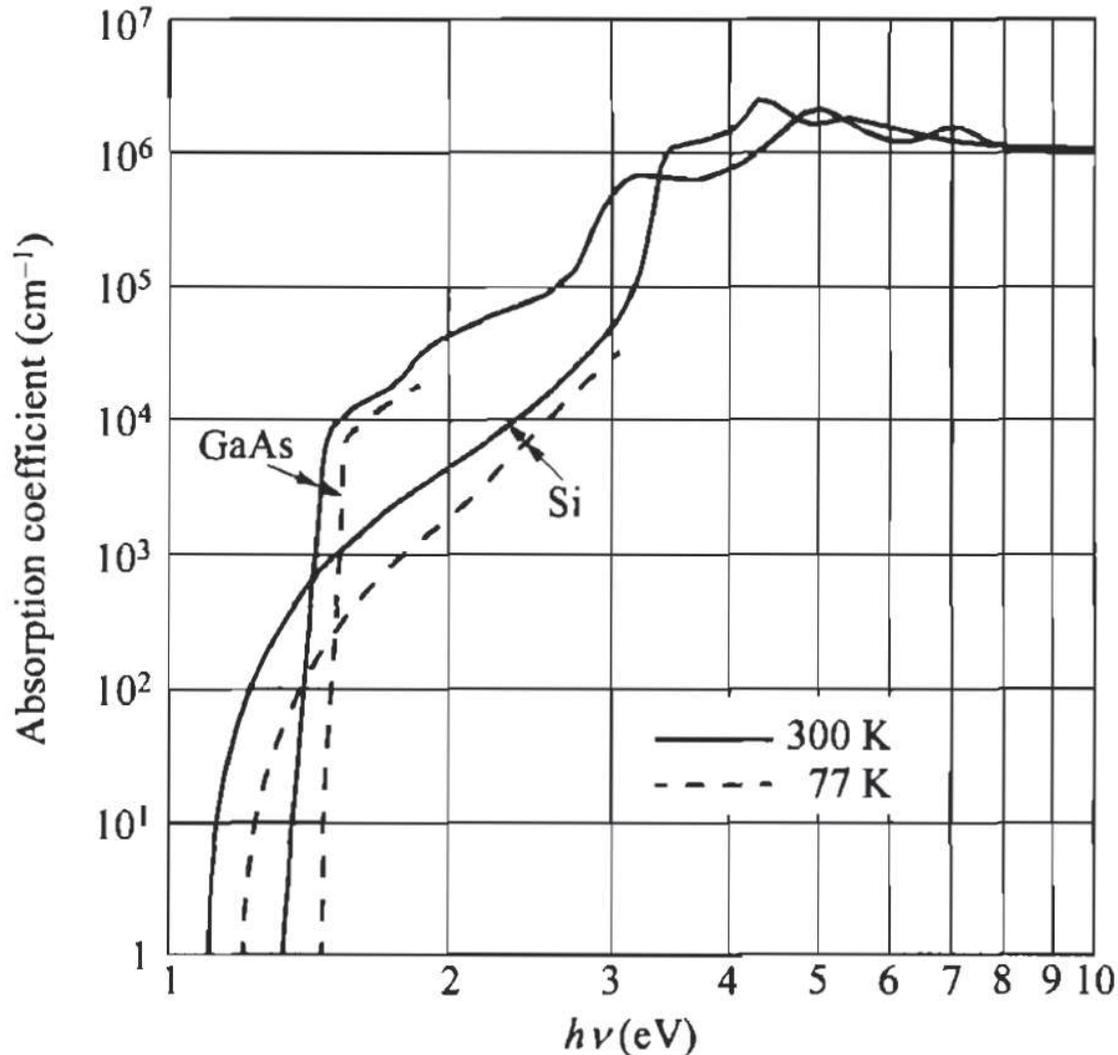


- Raumladungsdichtestörungen werden innerhalb der **dielektrischen Relaxationszeit** durch Umlagern der Majoritätsträgerdichte kompensiert.
- Die resultierende neutrale **Überschussladungsträgerdichte** verschwindet dann auf einer Zeitskala der Minoritätsträgerlebensdauer.

Bild: Müller, Grundlagen der Halbleiter-Elektronik

# Erzeugung von freien Ladungsträgern durch Licht

## Gemessene Absorptionskoeffizienten von Si und GaAs:



Quelle: Sze, Physics of Semiconductor Devices

Generationsrate bei Bestrahlung entlang x:

$$g(x, t) = \frac{1}{A} \frac{\alpha}{hf} P_0 e^{-\alpha x}$$

**Schwache Absorption:**

Generationsrate annähernd konstant über den Halbleiter

$$\alpha L \ll 1$$

**Starke Absorption:**

Absorption nur an der Oberfläche

$$\alpha L \gg 1$$

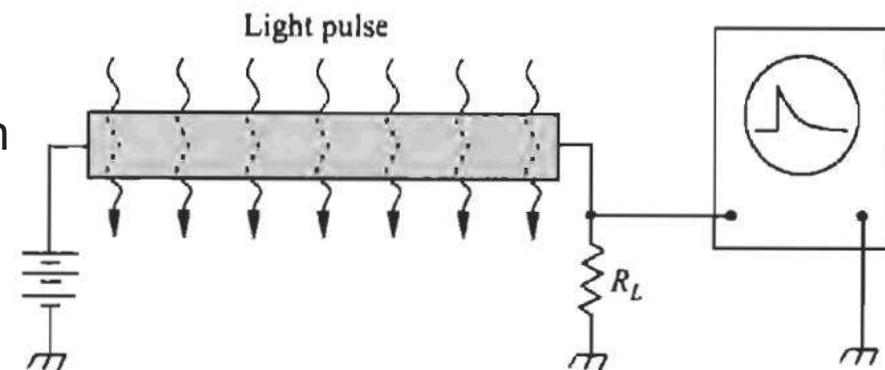
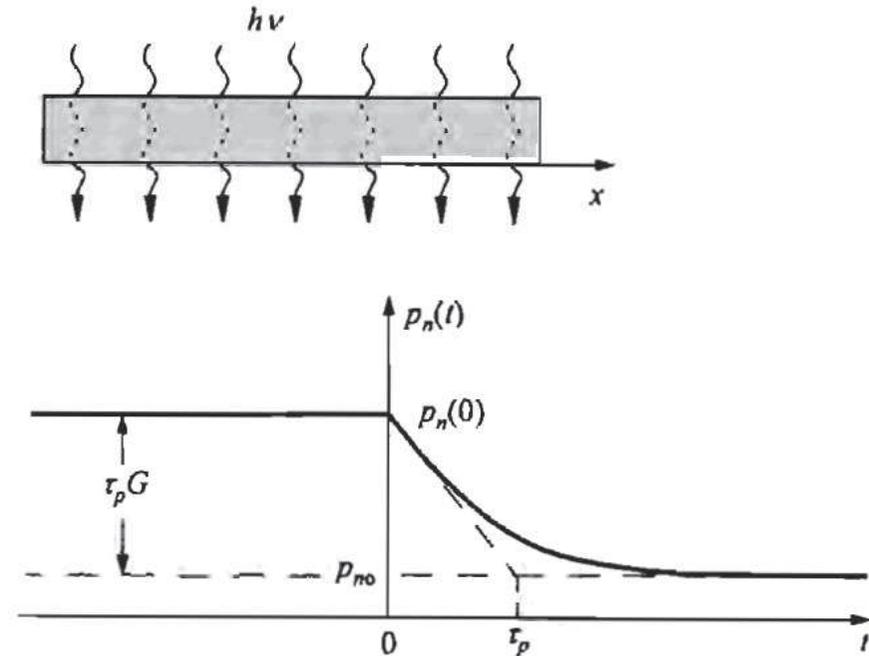
# Zeitliches Abklingen von Trägerdichtestörungen

- Konstante Bestrahlung eines schwach absorbierenden n-Halbleiters für  $t < 0$  führt zu Generation von Elektron-Loch-Paaren mit Rate  $g_{ext}$
- Keine Bestrahlung für  $t > 0$ : Führt zu Rekombination der Ladungsträger (Minoritätsträgerlebensdauer  $\tau_p$ )

⇒ Verlauf der Überschussträgerdichte

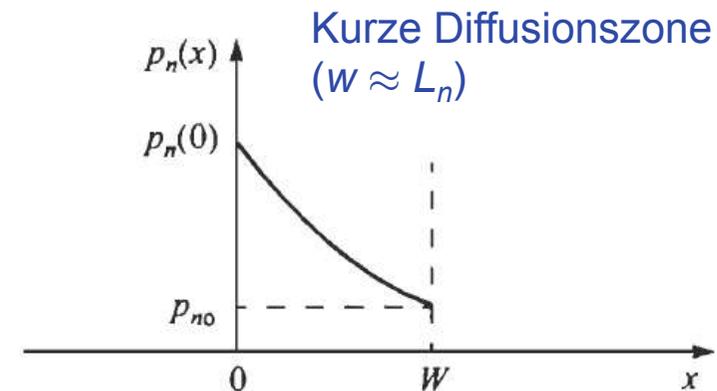
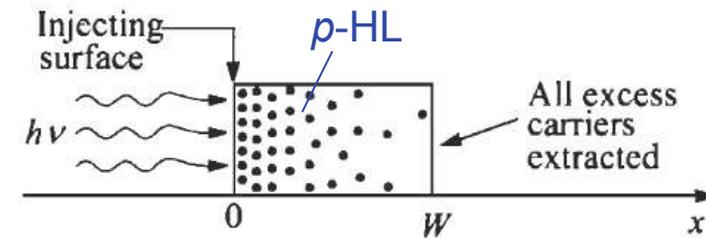
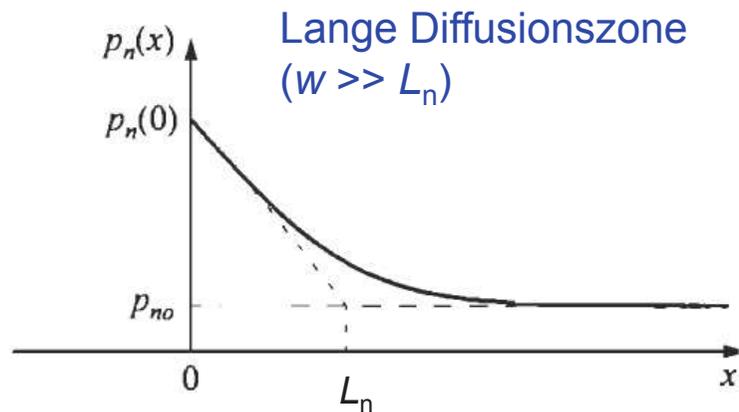
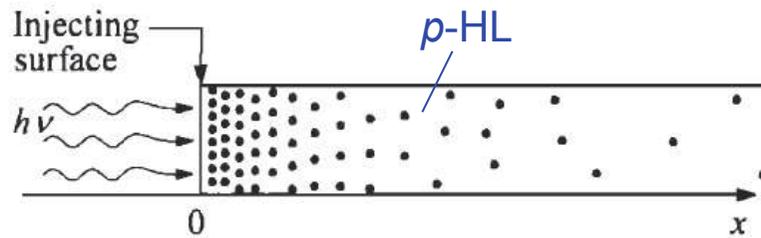
$$p'_n(t) = \begin{cases} \tau_p g_{ext} & \text{für } t < 0 \\ \tau_p g_{ext} e^{-\frac{t}{\tau_p}} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

- Ermittlung der Trägerlebensdauer durch zeitaufgelöste Leitfähigkeitsmessung



Quelle: Sze, Physics of Semiconductor Devices

# Räumliches Abklingen von Trägerdichtestörungen



Bilder: Sze, Physics of Semiconductor Devices

- **Starke Absorption** führt zu räumlich lokalisierter Generation von Elektron-Loch-Paaren und damit zu Diffusionsströmen.
- Diffusionsströme hängen vom Gradienten der Trägerdichte und damit von der **Länge der Diffusionszone** ab.

⇒ Verlauf der **Überschuss-Minoritätsträgerdichte**:

$$n'_p(x) = n'_p(0) e^{-\frac{x}{L_n}}$$

$$n'_p(x) = n'_p(0) \frac{\sinh\left(\frac{w-x}{L_n}\right)}{\sinh\left(\frac{w}{L_n}\right)}$$

wobei  $L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$  **Diffusionslänge** der Minoritätsträger im p-HL

# Abklingen von Trägerdichtestörungen mit Raum und Zeit (Haynes-Shockley-Experiment)

Impulsförmige Bestrahlung bei  $t = 0$   
und  $x = 0$

⇒ DGL für  $t > 0$  ohne externes Feld:

$$\frac{\partial p'_n}{\partial t} = D_p \frac{\partial^2 p'_n}{\partial x^2} - \frac{p'_n}{\tau_p}$$

Lösung:

$$p'_n(x, t) \propto \frac{1}{\sqrt{4\pi D_p t}} e^{-\left(\frac{x^2}{4D_p t} - \frac{t}{\tau_p}\right)}$$

- Mit externem Feld: Drift der gesamten Ladungsträgerverteilung
- Abtasten der Löcherverteilung erlaubt Messung der Beweglichkeit (Haynes-Shockley-Experiment)

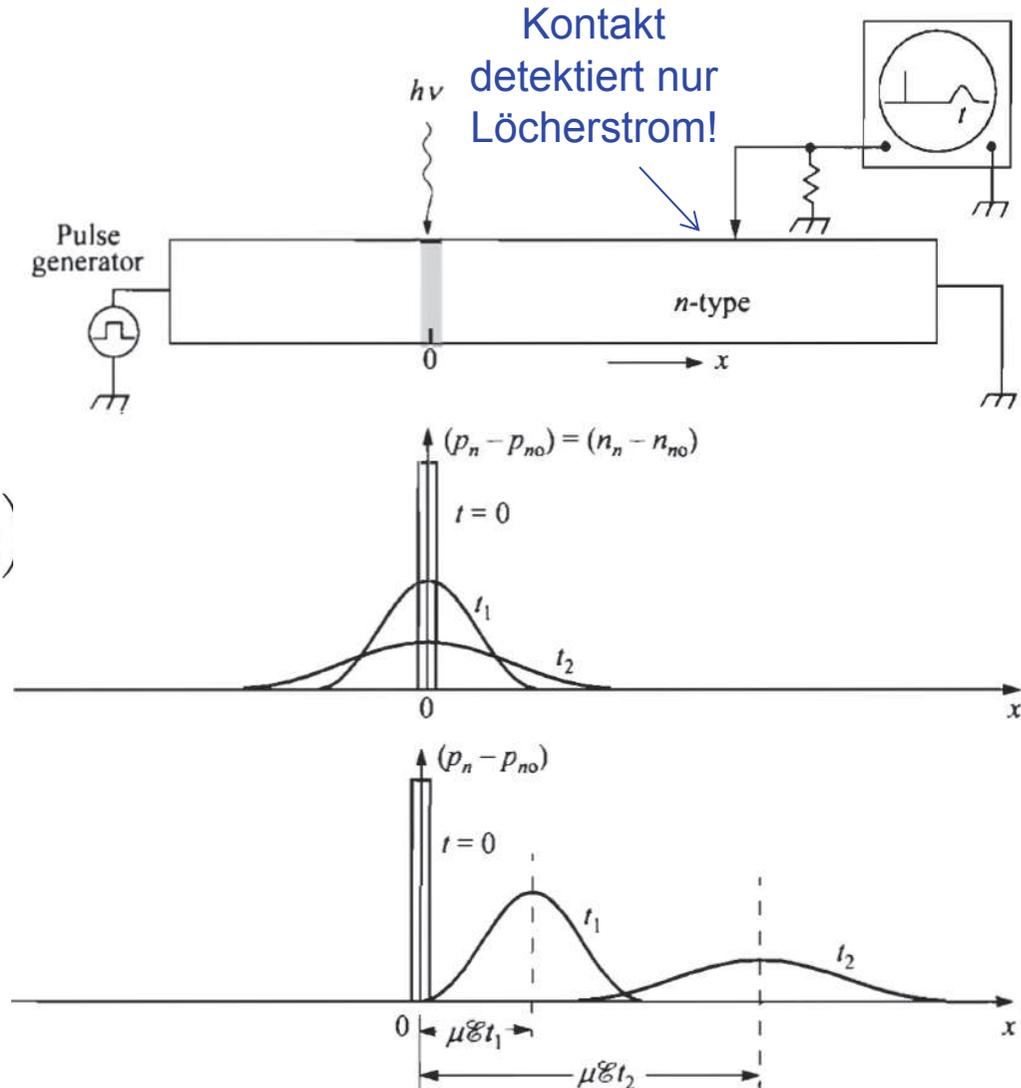


Bild: Sze, Physics of Semiconductor Devices

# Vorlesung 7

25.11.2013

# Injektion von Minoritätsträgern und Diffusionszone

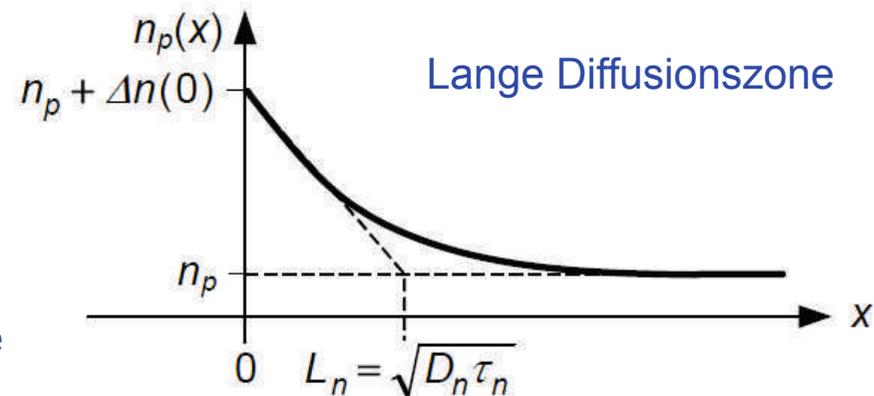
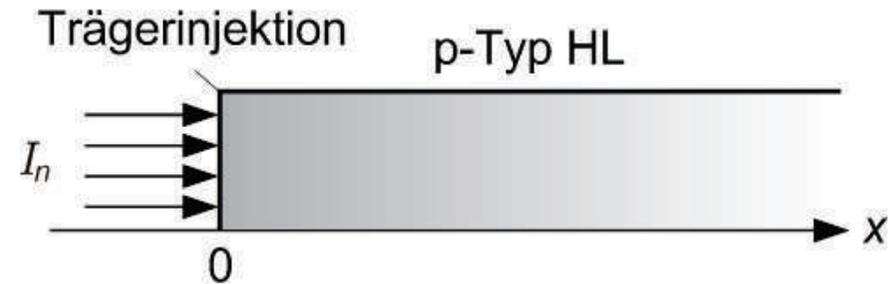
**Injektion von Minoritätsträgern in einen p-HL:**  
 Raumladungsdichtestörung wird innerhalb der dielektrischen Relaxationszeit durch Rearrangieren der Majoritätsträger kompensiert

⇒ Ausbildung einer **Diffusionszone**:

$$n'_p(x) = n'_p(0)e^{-\frac{x}{L_n}} \quad \text{Lange Diffusionszone}$$

$$n'_p(x) = n'_p(0) \frac{\sinh\left(\frac{w-x}{L_n}\right)}{\sinh\left(\frac{w}{L_n}\right)} \quad \text{Kurze Diffusionszone}$$

wobei  $L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$  **Diffusionslänge**



**Diffusionsstrom der Minoritätsträger bei x = 0:**

$$J_{D,n}(0) = -\frac{eD_n n'_p(0)}{L_n} \quad \text{Lange Diffusionszone}$$

$$J_{D,n}(0) = -\frac{eD_n n'_p(0)}{L_n} \coth\left(\frac{w}{L_n}\right) \quad \text{Kurze Diffusionszone}$$

Quelle: Sze, Physics of Semiconductor Devices

# Bandverlauf in der Diffusionszone im statischen Fall

- Das Quasi-Ferminiveau der Majoritätsträger verläuft **parallel zu den Bandkanten**

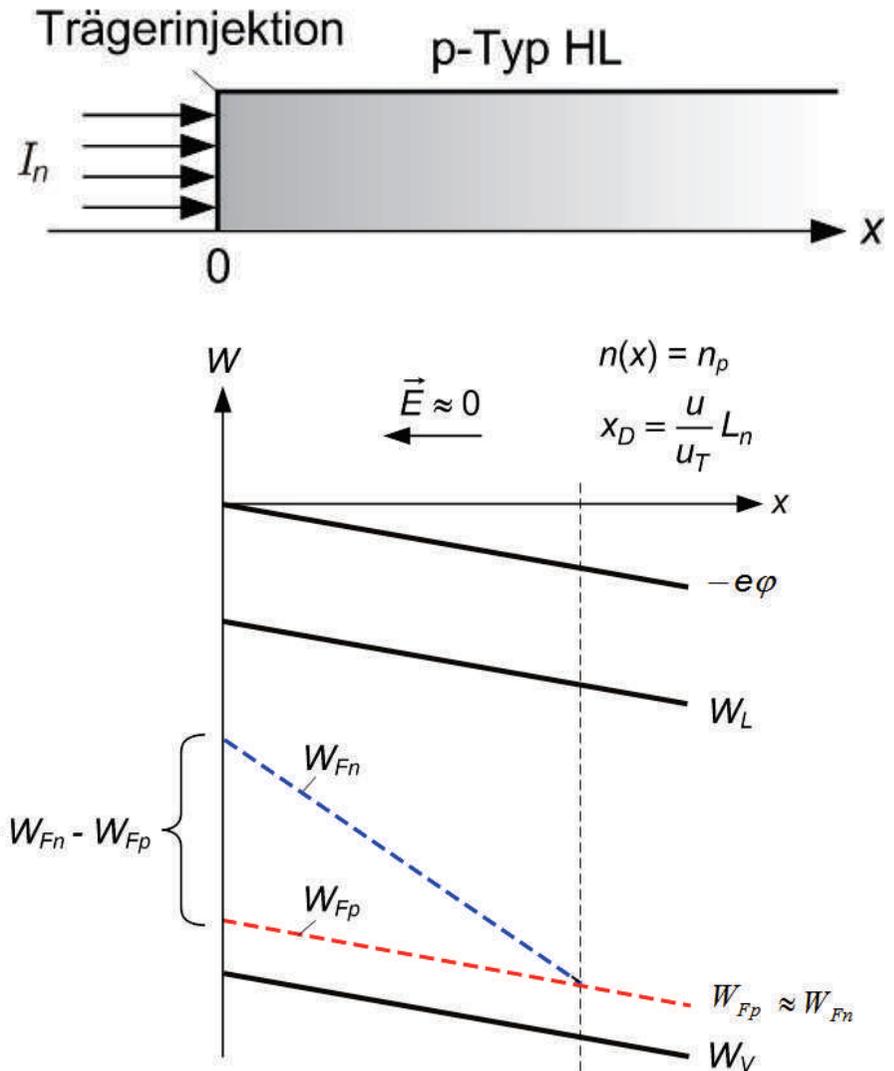
$$\begin{aligned} \text{grad } W_{Fp} &\approx \text{grad}(-e\varphi) \\ &= \text{grad } W_V \\ &= \text{grad } W_L \end{aligned}$$

- Das Quasi-Ferminiveau der Minoritätsträger weist einen näherungsweise **linearen Verlauf** auf

$$\text{grad } W_{Fn} \approx -\frac{eU_T}{L_n} \frac{\Delta n_0(x)}{\Delta n_0(x) + n_p}$$

- Die Minoritätsträgerdichte bei  $x = 0$  ist verknüpft mit der **Separation der Quasi-Ferminiveaus**; diese kann durch eine äquivalente Spannung  $U$  ausgedrückt werden:

$$n = n_{p,th} e^{U/U_T}$$



Quelle: Sze, Physics of Semiconductor Devices

# Dynamisches Verhalten der Diffusionszone und Diffusionskapazität

Modulation der bei  $x = 0$  injizierten Ladungsträger führt zu einem zeitabhängigen Ladungsträgerprofil:

$$n'_p(0, t) = \operatorname{Re} \left\{ n'_0(0) + n_1(0) e^{j\omega t} \right\}$$

$$\Rightarrow n'_p(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ n'_0(x) + n_1(x) e^{j\omega t} \right\}$$

$$\text{wobei } n'_0(x) = n'_0(0) e^{-\frac{x}{L_n}}$$

$$n_1(x) = n_1(0) e^{-\frac{\sqrt{1+j\omega\tau_n}x}{L_n}}$$

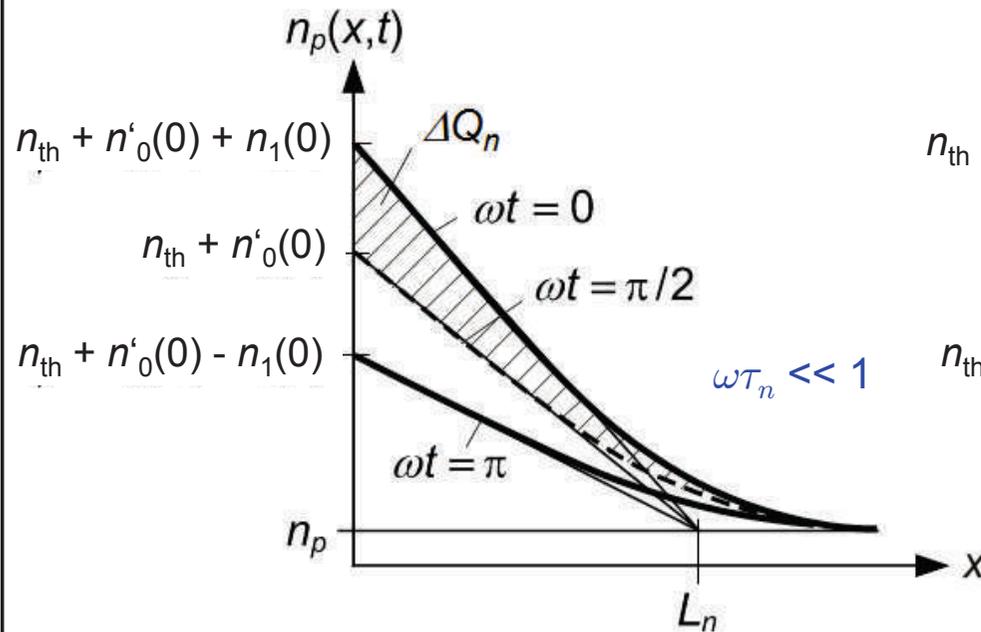
Zugehöriger Diffusionsstrom der Minoritätsträger bei  $x = 0$ :

$$J_n(0, t) = \operatorname{Re} \left\{ J_{n0}(0) + J_{n1}(0) e^{j\omega t} \right\}$$

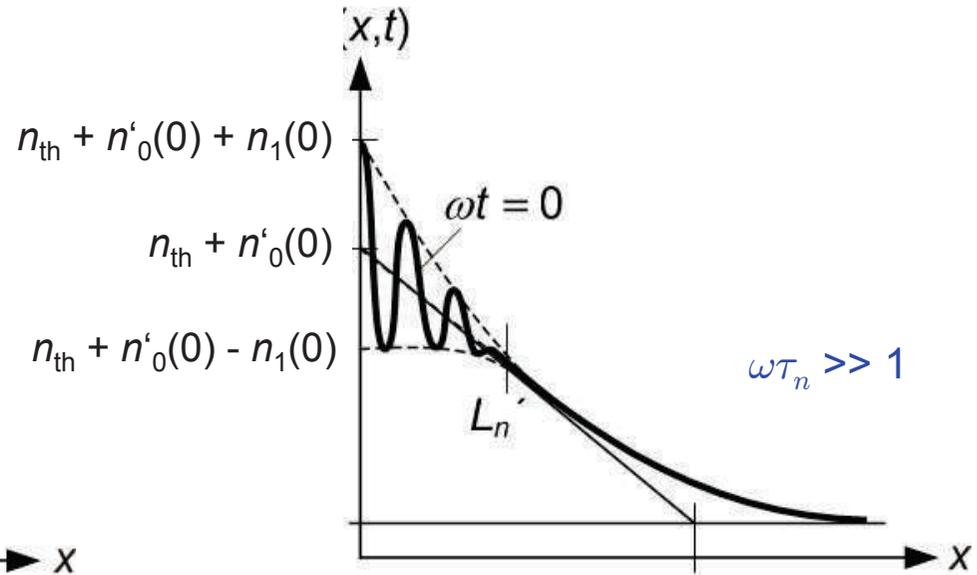
$$\text{wobei } J_{n0}(0) = -\frac{eD_n}{L_n} n'_0(0)$$

$$J_{n1}(0) = -\frac{eD_n}{L_n} \sqrt{1+j\omega\tau_n} n_1(0)$$

# Dynamisches Verhalten der Diffusionszone



Langsame Modulation  
 $(\omega \tau_n \ll 1)$



Schnelle Modulation  
 $(\omega \tau_n > 1)$

- Äquivalente Spannung und Zusammenhang mit der Minoritätsträgerdichte bei  $x = 0$ :

$$U(t) = \text{Re} \left\{ U_0 + \underline{U}_1 e^{j\omega t} \right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} n'_0(0) &= n_{th} e^{\frac{U_0}{U_T}} \\ n_1(0) &= n_{th} \frac{U_1}{U_T} e^{\frac{U_0}{U_T}} \end{aligned}$$

- Betrachte Zusammenhang zwischen den Wechselanteilen der äquivalenten Spannung und des Diffusionsstroms  $I_n = -A J_n(0)$  der Minoritätsträger bei  $x = 0$ :

$$J_n(0, t) = \text{Re} \left\{ J_{n0}(0) + J_{n1}(0) e^{j\omega t} \right\} \quad \text{wobei} \quad \begin{aligned} J_{n0}(0) &= -\frac{eD_n}{L_n} n'_0(0) \\ J_{n1}(0) &= -\frac{eD_n}{L_n} \sqrt{1 + j\omega\tau_n} n_1(0) \end{aligned}$$

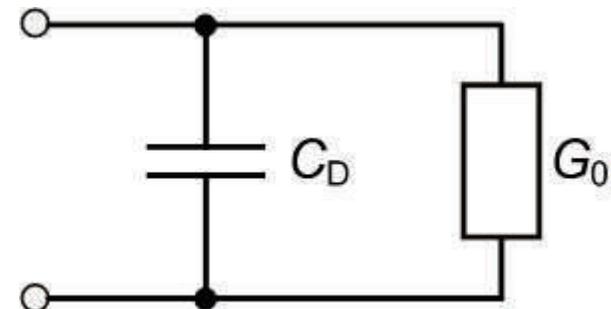
⇒ Repräsentation der Admittanz  $U_1 / (-A J_{n1}(0))$  als Parallelschaltung des Kleinsignalleitwertes  $G_0$  und der Diffusionskapazität  $C_D$ :

$$\underline{Y} = \frac{I_{n1}}{U_1} = G_0 + j\omega C_D$$

wobei  $G_0 = \frac{I_{Sn}}{U_T} e^{\frac{U_0}{U_T}}$

$$C_D = \frac{1}{2} G_0 \tau_n$$

$$I_{Sn} = \frac{AeD_n n_{th}}{L_n} \quad \text{Sättigungsstrom}$$



## Wikipedia-Erklärung:

Wirklich?

Eine **Diode** (griech. : *di* zwei, *doppelt*; *hodos* Weg) ist ein elektrisches Bauelement, das Strom „nur in einer Richtung passieren“ lässt und in der anderen Richtung „wie ein Isolator“ wirkt.

- Dioden bewirken eine Gleichrichtung.
- Sie besitzen eine nichtlineare Kennlinie im Strom-Spannungs-Diagramm

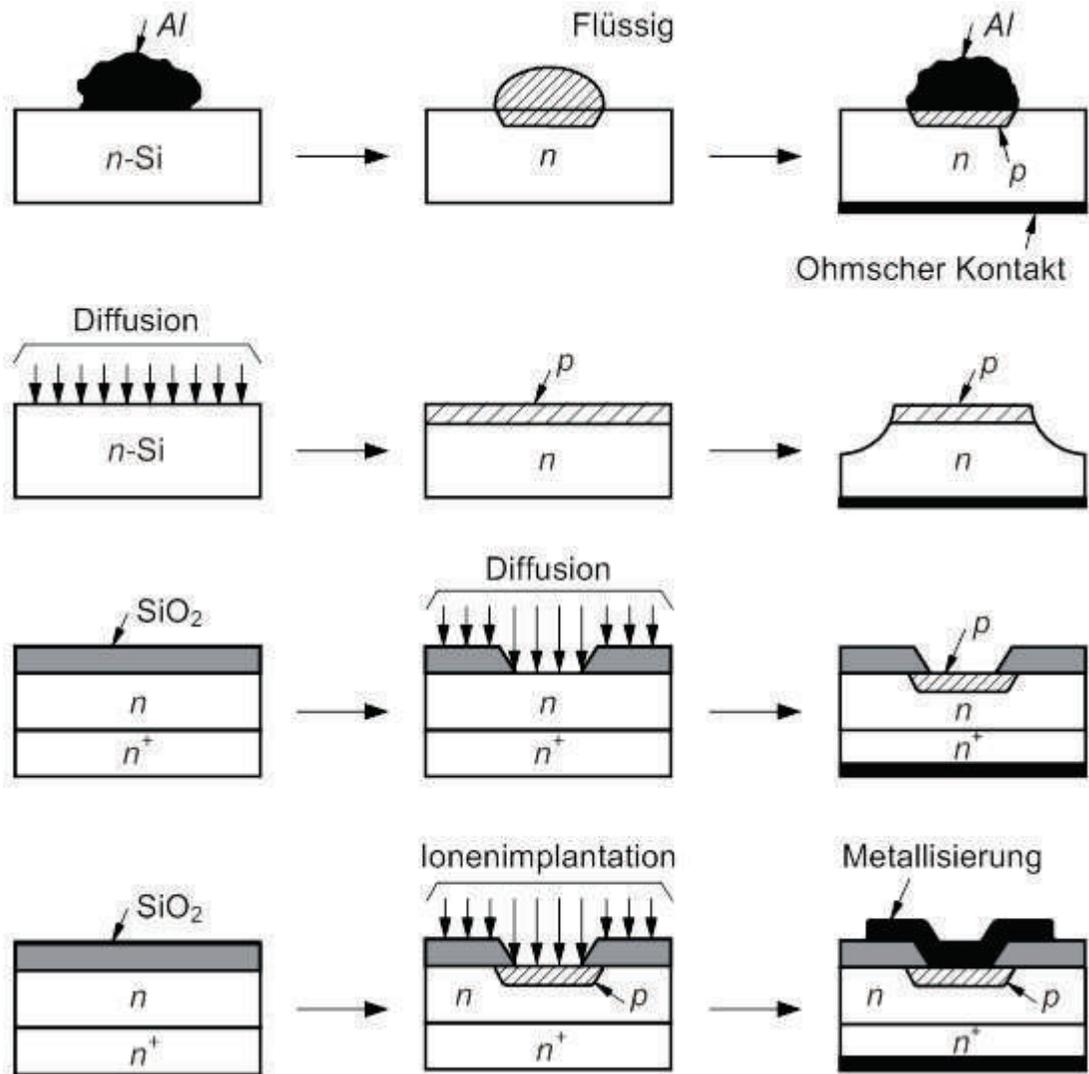
## Vielfältige Anwendungen für Dioden:

- Gleichrichtung
- Mischung zur Aufwärts- und Abwärtskonversion von Signalen
- Steuerbare Widerstände/Dämpfungsglieder in der HF-Technik
- Spannungsstabilisierung und Überspannungsbegrenzung: Z-Dioden (Zener-Dioden)
- Detektion von Licht: Photodiode (PD), Lawinenphotodiode (APD) und Solarzelle
- Erzeugung von Licht: Leuchtdioden (LED), Laserdioden (LD) und Superlumineszenzdioden (SLED)
- usw.

## Vorgehen:

- Betrachtung des pn-Überganges im thermischen Gleichgewicht
- Stationärer Betrieb unter konstanter äußerer Spannung
- Kleinsignal-Betrieb
- Ein- und Ausschaltverhalten im Großsignalbetrieb

# Herstellungsverfahren für pn-Übergänge



Legierungsübergang

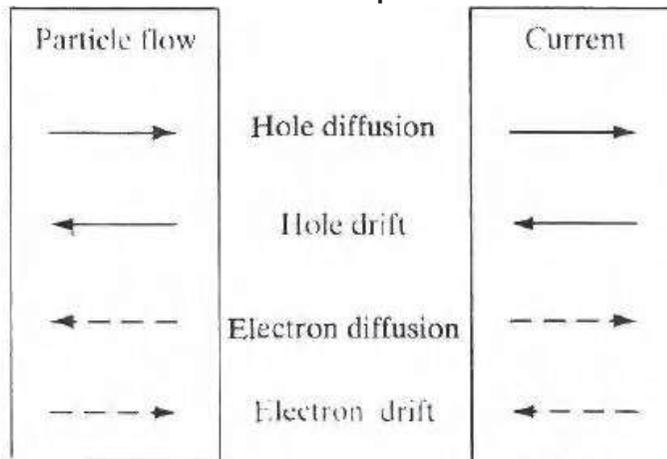
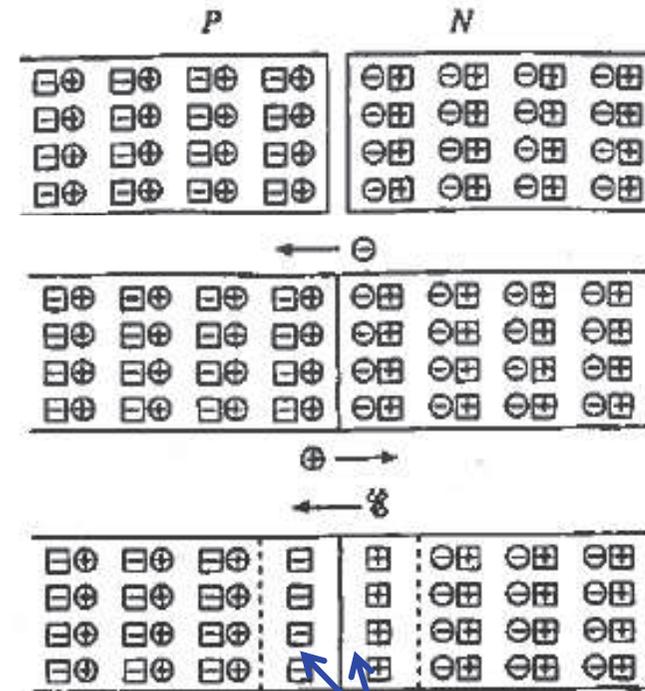
Eindiffusion & Wegätzen

Diffusion & Maske

Ionenimplantation & Maske

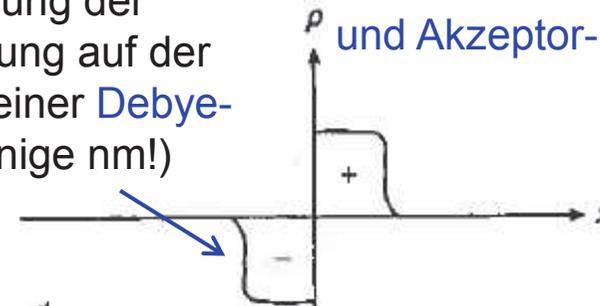
# Der pn-Übergang im thermischen Gleichgewicht: Qualitative Betrachtung

- Isolierte p- und n-Halbleiter vor der Kontaktierung
- Elektronen und Löcher diffundieren über die Grenzfläche und rekombinieren
- **Neuer Gleichgewichtszustand:** Ausbildung einer Raumladungszone; dadurch entsteht ein Potentialgradient, dessen Feldströme gerade die Diffusionsströme kompensieren



Abschirmung der Potentialstörung auf der Längenskala einer **Debye-Länge** (wenige nm!)

Geladene Donator- und Akzeptor-Rümpfe



Bilder: Pierret, Semiconductor device fundamentals; Streetman, Solid-state electronic devices

# Der pn-Übergang im thermischen Gleichgewicht: Quantitative Analyse

- Isolierte p- und n-Halbleiter vor der Kontaktierung

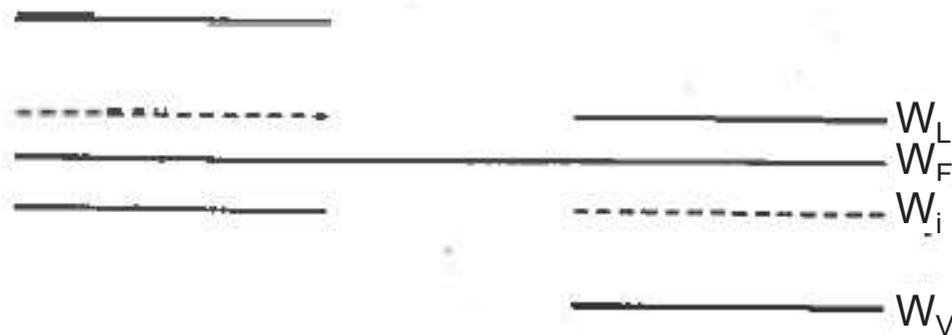


- Diffusion von Elektronen und Löchern führt zu einem Angleichen der Ferminiveaus im therm. Gleichgewicht:

$$J_n = n\mu_n \nabla W_{F_n} = 0$$

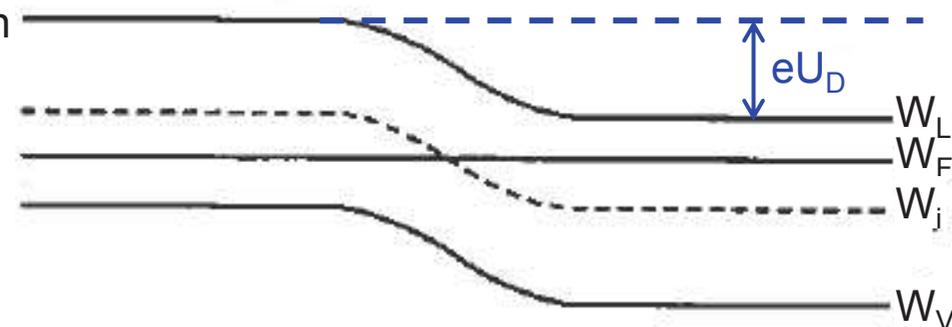
$$J_p = p\mu_p \nabla W_{F_p} = 0$$

$$\Rightarrow W_{F_n}(x) = W_{F_p}(x) = W_F(x) \\ = \text{const}_x$$



- Die Potentialdifferenz zwischen den beiden ungestörten n- und p-Gebieten entspricht einer Diffusionsspannung („Built-in potential“)  $U_D$ :

$$U_D = U_T \ln \left( \frac{n_A n_D}{n_i^2} \right)$$



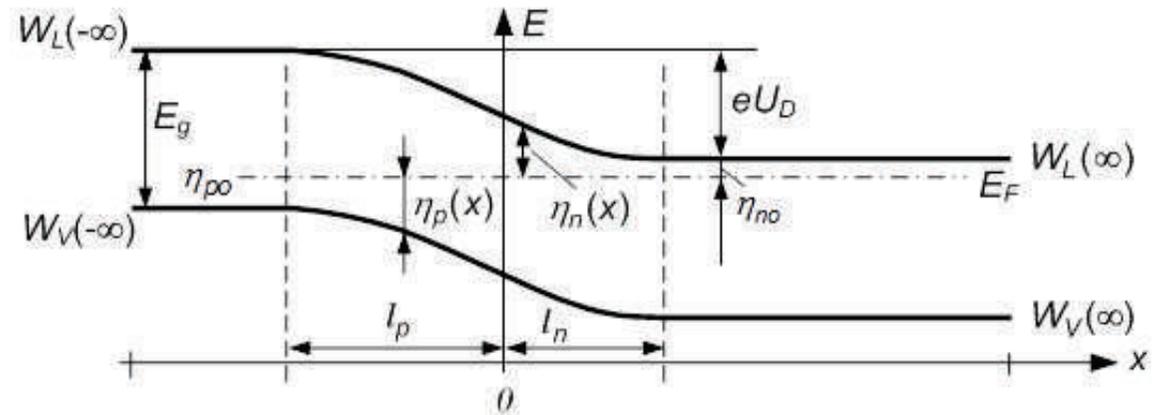
Bilder: Pierret, Semiconductor device fundamentals

# Bemerkungen zur Diffusionsspannung

- Die Diffusionsspannung hängt über  $U_T = kT/e$  und  $n_i^2$  von der Temperatur ab

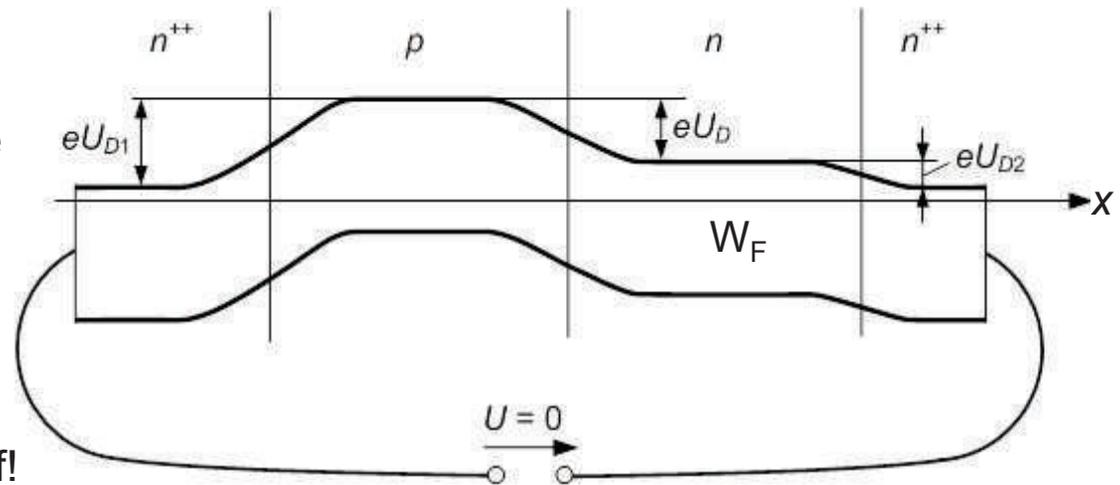
$$U_D = U_T \ln \left( \frac{n_A n_D}{n_i^2} \right)$$

- Mit wachsender Dotierstoffkonzentration nähert sich  $eU_D$  der Bandlücke  $W_g$  an



- Die Diffusionsspannung kann nicht einfach durch Messung an den Klemmen bestimmt werden, und sie kann auch nicht zum Treiben eines Stromes in einem äußeren Stromkreis verwendet werden.

**Grund:** In einem geschlossenen Stromkreis heben sich die Diffusionsspannungen gegenseitig auf!



# Bemerkungen zur Diffusionsspannung

- Diffusionsspannungen in den Halbleitern Ge, Si, und GaAs für verschiedene Dotierungskonzentrationen

Stark vereinfachtes Bild einer Si-Diode: Leitfähig ab einer Vorwärtsspannung von 0.7 V

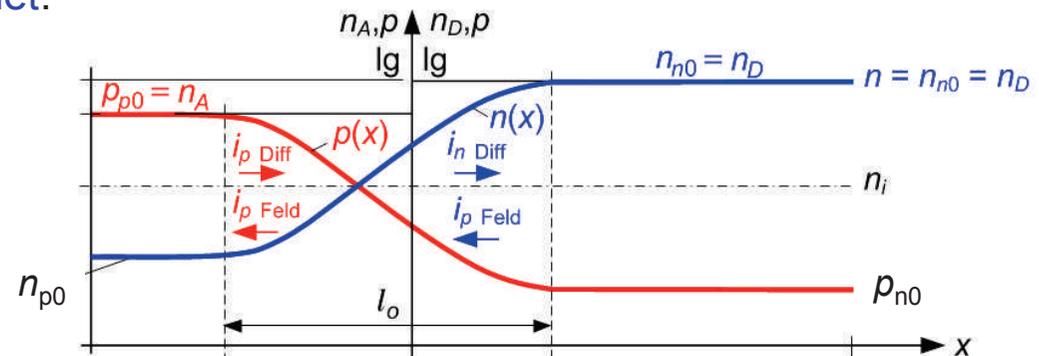
T = 300 K	Ge	Si	GaAs
$n_i^2 / \text{cm}^{-6}$	$5,8 \cdot 10^{26}$	$2,1 \cdot 10^{20}$	$3,2 \cdot 10^{12}$
$n_A / \text{cm}^{-3}$	$10^{15}$	$10^{15}$	$10^{15}$
$n_D / \text{cm}^{-3}$	$10^{15}$	$10^{15}$	$10^{15}$
$U_D / \text{V}$	<b>0,18</b>	<b>0,56</b>	<b>1,0</b>
$n_A / \text{cm}^{-3}$	$10^{15}$	$10^{15}$	$10^{15}$
$n_D / \text{cm}^{-3}$	$10^{18}$	$10^{18}$	$10^{18}$
$U_D / \text{V}$	<b>0,36</b>	<b>0,73</b>	<b>1,18</b>
$n_A / \text{cm}^{-3}$	$10^{18}$	$10^{18}$	$10^{18}$
$n_D / \text{cm}^{-3}$	$10^{18}$	$10^{18}$	$10^{18}$
$U_D / \text{V}$	<b>0,53</b>	<b>0,90</b>	<b>1,35</b>

- Aus der Diffusionsspannung folgt unmittelbar der folgende Zusammenhang zwischen der Majoritätsträgerkonzentration im p- oder n-Gebiet und der Minoritätsträgerkonzentration im gegenüberliegenden n - oder p -Gebiet.

$$n_{p0} = n_{n0} e^{-\frac{U_D}{U_T}} = n_D e^{-\frac{U_D}{U_T}}$$

$$p_{n0} = p_{p0} e^{-\frac{U_D}{U_T}} = n_A e^{-\frac{U_D}{U_T}}$$

(bei Störstellenerschöpfung)



# Ladungsträgerverteilung und Bandverlauf im pn-Übergang

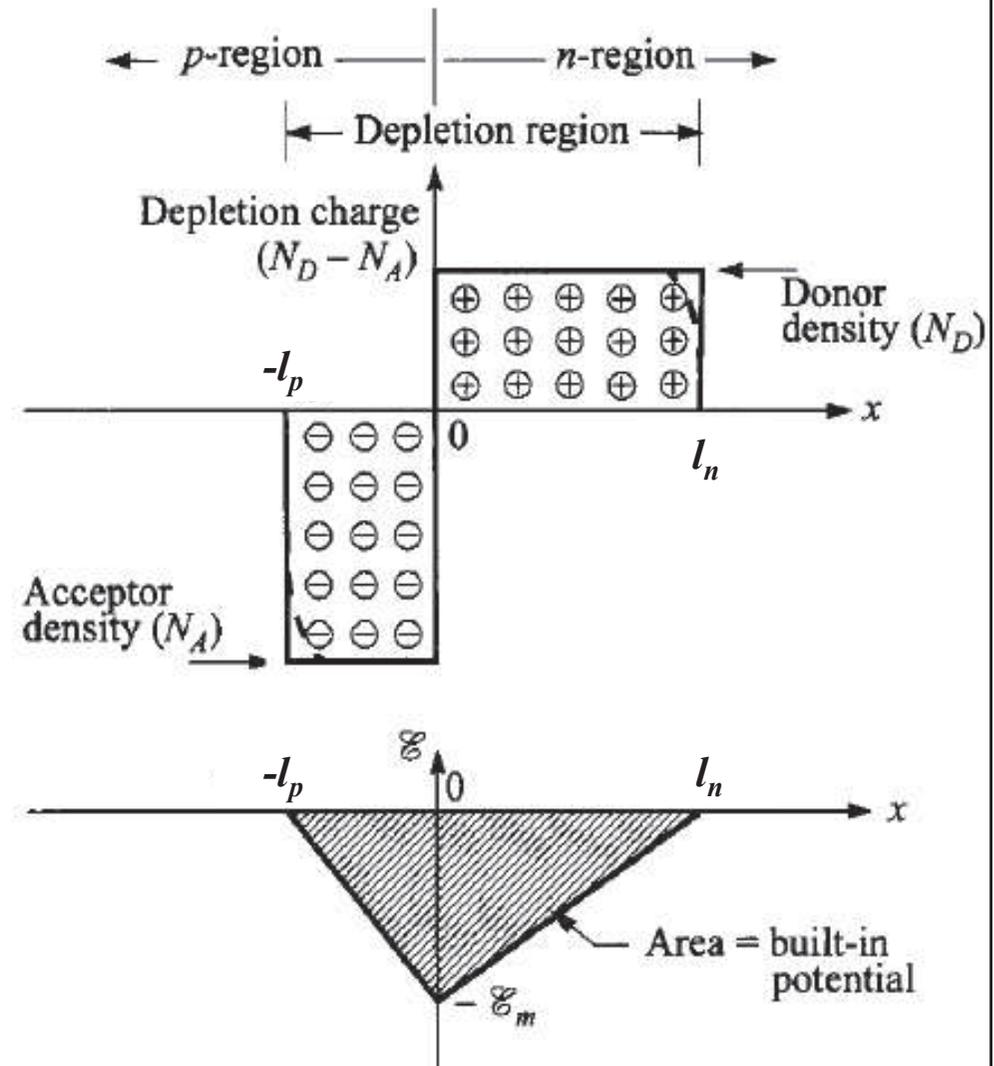
Vereinfachende Annahmen:

- **Störstellenerschöpfung** weit entfernt vom Übergang
- **Schottky-Näherung**: Keine beweglichen Ladungsträger in den Raumladungszonen (RLZ) („Verarmung“), d.h.,

$$n(x) = p(x) = 0 \quad \text{für} \quad -l_p < x < l_n$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -l_p \vee x > l_n \\ -en_A & \text{für } -l_p < x < 0 \\ en_D & \text{für } 0 < x < l_n \end{cases}$$

**Anmerkung:** Die Länge der RLZ beträgt typischerweise mehrere Debye-Längen! Das lokale Potential ändert sich aber bereits über eine Debye-Länge um  $U_T$ , was zu einer sehr abrupten Änderung der Trägerverteilung auf einer linearen Skala führt. Die Schottky-Näherung sollte daher zu einem sehr zuverlässigen Ergebnis führen!



Bils: Sze, Physics of Semiconductor Devices

# Ladungsträgerverteilung und Bandverlauf im pn-Übergang

Berechnung des **elektrischen Feldes** in der RLZ aus Maxwell-Gleichung  $\nabla \cdot (\epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}) = \rho$

$$E_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -l_p \vee x > l_n \\ -\frac{en_A}{\epsilon_0 \epsilon_r} (x + l_p) & \text{für } -l_p < x < 0 \\ -\frac{en_A}{\epsilon_0 \epsilon_r} l_p + \frac{en_D}{\epsilon_0 \epsilon_r} x & \text{für } 0 < x < l_n \end{cases}$$

wobei  $n_A l_p = n_D l_n$

**Extremum der elektrischen Feldstärke** bei  $x = 0$ :

$$E_m = -\frac{en_A}{\epsilon_0 \epsilon_r} l_p = -\frac{en_D}{\epsilon_0 \epsilon_r} l_n$$

Berechnung des **Potentialverlaufs** in der RLZ aus  $\nabla \Phi = -\mathbf{E}$

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -l_p \\ \frac{en_A}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (x + l_p)^2 & \text{für } -l_p < x < 0 \\ U_D - \frac{en_D}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (x - l_n)^2 & \text{für } 0 < x < l_n \\ U_D & \text{für } x > l_n \end{cases}$$

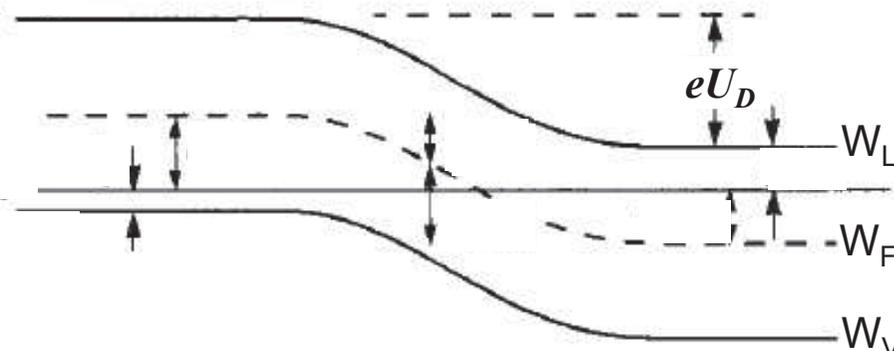
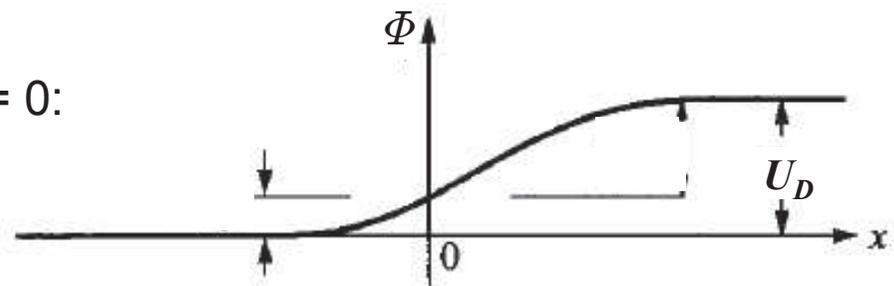
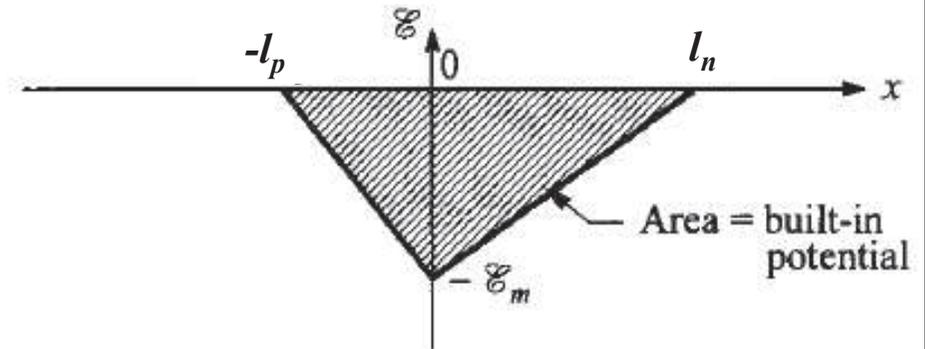


Bild: Sze, Physics of Semiconductor Devices

# Längen der RLZ im n- und p-Bereich

Die Längen der RLZ im p- und n-Gebiet ergeben sich aus der **Stetigkeit des Potentials** bei  $x = 0$ :

$$l = l_p + l_n = \sqrt{\frac{2\epsilon_r\epsilon_0}{e} U_D \left( \frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_D} \right)}$$

$$l_p = l \frac{n_D}{n_A + n_D}$$

$$l_n = l \frac{n_A}{n_A + n_D}$$

$$E_m = - \sqrt{\frac{2e}{\epsilon_r\epsilon_0} \frac{U_D}{\left( \frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_D} \right)}}$$

**Parameter von pn-Übergängen** in Ge, Si und GaAs bei verschiedenen Dotierungen

$T = 300 \text{ K}$	Ge	Si	GaAs
$\epsilon_r$	16	11,9	13,1
$n_A/\text{cm}^{-3}$	$10^{15}$	$10^{15}$	$10^{15}$
$n_D/\text{cm}^{-3}$	$10^{15}$	$10^{15}$	$10^{15}$
$U_D/\text{V}$	0,18	0,56	1,0
$l_p/\mu\text{m}$	0,4	0,6	0,85
$l_n/\mu\text{m}$	0,4	0,6	0,85
$n_A/\text{cm}^{-3}$	$10^{15}$	$10^{15}$	$10^{15}$
$n_D/\text{cm}^{-3}$	$10^{18}$	$10^{18}$	$10^{18}$
$U_D/\text{V}$	0,36	0,73	1,18
$l_p/\mu\text{m}$	0,8	1	1,3
$l_n/\mu\text{m}$	0,0008	0,001	0,0013
$n_A/\text{cm}^{-3}$	$10^{18}$	$10^{18}$	$10^{18}$
$n_D/\text{cm}^{-3}$	$10^{18}$	$10^{18}$	$10^{18}$
$U_D/\text{V}$	0,53	0,9	1,35
$l_p/\mu\text{m}$	0,02	0,02	0,03
$l_n/\mu\text{m}$	0,02	0,02	0,03

# Vorlesung 8

02.12.2013

# Ladungsträgerverteilung und Bandverlauf im pn-Übergang

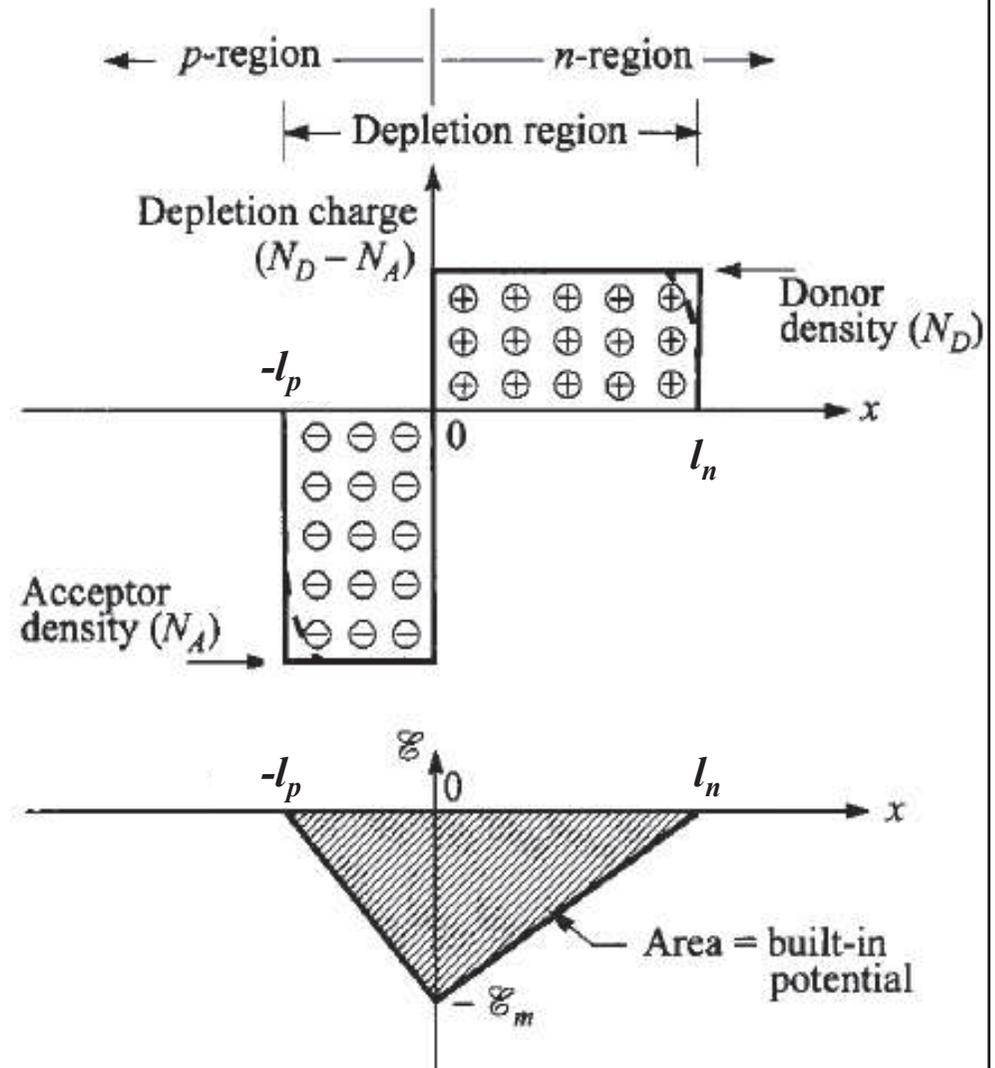
Vereinfachende Annahmen:

- **Störstellenerschöpfung** weit entfernt vom Übergang
- **Schottky-Näherung**: Keine beweglichen Ladungsträger in den Raumladungszonen (RLZ) („Verarmung“), d.h.,

$$n(x) = p(x) = 0 \quad \text{für} \quad -l_p < x < l_n$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -l_p \vee x > l_n \\ -en_A & \text{für } -l_p < x < 0 \\ en_D & \text{für } 0 < x < l_n \end{cases}$$

**Anmerkung:** Die Länge der RLZ beträgt typischerweise mehrere Debye-Längen! Das lokale Potential ändert sich aber bereits über eine Debye-Länge um  $U_T$ , was zu einer sehr abrupten Änderung der Trägerverteilung auf einer linearen Skala führt. Die Schottky-Näherung sollte daher zu einem sehr zuverlässigen Ergebnis führen!



Bils: Sze, Physics of Semiconductor Devices

# Ladungsträgerverteilung und Bandverlauf im pn-Übergang

Berechnung des **elektrischen Feldes** in der RLZ aus Maxwell-Gleichung  $\nabla \cdot (\epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}) = \rho$

$$E_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -l_p \vee x > l_n \\ -\frac{en_A}{\epsilon_0 \epsilon_r} (x + l_p) & \text{für } -l_p < x < 0 \\ -\frac{en_A}{\epsilon_0 \epsilon_r} l_p + \frac{en_D}{\epsilon_0 \epsilon_r} x & \text{für } 0 < x < l_n \end{cases}$$

wobei  $n_A l_p = n_D l_n$

**Extremum der elektrischen Feldstärke** bei  $x = 0$ :

$$E_m = -\frac{en_A}{\epsilon_0 \epsilon_r} l_p = -\frac{en_D}{\epsilon_0 \epsilon_r} l_n$$

Berechnung des **Potentialverlaufs** in der RLZ aus  $\nabla \Phi = -\mathbf{E}$

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -l_p \\ \frac{en_A}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (x + l_p)^2 & \text{für } -l_p < x < 0 \\ U_D - \frac{en_D}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (x - l_n)^2 & \text{für } 0 < x < l_n \\ U_D & \text{für } x > l_n \end{cases}$$

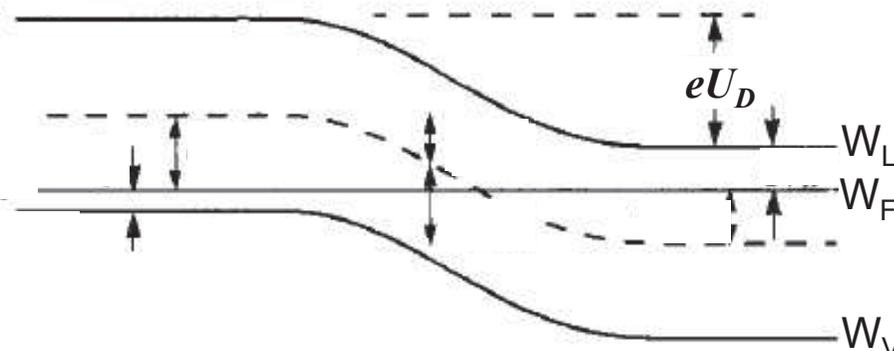
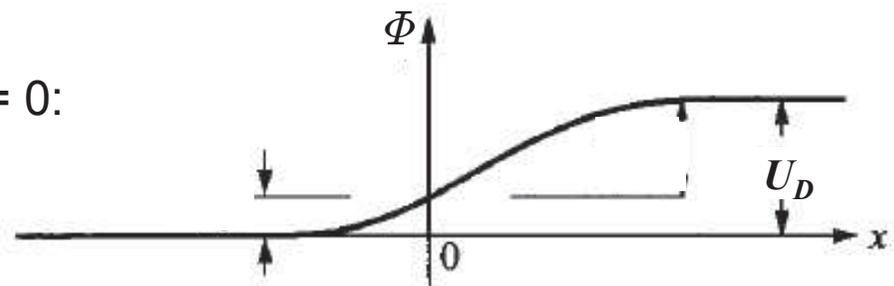
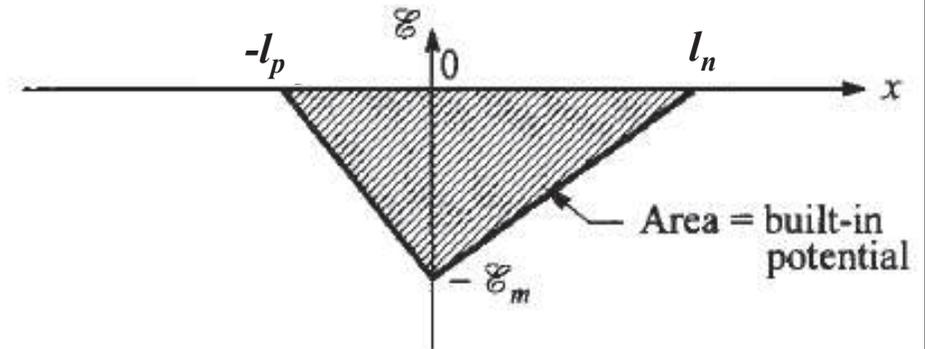


Bild: Sze, Physics of Semiconductor Devices

# Längen der RLZ im n- und p-Bereich

Die Längen der RLZ im p- und n-Gebiet ergeben sich aus der **Stetigkeit des Potentials** bei  $x = 0$ :

$$l = l_p + l_n = \sqrt{\frac{2\epsilon_r\epsilon_0}{e} U_D \left( \frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_D} \right)}$$

$$l_p = l \frac{n_D}{n_A + n_D}$$

$$l_n = l \frac{n_A}{n_A + n_D}$$

$$E_m = - \sqrt{\frac{2e}{\epsilon_r\epsilon_0} \frac{U_D}{\left( \frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_D} \right)}}$$

**Parameter von pn-Übergängen** in Ge, Si und GaAs bei verschiedenen Dotierungen

$T = 300 \text{ K}$	Ge	Si	GaAs
$\epsilon_r$	16	11,9	13,1
$n_A/\text{cm}^{-3}$	$10^{15}$	$10^{15}$	$10^{15}$
$n_D/\text{cm}^{-3}$	$10^{15}$	$10^{15}$	$10^{15}$
$U_D/V$	0,18	0,56	1,0
$l_p/\mu\text{m}$	0,4	0,6	0,85
$l_n/\mu\text{m}$	0,4	0,6	0,85
$n_A/\text{cm}^{-3}$	$10^{15}$	$10^{15}$	$10^{15}$
$n_D/\text{cm}^{-3}$	$10^{18}$	$10^{18}$	$10^{18}$
$U_D/V$	0,36	0,73	1,18
$l_p/\mu\text{m}$	0,8	1	1,3
$l_n/\mu\text{m}$	0,0008	0,001	0,0013
$n_A/\text{cm}^{-3}$	$10^{18}$	$10^{18}$	$10^{18}$
$n_D/\text{cm}^{-3}$	$10^{18}$	$10^{18}$	$10^{18}$
$U_D/V$	0,53	0,9	1,35
$l_p/\mu\text{m}$	0,02	0,02	0,03
$l_n/\mu\text{m}$	0,02	0,02	0,03

# Ladungsträgerverteilung in der Raumladungszone

**Anmerkung:** Die Berechnung der Trägerverteilung in der RLZ steht auf den ersten Blick im Widerspruch zur Schottky-Näherung, da dort angenommen wurde, dass in der RLZ keine freie Ladungsträger vorliegen. Diese Annahme stellt aber nur eine Näherungslösung dar und ist daher nicht selbstkonsistent. Unter Verwendung des aus der Schottky-Näherung gewonnenen Potentials lässt sich deshalb eine nichtverschwindende Ladungsträgerdichte in der RLZ abschätzen, die jedoch sehr klein sein sollte (um Größenordnungen kleiner als die Dotierungsdichte!). Damit lässt sich die Gültigkeit der Schottky-Näherung überprüfen!

$$n(x) = N_L e^{-\frac{W_L(x) - W_F}{kT}}, \quad p(x) = N_V e^{-\frac{W_F - W_V(x)}{kT}}$$

⇒ Verlauf der **Löcherdichte in der RLZ des p-Halbleiters** nahe bei  $x = -l_p$ :

$$p_p(x) = n_A e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x - l_p}{L_{Dp}} \right)^2} \quad \text{wobei} \quad L_{Dp} = \sqrt{\frac{\epsilon U_T}{e n_A}} \quad \text{Debye-Länge im } p\text{-Halbleiter}$$

Verlauf der **Elektronendichte in der RLZ des p-Halbleiters** nahe bei  $x = l_n$ :

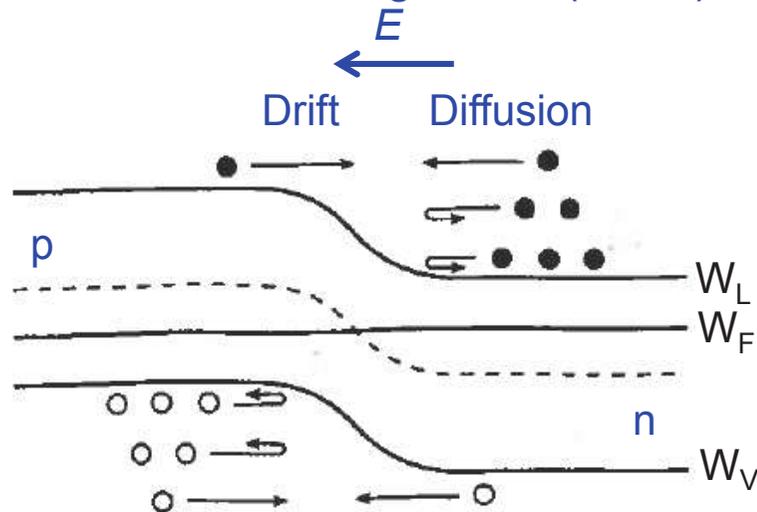
$$n_n(x) = n_D e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x - l_n}{L_{Dn}} \right)^2} \quad \text{wobei} \quad L_{Dn} = \sqrt{\frac{\epsilon U_T}{e n_D}} \quad \text{Debye-Länge im } n\text{-Halbleiter}$$

⇒ „Gauß-förmiger“ Abfall der Ladungsträgerdichte an der Kante der RLZ über eine Strecke, die durch die **Debye-Länge** gegeben ist und typischerweise nur wenige nm beträgt

⇒ **Annahme einer vollständig verarmten RLZ (Schottky Näherung) gerechtfertigt!**

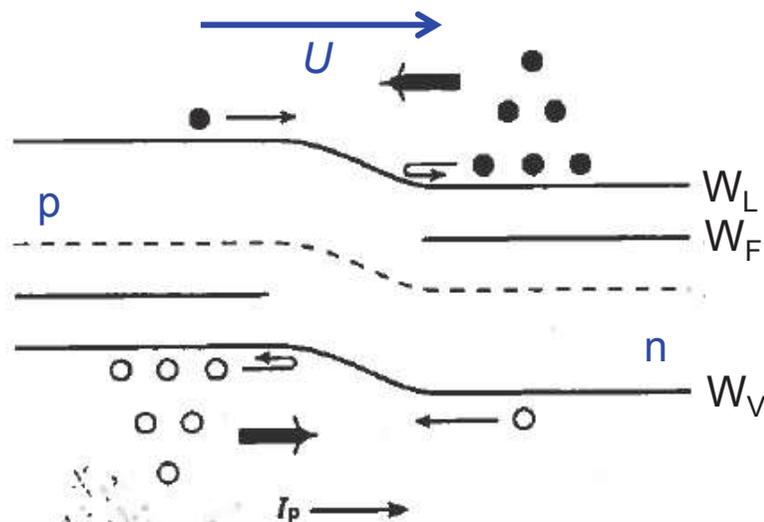
# Der pn-Übergang im Nichtgleichgewicht: Qualitative Beschreibung

Thermisches Gleichgewicht ( $U = 0$ ):



Diffusions- und Driftströme  
kompensieren sich  
gegenseitig

Spannung in Durchlassrichtung ( $U > 0$ ; „Vorwärts“)

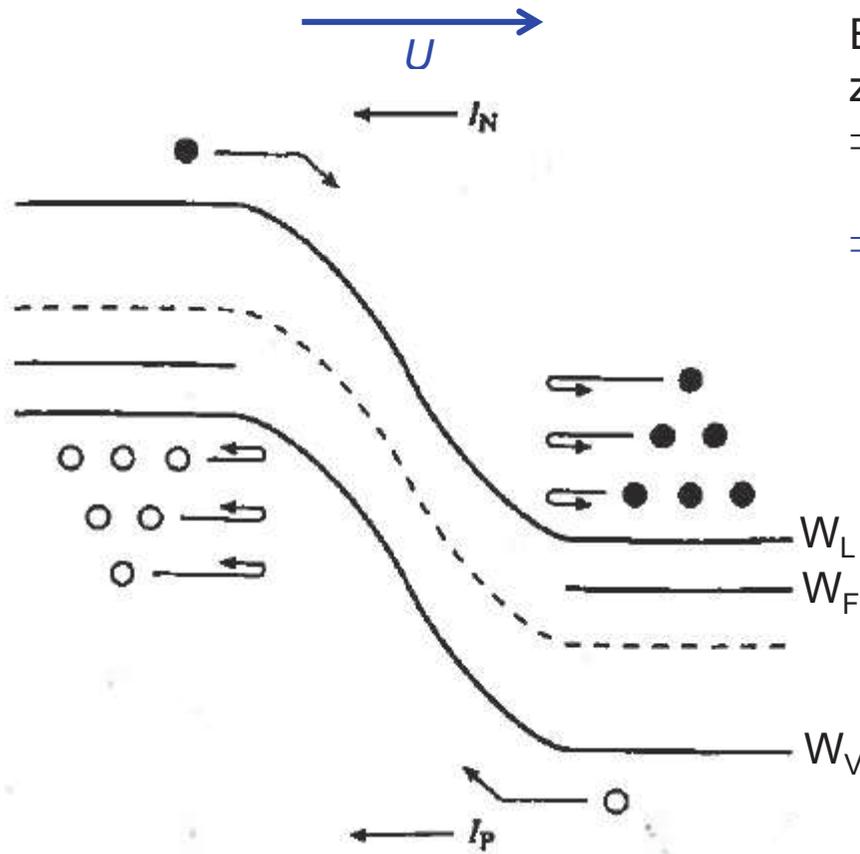


Externe Spannung  $U > 0$  **verkleinert die Potentialstufe** zwischen p- und n-Seite  
 $\Rightarrow$  Mehr Elektronen (Löcher) aus dem n-Halbleiter (p-Halbleiter) gelangen in den p-Halbleiter (n-Halbleiter)  
 $\Rightarrow$  **Diffusionsströme überwiegen**  
 $\Rightarrow$  **Starker Stromfluss in Vorwärtsrichtung**

Bilder: Pierret, Semiconductor Device Fundamentals

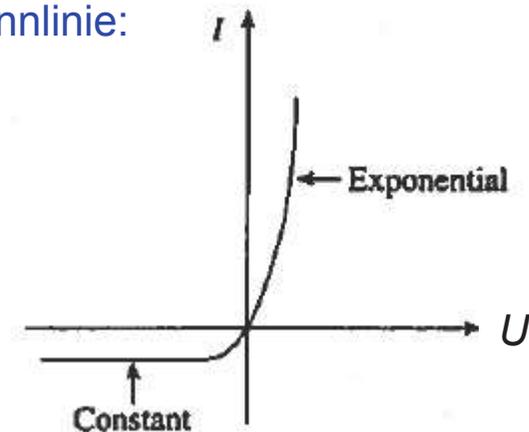
# Der pn-Übergang im Nichtgleichgewicht: Qualitative Beschreibung

Spannung in Sperrrichtung ( $U < 0$ ; „Rückwärts“)



Externe Spannung  $U < 0$  erhöht die Potentialstufe zwischen p- und n-Seite  
⇒ Verringerung der Diffusionsströme; es bleiben die verhältnismäßig kleinen Feldströme  
⇒ **Schwacher Stromfluss in Rückwärtsrichtung**

Kennlinie:



Bilder: Pierret, Semiconductor Device Fundamentals

# Der pn-Übergang im Nichtgleichgewicht: Quantitative Analyse

Breite der **Raumladungszone** wird durch die Gesamtspannung ( $U_D - U$ ) bestimmt  
 $\Rightarrow$  Ersetzen von  $U_D$  durch  $(U_D - U)$  in den Formeln für die Breite der RLZ im Gleichgewichtsfall

$$l = \sqrt{\frac{2\epsilon_r\epsilon_0}{e} (U_D - U) \left( \frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_D} \right)}$$

$$E_m = - \sqrt{\frac{2e}{\epsilon_r\epsilon_0} \frac{U_D - U}{\left( \frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_D} \right)}}$$

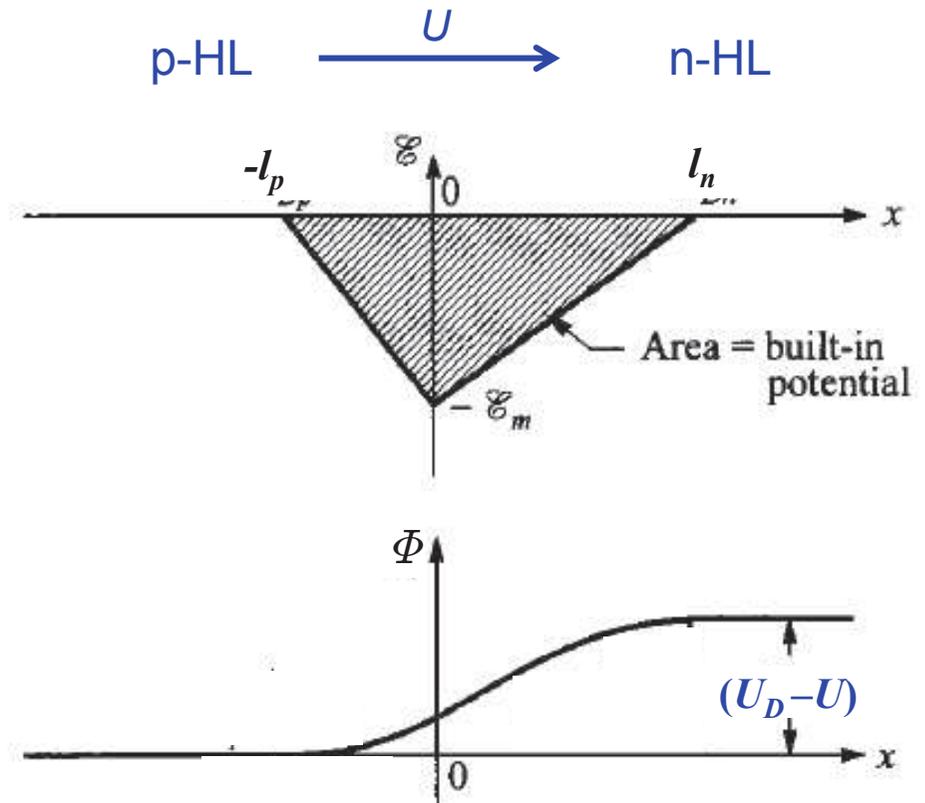


Bild: Sze, Physics of Semiconductor Devices

# Der pn-Übergang im Nichtgleichgewicht: Quantitative Analyse für den Fall der Vorwärtsspannung

## Ergebnis der qualitativen Analyse:

Zusätzliche Elektronen gelangen in den p-Bereich, Löcher in den n-Bereich

⇒ Kein thermisches Gleichgewicht; Beschreibung durch Quasi-Ferminiveaus mit Separation  $eU$ .

## Weitere Annahmen:

- Kein Spannungsabfall in den Bahngebieten
- Die Quasi-Ferminiveaus der Elektronen ( $W_{Fn}$ ) und Löcher ( $W_{Fp}$ ) ändern sich in der (sehr dünnen) RLZ nicht wesentlich:

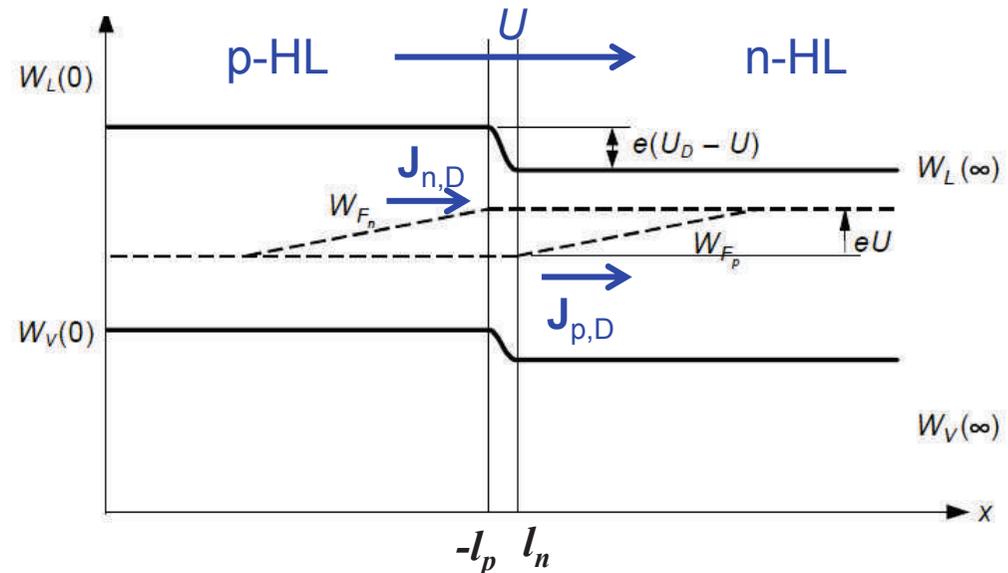
$$n_p(-l_p) = n_D e^{\frac{(U-U_D)}{U_T}} = n_{p0} e^{\frac{U}{U_T}}$$

$$p_n(l_n) = n_A e^{\frac{(U-U_D)}{U_T}} = p_{n0} e^{\frac{U}{U_T}}$$

⇒ Die Elektronen- und Löcherdichten am Rande der Raumladungszone erhält man, indem in den Formeln für die Gleichgewichtsdichten die geänderte Potentialdifferenz ( $U_D - U$ ) anstelle von  $U_D$  eingesetzt wird.

- Es liegt **schwache Injektion** vor
- Die **Ladungsträgerrekombination in der Raumladungszone ist vernachlässigbar**; die Gesamtstromdichte kann also berechnet werden aus

$$\mathbf{J} \approx \mathbf{J}_n(-l_p) + \mathbf{J}_p(l_n)$$



# Der pn-Übergang im Nichtgleichgewicht: Quantitative Analyse

Gesamter Strom durch die Diode:  
Annahme: Lange Diffusionszonen

$$I = I_S (e^{U_0/U_T} - 1)$$

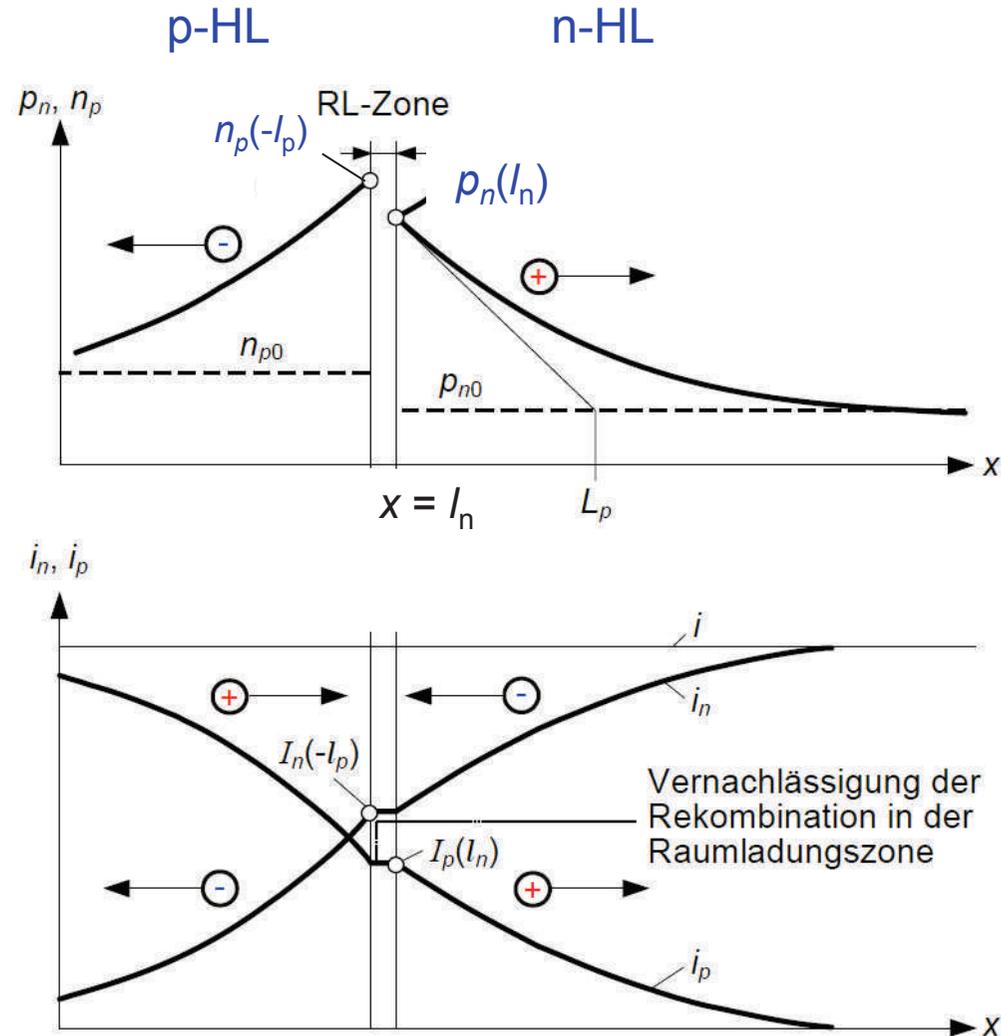
$$I_S = I_{Sn} + I_{Sp}$$

$$I_{Sp} = Ae \frac{D_p p_{n0}}{L_p} = Ae \frac{D_p n_i^2}{L_p n_D}$$

$$I_{Sn} = Ae \frac{D_n n_{p0}}{L_n} = Ae \frac{D_n n_i^2}{L_n n_A}$$

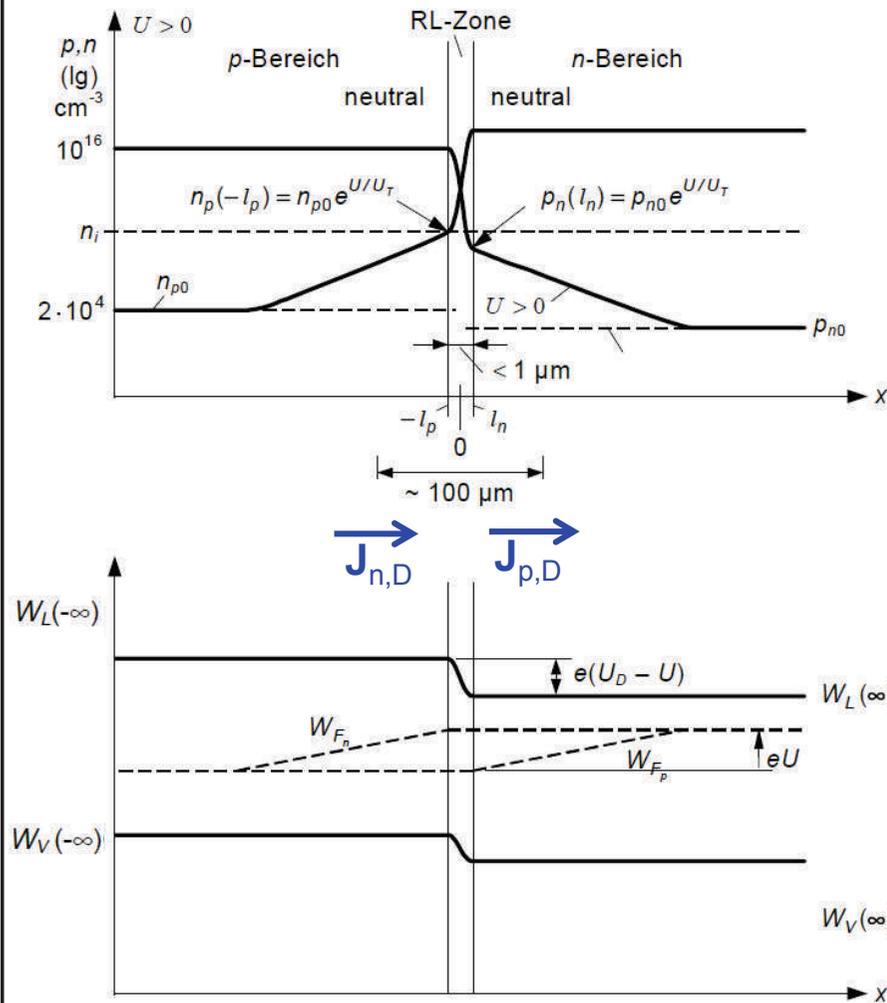
$$I_S = Aen_i^2 \left( \frac{D_n}{L_n n_A} + \frac{D_p}{L_p n_D} \right)$$

Dieselbe Beziehung gilt auch für  
Spannung in Sperrrichtung!

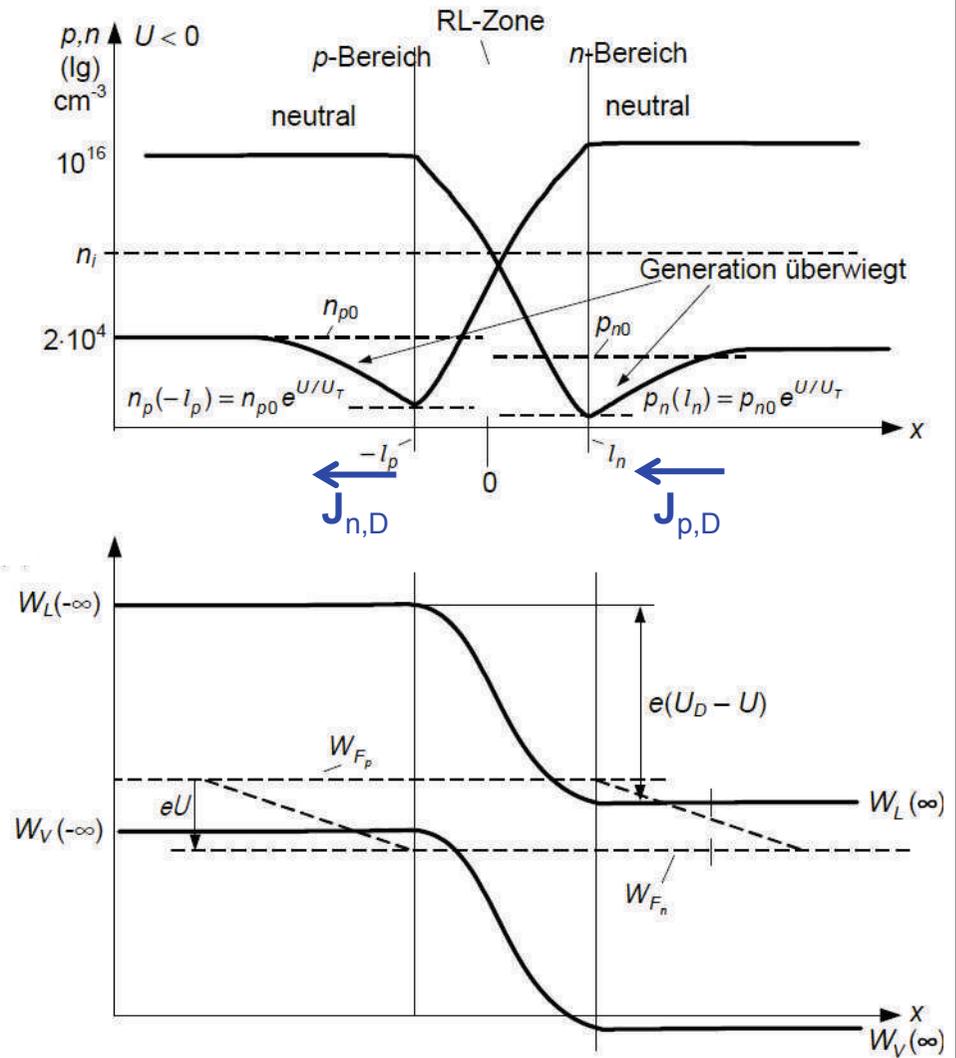


# Der pn-Übergang bei Vorwärts- und Rückwärtsspannung

## Spannung in Durchlassrichtung ( $U > 0$ )

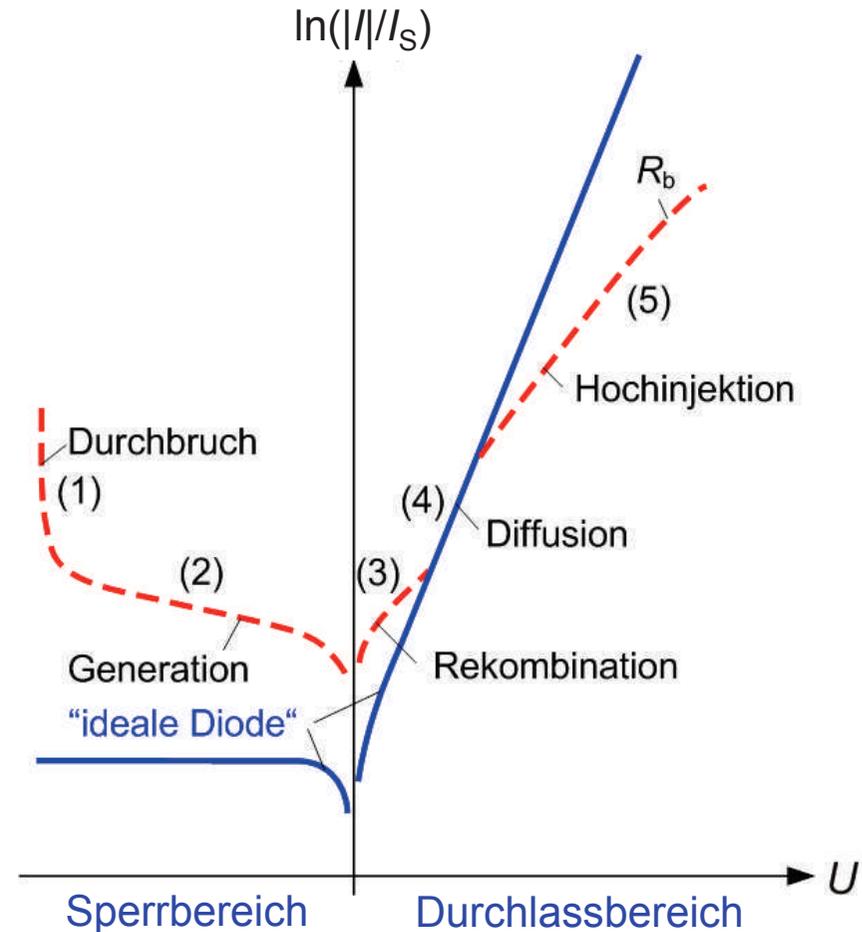


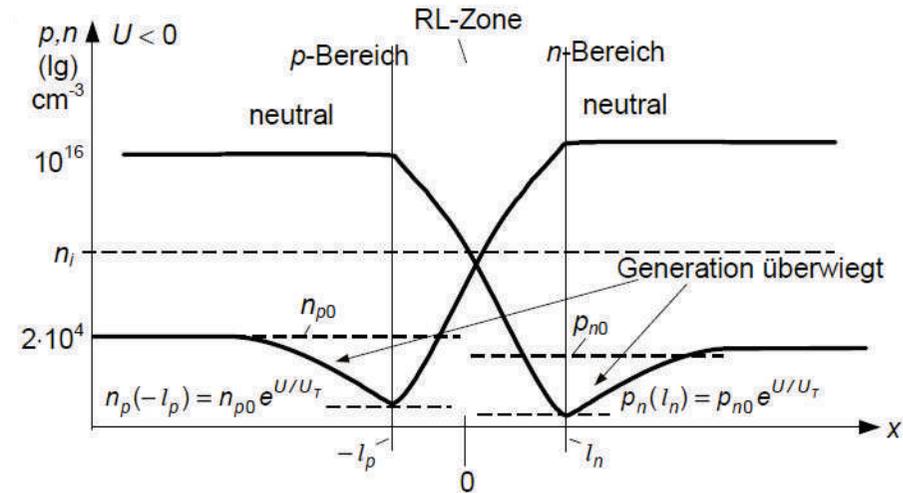
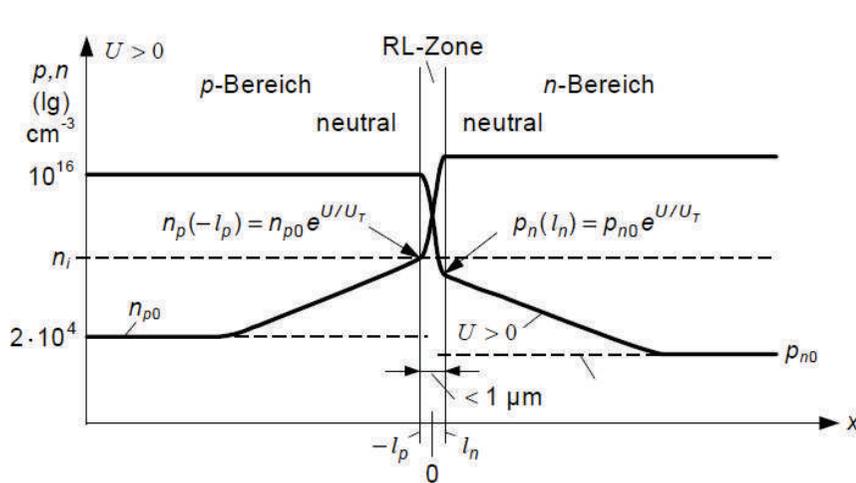
## Spannung in Sperrichtung ( $U < 0$ )



Das bisher besprochene ideale Modell, auch Shockley-Modell genannt, gilt in recht guter Näherung für Germanium-Dioden. Bei Si- und noch stärker bei GaAs- Dioden ergeben sich jedoch **Abweichungen der realen gegenüber der idealen Kennlinie**:

- (1) **Durchbruch** bei großen Sperrspannungen
  - Thermischer Durchbruch
  - Tunnel-Effekt (Zener-Effekt)
  - Lawinendurchbruch
- (2) **Realer Sperrstrom** ist spannungsabhängig und wesentlich größer als vom Shockley-Modell vorhergesagt
  - Leckströme am Rand des pn-Überganges
  - Trägergeneration in der RLZ
- (3) Realer Durchlassstrom ist **bei kleinen Spannungen größer als im Shockley-Modell** und stimmt nur im mittleren Bereich (4) mit der Theorie überein
  - Rekombination in der RLZ
- (4) Realer Durchlassstrom ist **bei großen Spannungen kleiner als im Shockley-Modell**
  - Hochinjektion (HLI) in den Diffusionszonen
  - Spannungsabfall in den Bahngebieten





## Spannung in Durchlassrichtung:

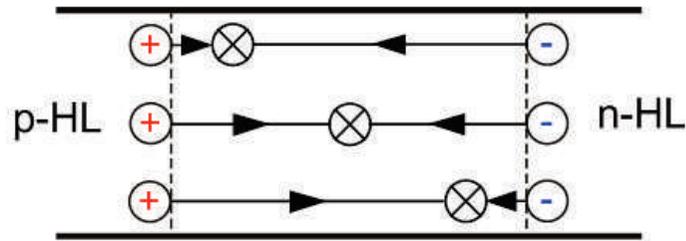
- Erhöhte Trägerdichte in der RLZ:  $n p > n_i^2$
- ⇒ Rekombinationsüberschuss; die dadurch vernichteten Ladungsträger müssen zusätzlich nachgeliefert werden
- ⇒ Zusätzlicher Rekombinationsstrom in Durchlassrichtung

## Spannung in Sperrrichtung:

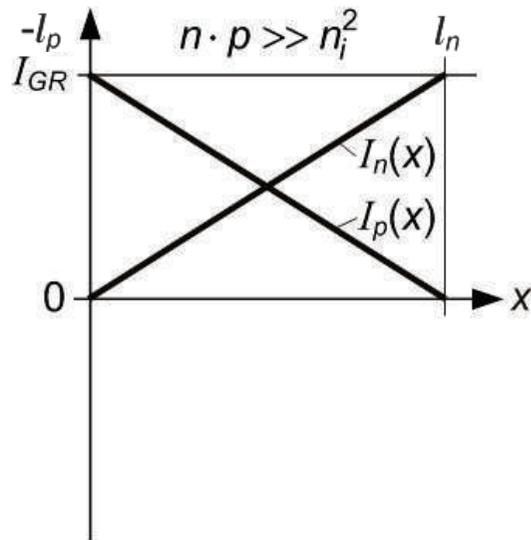
- Verringerte Trägerdichte in der RLZ:  $n p < n_i^2$
- ⇒ Generationsüberschuss; die dadurch erzeugten Ladungsträger werden aus der RLZ abgezogen
- ⇒ Zusätzlicher Generationsstrom in Sperrrichtung

# Generations- und Rekombinationsströme

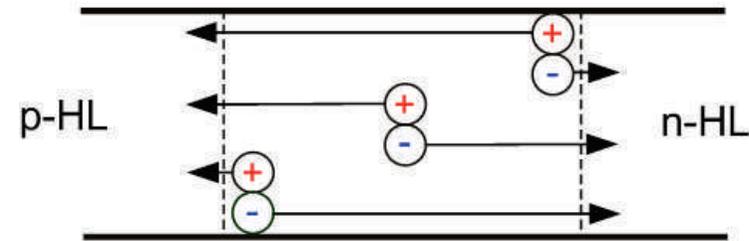
Spannung in Durchlassrichtung  
(Rekombinationsüberschuss)



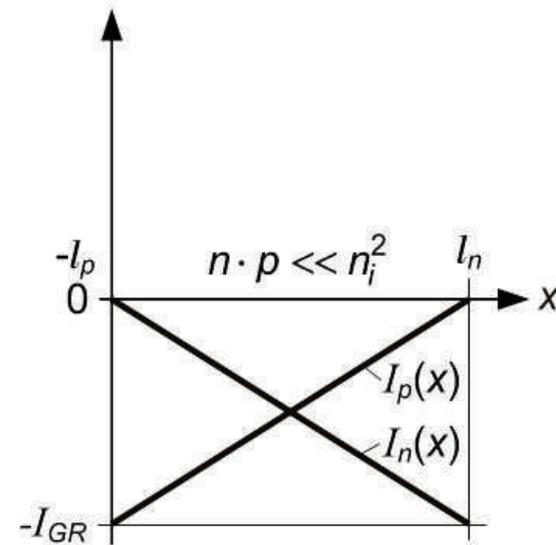
$I_{GR}, I_n, I_p$



Spannung in Sperrichtung  
(Generationsüberschuss)



$I_{GR}, I_n, I_p$



Betrachte Generation und Rekombination nach dem Shockley-Read-Hall-Modell:

$$g - r = \frac{n_i^2 - np}{(n + n'_{th})\tau_p + (p + p'_{th})\tau_n} \quad \text{wobei} \quad n'_{th} = n_{th} \exp\left(\frac{W_T - W_F}{kT}\right)$$

$$p'_{th} = p_{th} \exp\left(\frac{W_F - W_T}{kT}\right)$$

Ladungsträgerkonzentration in der RLZ:  $np = n_i^2 e^{\frac{U}{U_T}}$

Für  $\tau_n = \tau_p = \tau_0$  lässt sich eine obere Grenze für den Betrag der Netto-Generation abschätzen:

$$|g - r| \leq \begin{cases} \frac{n_i}{2\tau_0} & \text{für } \frac{U}{U_T} \ll -1 \\ \frac{n_i}{2\tau_0} \left( e^{\frac{U}{2U_T}} - 1 \right) & \text{für } \frac{U}{U_T} > 1 \end{cases}$$

Zugehörige Generations- und Rekombinationsströme:

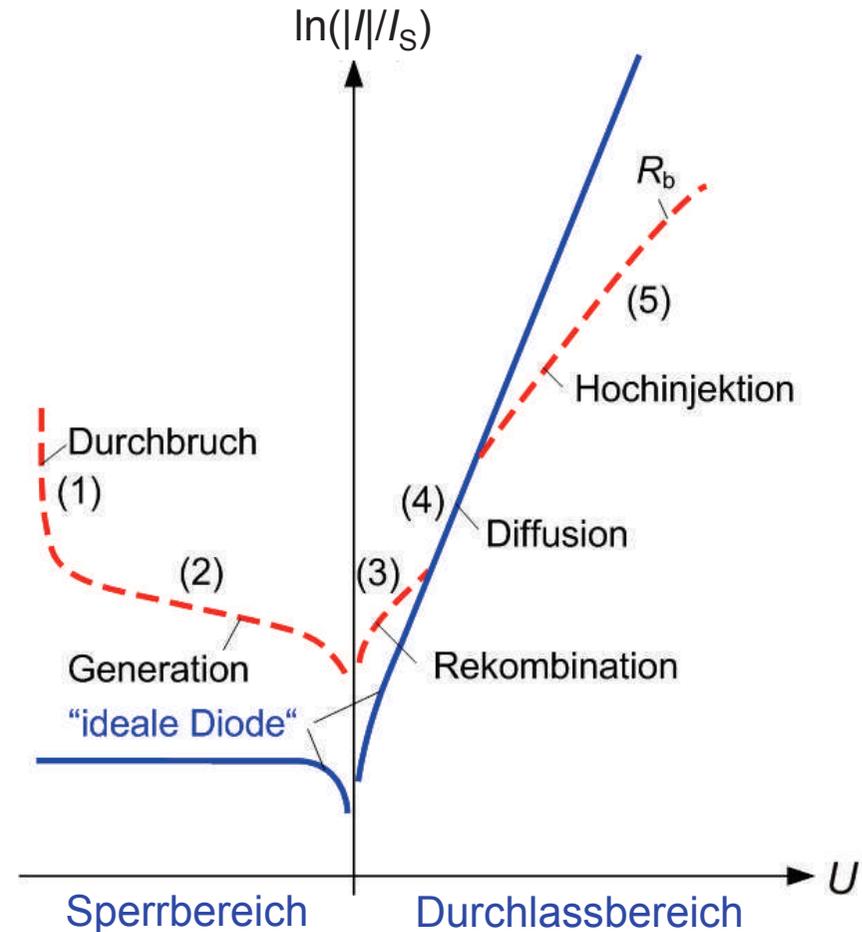
$$I_{GR} = -e \int (g - r) dV \begin{cases} \geq -e \frac{n_i}{2\tau_0} Al & \text{für } \frac{U}{U_T} \ll -1 \\ \leq e \frac{n_i}{2\tau_0} Al \left( e^{\frac{U}{2U_T}} - 1 \right) & \text{für } \frac{U}{U_T} > 1 \end{cases}$$

# Vorlesung 9

09.12.2013

Das bisher besprochene ideale Modell, auch Shockley-Modell genannt, gilt in recht guter Näherung für Germanium-Dioden. Bei Si- und noch stärker bei GaAs- Dioden ergeben sich jedoch **Abweichungen der realen gegenüber der idealen Kennlinie**:

- (1) **Durchbruch** bei großen Sperrspannungen
  - Thermischer Durchbruch
  - Tunnel-Effekt (Zener-Effekt)
  - Lawinendurchbruch
- (2) **Realer Sperrstrom** ist spannungsabhängig und wesentlich größer als vom Shockley-Modell vorhergesagt
  - Leckströme am Rand des pn-Überganges
  - Trägergeneration in der RLZ
- (3) Realer Durchlassstrom ist **bei kleinen Spannungen größer als im Shockley-Modell** und stimmt nur im mittleren Bereich (4) mit der Theorie überein
  - Rekombination in der RLZ
- (5) Realer Durchlassstrom ist **bei großen Spannungen kleiner als im Shockley-Modell**
  - Hochinjektion (HLI) in den Diffusionszonen
  - Spannungsabfall in den Bahngebieten



Unter der Annahme, dass die Dotierungsdichten im n- und im p-Teil etwa gleich groß sind ( $n_A = n_D = n_{\text{dot}}$ ), lässt sich **der Generations-/Rekombinationsstrom** schreiben als:

$$I_{GR} = \begin{cases} -k_{GR}I_S & \text{für } \frac{U}{U_T} \ll -1 \\ k_{GR}I_S \left( e^{\frac{U}{2U_T}} - 1 \right) & \text{für } \frac{U}{U_T} > 1 \end{cases} \quad \text{wobei} \quad k_{GR} = \frac{n_{\text{dot}}l}{4n_iL_0}$$

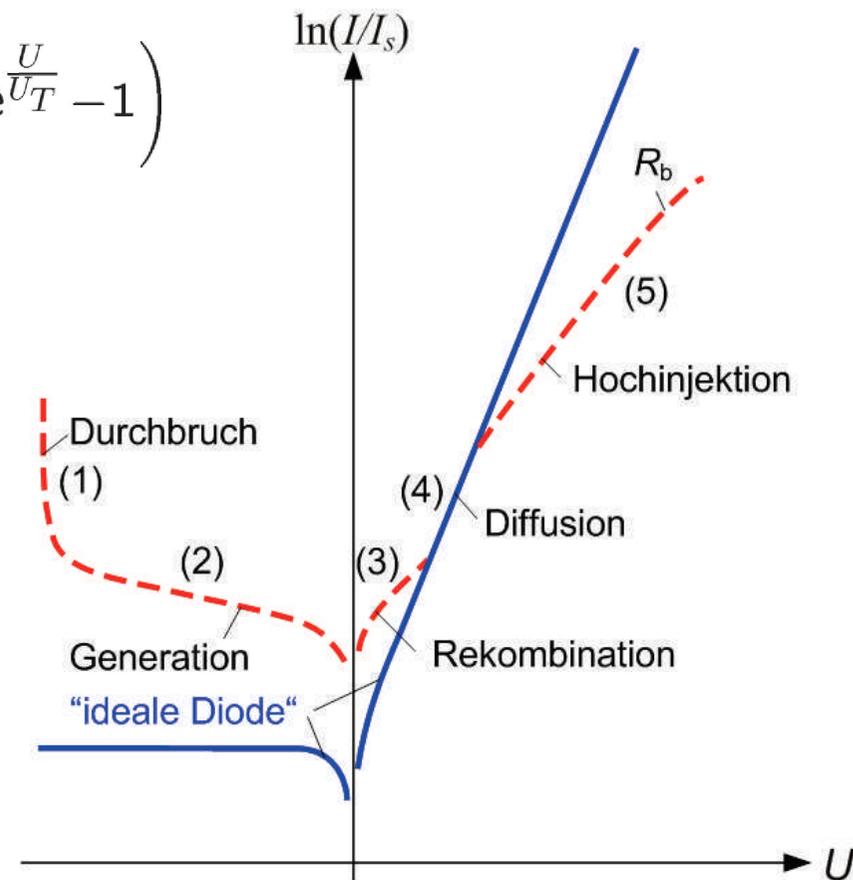
Vergleich mit der idealen Diode:  $I = I_S \left( e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right)$

- Sperrstrom um den Faktor  $k_{GR}$  erhöht
- Keine Sättigung in Sperrrichtung

$$I_{GR} \propto \sqrt{U_D - U}$$

- In Durchlassrichtung dominiert zunächst der **Rekombinationsanteil**  $I_{GR}$ . Dieser wird bei einer bestimmten Spannung  $U$  gerade so groß sein, wie ideale Diodenstrom:

$$\frac{U}{U_T} = 2 \ln k_{GR}$$



In der Praxis wird oft eine **empirische Darstellung** der realen Diodenkennlinie verwendet, die sowohl Diffusions- als auch Rekombinationsströme berücksichtigt:

$$I = I_0 \left( e^{\frac{U}{mU_T}} - 1 \right) \quad m = 1 \dots 2$$

Emissionskoeffizient („Ideality Factor“)

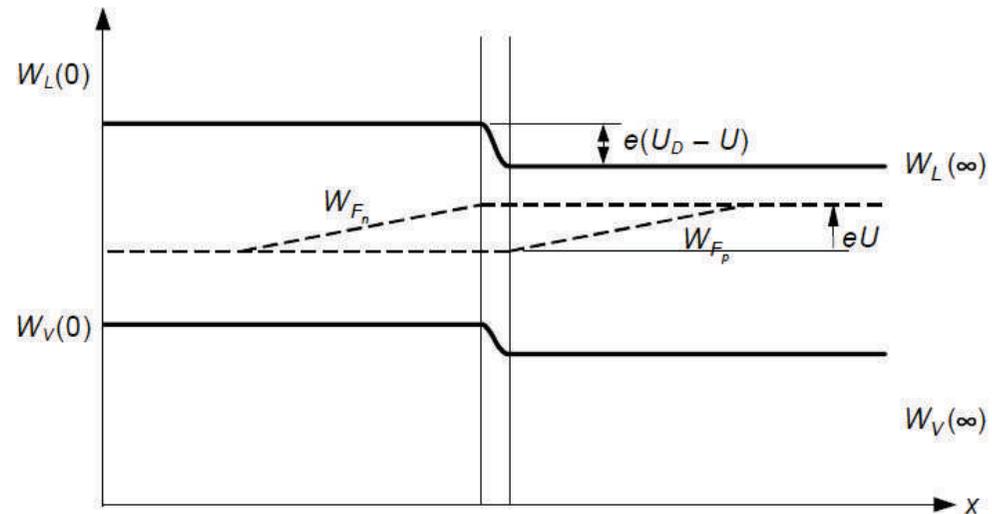
wobei  $I_0 = k_{GR}I_S$ ;  $m \approx 2$  für dominierende Generations- und Rekombinationsströme

$I_0 = I_S$ ;  $m \approx 1$  für dominierende Diffusionsströme

Trägerdichte am Rand der RLZ für große Spannungen in Vorwärtsrichtung:

$$np = n_i^2 e^{\frac{U}{U_T}}$$

$$n \approx p \approx n_i e^{\frac{U}{2U_T}}$$



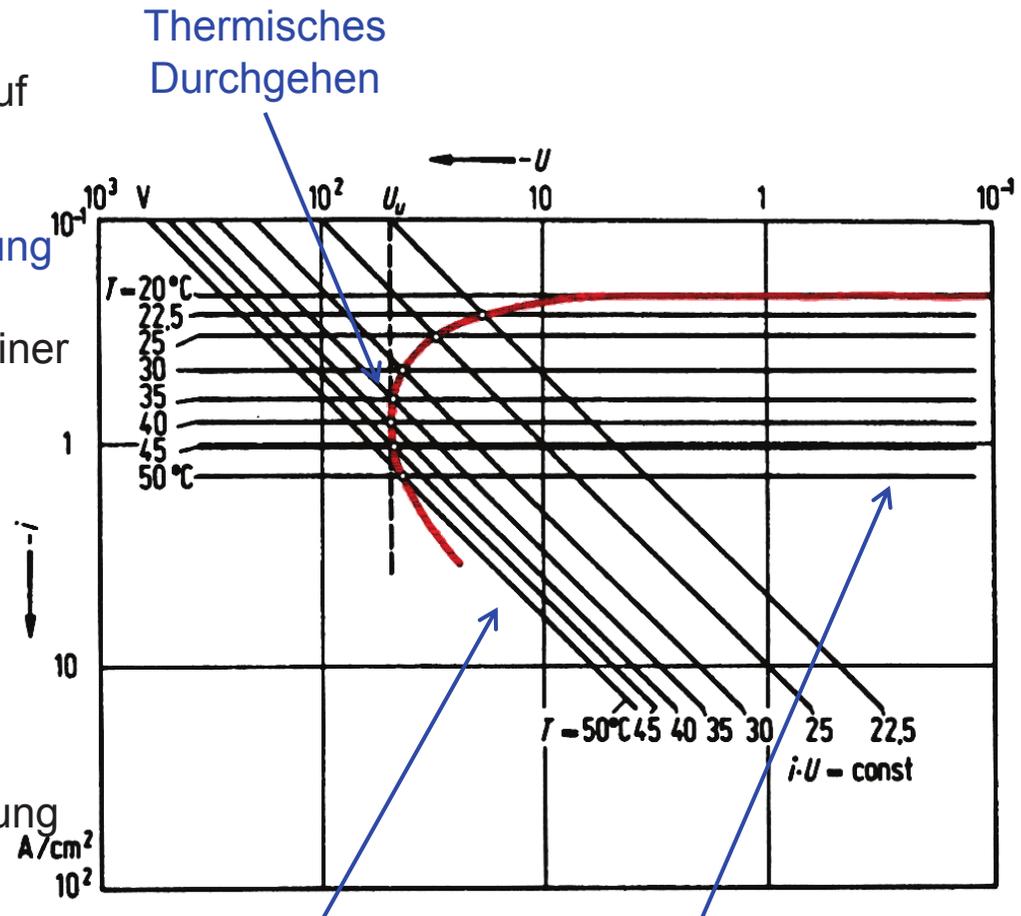
- ⇒ Die **Minoritätsträgerdichte am Rand der RLZ** wächst nur noch mit  $\exp(U/(2U_T))$
- ⇒ Damit verlangsamt sich auch die Zunahme des Diffusionsstromes.
- ⇒ Der Diodenstrom wird für große Vorwärtsspannungen angenähert durch

$$I = I_0 e^{\frac{U}{mU_T}} \quad m = 1 \dots 2 \quad \text{Emissionskoeffizient („Ideality Factor“)}$$

⇒ Ähnliche Näherung wie im Falle dominierender Generations- und Rekombinationsströme!

# Thermischer Durchbruch in pn-Übergängen

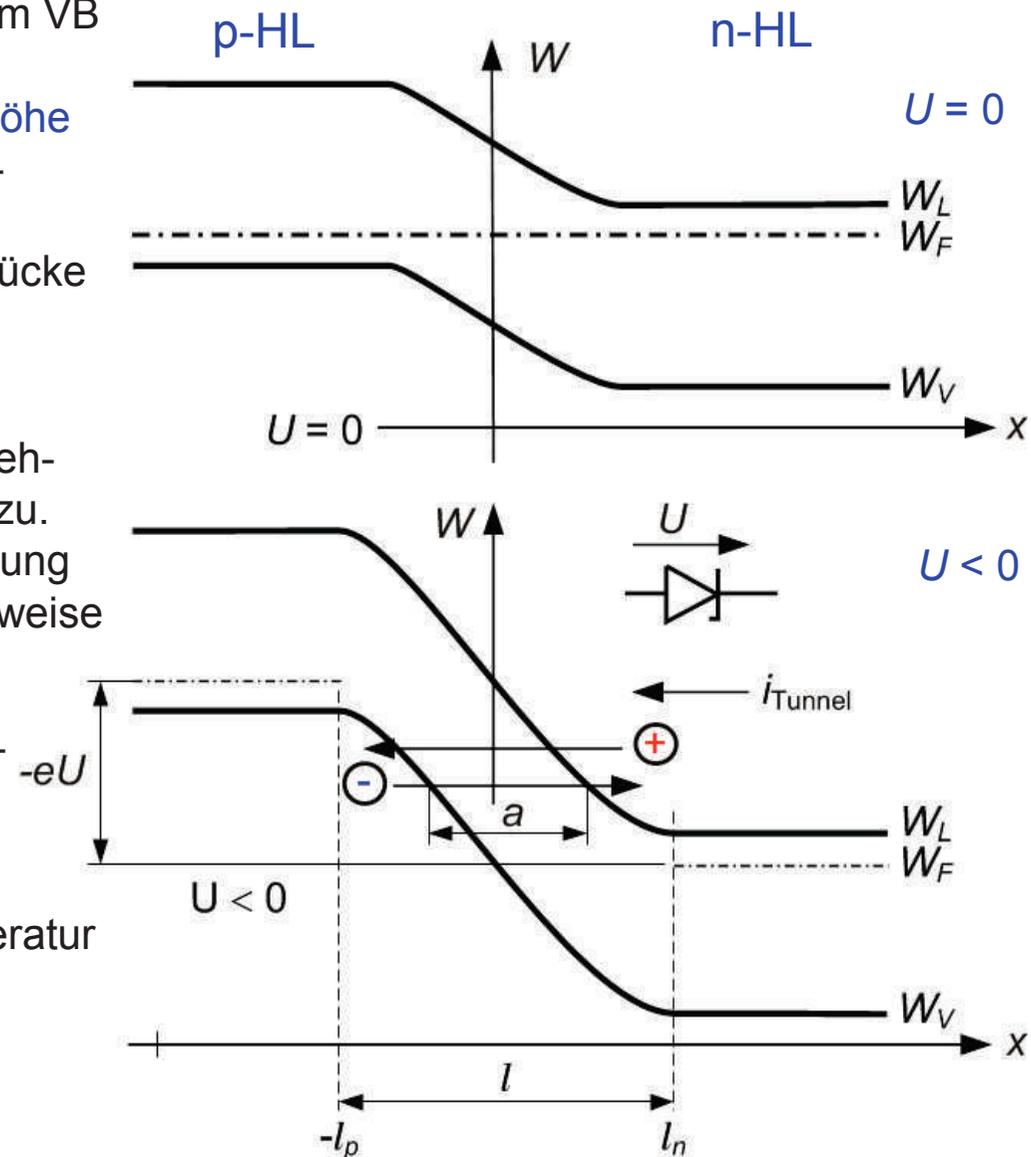
- Verlustleistung in der Diode:  $P=UI$
- ⇒ Führt zu Erwärmung pn-Überganges auf eine Temperatur  $T$ , die vom Widerstand zur Wärmesenke abhängt.
- Gleichzeitig: Sperrstrom und Verlustleistung nehmen mit der Temperatur zu.
- ⇒ Positive Rückkopplung: Ab Erreichen einer gewissen Spannung  $U_U$  (Umkehrspannung, engl. „Turnover Voltage“) erhöht sich der Strom bei gleicher oder gar abnehmender Spannung (Thermisches Durchgehen, „Thermal Runaway“)
- ⇒ Irreversible Zerstörung der Diode (Thermischer Durchbruch), wenn der Strom nicht durch die äußere Beschaltung begrenzt wird.



Besonders anfällig: Halbleiter mit kleiner Bandlücke, z.B. Ge

# Tunnel-Effekt

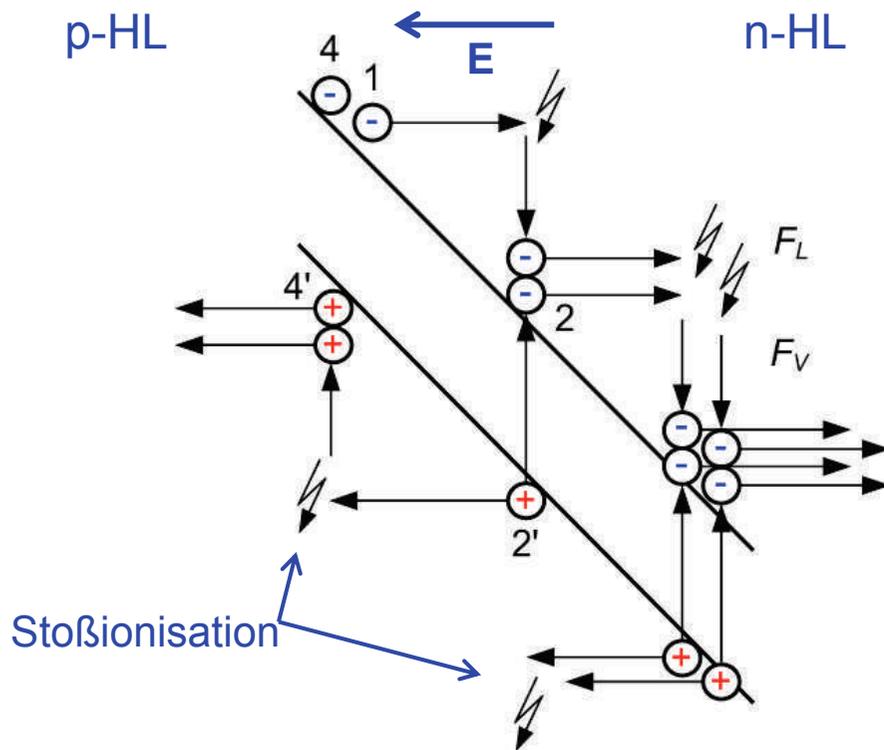
- Bei starker Sperrspannung: Elektronen im VB des  $p$ -Halbleiter (Löcher im LB des  $n$ -Halbleiters) auf gleicher energetischer Höhe wie das LB im  $n$ -Halbleiter (das VB im  $p$ -Halbleiter)
- ⇒ Ladungsträger können durch die Bandlücke („Potentialbarriere der Breite  $a$ “) in die jeweils freien Zustände tunneln.
- Tunnelwahrscheinlichkeit nimmt mit abnehmender Barrierenbreite ( $a$ ) exponentiell zu.
- ⇒ Strom wächst stark mit der Sperrspannung
- ⇒ **Tunneldurchbruch**; reversibel typischerweise für  $|eU| < 4W_G$
- Erforderliche Feldstärken in Si typischerweise ca.  $100 \text{ V}/\mu\text{m}$
- ⇒ Kurze RLZ / hohe Dotierung
- Bandlücke wird mit zunehmender Temperatur kleiner
- ⇒ Durchbruchspannung **nimmt mit zunehmender Temperatur ab**



# Lawinendurchbruch

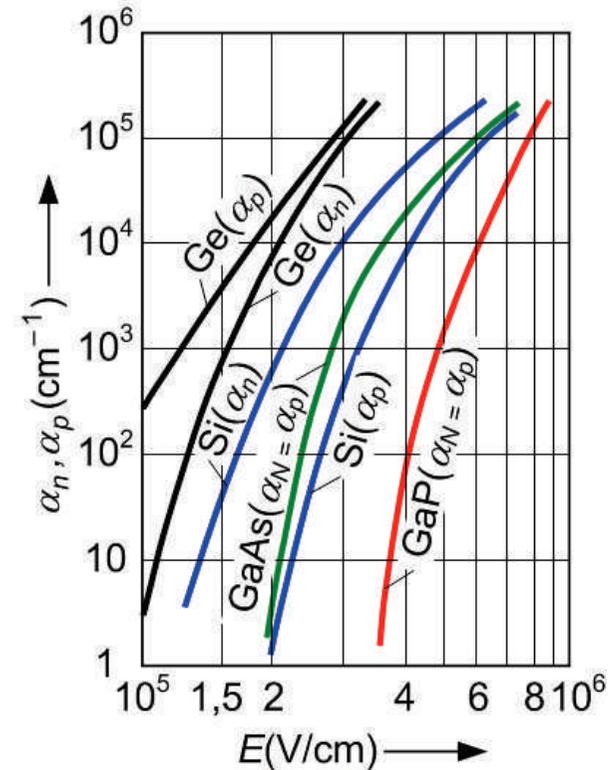
## Lawineneffekt:

- Ladungsträger nehmen bei hoher Feldstärke  $E$  zwischen zwei Stößen so viel Energie auf, dass damit ein Elektron-Loch-Paar erzeugt werden kann (Stoßionisation)
- ⇒ Lawinenartiges Anwachsen der freien Ladungsträger:



## Ionisierungskoeffizienten $\alpha_n$ und $\alpha_p$ :

- Ein primäres Elektron (Loch) erzeugt auf der Laufstrecke  $dx$  im Mittel  $\alpha_n dx$  ( $\alpha_p dx$ ) Trägerpaare.
- Die Ionisierungskoeffizienten  $\alpha_n$  und  $\alpha_p$  nehmen mit Feldstärke zu und nähern sich bei hohen Feldstärken einander an.



Silizium bei 30 V/ $\mu\text{m}$ : Nur Elektronen ionisieren

$$\alpha_n \approx 1 \mu\text{m}^{-1}, \alpha_p \approx 0$$

Vergleich mit Tunneleffekt (relevant ab ca. 100 V/ $\mu\text{m}$  in Si):

- Einfluss des Lawineneffektes hängt vom Produkt aus Ionisierungskoeffizient  $\alpha_n$  und Sperrschichtdicke / ab
- Bei kurzen RLZ dominiert der Tunneleffekt, bei langen RLZ der Lawineneffekt, d.h. schwach dotierte Dioden mit breiter Sperrschicht und Sperrspannungen  $|eU| \geq 6 W_G$  zeigen Lawinendurchbrüche.

Temperaturabhängigkeit:

Steigende Temperatur führt zu einem Absinken der freien Weglänge (Beweglichkeit) und damit zu einer Abnahme der Ionisierungskoeffizienten  
 $\Rightarrow$  Beim Lawinendurchbruch nimmt die Durchbruchsspannung mit der Temperatur zu!

# Lawinenmultiplikationsfaktor $M_0$

**Annahme:** Elektronen und Löcher weisen die gleichen Ionisierungskoeffizienten auf,  $\alpha_n \approx \alpha_p \approx \alpha$

⇒ **Generationsrate** in der RLZ:

$$g = [\alpha_n |I_n| + \alpha_p |I_p|] \frac{1}{eA} = \alpha (|I_n| + |I_p|) \frac{1}{eA} = \frac{\alpha |I|}{eA}$$

**Zugehöriger Stromfluss:**

$$I = -I_s + I_{GR} \quad \text{wobei} \quad I_{GR} = -eA \int_{-l_p}^{l_n} (g - r) dx = I \int_{-l_p}^{l_n} \alpha dx$$

Zusätzlicher Strom infolge von Ladungsträgergeneration

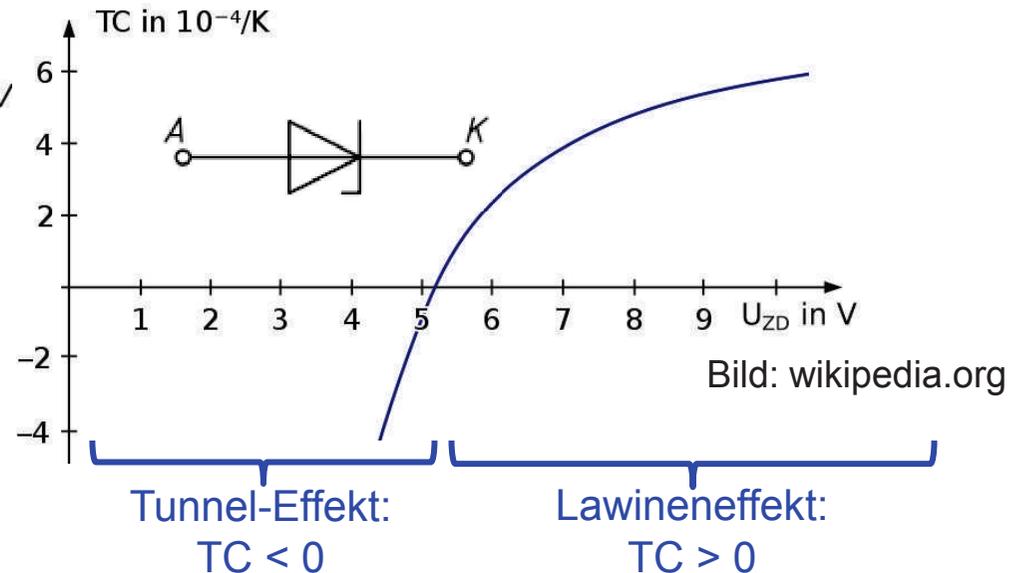
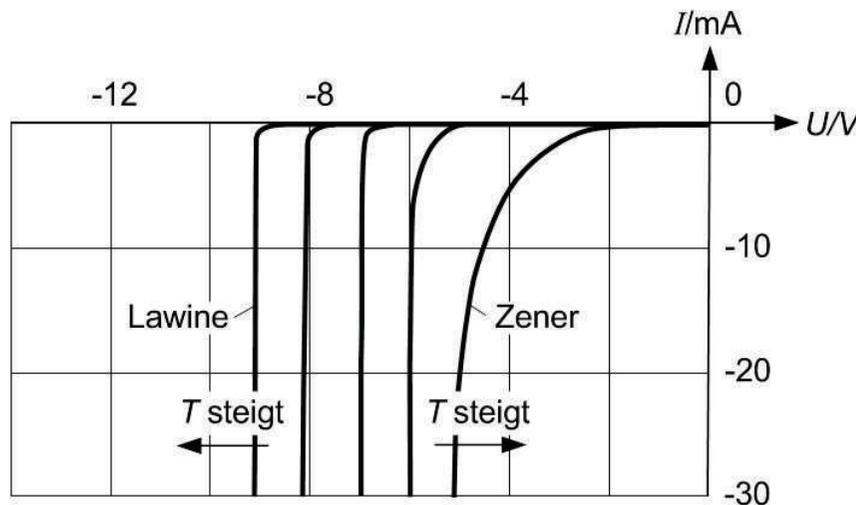
**Gesamtstrom und Lawinenmultiplikationsfaktor:**

$$I = -M_0 I_s \quad M_0 = \frac{1}{1 - \int_{-l_p}^{l_n} \alpha dx}$$

**Empirische Näherung:**

$$M_0 = \frac{1}{1 - \left(\frac{|U|}{U_{BR}}\right)^n}$$

$U_{BR}$  = Durchbruchspannung  
 $n = 1.5 \dots 4$  für Si-Dioden



- **Z-Dioden:** Dioden mit **genau spezifizierter Durchbruchspannung**, die für den **Dauerbetrieb im Durchbruchbereich** ausgelegt sind (Einsatz zur **Spannungsstabilisierung**)
- Beruhen auf einer Kombination von **Zener-Effekt** („Zener-Diode“, kleine Durchbruchspannungen / kurze RLZ) und **Lawinen-Effekt** (große Durchbruchspannungen / lange RLZ)
- **Durchbruchspannung** (Z-Spannung):  $U_Z = 3 \dots 300 \text{ V}$
- Die Z-Spannung hängt stark von der Temperatur ab:  $TC = \left. \frac{dU_Z}{dT} \right|_{T=300 \text{ K}, I_D=\text{const.}}$  **Temperaturkoeffizient**
- Oft ausgelegt als besonders dotierte Si-Diode mit geringer Sperrschichtdicke; dann ergibt sich bei  $U_Z \approx 5 \text{ V}$  eine Mischung aus Tunnel- und Lawinendurchbruch mit einer nahezu temperatur-unabhängigen Durchbruchspannung

**Kleinsignalnäherung:**

$$u(t) = U_0 + u_1(t) \quad \text{wobei} \quad |u_1(t)| \ll |U_0|$$

$$i(t) = I_0 + i_1(t) \quad \text{wobei} \quad |i_1(t)| \ll |I_0|$$

## Quasistationäre Näherung:

Modulation sehr viel langsamer als die Minoritätsträgerrekombination im Halbleiter; d.h. überschüssige Ladungen können problemlos im pn-Übergang rekombinieren und externe Ströme infolge von Ladungsspeichereffekten können vernachlässigt werden.

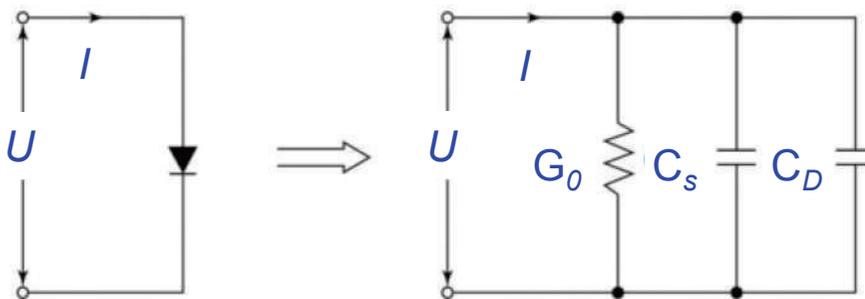
$$I_0 = I_s \left( e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right),$$

$$i_1(t) = G_0 u_1(t) \quad \text{wobei} \quad G_0 = \left. \frac{dI}{dU} \right|_{U=U_0} = \frac{I_0 + I_s}{U_T} \quad \text{Kleinsignalleitwert}$$

$$\frac{G_0}{\Omega} \approx \frac{I/\text{mA}}{26}$$

## Instationärer Fall:

- Schnelle Modulation; erfordert Berücksichtigung von Strömen, die durch Ladungsspeichereffekte im pn-Übergang hervorgerufen werden



Modellierung der Ladungsspeichereffekte durch Kapazitäten im Kleinsignal-ESB:

- Sperrschichtkapazität  $C_s$ : Ladungsspeicherung in der Raumladungszone
- Diffusionskapazität  $C_D$ : Ladungsspeicherung in den Diffusionszonen

# Sperrschichtkapazität

Änderung der Breite der RLZ bei Änderung der angelegten Spannung  $U$ :

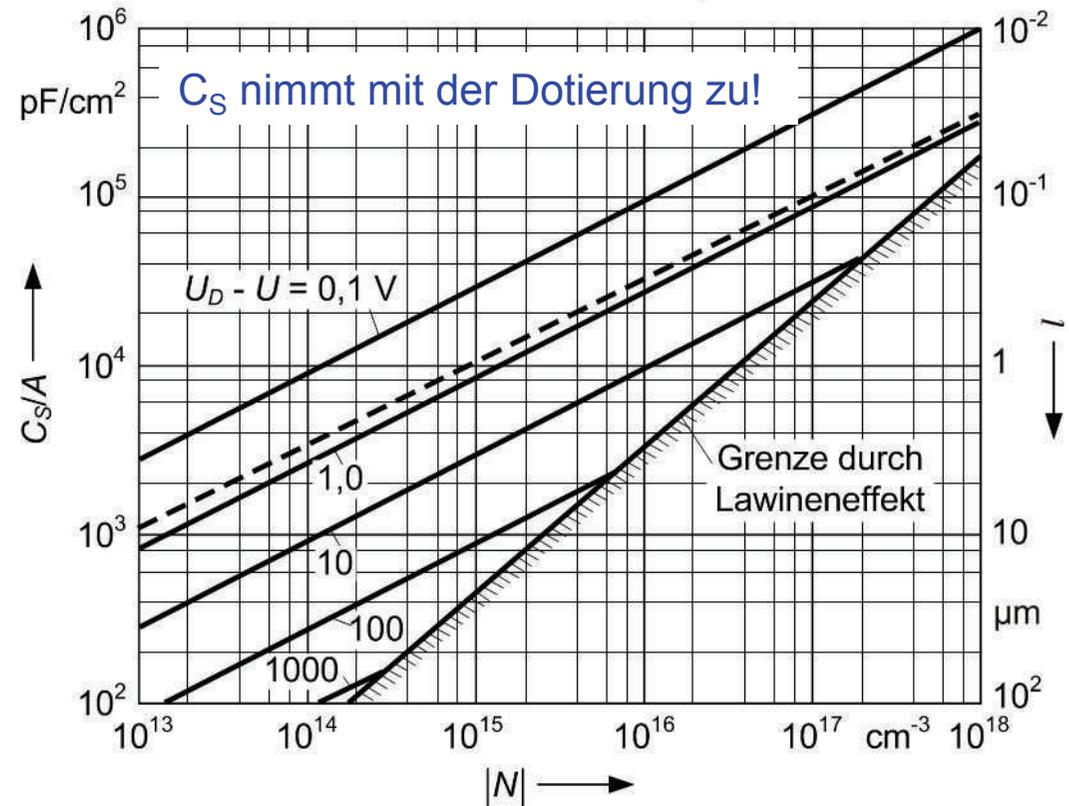
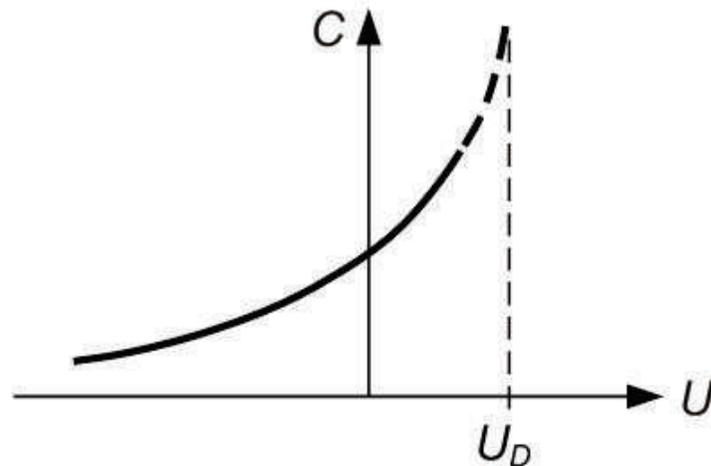
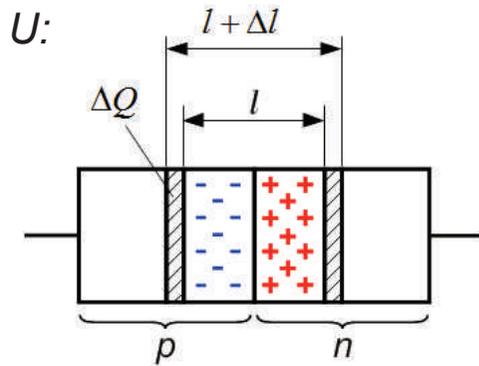
$$l = l_p + l_n = \sqrt{\frac{2\epsilon_r\epsilon_0}{e} (U_D - U) \left( \frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_D} \right)}$$

$$l_p = l \frac{n_D}{n_A + n_D}; \quad l_n = l \frac{n_A}{n_A + n_D}$$

⇒ Zu- und Abfluss von Ladungsträgern:

$$C_S = \frac{dQ}{dU} = \epsilon_r\epsilon_0 \frac{A}{l}$$

(„Plattenkondensator“)



Erinnerung: Kleinsignalanalyse der Injektion von Minoritätsträgern in einen p-HL:

$$U(t) = \text{Re} \{ U_0 + \underline{U}_1 e^{j\omega t} \}$$

$$I(t) = \text{Re} \{ I_0 + \underline{I}_1 e^{j\omega t} \}$$

$$\Rightarrow \underline{Y} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} = G_0 + j\omega C_D$$

wobei  $\omega\tau_n \ll 1$  Näherung für kleine Frequenzen

$$G_D = \frac{I_{Sn}}{U_T} e^{\frac{U_0}{U_T}} \quad \text{Diffusionsleitwert}$$

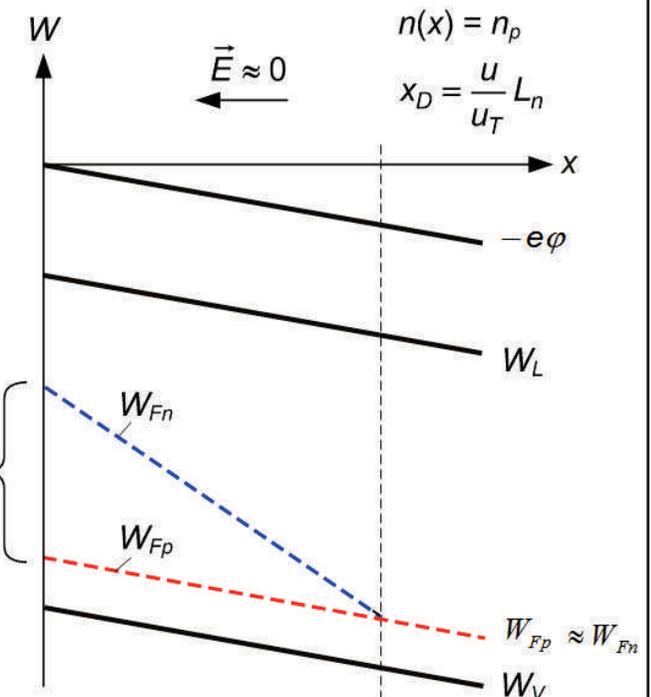
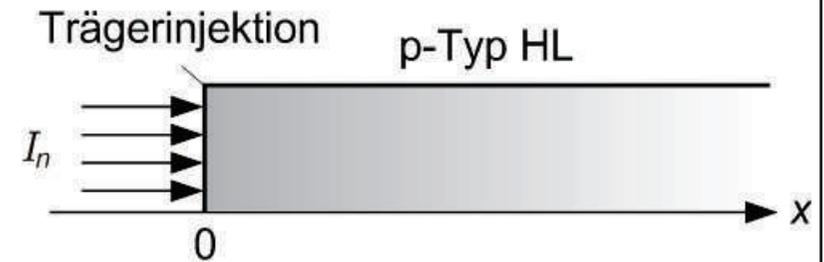
$$C_D = \frac{1}{2} G_D \tau_n \quad \text{Diffusionskapazität}$$

$$I_{Sn} = \frac{AeD_n n_{p0}}{L_n} \quad \text{Sättigungsstrom}$$

Hier: Diffusionszone im n- und im p-Halbleiter

$$\Rightarrow C_D = \frac{1}{2} \left( \tau_n \left. \frac{dI_n}{dU} \right|_{U=U_0} + \tau_p \left. \frac{dI_p}{dU} \right|_{U=U_0} \right) eU = W_{Fn} - W_{Fp}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\tau_n I_{Sn}}{U_T} + \frac{\tau_p I_{Sp}}{U_T} \right) e^{\frac{U_0}{U_T}}$$



# Großsignalverhalten und Umschaltvorgänge

- In vielen Anwendungen: Schneller **Wechsel zwischen Fluss- und Sperrpolung** eines pn-Überganges
- ⇒ Entscheidend: Dynamik und Zeitkonstanten des Umschaltvorganges
- Besonders kritisch: Umschalten von Fluss- zu Sperrpolung („**Turn-off transient**“) aufgrund von Minoritätsträgern, die in den Diffusionszonen gespeichert sind.

Hier: (Qualitative) Analyse des Großsignalverhaltens beim Ein- und Umschalten.

- 0 → 1: Einschalten
- 1 → 0: Ausschalten
- 1 → 2: Umschalten

Ermittlung der **stationären Arbeitspunkte**:

$$\frac{U_{s1,2} - U}{R} = I_S \left( e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right)$$

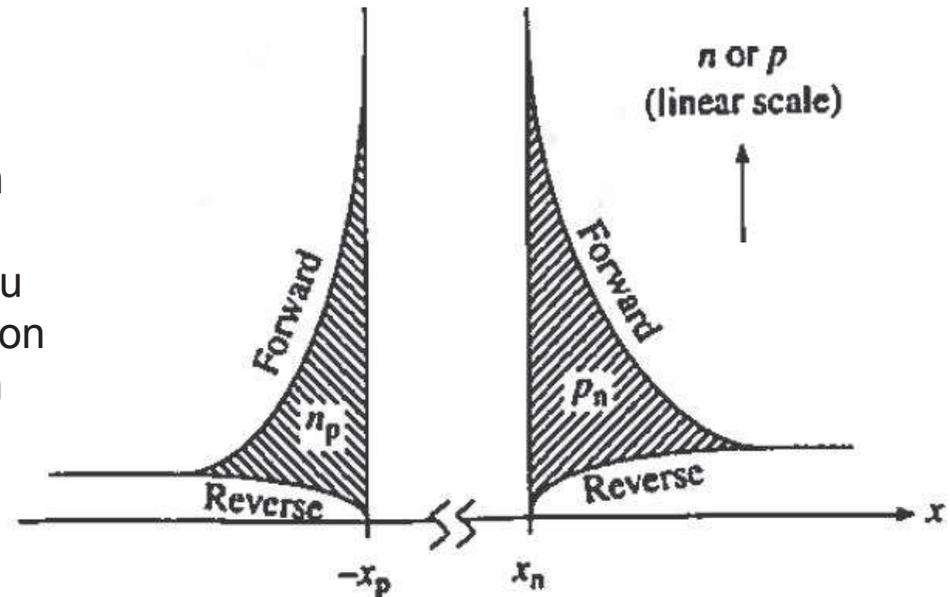
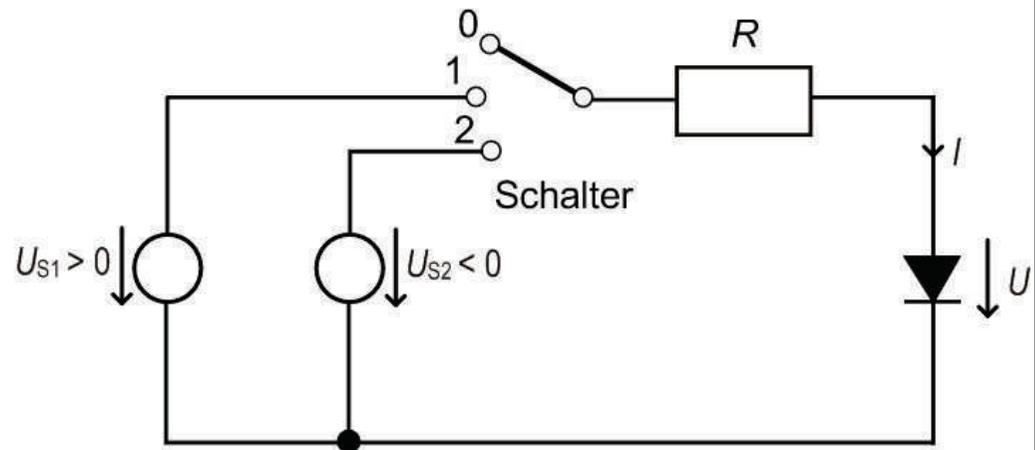
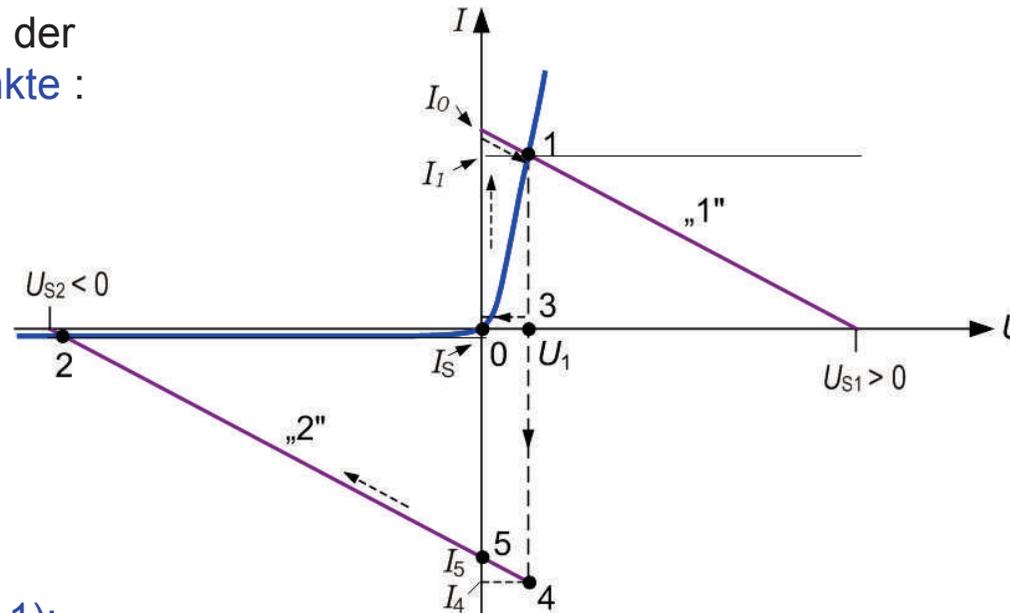


Bild: Pierret, Semiconductor Device Fundamentals



Graphische Ermittlung der stationären Arbeitspunkte :

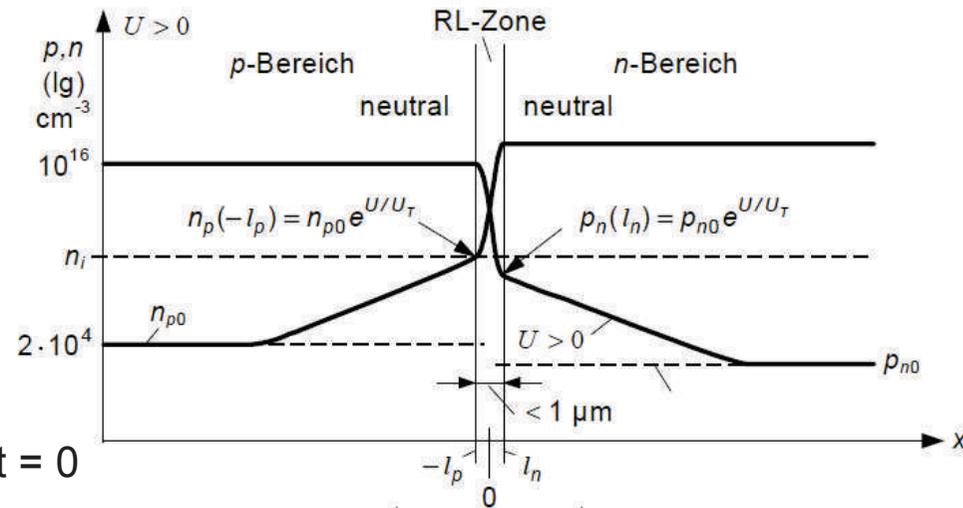


Einschaltvorgang (0 → 1):

- Dominanter Effekt bei Vorwärtsspannung: Ladungsspeicherung in den Diffusionszonen
- Spannung am pn-Übergang ist direkt mit der Ladungsträgerkonzentration in der DZ verknüpft:

$$u(t) = U_T \ln \left( \frac{p_n(l_n, t)}{p_{n0}} \right)$$

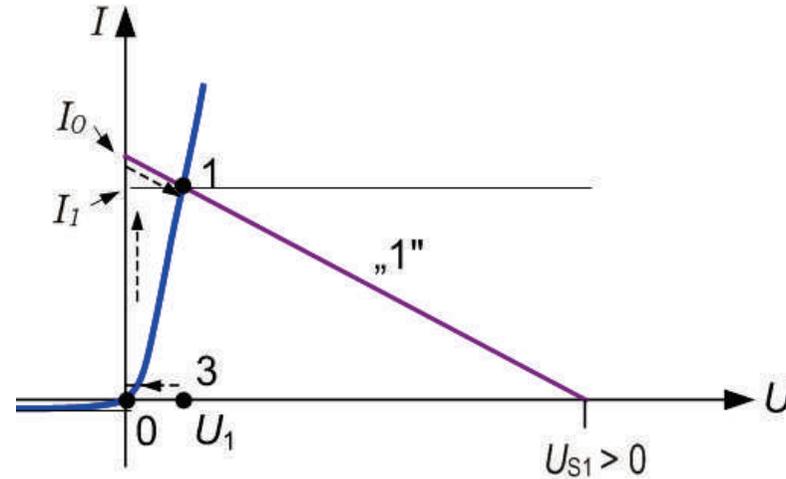
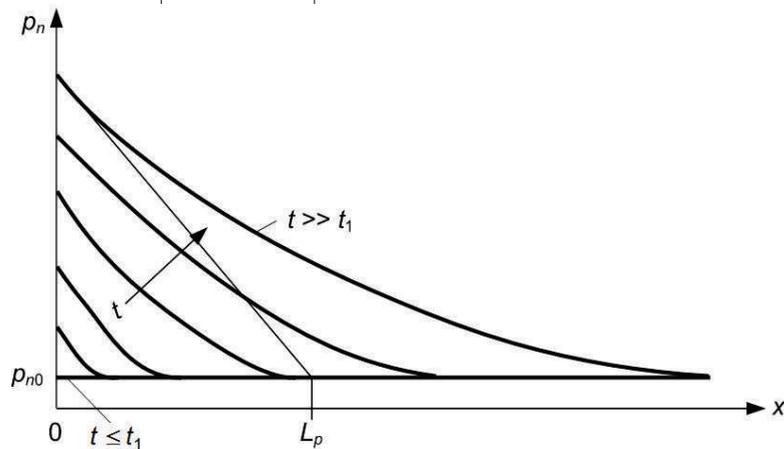
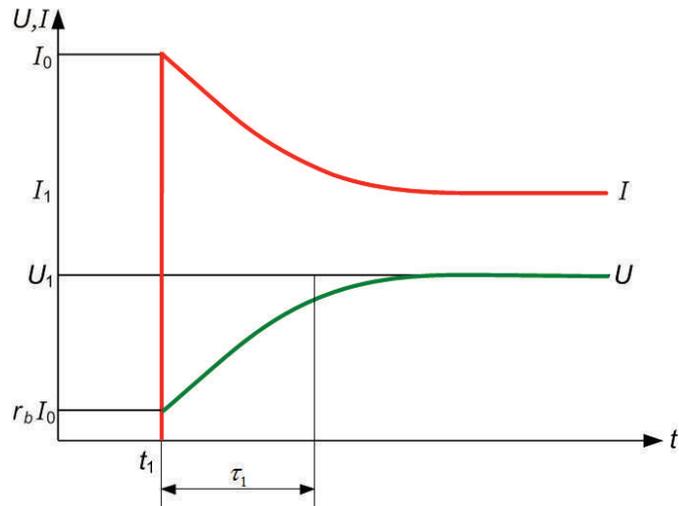
⇒ Kein Spannungsabfall am pn-Übergang bei  $t = 0$   
 Aufbau einer Diffusionszone für  $t > 0$



# Einschaltvorgang

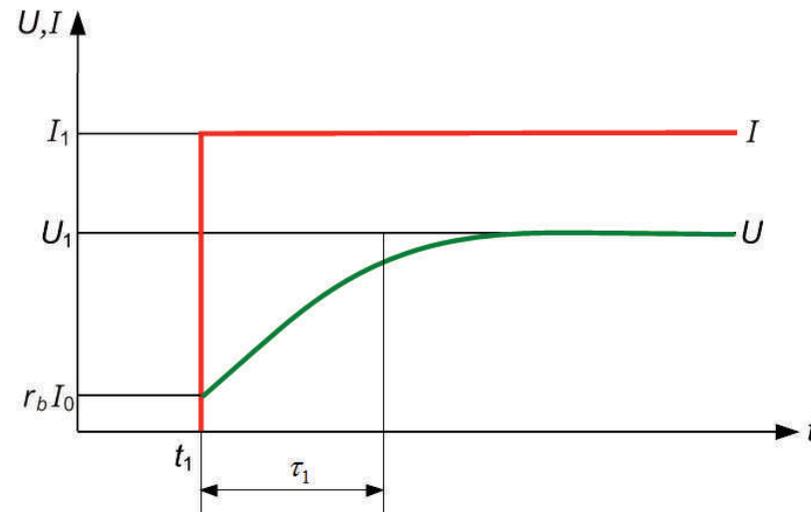
## Spannungsansteuerung:

⇒ **Überschwingen des Stromes** am Anfang  
(kein Spannungsabfall am pn-Übergang);  
dann allmählicher Aufbau der DZ



## Alternativ: Ansteuerung mit einer Stromquelle

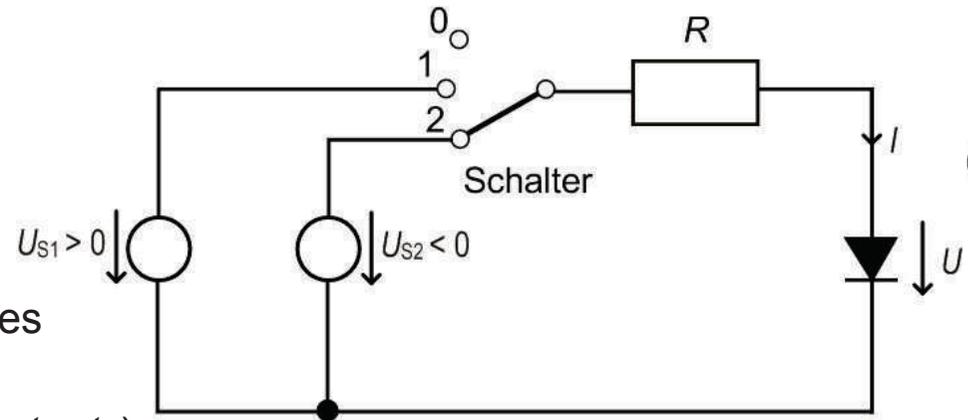
⇒ Konstanter Stromfluss; Spannung an der Diode nähert sich asymptotisch an ihren Grenzwert an.



# Aus- und Umschaltvorgang

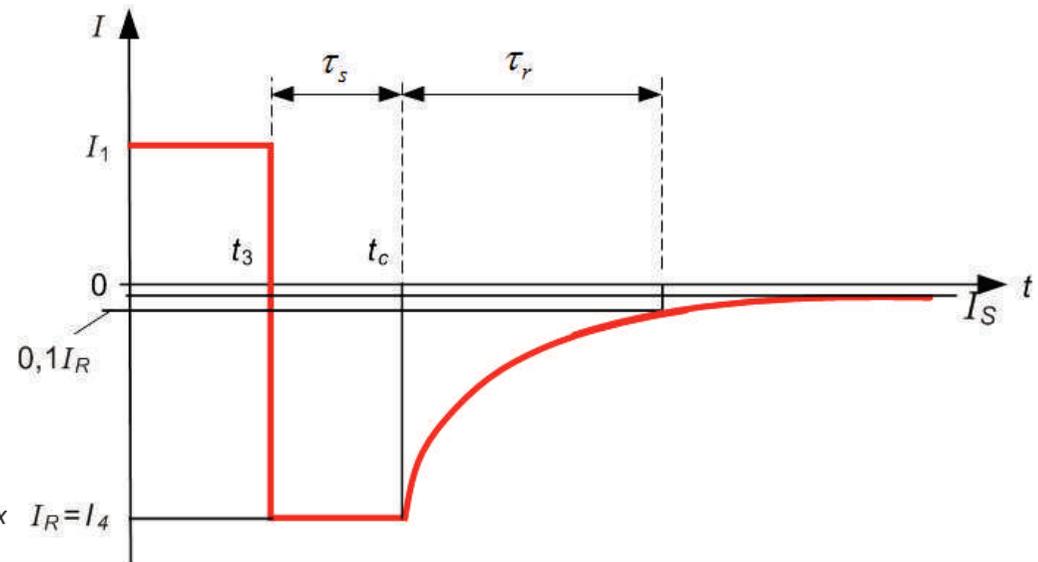
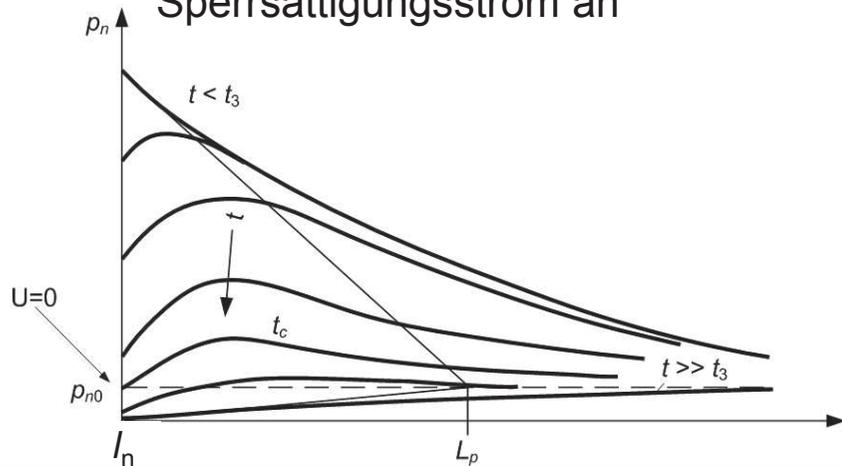
## Ausschalten 1 → 0 bei $t = t_2$ :

Öffnen des Schalters  $\Rightarrow I = 0 \Rightarrow$   
 Minoritätsträger in der Diffusionszone  
 verschwinden innerhalb der  
 Minoritätsträgerlebensdauer  $\tau_n$  bzw.  $\tau_p$ .



## Umschalten 1 → 2 bei $t = t_3$ : Umkehr / Abfall des Stromes in zwei Phasen

1. Konstanter Strom in Rückwärtsrichtung ( $t_3 < t < t_c$ ):  
 Abbau der Raumladungen in den Diffusionszonen  
 durch einen Stromfluss in Rückwärtsrichtung
2. Stromabfall ( $t_c < t < t_c + \tau_r$ ):  
 Diode sperrt; Strom nähert sich dem  
 Sperrsättigungsstrom an



# Dynamik des Umschaltvorgangs

Für  $t < t_3$ : Konstanter Stromfluss  $I_1$  in Vorwärtsrichtung

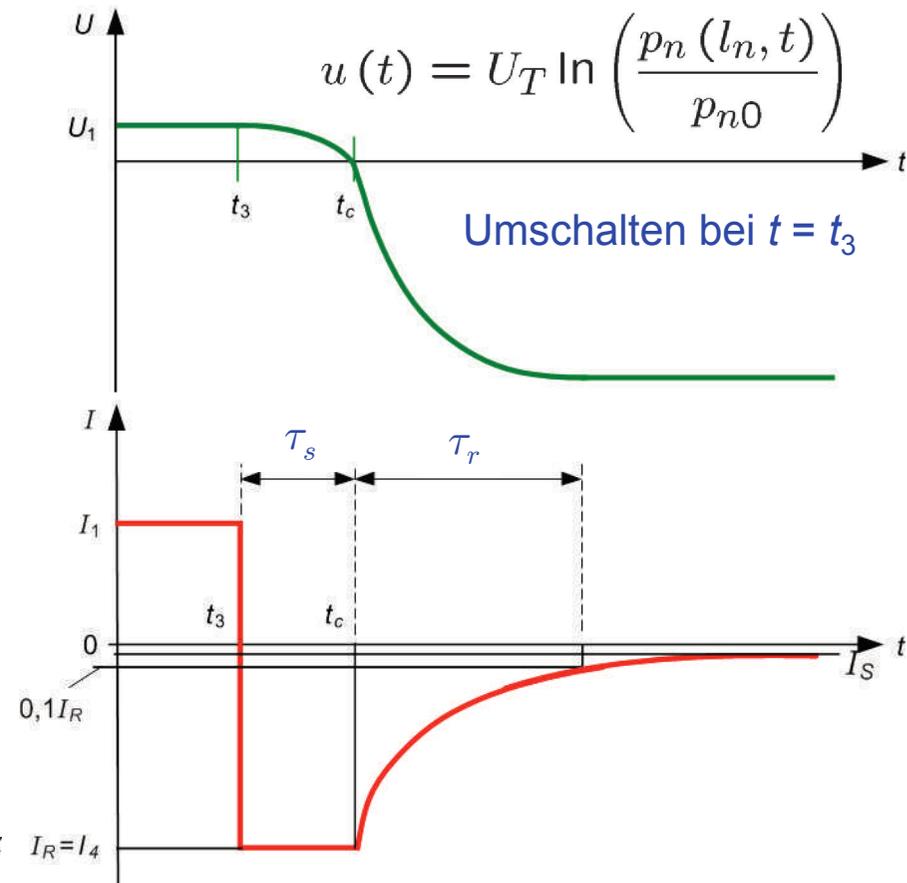
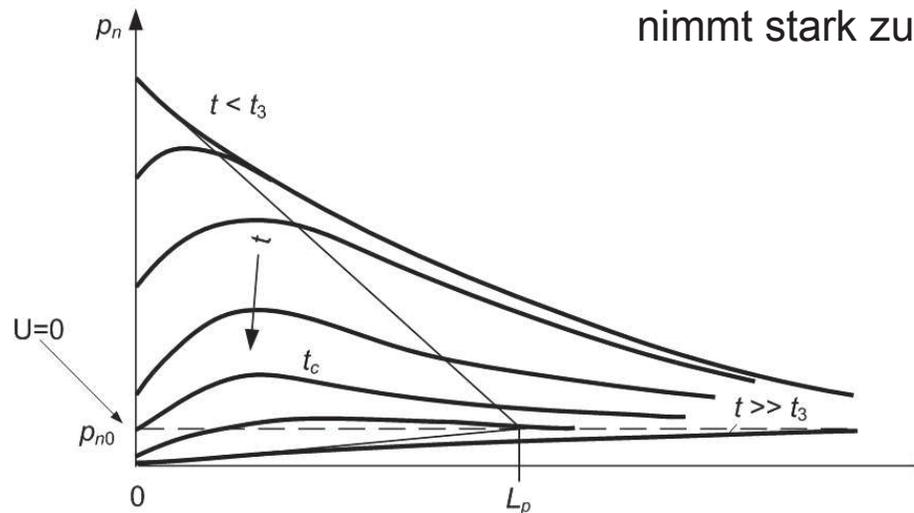
Für  $t_3 < t < t_c$ :  $p_n(l_n, t) \geq p_{n0}$ : Konstanter Strom

- Spannung am pn-Übergang ändert sich kaum mit abklingendem Minoritätsträgerüberschuss!
- Rückwärtsstrom wird durch die Gegenspannung  $U_2 < 0$  und durch den Widerstand R bestimmt.

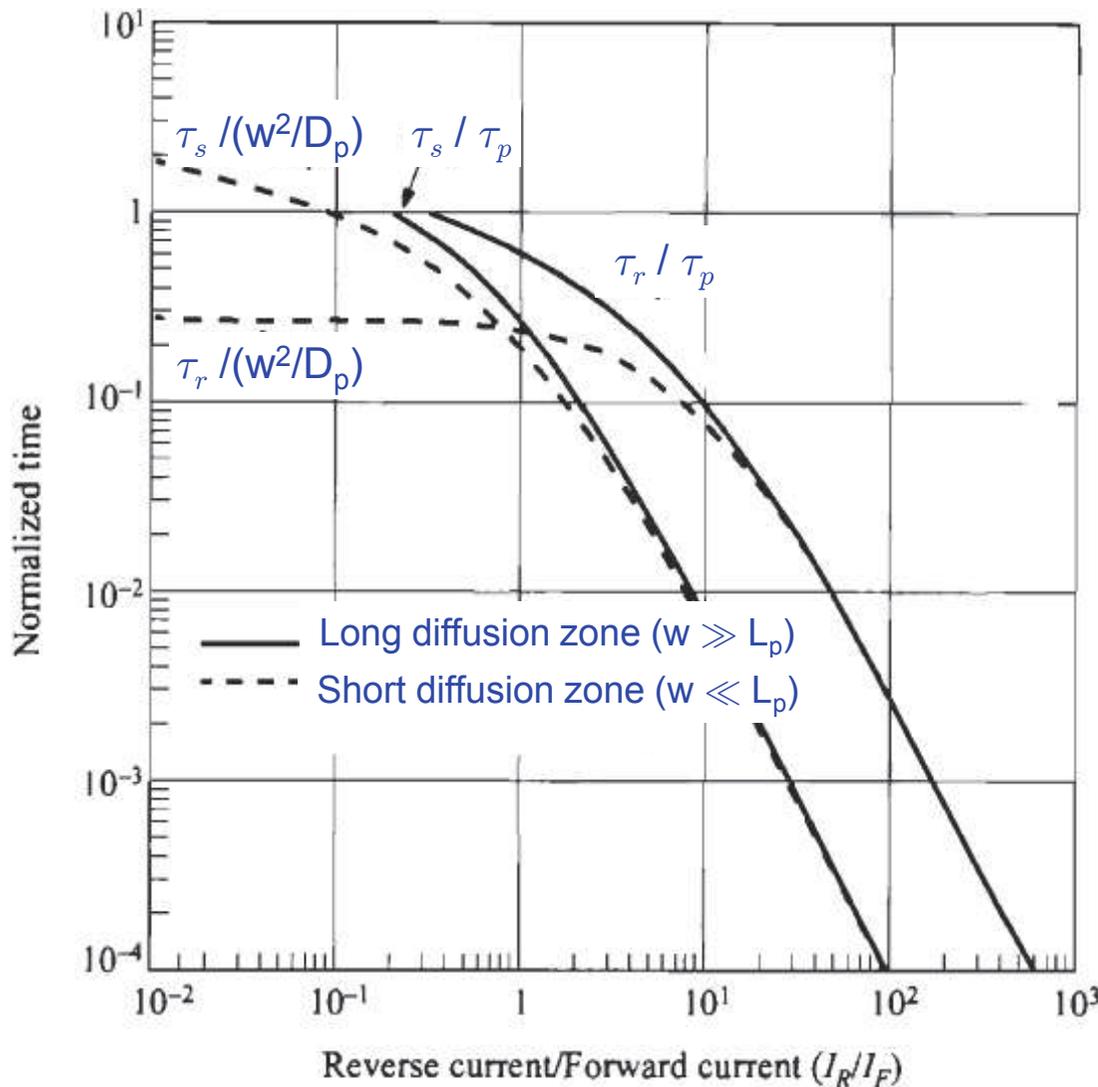
⇒ Näherungsweise konstanter Stromfluss  $I_R$  in Rückwärtsrichtung während einer Dauer  $\tau_s$  („Storage Delay Time“); dabei allmählicher Abfall der Spannung am pn-Übergang

Für  $t > t_c$ :  $p_n(l_n, t) \leq p_{n0}$ : Stromabfall

- Diode sperrt und Stromfluss nimmt stark ab mit Zeitkonstante  $\tau_r$  („Recovery Time“)
- Spannungsabfall am pn-Übergang nimmt stark zu



# Zeitkonstanten des Umschaltvorganges



## Numerische Berechnung der Zeitkonstanten $\tau_r$ und $\tau_s$

p<sup>+</sup>-n-Übergang:  $n_A \gg n_D$   
 $\Rightarrow$  Löcher-Diffusionsstrom dominiert den Gesamtstrom durch die Diode

- Zeitkonstanten nehmen mit wachsendem Rückwärtsstrom stark ab (schnellerer Abzug der verbleibenden Minoritätsträger)
- Die Zeitkonstanten sind für kurze Diffusionszonen kleiner als für lange Diffusionszonen (kleinere Diffusionszonen; außerdem Abbau von Minoritätsträgern durch Rekombination an den Rändern)

Bild: Sze, Physics of Semiconductor Devices

# Kapitel 7: Spezielle pn-Dioden

# Vorlesung 10

16.12.2013

# Varaktor-Dioden („Kapazitätsdioden“)

- Varactor = Variable Reactance  
 ⇒ Änderungen der kapazitiven Eigenschaften mit der DC-Vorspannung
- Spannungs-Kapazitäts-Charakteristik lässt sich über das Dotierprofil einstellen

Die spannungsabhängige Sperrschicht-Kapazität  $C_S$  ergibt sich (auch für beliebige Dotierprofile) aus der Formel für den Plattenkondensator:

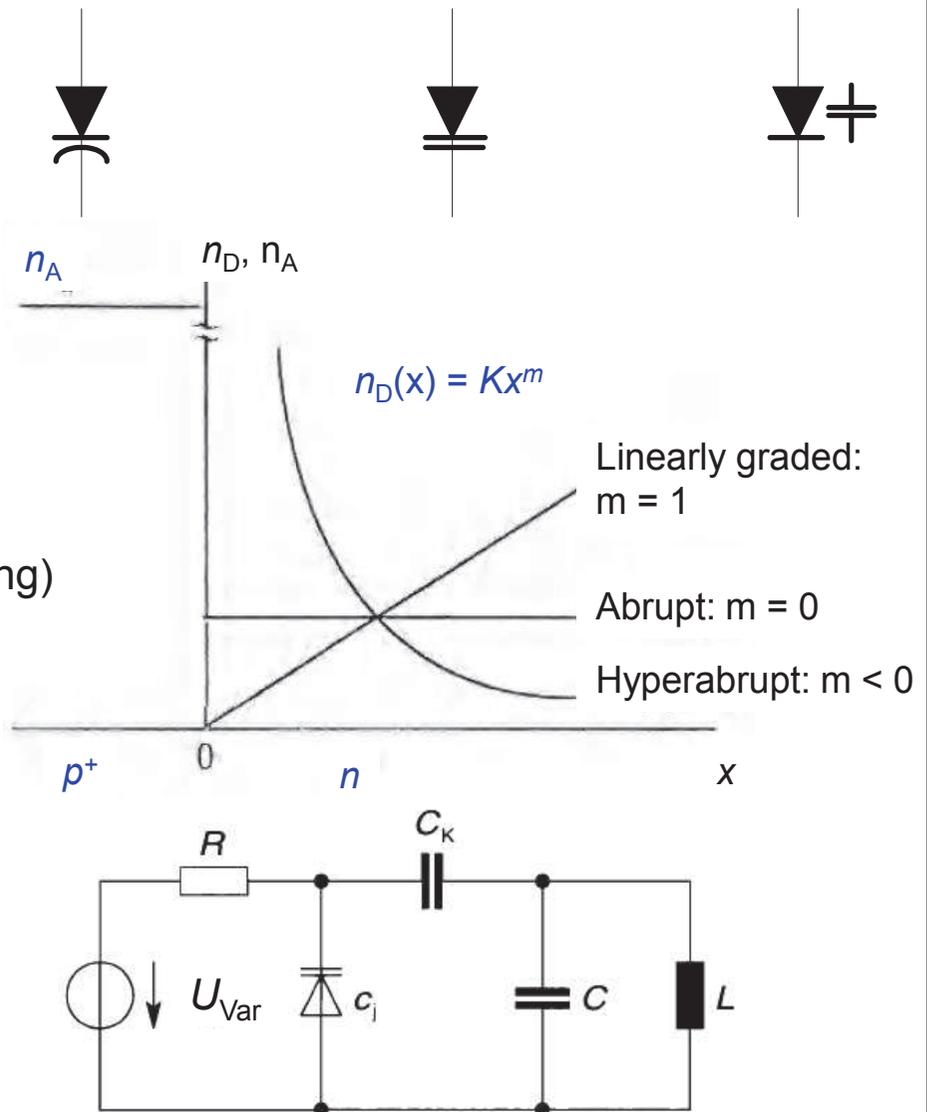
$$C_S = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{l(U)}$$

Für eine einseitig-abrupte Dotierung (p<sup>+</sup>n-Übergang) mit  $n_D(x) = Kx^m$  ergibt sich :

$$l(U) \approx l_n(U) = \left( \frac{\epsilon_0 \epsilon_r (m + 2)}{eK} (U_D - U) \right)^{\frac{1}{m+2}}$$

Für  $m = -3/2$  (hyperabrupte Dotierung) lässt sich damit die Resonanzfrequenz eines LC-Schwingkreises proportional zur angelegten Spannung verändern:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \propto (U_D - U)$$



Bilder: Reisch, Halbleiter-Bauelemente / Streetman, Solid-State Electronic Devices

# Leistungsgleichrichter: $p^+ - s - n^+$ - und $p^+ - n - n^+$ -Strukturen

## Anforderungen an Dioden in Leistungsgleichrichtern:

- Hohe Durchbruchfestigkeit  $\Rightarrow$  Schwache Dotierung, lange Raumladungszone!
- Kleiner Sperrstrom  $\Rightarrow$  Starke Dotierung!
- Geringer Spannungsabfall in den Bahngebieten  $\Rightarrow$  Starke Dotierung!

Konventioneller  $p - n$ -Übergang:

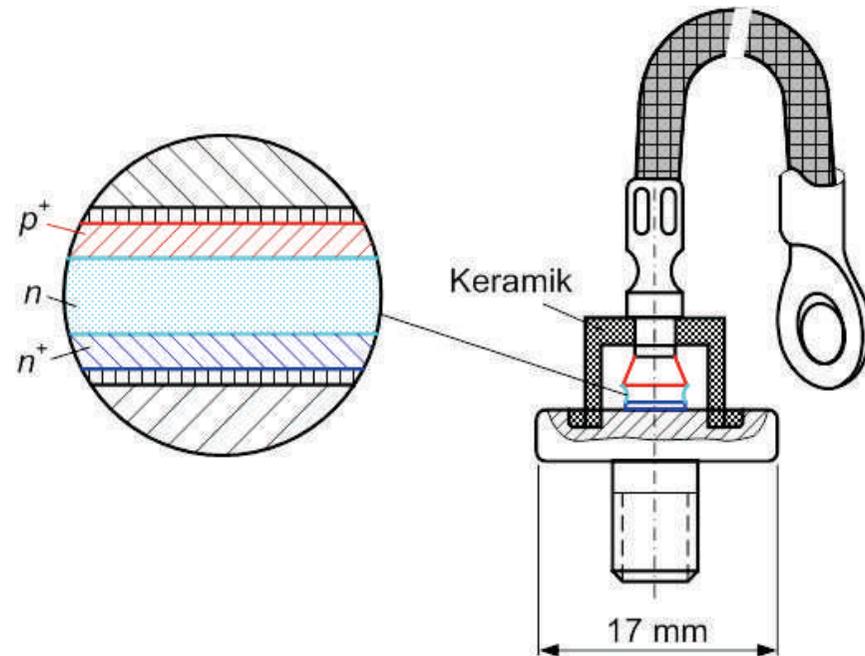
$$I_S = Aen_i^2 \left( \frac{D_n}{L_n n_A} + \frac{D_p}{L_p n_D} \right), \quad l = \sqrt{\frac{2\epsilon_r \epsilon_0}{e} (U_D - U) \left( \frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_D} \right)}, \quad E_m = - \sqrt{\frac{2e}{\epsilon_r \epsilon_0} \frac{U_D - U}{\left( \frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_D} \right)}}$$

Lösung der widersprüchlichen Anforderungen durch Einführen einer undotierten oder schwach dotierten Schicht zwischen hochdotierten  $p^+$ - und  $n^+$ -Gebieten

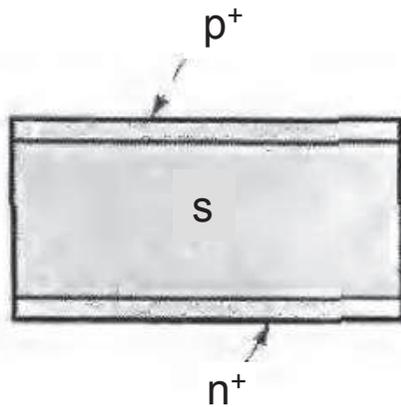
$\Rightarrow p^+ - s - n^+$ - bzw.  $p^+ - n - n^+$ -Strukturen



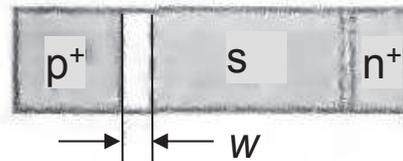
schwache Dotierung / „soft“ doping level



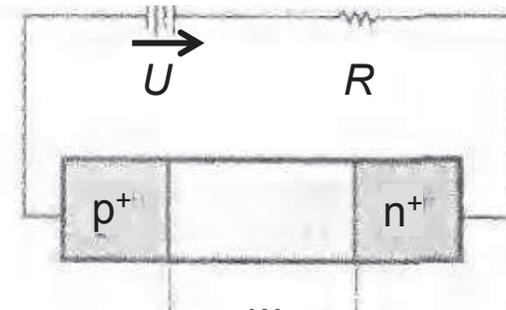
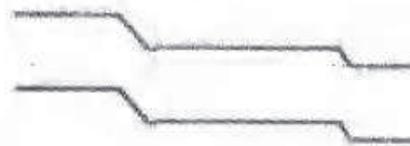
# Wirkungsweise der $p-i-n$ bzw. $p^+-s-n^+$ -Strukturen



Bilder nach Streetman, Solid-State Electronic Devices

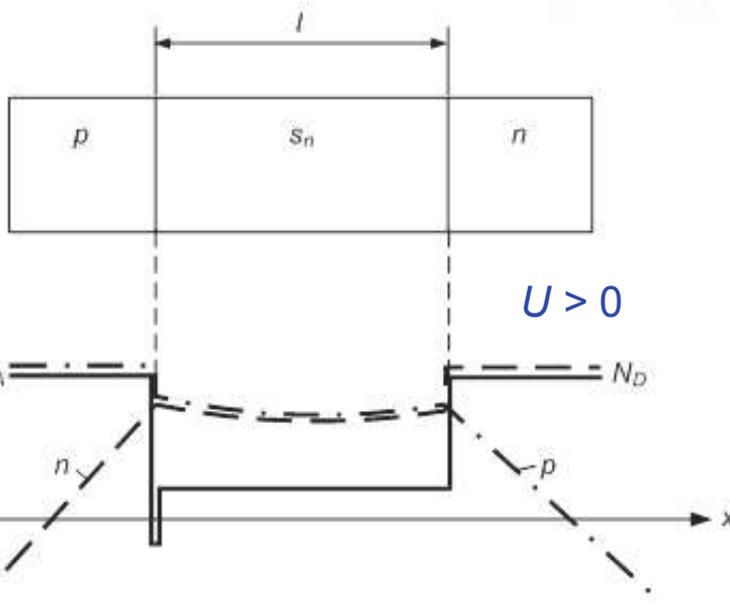


$U = 0$



$U < 0$

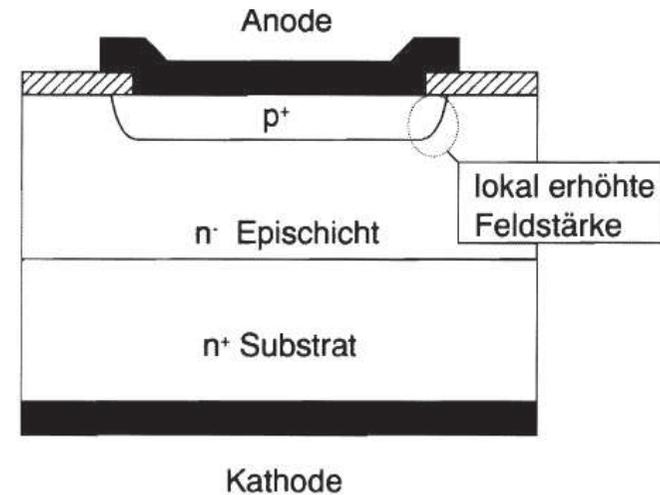
Punch-Through



- **Sperrspannung:** Schwach dotiertes Gebiet wird hochohmig; gleichzeitig kleine Minoritätsträgerdichte am Rand der RLZ  
 ⇒ Kleine Sperrströme
- **Hohe Sperrspannungen:** Schwach dotierte Zone komplett ausgeräumt („Punch-Through“)  
 ⇒ Sperrspannung fällt über breite Schicht ab  
 ⇒ Geringe Feldstärke, hohe **Durchbruchfestigkeit**
- **Flusspolung:** Ladungsträger werden aus  $n^+$  und  $p^+$ -Gebieten in schwach dotiertes Gebiet injiziert  
 ⇒ Hohe Leitfähigkeit, kleiner Bahnwiderstand

# Vermeidung von Durchbrüchen am Rand

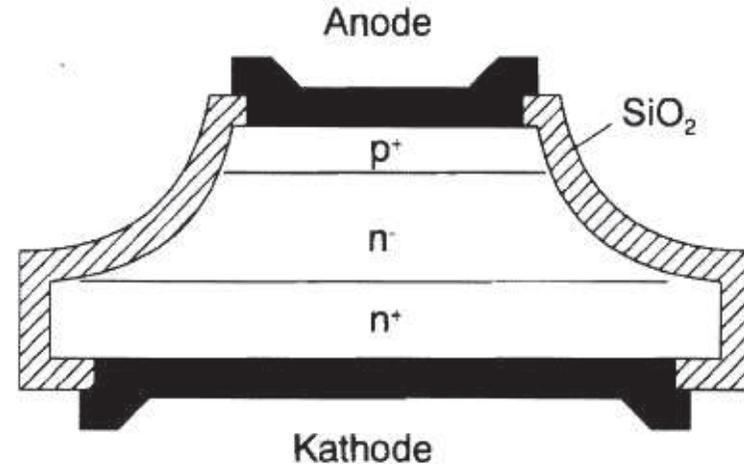
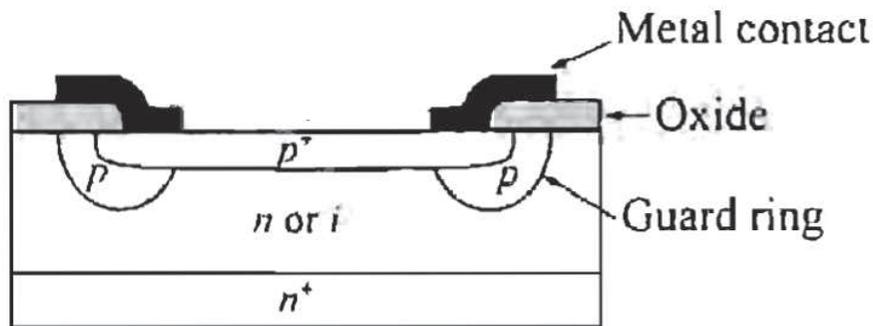
**Problem** bei praktischen Bauteilen: Krümmung des p-n-Überganges am Rand führt zu inhomogenen elektrischen Feldern und lokalen überhöhten Feldstärken  
 ⇒ „Randdurchbruch“



## Lösungen:

- **Guard-Band:** Ringförmiges p-Gebiet, das den p-n-Übergang umschließt  
 ⇒ Verringerung der Feldstärke am Rand

- **Mesa-Struktur mit abgeschrägten Seiten und Oxid-Passivierung**  
 ⇒ Geringe Feldstärken und geringere Zahl an Rekombinationszentren im Randbereich



Bilder: Reisch, Halbleiter-Bauelemente / Sze, Physics of Semiconductor Devices

# *p-i-n*-Dioden

p-n-Übergang mit undotierter Zone zwischen dem *p*- und dem *n*-Gebiet

- Geringe Feldstärke bei gegebener Potentialdifferenz  
⇒ Hohe Durchbruchspannung; geeignet für Leistungsgleichrichter (oft als  $p^+$ -*s*- $n^+$ , s.o.)
- Geringe Sperrschichtkapazität; diese ist praktisch spannungsunabhängig  
⇒ Verwendung für HF-Anwendungen!
- Bei Betrieb mit Vorspannung in Vorwärtsrichtung mit sehr hohen Frequenzen :
  - Träger in der *i*-Zone werden während einer Periode nicht vollständig ausgeräumt
  - *p-i-n*-Diode verhält sich wie ein ohmscher Widerstand, dessen Wert durch den Gleichstrom in Vorwärtsrichtung definiert ist (ohne Herleitung):

$$G_0 = \frac{I_0 \tau (\mu_n + \mu_p)}{w^2}$$

⇒ Verwendung in einstellbaren HF-Dämpfungsgliedern!

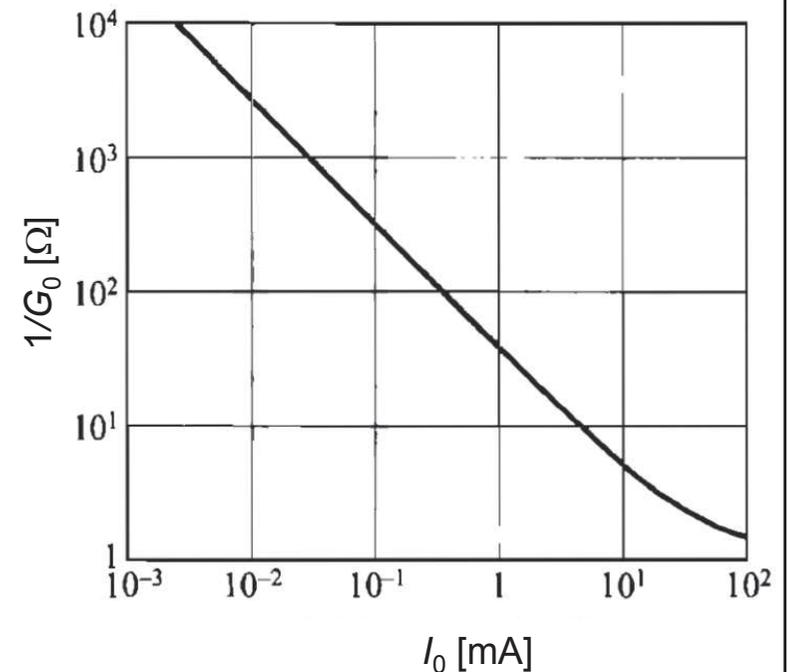
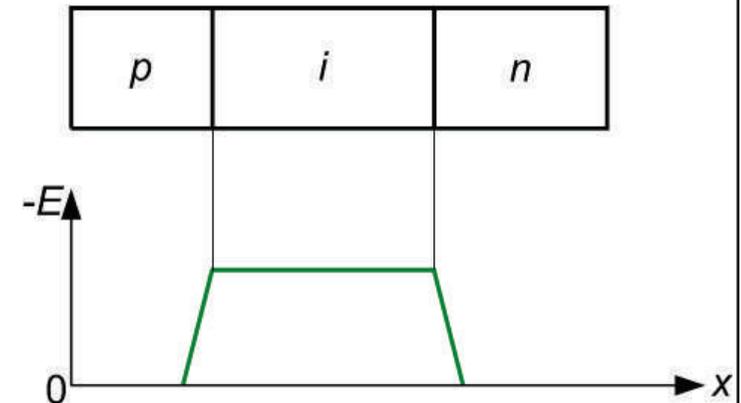


Bild: Sze, Physics of Semiconductor Devices

# p-i-n-Photodiode

## Funktionsprinzip:

- Photonen werden in der RLZ eines p-i-n-Überganges absorbiert und erzeugen ein Elektron-Loch-Paar.
- Das interne elektrische Feld trennt die Ladungsträger und führt damit zu einem (negativen) Strom im Außenkreis.
- Vorteil der p-i-n-Struktur: Ausgedehnte RLZ, in der Photonen mit hoher Wahrscheinlichkeit absorbiert werden.

## Quantitative Analyse:

Verlauf der optischen Leistung im Halbleiter:

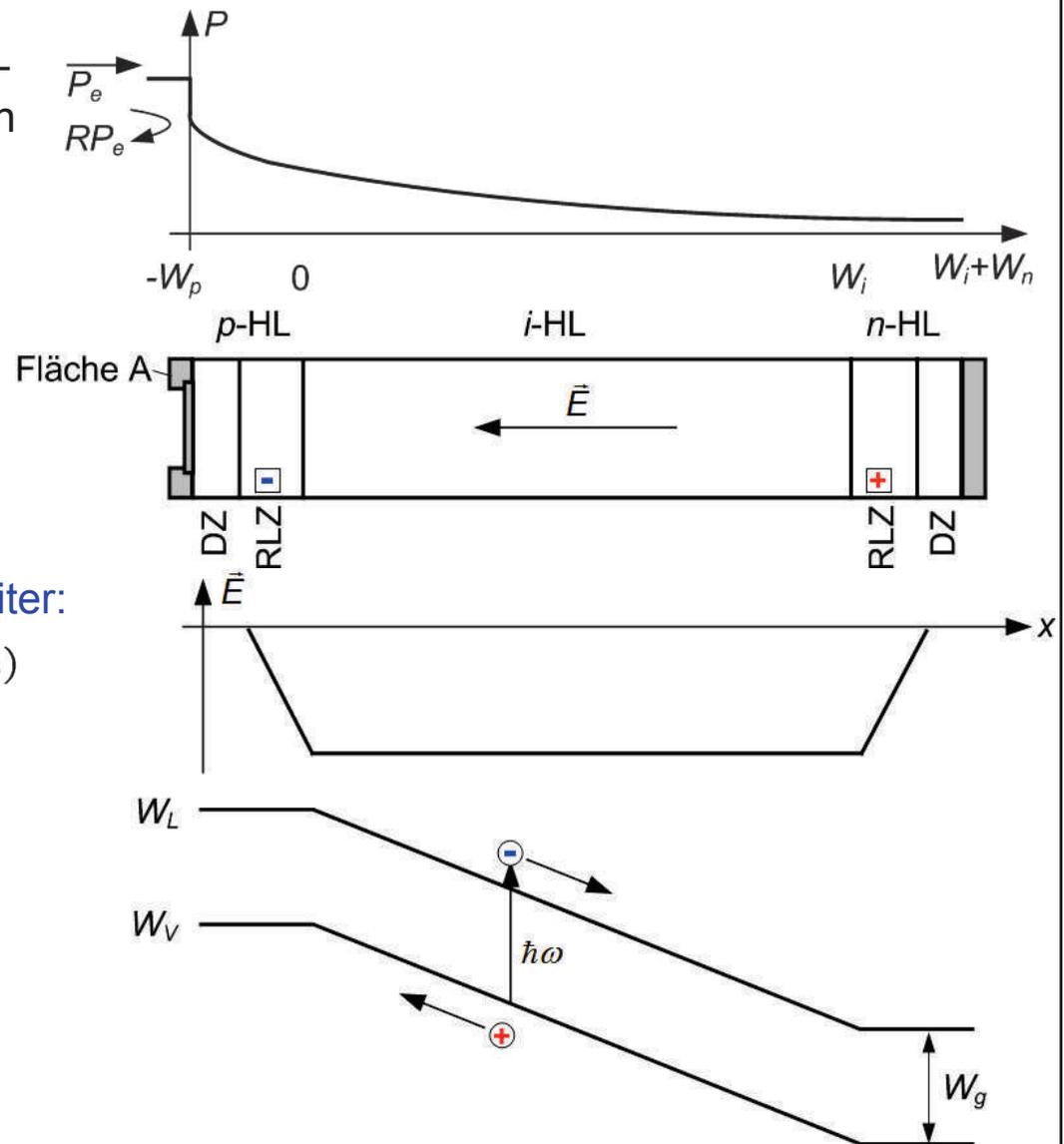
$$P(x, t) = P_e(t) (1 - R) e^{-\alpha(x+w_p)}$$

Zugehörige Generationsrate:

$$g(x, t) = \frac{1}{A} \frac{\alpha}{\hbar\omega} P(x, t)$$

Weitere Vereinfachungen:

- Stationärer Zustand ( $\partial/\partial t = 0$ )
- Eindimensionale Rechnung
- Vernachlässigung der Rekombination



Photostrom im Außenkreis:

$$\begin{aligned} I_P &= A J_n(w_i) \\ &= -\frac{e}{\hbar\omega} P_e (1 - R) e^{-\alpha w_p} (1 - e^{-\alpha w_i}) \\ &= -\mathcal{R} P_e \end{aligned}$$

Anmerkung: Stromfluss in Sperrrichtung, daher  $I < 0$

wobei  $\mathcal{R} = \frac{e}{\hbar\omega} (1 - R) e^{-\alpha w_p} (1 - e^{-\alpha w_i}) = \frac{e}{\hbar\omega} \eta$

Empfindlichkeit (engl. Responsivity)

$$\eta = \frac{|I_P|/e}{P_e/\hbar\omega} = (1 - R) e^{-\alpha w_p} (1 - e^{-\alpha w_i})$$

Quantenwirkungsgrad (Anzahl der Elektronen im Außenkreis pro eingestrahlem Photon)

Absorption von Photonen und Erzeugung von Elektron-Loch-Paaren in verschiedenen Abschnitten der *p-i-n*-Photodiode:

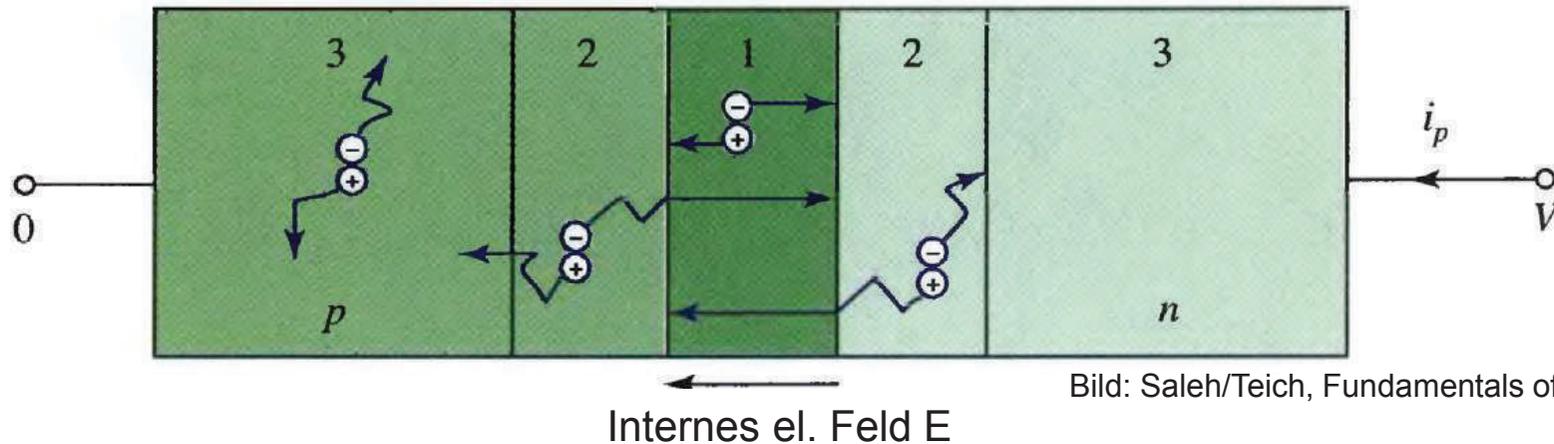


Bild: Saleh/Teich, Fundamentals of Photonics

(1) Absorption in der **Raumladungszone**

⇒ Trennung durch internes elektrisches Feld

⇒ Photostrom im Außenkreis

(3) Absorption **weit entfernt von der Raumladungszone**

⇒ Kein elektrisches Feld, Vernichtung des Elektron-Loch-Paares durch Rekombination

⇒ Kein Strombeitrag im Außenkreis

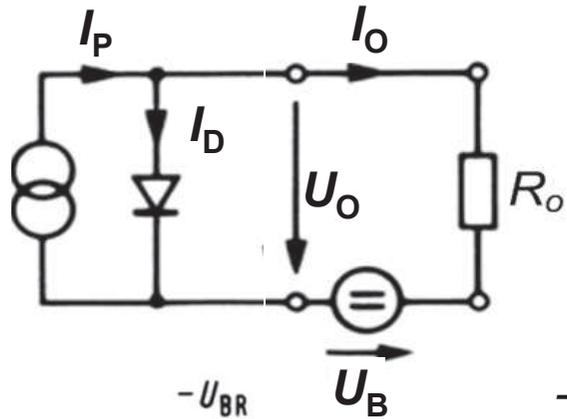
(2) Absorption in der Nähe der **Raumladungszone**

⇒ Minoritätsträger kann durch Diffusion in die RLZ gelangen; wird dort vom elektrischen Feld erfasst und trägt zum externen Photostrom bei

⇒ Verlangsamt die Antwort der Photodiode

**Abhilfe:** Heteroübergang; Lichteinfall durch Material mit einer Bandlücke  $W_G > \hbar\omega$

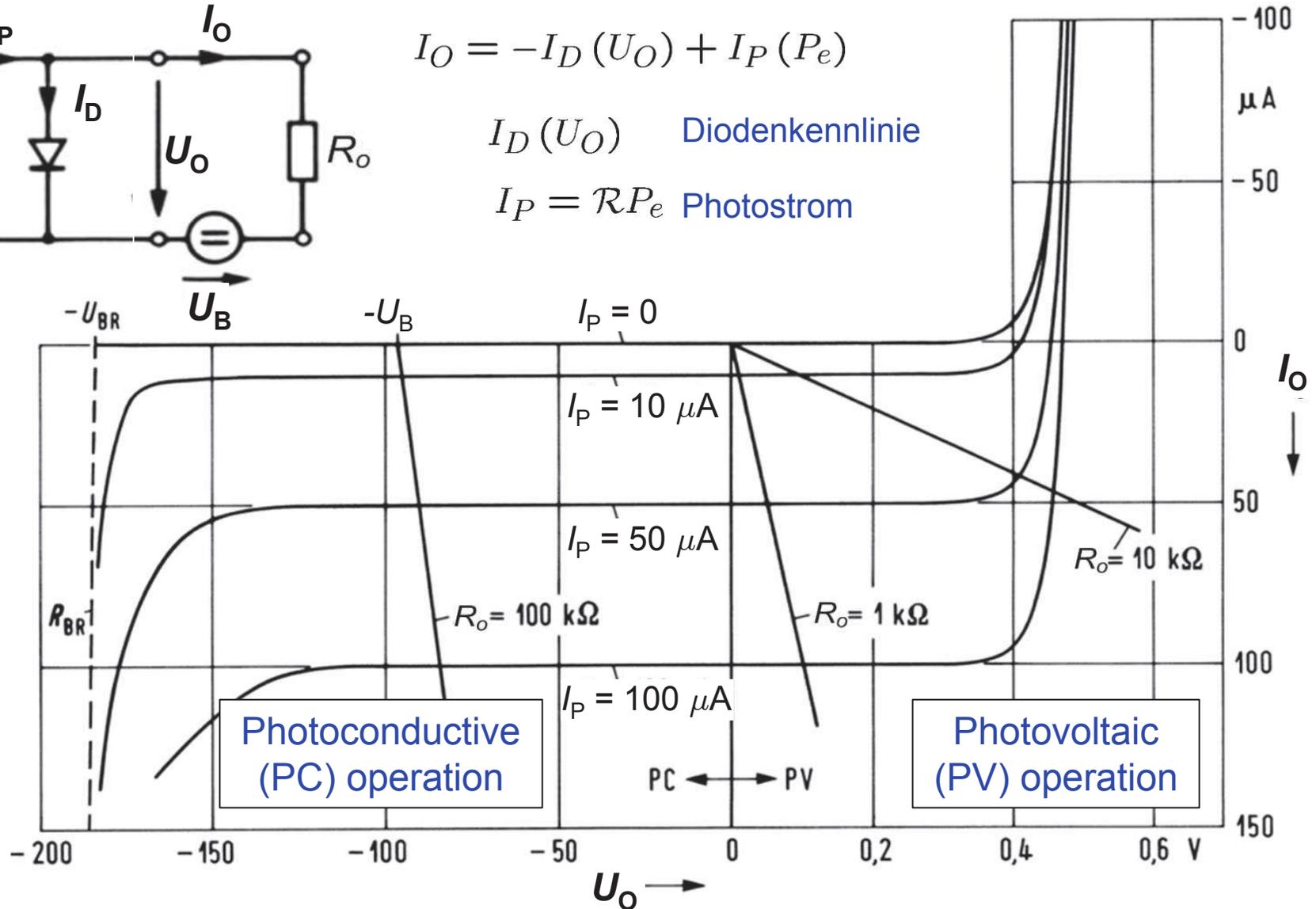
# Kennlinienfeld der *p-i-n*-Photodiode



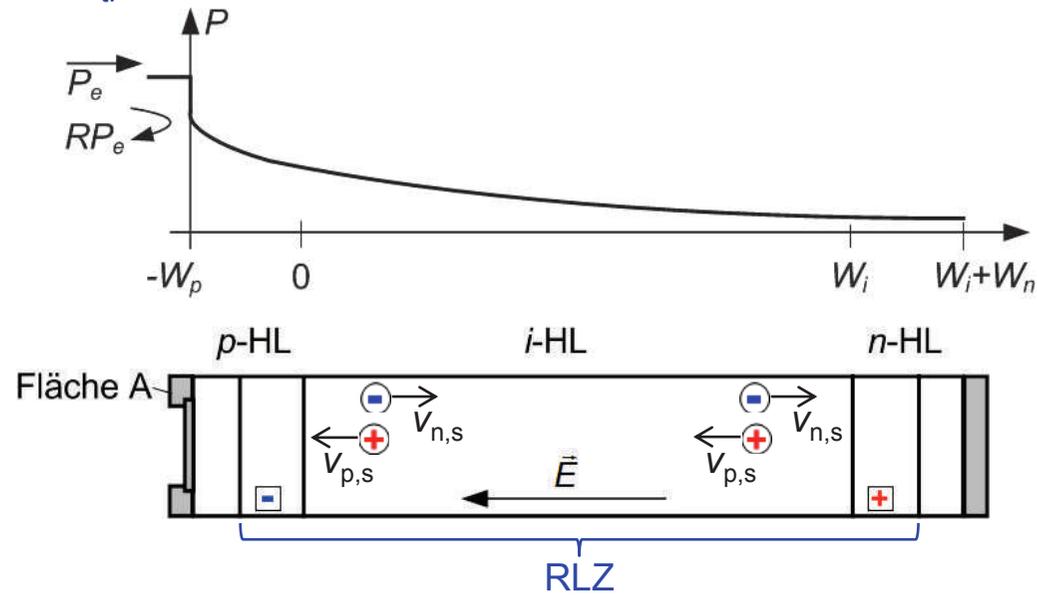
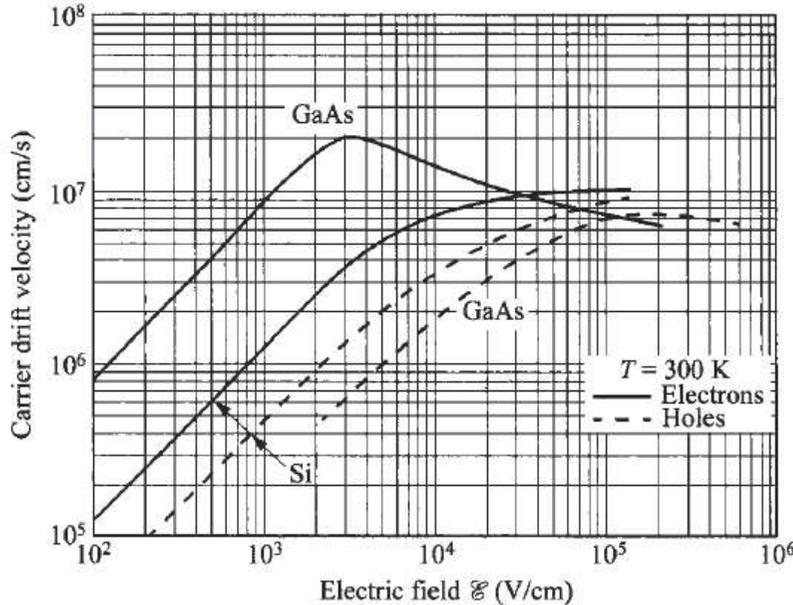
$$I_O = -I_D(U_O) + I_P(P_e)$$

$I_D(U_O)$  Diodenkennlinie

$I_P = \mathcal{R}P_e$  Photostrom



## Bandbreitenbegrenzung durch Transitzeit $\tau_{tr}$ der Elektronen und Löcher in der RLZ:



- **Annahme:** Starke Sperrspannung, so dass Elektronen und Löcher in der RLZ mit der jeweiligen Sättigungsdriftgeschwindigkeit  $v_{sn}$  bzw  $v_{sp}$  propagieren.

⇒ Driftzeiten von Elektronen und Löchern in der RLZ:  $\tau_n = \frac{w_i}{v_{sn}}$ ,  $\tau_p = \frac{w_i}{v_{sp}}$

- **Laufzeitbedingte Bandbreitenbegrenzung der  $p-i-n$ -Photodiode:**

$$f_{3\text{dB}} = \begin{cases} 0.44/\tau_n & \text{für } \alpha w_i \rightarrow \infty, & \text{(starke Absorption)} \\ 0.55/\tau & \text{für } \alpha w_i \rightarrow 0, \tau_n \approx \tau_p \approx \tau. & \text{(schwache Absorption)} \end{cases}$$

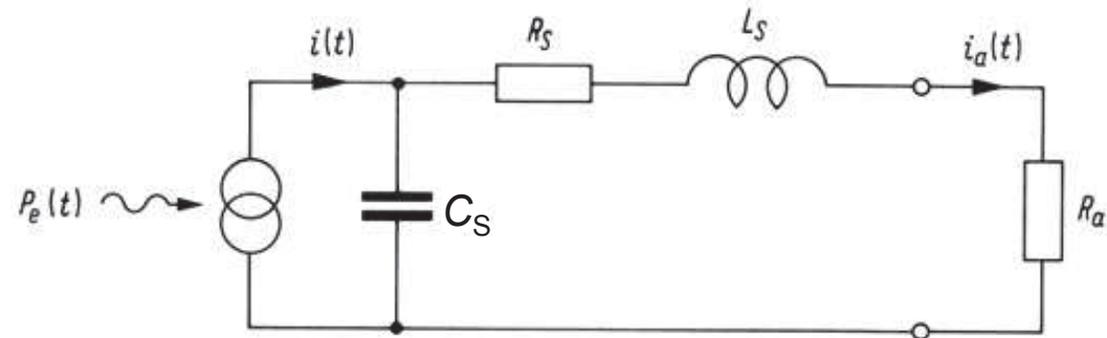
⇒ **Kurze RLZ** verringert die Laufzeit und erhöht die Bandbreite

**Bei starker Absorption:** Lichteinstrahlung in Richtung der sich schneller bewegenden Trägersorte

## RC-Bandbreitebegrenzung infolge der Sperrschichtkapazität $C_S$ :

$$C_S = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{w_i}$$

- ⇒ Lange RLZ verringert  $C_S$ !
- ⇒ Zielkonflikt mit Verringerung der Transitzeit durch kurze RLZ.



## Diffusion von Minoritätsträgern in die RLZ:

Diffusionsbewegung der Ladungsträger: „Random Walk“

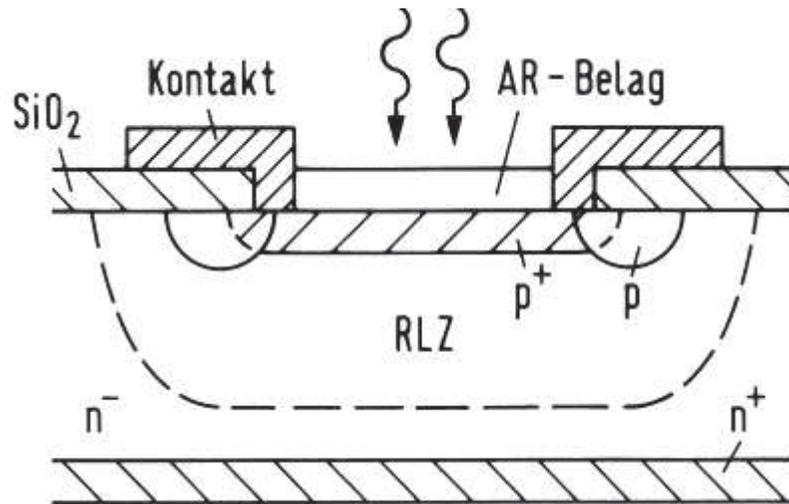
⇒ Mittlere Distanz, die in der Zeit  $\tau$  zurückgelegt wird:  $\Delta x = \sqrt{D\tau}$

⇒ Bandbreitebegrenzung für eine Diffusionszone der Länge  $\Delta x = w_{\text{diff}}$ :

$$f_{\text{diff}} \propto \frac{D}{w_{\text{diff}}^2}$$

⇒ Designziel: Möglichst keine Absorption in der Nähe der RLZ-Grenze, beispielsweise durch den Einsatz von Heterostrukturen.

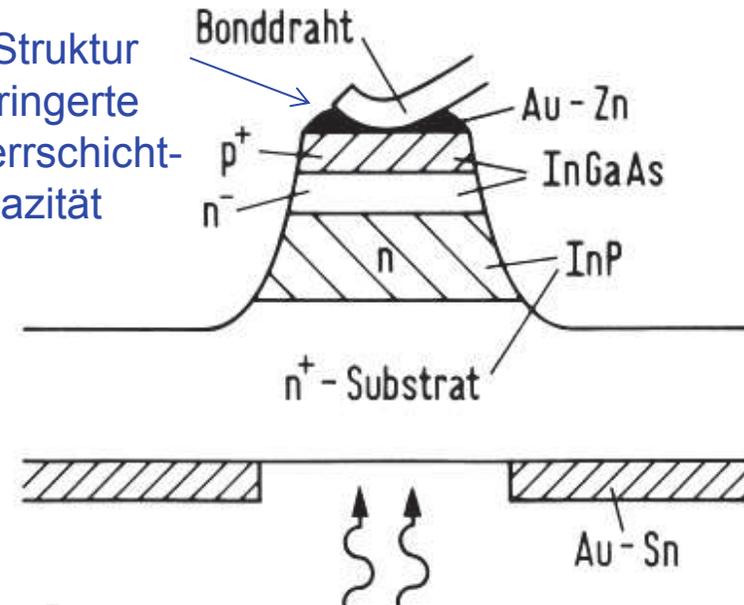
# Beispiele für $p-i-n$ -Photodetektoren



Planare Si-Photodiode, Einstrahlung von oben

$f_{3dB} = 3 \text{ GHz}$ , limitiert durch Transitzeit der Ladungsträger in der RLZ

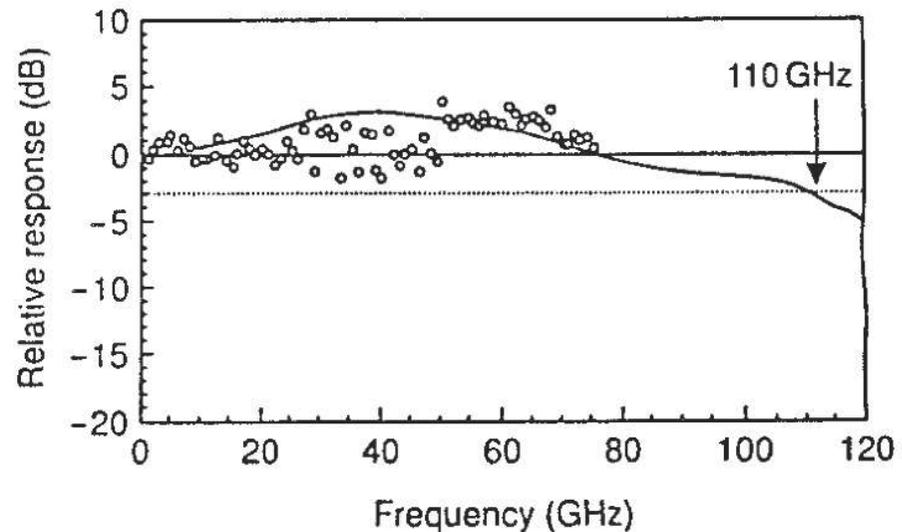
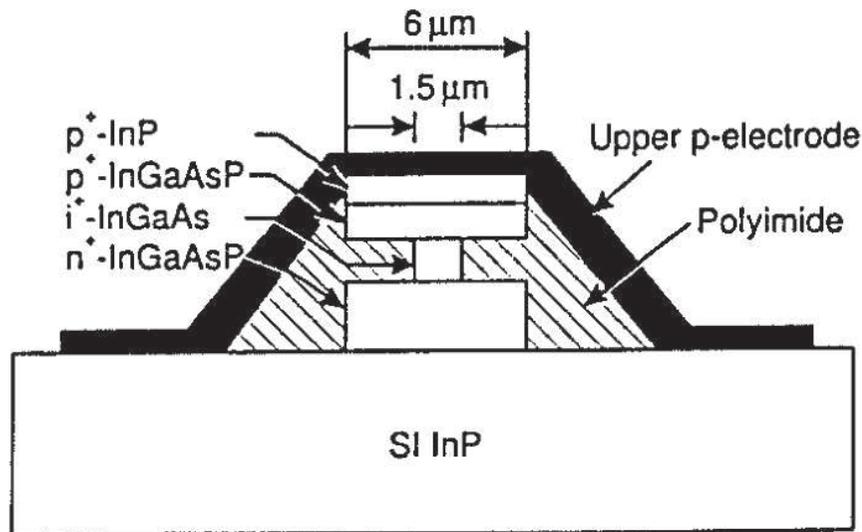
Mesa-Struktur  
 $\Rightarrow$  Verringerte Sperrschichtkapazität



Photodiode mit InGaAs/InP-Heterostruktur; Beleuchtung durch das InP-Substrat ( $W_G > \hbar\omega$ )

- InGaAs: Geringere Bandlücke (bei  $\lambda = 1.653\mu\text{m}$ ) als InP
- $\Rightarrow$  Photonen werden nicht in der Diffusionszone absorbiert
- Mesa-Struktur ermöglicht verringerte Sperrschicht-Kapazität
- $\Rightarrow f_{3dB} \approx 100 \text{ GHz}$  möglich, begrenzt durch RC-Effekte; allerdings mit geringer Quanteneffizienz (kurze Absorptionszone)

# Wellenleiter-basierte Photodioden



Wellenleiter-basierte Struktur; Einkopplung über die Chipkante

⇒ Ermöglicht dünne *i*-InGaAs Absorptionsschicht mit kleinen Transit-Zeiten

InGaAsP:InP-Heterostruktur wobei  $W_G > \hbar\omega$  in InP

⇒ Keine Absorption in den Diffusionszonen

Schmaler *i*-InGaAs Absorptionsbereich (1.5 μm breit) + Polyimid (isolierend, kleines  $\epsilon_r$ )

⇒ Kleine Sperrschichtkapazität

Breite Bahngebiete aus hochdotiertem InGaAsP

⇒ Kleiner Serienwiderstand

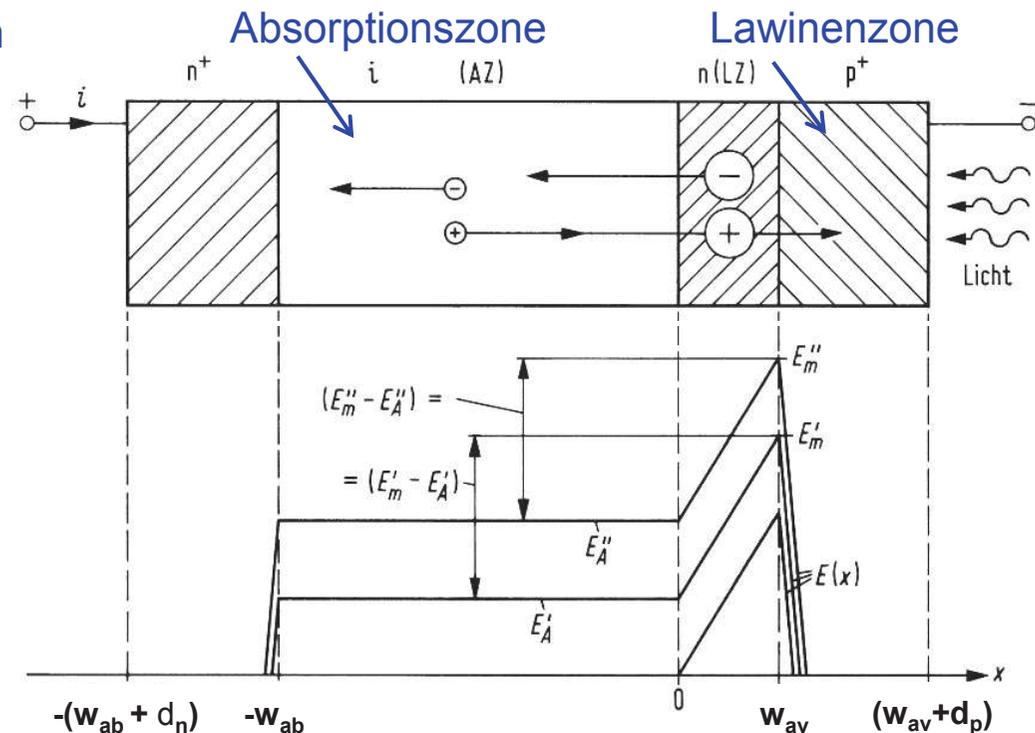
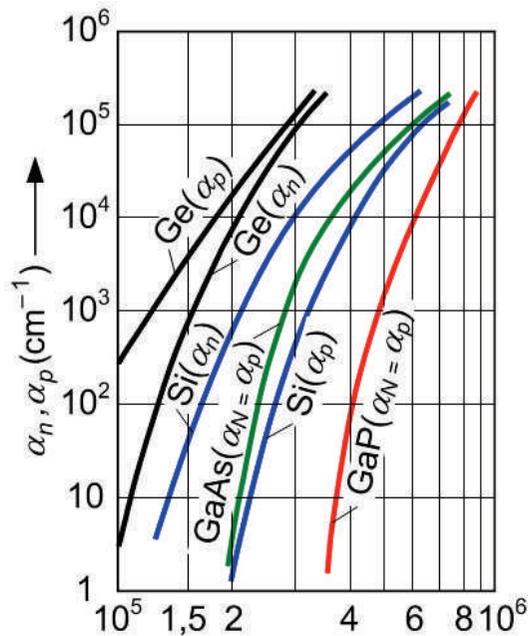
⇒ Sehr große  
3 dB-Bandbreite: 110 GHz

Bildquelle: Agrawal, Fiber-Optic Communication Systems

# Lawinenphotodiode (Avalanche Photodiode, APD)

- Dotierungsprofil erzeugt Lawinenzone (LZ) mit starkem elektrischen Feld
- Durch Lichteinstrahlung erzeugte Primärträger werden in die Lawinenzone injiziert und erzeugen dort neue Elektron-Loch-Paare, die den Photostrom um ein Vielfaches verstärken (Lawinenmultiplikationsfaktor  $M_0$ )
- ⇒ **Höhere Empfindlichkeit, allerdings auch geringere Bandbreite und stärkeres Rauschen**
- Wünschenswert: Stoßionisierung nur durch eine Trägersorte (vermeidet selbsterhaltende Lawine durch Rückkopplung!)
- Häufig verwendet: Silizium-APD; hier dominiert die Stoßionisierung durch Elektronen

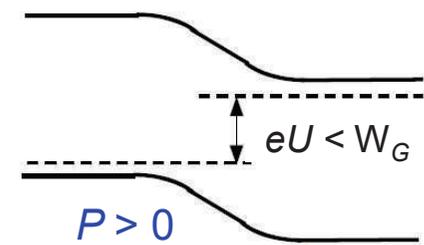
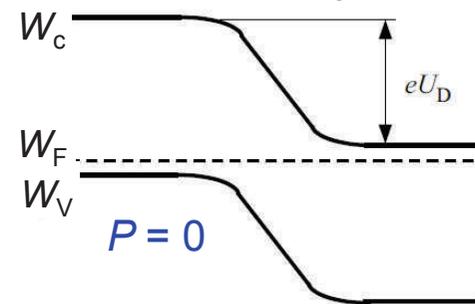
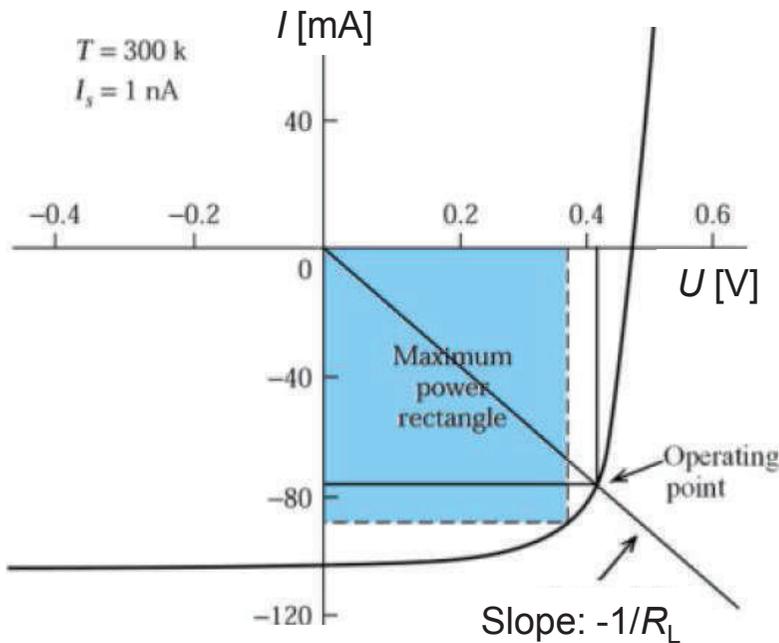
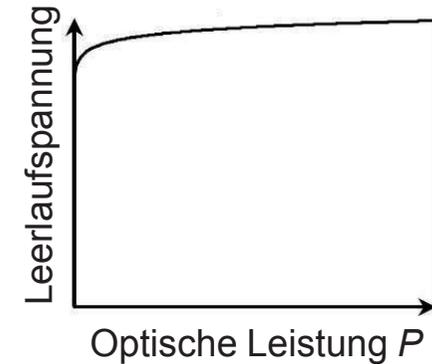
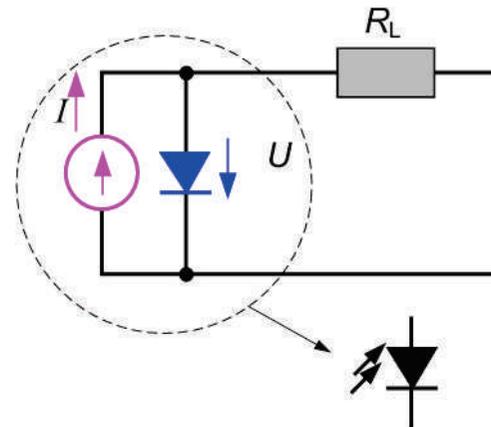
Ionisierungskoeffizienten für Elektronen und Löcher:



# Solarzelle: Elektrisches Verhalten

**Prinzip:** Bestrahlung eines p-n-Überganges mit angeschlossenem Lastwiderstand  $R_L$

⇒ Maximal erreichbare Leerlaufspannung  $eU_{\max} \approx W_G$



Maximierung der Ausgangsleistung (Produkt aus Strom und Spannung) durch Wahl eines geeigneten Lastwiderstandes  $R_L$

Bildquelle: Sze, Semiconductor Devices – Physics and Technology / Thuselt, Physik der Halbleiterbauelemente

# Solarzelle: Bandlücke und theoretischer Wirkungsgrad

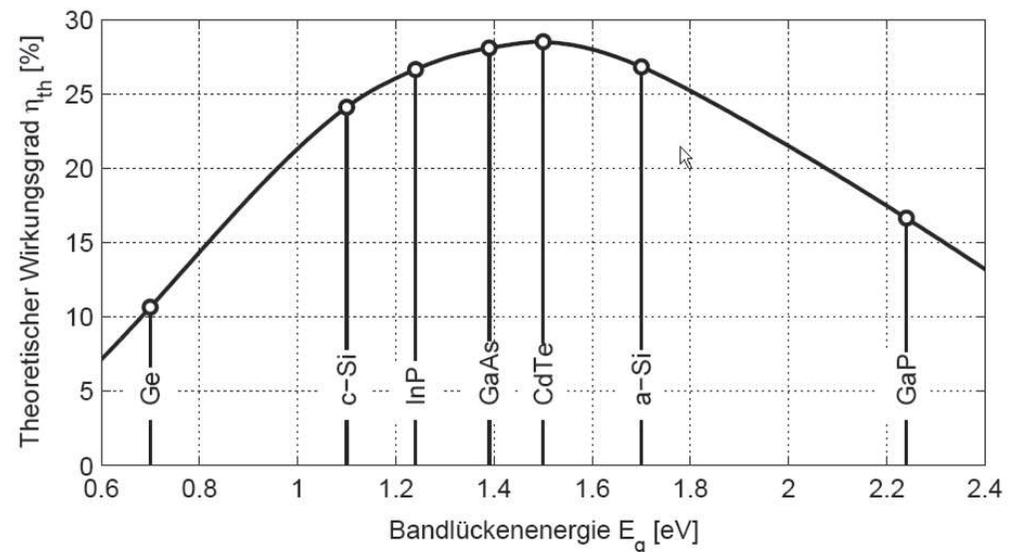
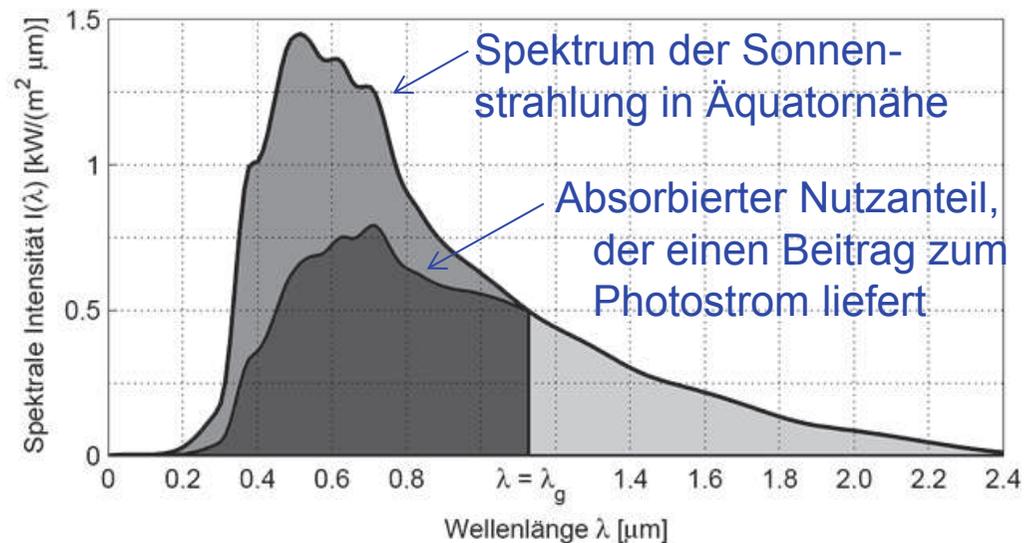
## Zielkonflikt bei der Wahl der Bandlücke:

- Große Bandlücke: Große Leerlaufspannung, aber Absorption eines kleinen Anteils des Sonnenspektrums
- Kleine Bandlücke: Absorption eines großen Anteils des Sonnenspektrums, aber geringe Ausgangsspannung

⇒ Theoretisch erreichbarer Wirkungsgrad begrenzt; Maximum wird für eine optimale Bandlücke von ca. 1.5 eV erreicht

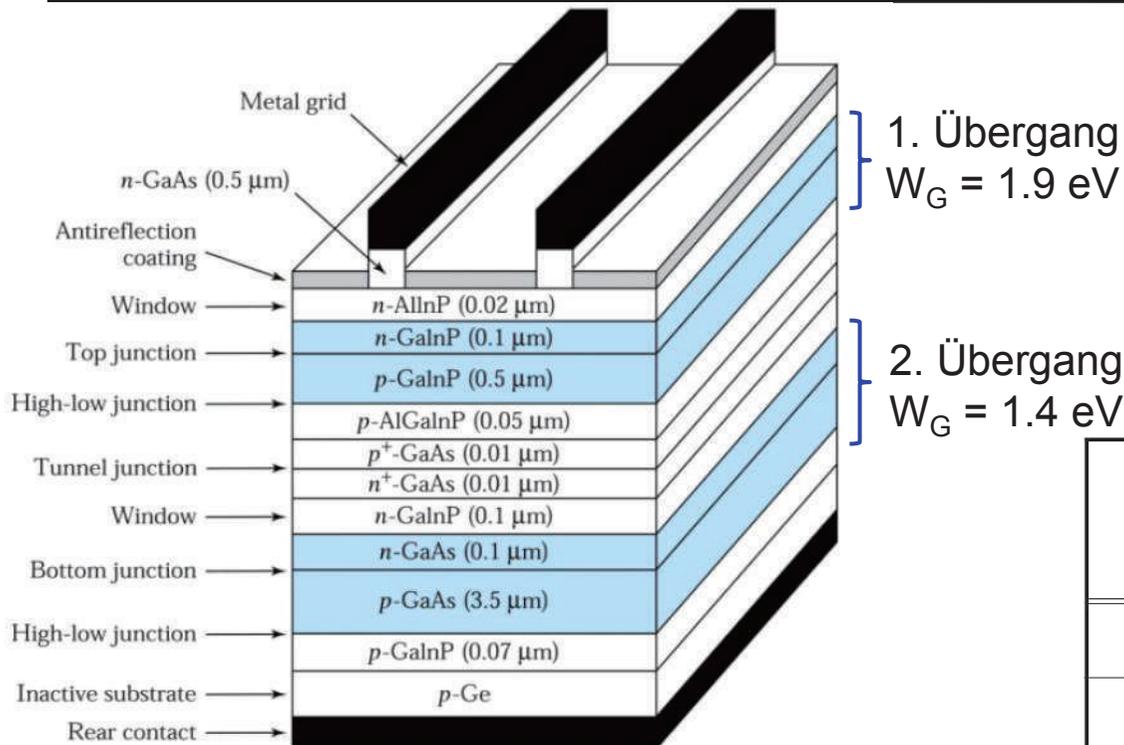
## Realer Wirkungsgrad wird zusätzlich begrenzt durch:

- **Rekombinationsverluste:** Elektron-Loch-Paare rekombinieren in der RLZ
- **Reflexionsverluste:** Ein Teil des Lichtes wird an der Oberfläche reflektiert
- **Ohmsche Verluste** im Halbleitermaterial und in den Zuleitungen



Bildquelle: Sze, Semiconductor Devices - Physics and Technology; Jon Riatsch, Diss ETH, No. 14130

# Tandemzelle und Wirkungsgrade in verschiedenen Materialsystemen



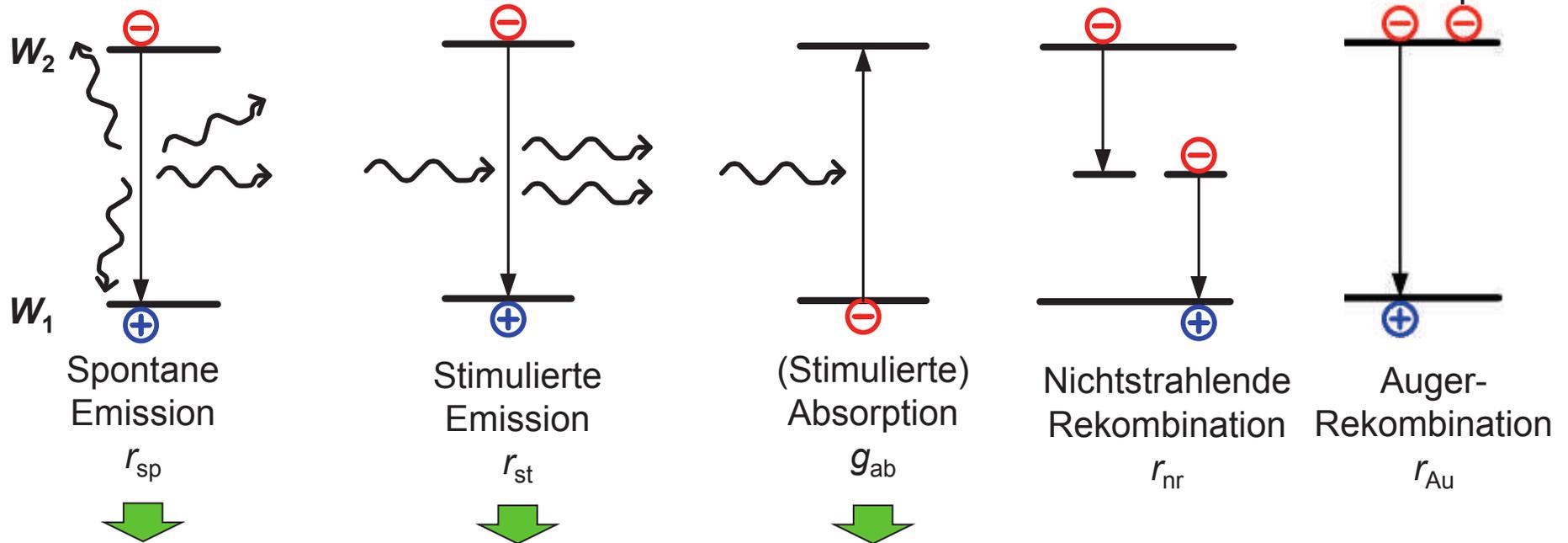
Tandem-Solarzelle: Verbindung von zwei  $p-n$ -Übergängen mit verschiedenen Bandlücken  
 ⇒ Effizientere Nutzung des Sonnenspektrums

Material Technologie	Kommerzielle Zellen		Laborzellen
	Typischer Wirkungsgrad [%]	Maximaler Wirkungsgrad [%]	Maximaler Wirkungsgrad [%]
Monokristallines Silizium	12 - 15	22.7	24.4
Multikristallines Silizium	11 - 14	15.3	19.8
Amorphes Silizium Einzelzelle	6 - 7	10.2	12.7
Cadmium-Tellurid	7 - 9	9.2	16
Kupfer-Indium-Diselenid (CIS)	8 - 12	14	20.0
Farbstoffzelle (Graetzel)	-----	-----	11
Mikromorphe Zelle (a-Si/ $\mu$ c-Si Tandem)	-----	-----	11.6
Amorphe Trippel Zelle (a-Si/a-SiGe/a-SiGe)	7 - 9	13	15.2

Praktisch erzielbare Wirkungsgrade von verschiedenen Solarzellen-Technologien

# Vorlesung 11

13.01.2014



- Leuchtdioden (Light-emitting diodes, LED)

- Laserdioden (LD)
- Optische Halbleiterverstärker (Semiconductor Optical Amplifier, SOA)
- Superlumineszenzdioden (SLD)

- Photodioden (PD)
- Solarzellen

Übergangsraten:

$$r_{sp} \propto n(W_2) p(W_1)$$

$$r_{st} \propto N_p n(W_2) p(W_1)$$

$$g_{ab} \propto N_p p(W_2) n(W_1)$$

$N_p$  = Zahl der Photonen, die mit dem Elektron-Loch-Paar interagieren können.

Zeitliche Entwicklung der Zahl der Photonen, die mit dem Halbleiter in Wechselwirkung stehen:

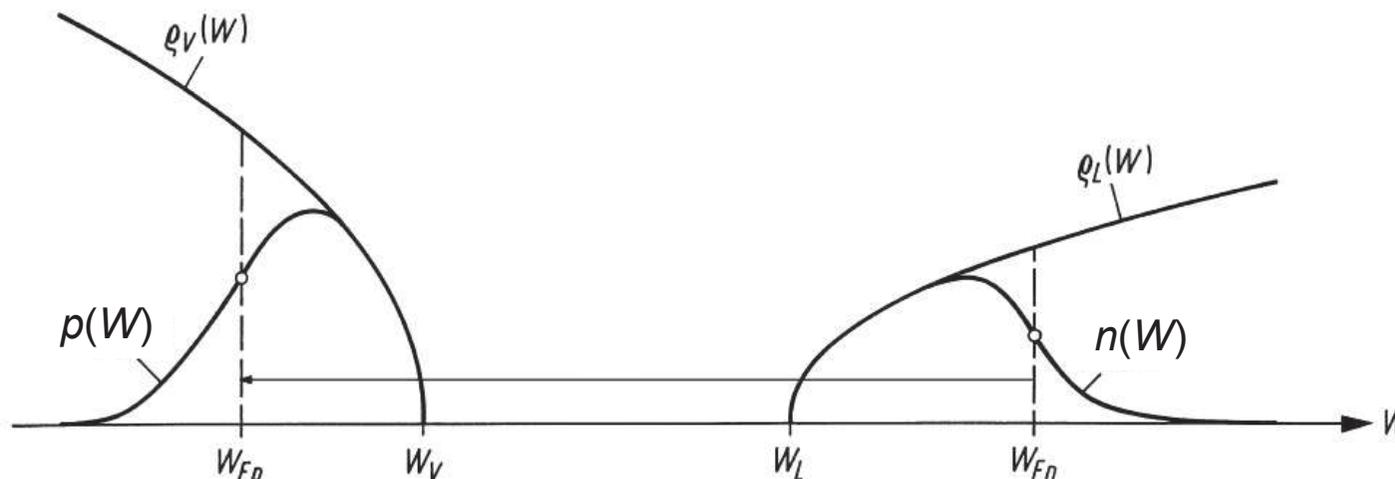
$$\frac{dN_p}{dt} \approx V (r_{st} - r_{ab}) \propto N_p (n(W_2) p(W_1) - p(W_2) n(W_1))$$

Netto-Verstärkung:

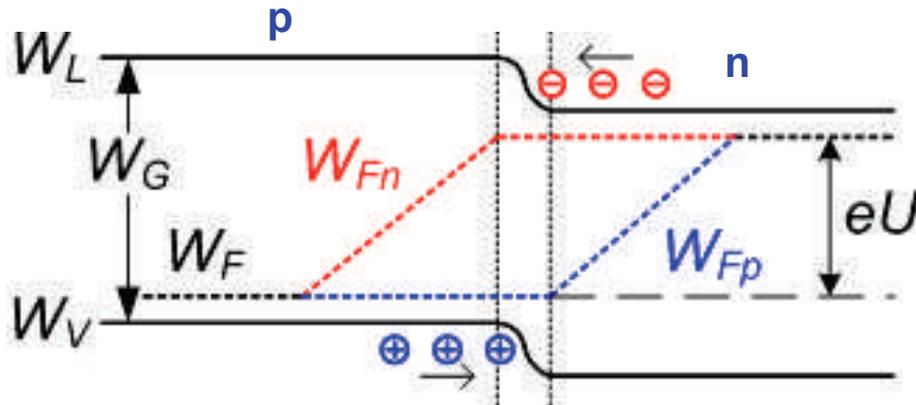
$$n(W_2) p(W_1) > p(W_2) n(W_1)$$

$$W_G = W_C - W_V < \hbar\omega = W_2 - W_1 < W_{Fn} - W_{Fp}$$

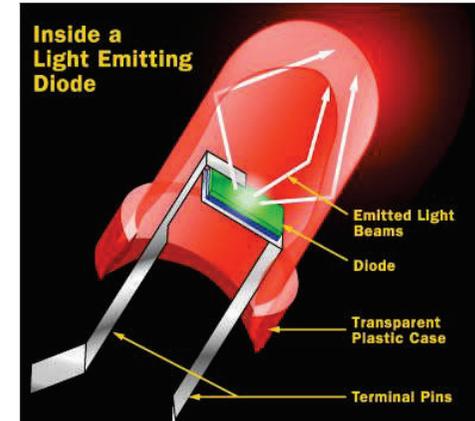
- Die Separation der Quasi-Fermi-Niveaus muss größer sein als der Bandabstand („Besetzungsinversion“)
- Mindestens ein Quasi-Fermi-Niveau muss im entsprechenden Band liegen.



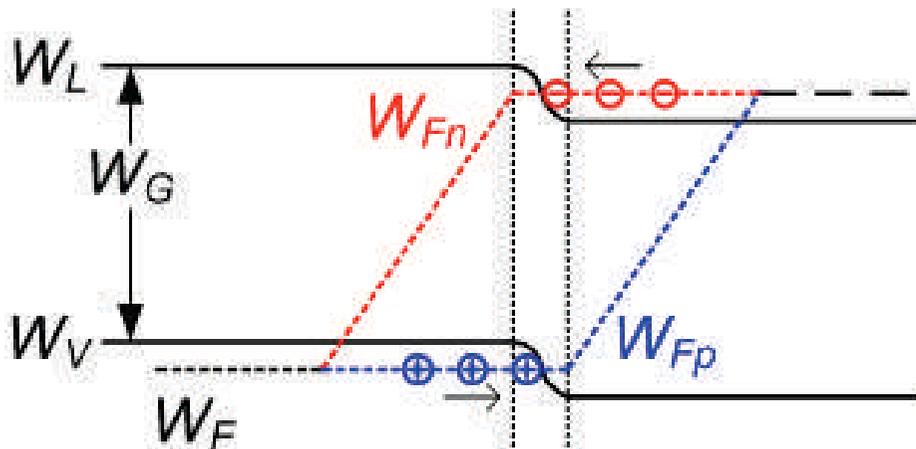
## Spontane Emission: Einfache Aufspaltung der Quasi-Fermi-Niveaus genügt



- Nutzung in einfachen Leuchtdioden (LED) mit vergleichsweise geringem Wirkungsgrad



## Optischer Gewinn / Überschuss an stimulierter Emission: $W_{Fn} - W_{Fp} > W_g$



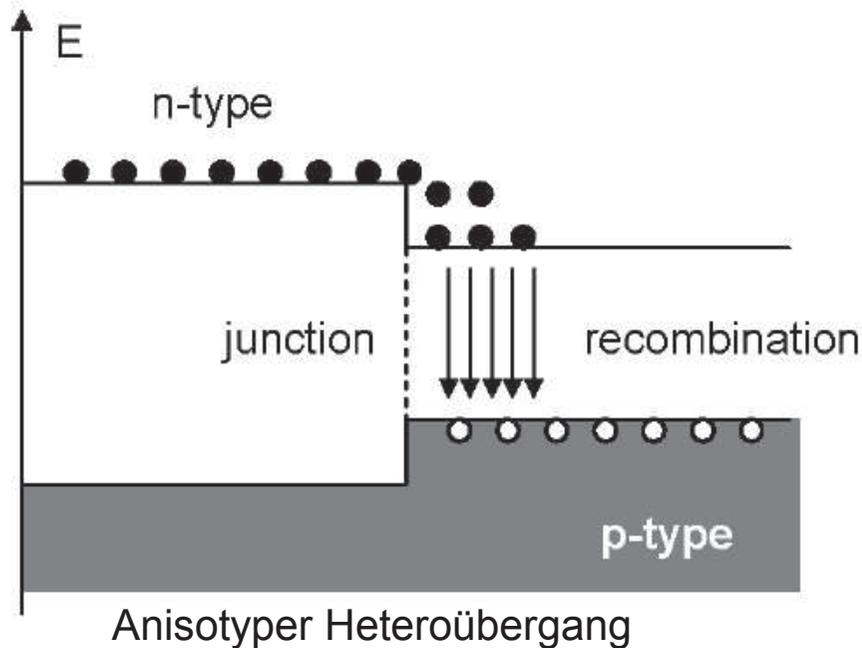
**Homoübergang:** p- und n-Gebiet besteht aus demselben Halbleitermaterial.

- Erfordert entartete Dotierung des Halbleiters auf mindestens einer Seite  
 ⇒ Starke **Auger-Rekombination**
- Rekombination von Elektron-Loch-Paaren findet innerhalb **eines breiten Bereiches** statt, der durch die Diffusionslängen bestimmt wird. **Nur ein kleiner Teil trägt zur Lichtemission bei!**
- **Absorption von Licht** außerhalb des invertierten Bereichs der Diffusionszonen  
 ⇒ **Keine technisch nutzbaren Laseremission auf Basis von Homoübergängen**

# Heterostrukturen und Doppelheterostrukturen

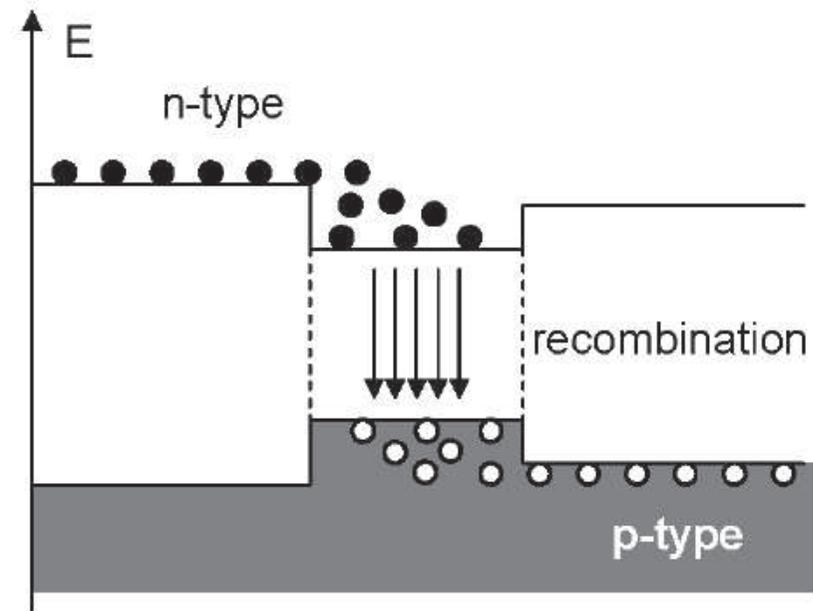
**Heteroübergang / Heterostruktur:** Besteht aus zwei Halbleitern mit verschiedenen Zusammensetzungen / Bandlücken

- Isotyper Heteroübergang: Gleichartige Dotierung auf beiden Seiten
- Anisotyper Heteroübergang: Verschiedenartige Dotierungen auf beiden Seiten

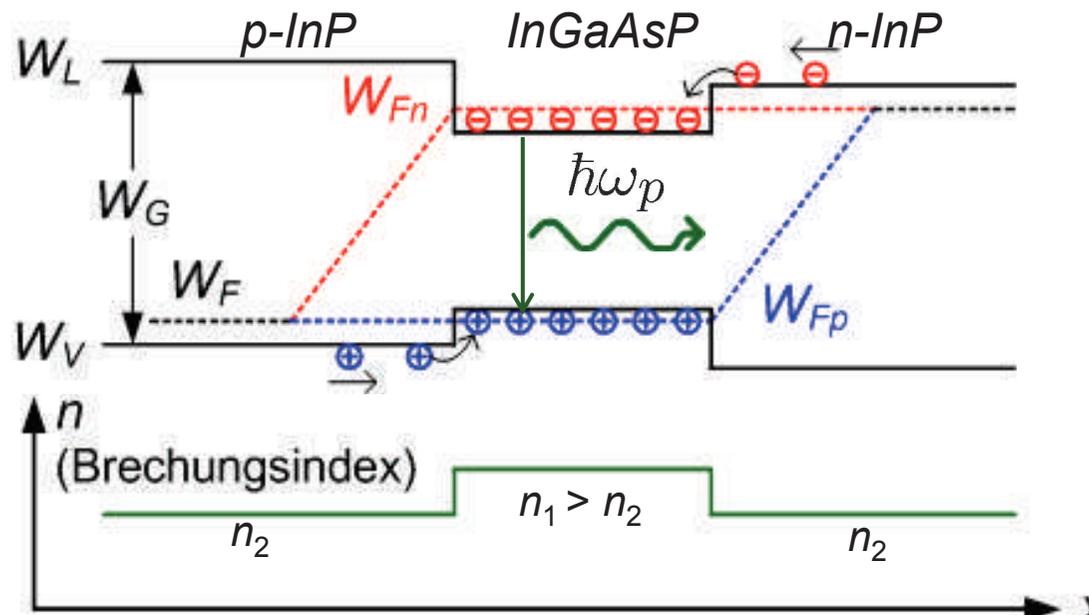


**Doppelheterostruktur:** Schicht mit geringer Bandlücke zwischen zwei Schichten mit großer Bandlücke

- Konzentration von Elektronen und Löchern auf denselben Raumbereich
  - Inversion im Bereich kleiner Bandlücke ohne Entartung der Bahngebiete möglich
- ⇒ Erlaubt den Bau von effizienten Laserdioden und Halbleiterverstärkern!

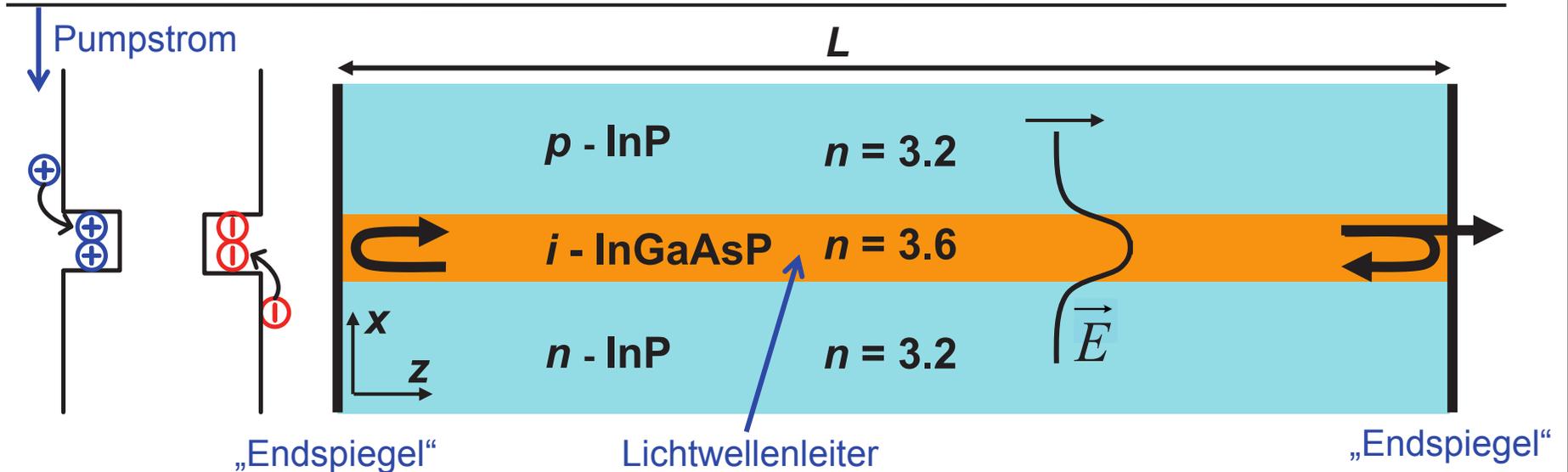


# Doppelheterostruktur und Besetzungsinversion



- Besetzungsinversion auch ohne degenerierte Dotierung möglich: Elektronen und Löcher sammeln sich im sehr kleinen InGaAsP Quantentrog ("Quantum Well")
  - ⇒ Kleine Pumpströme erzeugen große Trägerdichten, Besetzungsinversion und optische Verstärkung
- Keine Re-Absorption von Licht in den nicht-invertierten Gebieten ( $W_G > \hbar\omega$ )
- InGaAsP-Schicht mit kleiner Bandlücke weist gleichzeitig einen erhöhten Brechungsindex auf
  - ⇒ Fungiert als optischer Wellenleiter, der Ladungsträger und Photonen im gleichen Raumbereich konzentriert.
  - ⇒ Effektive Verstärkung von Licht durch stimulierte Emission (LASER = light amplification by stimulated emission of radiation)

# Optischer Resonator und Laser-Emission

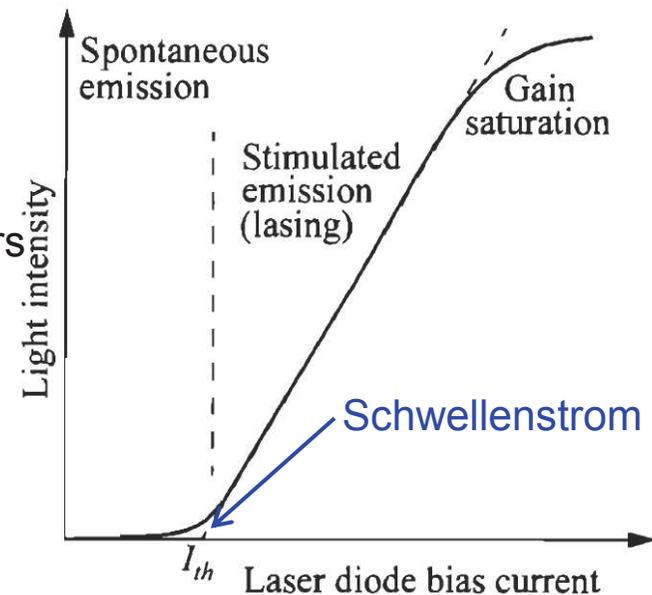


## Optischer Resonator:

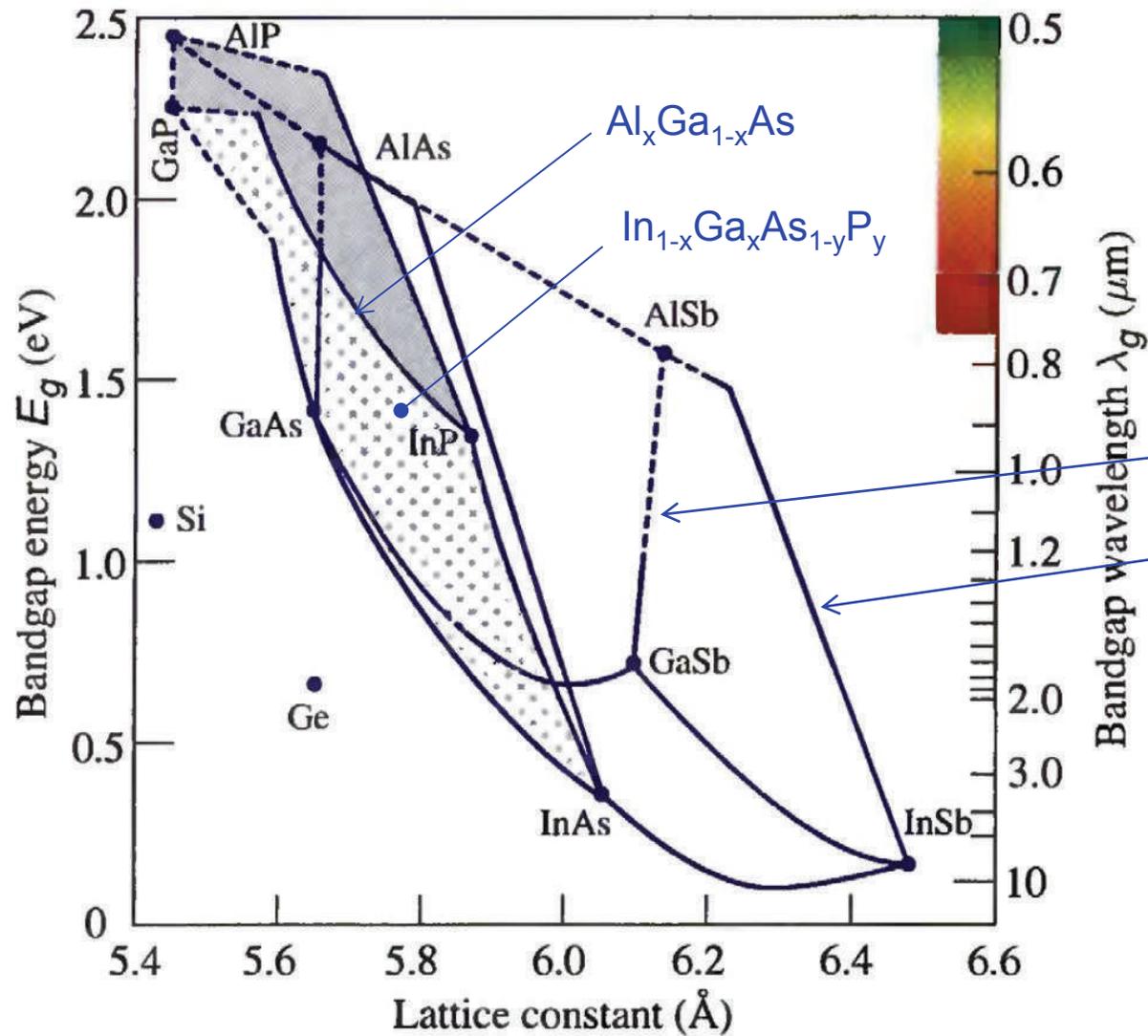
- Laterale Lichtführung (x,y) durch Wellenleitung entlang der InGaAsP-Schicht
- Longitudinale Rückkopplung durch „Endspiegel“ bzw. reflektierende Halbleiterfacette am Ende des Wellenleiters

**Strom-Leistungskennlinie:** Schwellenstrom  $I_{th}$  kompensiert optische Verluste des Resonators; für  $I = I_{th}$  dominiert die stimulierte Emission im Resonator

**Entscheidend:** Hohe Qualität der Halbleiterschichten zur Vermeidung von nichtstrahlender Rekombination  
 ⇒ Anpassung der Gitterkonstanten



# Ternäre und quaternäre Halbleiter

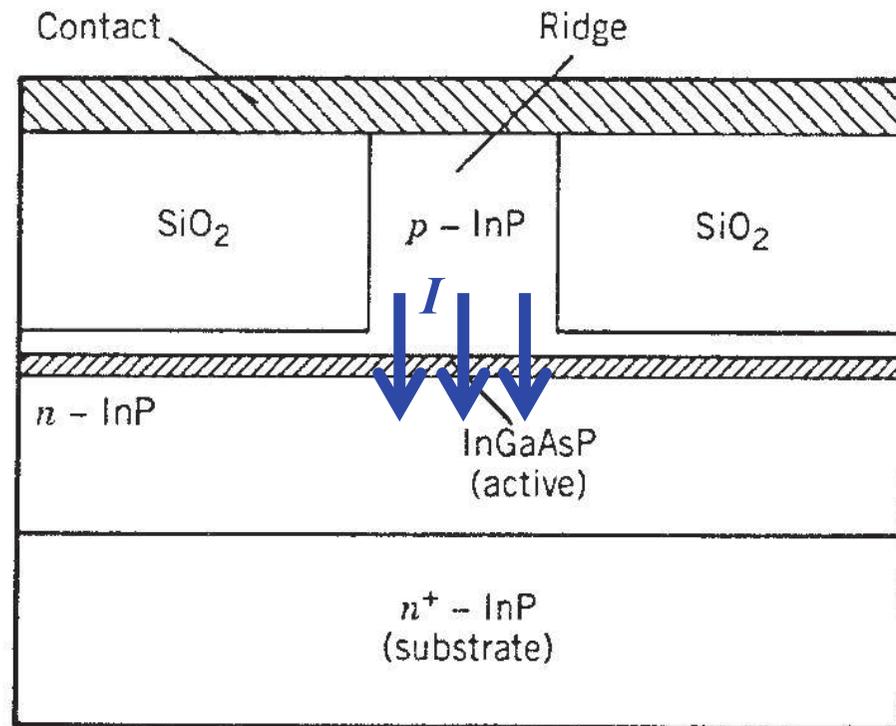


- Ternäre Verbindungen liegen auf der Linie, die die zugehörigen binären Halbleiter verbindet.
- Quaternäre Verbindungen liegen innerhalb eines flächenhaften Gebietes, dessen Ecken durch die entsprechenden binären Halbleiter definiert werden.

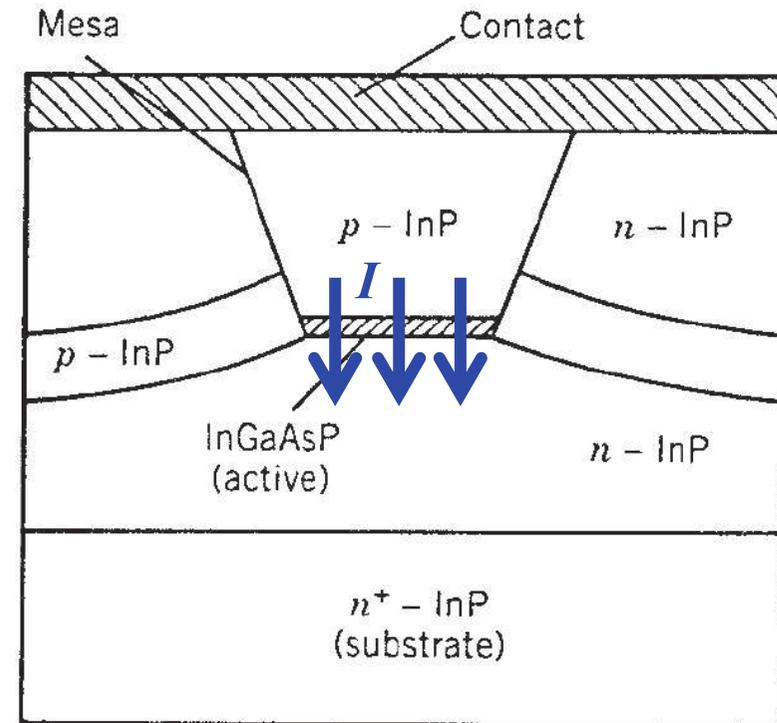
Gestrichelte Linien:  
Indirekte Bandlücke

Durchgezogene Linien:  
Direkte Bandlücke

Bildquelle: Saleh/Teich,  
Fundamentals of Photonics



Aktiver InGaAsP/InP-Rippenwellenleiter



Vergrabene (Doppel-)Heterostruktur („Buried heterostructure“)

Bildquelle: Agrawal; Fiber-Optic Communication Systems

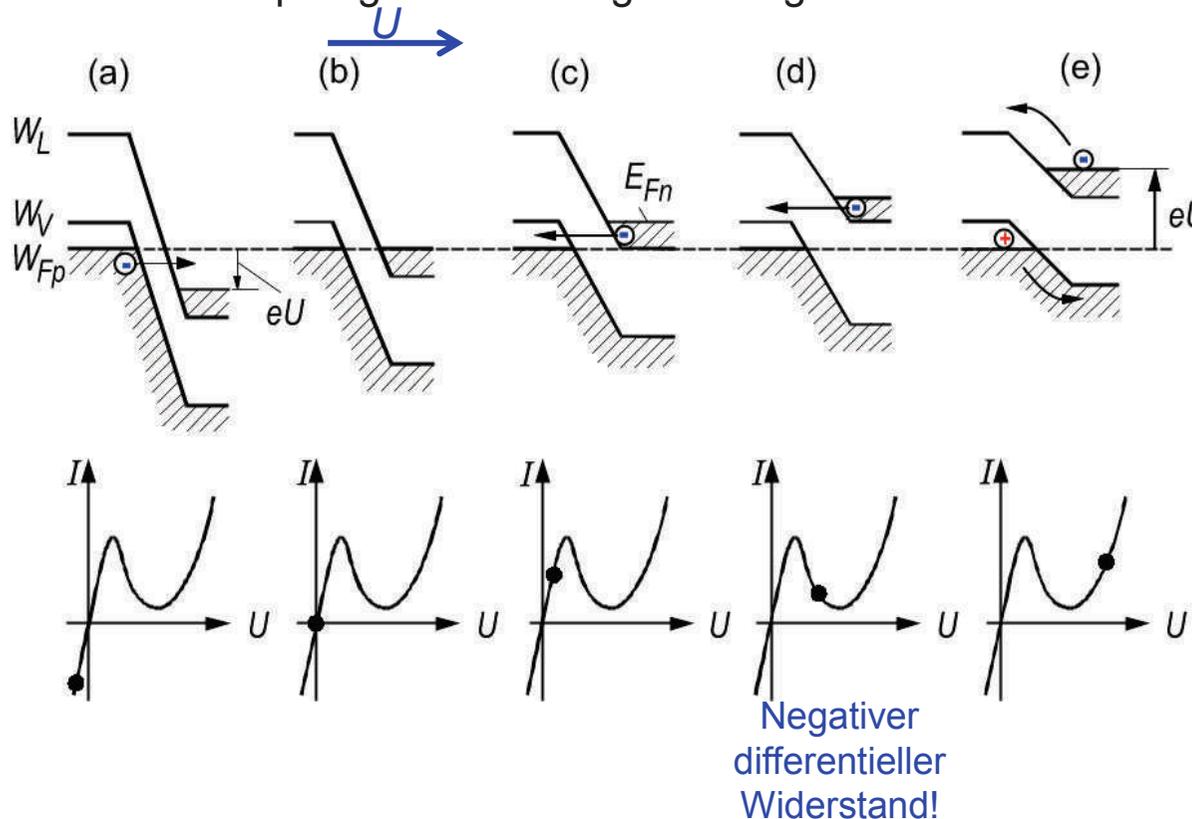
# Tunneldiode

Sehr hoch dotierter  $p^{++}$ - $n^{++}$ -Übergang (auf beiden Seiten entartet)

- ⇒ Sehr kurze RLZ
- ⇒ Tunnelprozesse „in Vorwärtsrichtung“ bei „mittleren“ Vorwärtsspannungen
- ⇒ Negativer differentieller Widerstand; kann zur Entdämpfung von Schwingkreisen genutzt werden



- (a) Sperrspannung; Rückwärtsstrom
- (b) Keine externe Spannung; kein Stromfluss im Außenkreis
- (c) Tunnelstrom in Vorwärtsrichtung bei „kleinen“ Vorwärts-spannungen  $U$ , bei denen die LB-Elektronen im  $n$ -Bereich auf gleicher energetischer Höhe liegen wie die Löcher im VB des  $n$ -Bereiches.
- (d) Tunnelstrom geht zurück, da auf der  $p$ -Seite keine freien Plätze für tunnelnde Elektronen verfügbar sind. ⇒ **Negativer differentieller Widerstand!**
- (e) Stromfluss wie bei „normaler Diodenkennlinie“

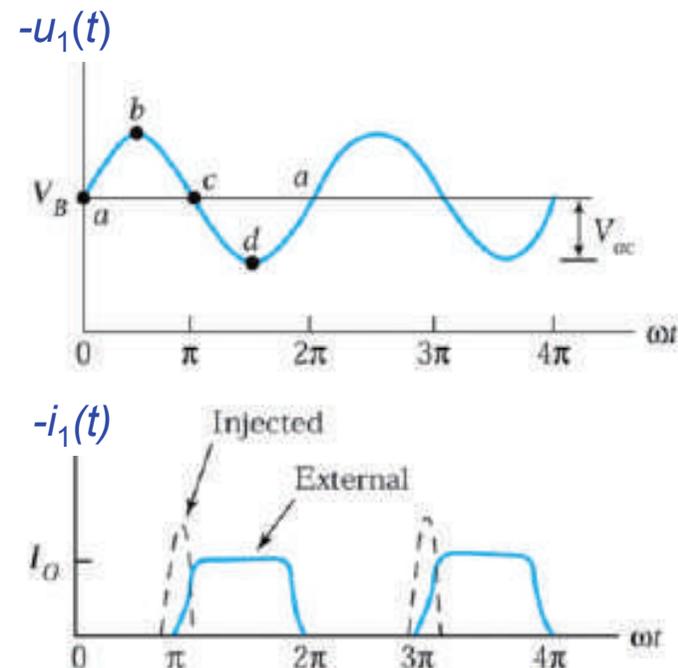
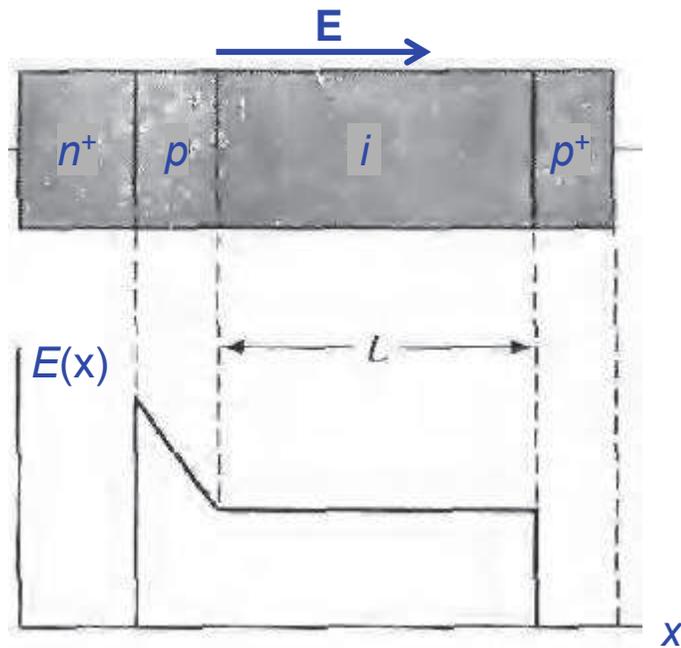


# Lawinen-Laufzeit-Diode (LLD) bzw. IMPATT-Diode

IMPATT-Diode = Impact Ionization Avalanche Transit Time Diode

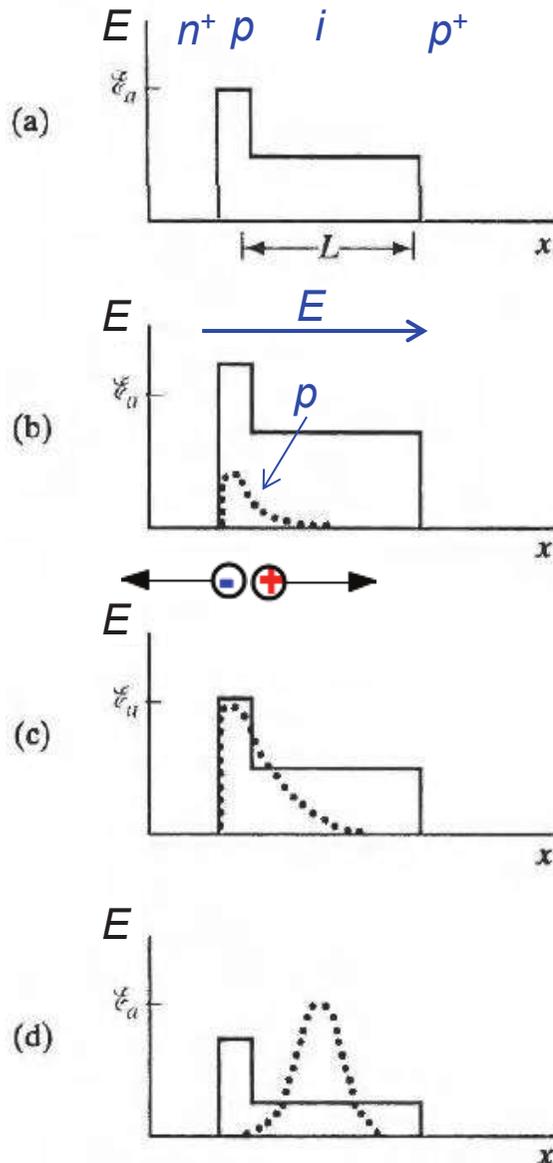
Prinzip:

- $n^+$ - $p$ - $i$ - $n^+$ -Struktur wird in Sperrrichtung vorgespannt
- Einer negativen Vorspannung  $U_0$  wird eine Wechselspannung  $u_1(t)$  überlagert, die in den negativen Halbwellen zu einem Lawinendurchbruch führt
- Der Lawinenstrom ist gegenüber der Spannung zeitlich verzögert
- Strom und Spannung können gegenphasig sein, d.h. das Bauteil verhält sich wie ein „negativer ohmscher Widerstand“ und kann zur Realisierung eines Mikrowellenoszillators verwendet werden.

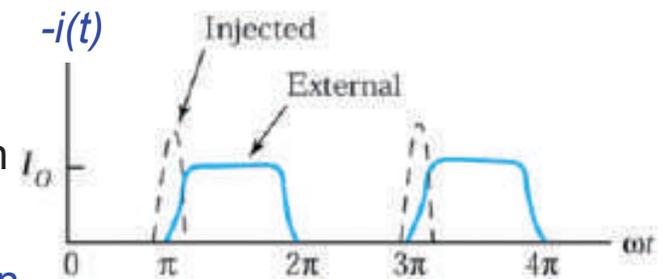
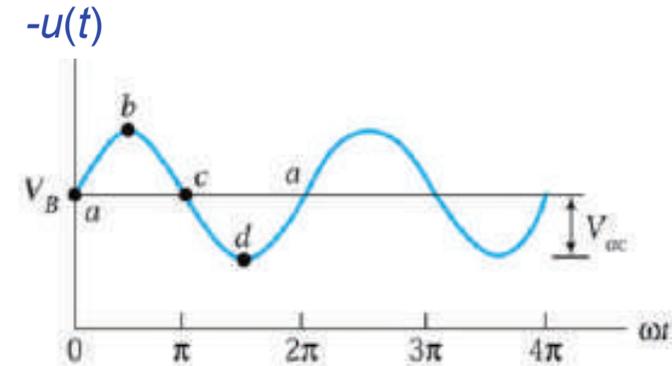


Bildquellen: Sze, Semiconductor Devices – Physics and Technology / Streetman, Solid-State Electronic Devices

# Lawinen-Laufzeit-Diode (LLD) bzw. IMPATT-Diode

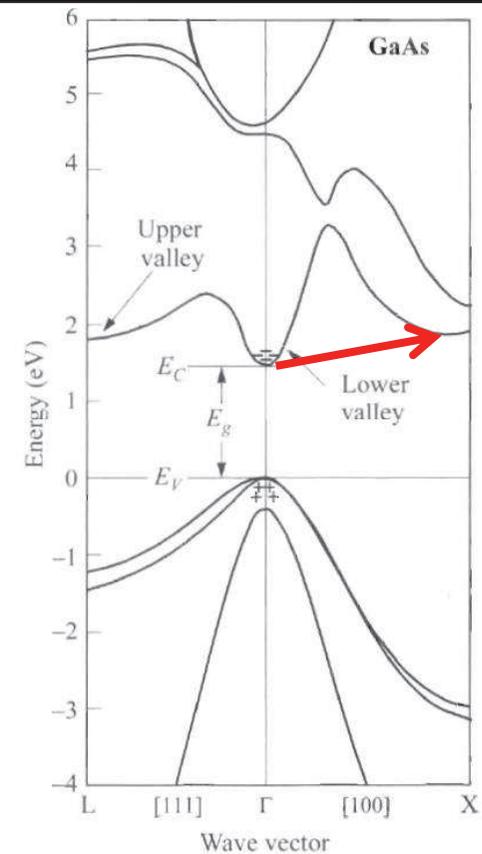
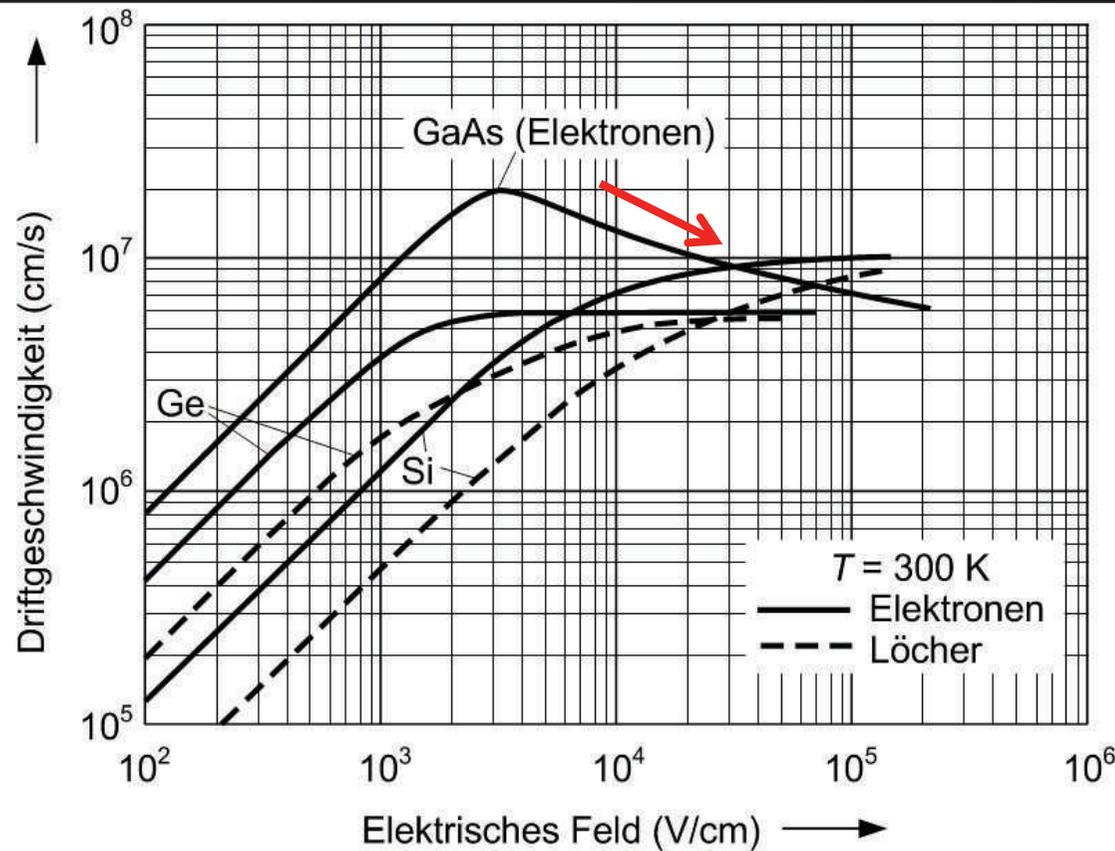


- Lawinenmultiplikation setzt bei  $t = 0$ , also zu Beginn der negativen Halbwelle der externen Spannung  $u(t)$  ein
- Die Elektronen werden in die  $n^+$ -Zone abgezogen und tragen nicht weiter zum Strom bei
- Die Zahl der **driftenden Löcher** nimmt während der negativen Halbwelle von  $u(t)$  kontinuierlich zu.
- Die **maximale Zahl an driftenden Löchern** wird am Ende der negativen Halbwelle von  $u(t)$  erreicht (Ende der Lawinenmultiplikation!)
- Der **Stromfluss** hält so lange an, bis die Löcher den rechten Rand der  $i$ -Zone erreicht haben.



- Bei geeigneter Dimensionierung sind Strom und Spannung gegenphasig.  $\Rightarrow$  **Negativer Widerstand!**

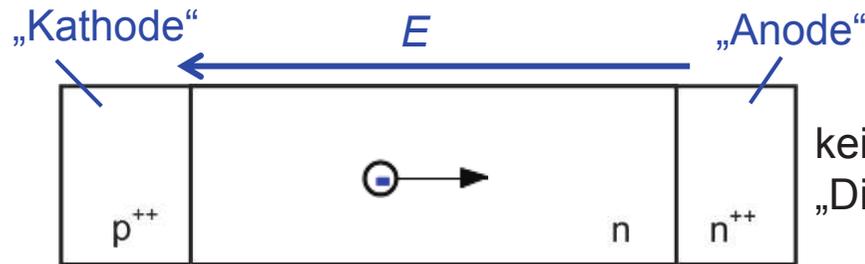
Bildquellen: Sze, Semiconductor Devices – Physics and Technology / Streetman, Solid-State Electronic Devices



Erinnerung: Negative differentielle Driftgeschwindigkeit von Elektronen in GaAs durch Streuung von Elektronen in ein zweites Minimum des LB, das eine höhere effektive Masse aufweist.

$$m^* = \hbar^2 \left( \frac{\partial^2 W_n(k)}{\partial k^2} \Big|_{k=k_0} \right)^{-1}$$

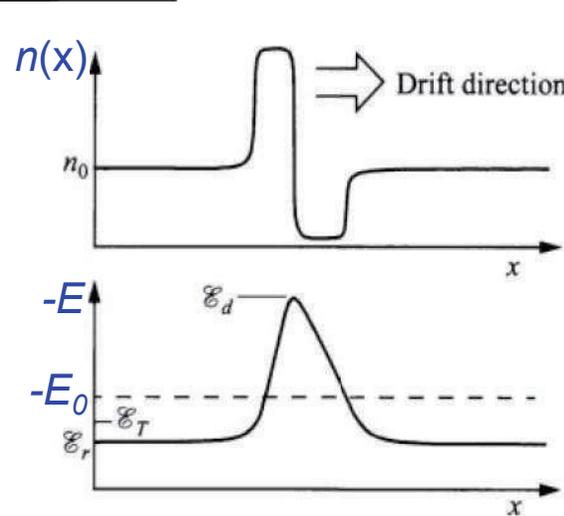
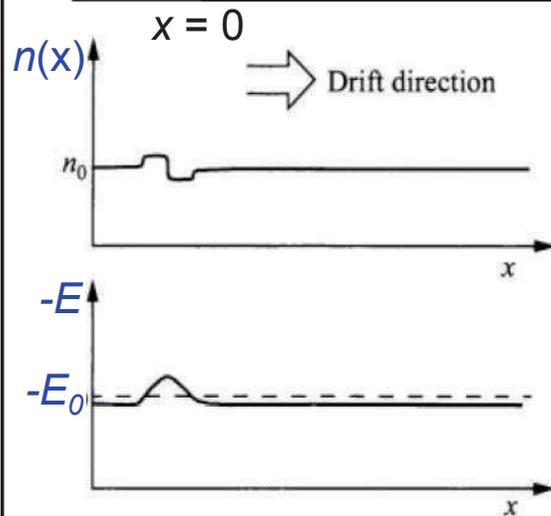
# „Gunn-Diode“ bzw. „Transferred-Electron Device“ (TED)



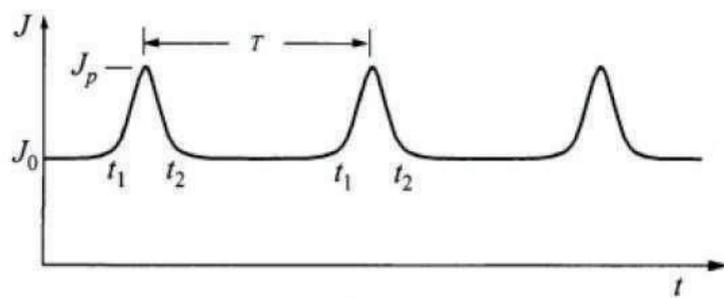
Betrachte lokale „Dipol-ähnliche“ Störung der Elektronendichte

keine „Diode“!

- ⇒ Lokale Erhöhung der elektrischen Feldes innerhalb der Störung!
- ⇒ Lokale Verringerung der Driftgeschwindigkeit!



- ⇒ Störung wird verstärkt, da nachfolgende Elektronen „auflaufen“; restliches Feld nimmt ab!
- ⇒ Stationärer Zustand, wenn Feld außerhalb der Dipol-Störung („Mature Domain“) so weit abgesunken ist, dass alle Träger mit derselben Geschwindigkeit propagieren

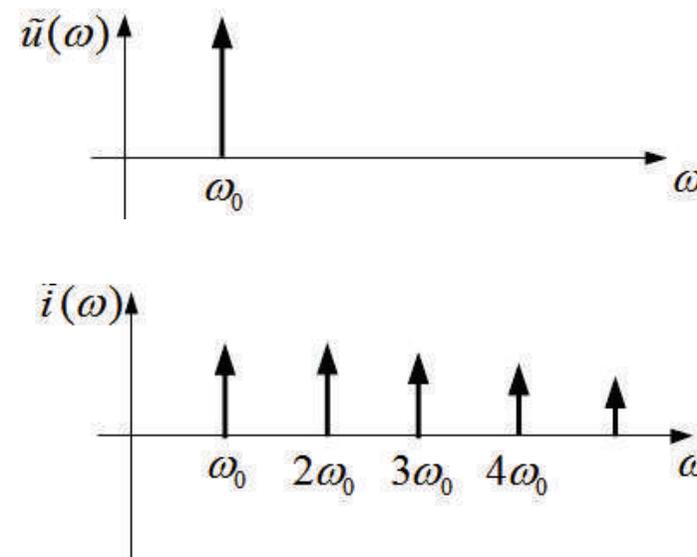
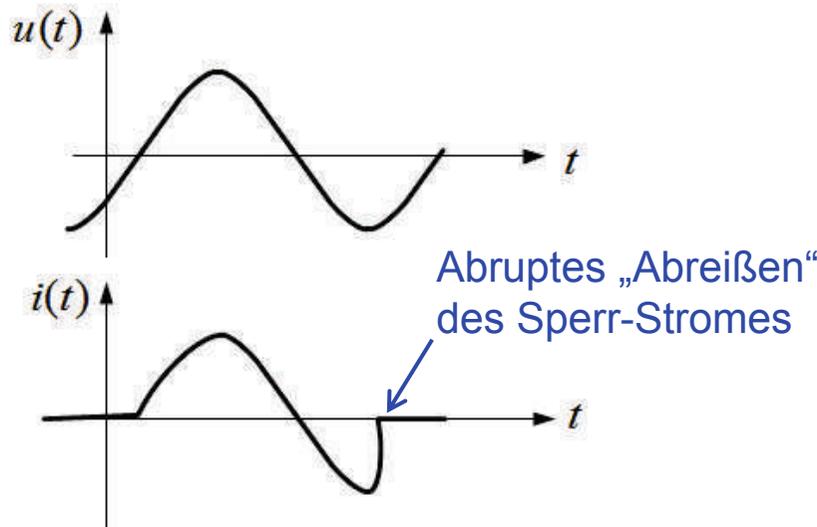
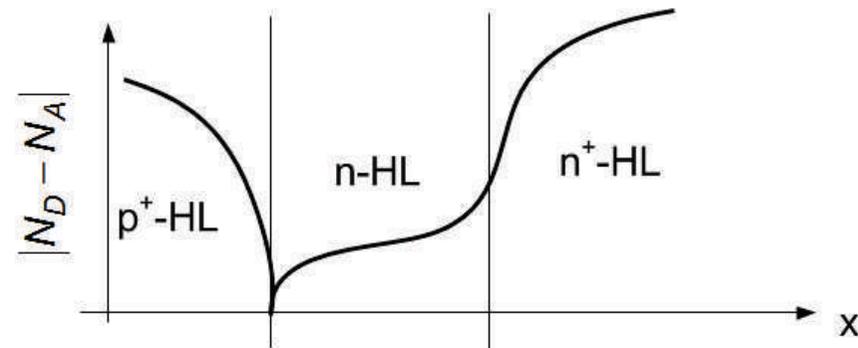


- Beim Verlassen des Driftbereiches an der Anode ändert sich die Feldstärke schlagartig; dies führt zur Bildung einer neuen Störung an der Kathode, die während der Propagation wieder anwächst.
- ⇒ **Periodische Folge von Strom-Impulsen**; die Periodendauer  $T$  entspricht der Transitzeit der Elektronen.
- ⇒ Verwendung als **Mikrowellenquelle**

# Step-Recovery-Diode (SRD) bzw. Speicher-Varaktor

Frequenzvervielfachung durch Ausnutzung des Ausschaltverhaltens des pn-Überganges:

- Ansteuern die Diode mit einer sinusförmigen Wechselspannung führt zu **periodischem Umschalten zwischen Sperr- und Flussbetrieb**
  - Negative Halbwelle: Abbau der Ladungen aus der Diffusionszone führt zunächst zu einem Stromfluss in Sperrrichtung, der dann aber sehr schnell auf Null absinkt.
- ⇒ **Hoher Anteil an Oberwellen** im Leistungsspektrum des Stromes!
- ⇒ Verwendung zu Frequenzvervielfachung!
- Dotierung ähnlich wie bei der p-i-n-Diode, um die Sperrschichtkapazität gering zu halten!



# Kapitel 8: Bipolar-Transistoren

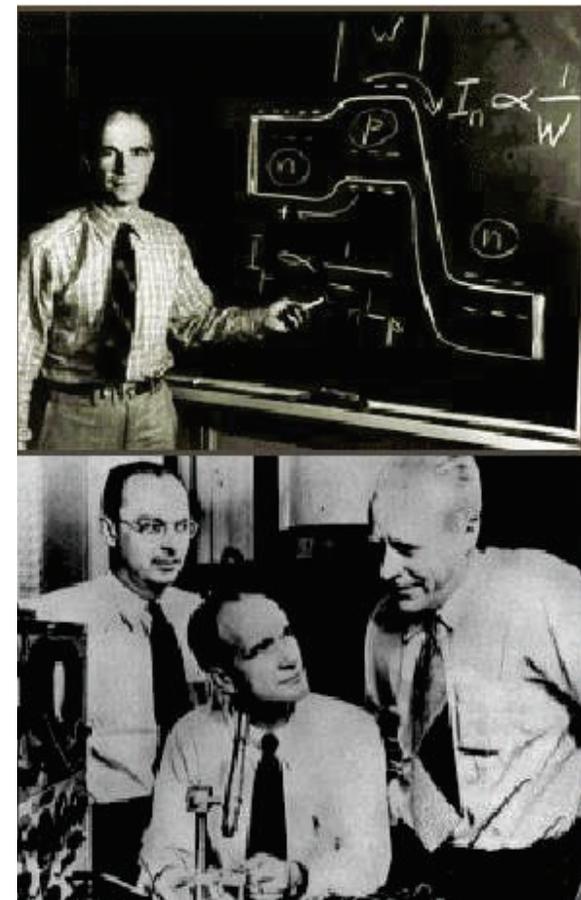
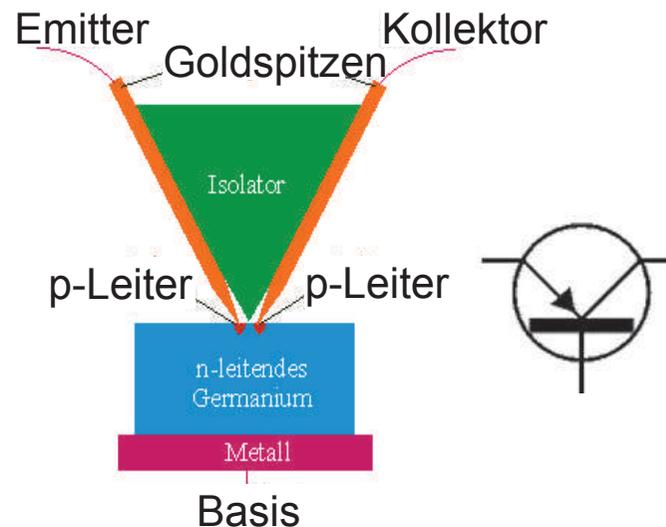
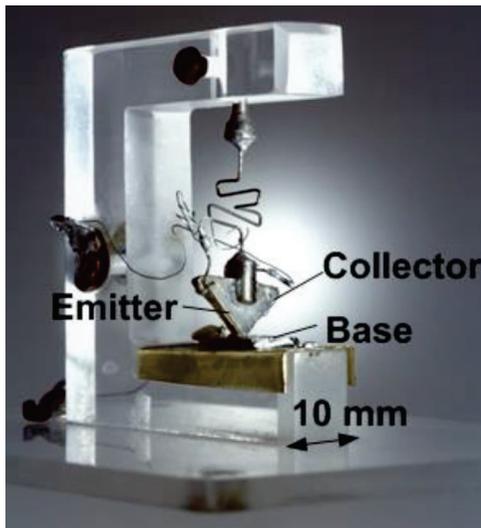
## Historisches zum Transistor („Transfer Resistor“)

1928: Erstes Patent über „feldgesteuerte Halbleiter“ (Feldeffekt-Transistor) von **Julius Edgar Lilienfeld**; technische Realisierung eines funktionsfähigen Bauteils scheitert aber noch am Reinheitsgrad der verfügbaren Halbleitermaterialien

1948: Patent für den Transistor-Effekt und Transistor-Verstärker von **John Bardeen, Walter H. Brattain und William B. Shockley** (Bell Telephone Laboratories, New York); 1956 erhalten sie gemeinsam den Nobelpreis für Physik

## Erstes funktionsfähiges Bauteil: Spitzen-“Transistor“ (1947)

- Spätere Untersuchungen: Es war eher ein Thyristor ( $pnpn$ )
- Schaltbild des Transistors erinnert an einen Spitzentransistor



# Vorlesung 12

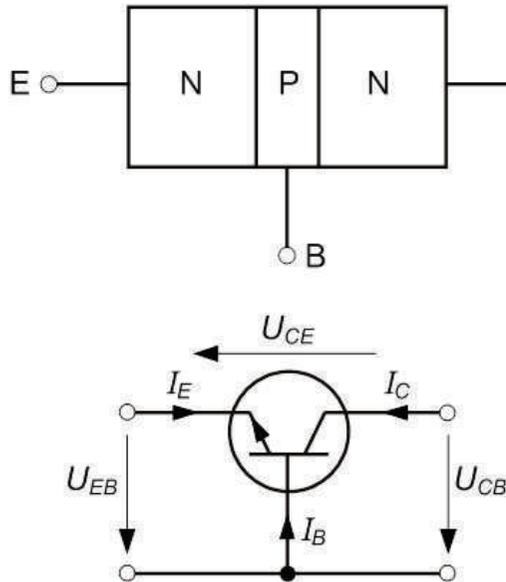
20.01.2014

# Änderung im Vorlesungsplan

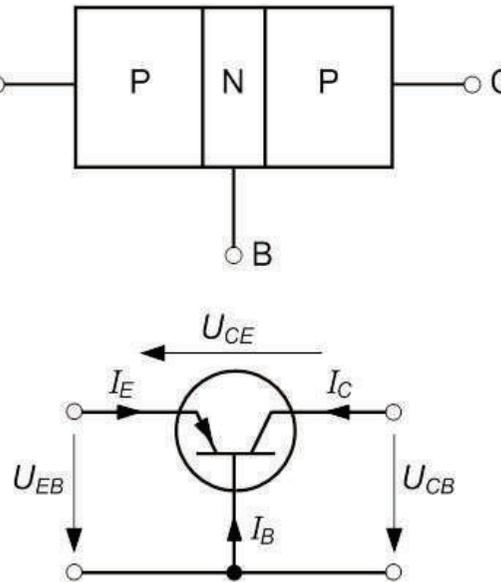
- Vorlesung statt Übung am kommenden Freitag, dem 24.01.14
- Am Montag, dem 03.02.14, findet dann eine Übung anstelle der Vorlesung statt

Montag, 21.10.13: Vorlesung 1	Freitag, 25.10.13: Vorlesung 2
Montag, 28.10.13: Vorlesung 3	Freitag, 01.11.13: Feiertag (Allerheiligen)
Montag, 04.11.13: Vorlesung 4	Freitag, 08.11.13: Übung 1
Montag, 11.11.13: Vorlesung 5	Freitag, 15.11.13: Übung 2
Montag, 18.11.13: Vorlesung 6	Freitag, 22.11.13: Übung 3
Montag, 25.11.13: Vorlesung 7	Freitag, 29.11.13: Übung 4
Montag, 02.12.13: Vorlesung 8	Freitag, 06.12.13: Übung 5
Montag, 09.12.13: Vorlesung 9	Freitag, 13.12.13: Übung 6
Montag, 16.12.13: Vorlesung 10	Freitag, 20.12.13: Übung 7
Montag, 06.01.14: Feiertag (Heilige Drei Könige)	Freitag, 10.01.14: Übung 8
Montag, 13.01.14: Vorlesung 11	Freitag, 17.01.14: Übung 9
Montag, 20.01.14: Vorlesung 12	Freitag, 24.01.14: Vorlesung 13
Montag, 27.01.14: Vorlesung 14	Freitag, 31.01.14: Übung 10
Montag, 03.02.14: Übung 11	Freitag, 07.02.14: Übung 12
Montag, 10.02.14: Vorlesung 15	Freitag, 14.02.14: Übung 13

npn-Transistor



pnp-Transistor



Es gilt:  $I_E + I_B + I_C = 0$

$U_{EB} - U_{CB} + U_{CE} = 0$

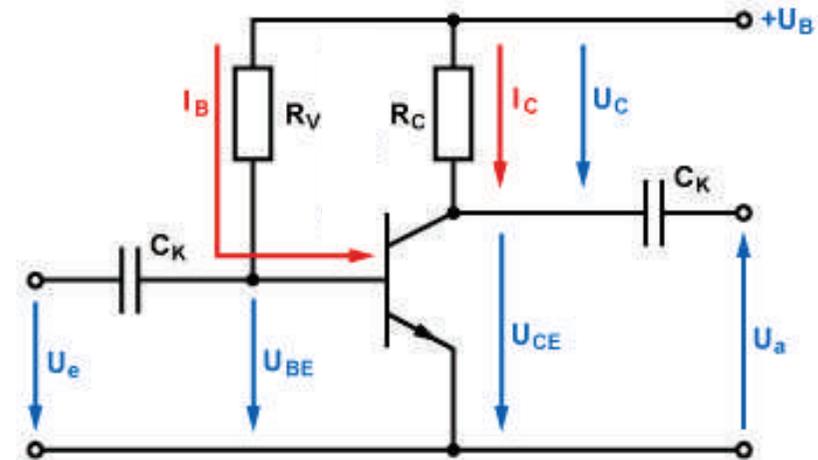
Spannungen und Ströme im Normalbetrieb:

	$U_{EB}$	$U_{CB}$	$U_{CE}$	$I_E$	$I_C$	$I_B$
NPN	-	+	+	-	+	+
PNP	+	-	-	+	-	-

## Verstärkungseffekt:

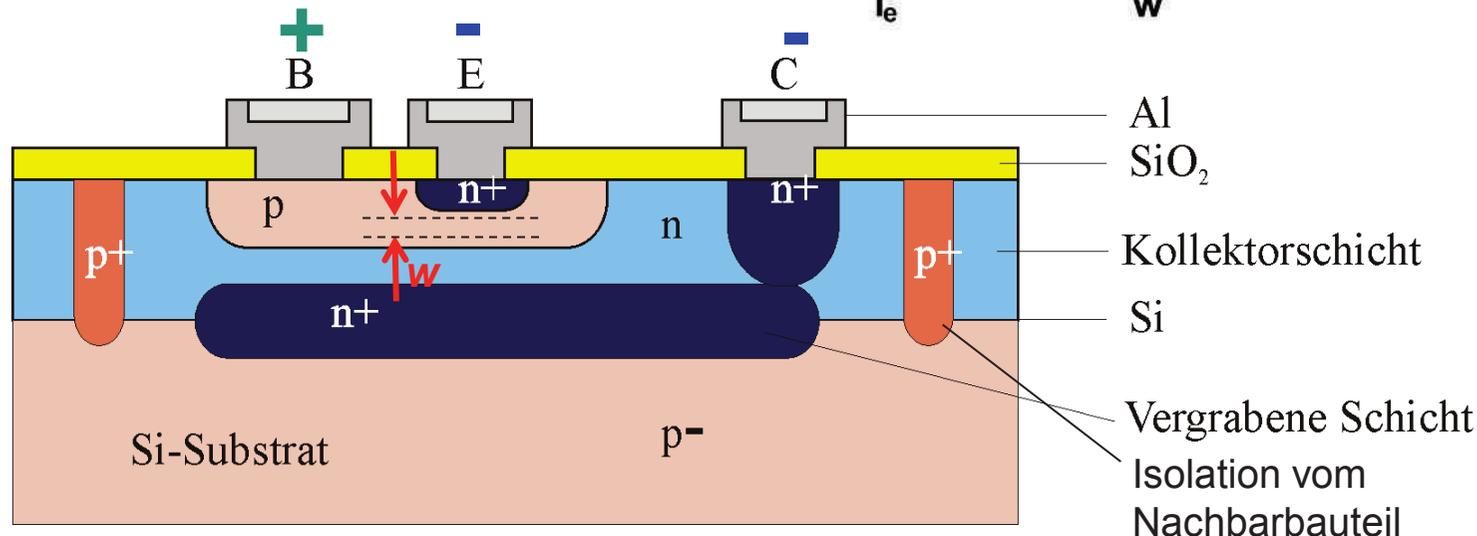
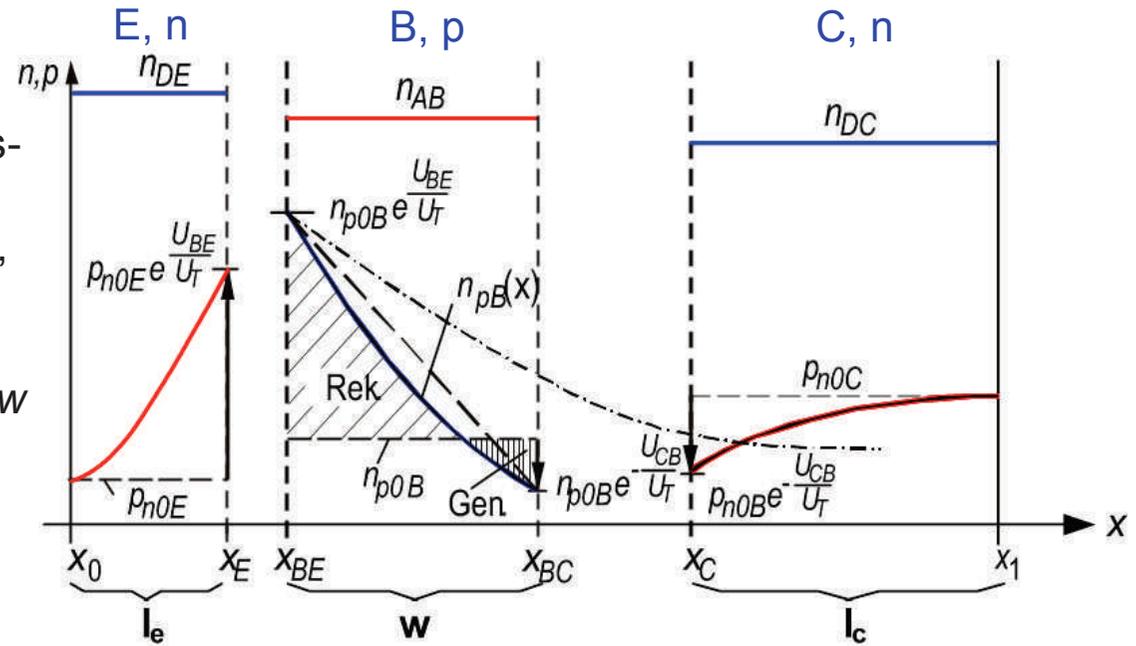
- Kleiner Steuerstrom an der Emitter-Basis-Diode führt zu großem Kollektor-Strom  
 $|I_B| \ll |I_E| \approx |I_C|$
- Spannungsabfall über der Kollektor-Basis-Diode viel größer als über der Emitter-Basis-Diode  
 $|U_{EB}| \ll |U_{CE}| \approx |U_{CB}|$

## Beispiel: Emitterschaltung



# Bipolar-Transistoren: Funktionsprinzip

Entscheidend für die Funktionsweise des Transistors: Im Normalbetrieb müssen die Diffusionszonen des Basis-Emitter- und des Basis-Kollektor-Überganges in Wechselwirkung treten, d.h. Diffusionslänge der Minoritätsträger in der Basis muss größer sein als die Basisweite ( $L_{nB} \gg w$  im Fall eines npn-Transistors)



# Minoritätsträgerverteilung in der Basis

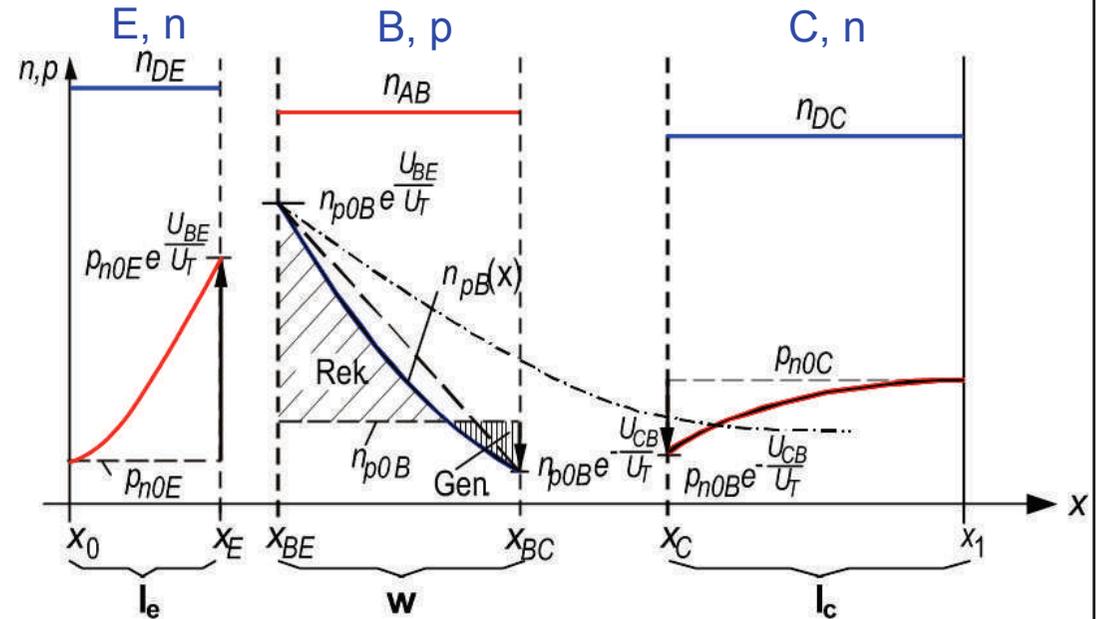
Differentialgleichung für den Verlauf der Elektronendichte in der Basis:

$$\frac{d^2 n_{pB}}{dx^2} = \frac{1}{L_{nB}^2} [n_{pB}(x) - n_{p0B}]$$

Randbedingungen:

$$n_{pB}(x_{BE}) = n_{p0B} e^{U_{BE}/U_T}$$

$$n_{pB}(x_{BC}) = n_{p0B} e^{-U_{CB}/U_T}$$



Lösung:

$$n_{pB}(x) - n_{p0B} = \frac{n_{p0B}}{\sinh\left(\frac{x_{BC} - x_{BE}}{L_{nB}}\right)} \times \left[ \left( e^{-U_{EB}/U_T} - 1 \right) \sinh\left(\frac{x_{BC} - x}{L_{nB}}\right) + \left( e^{-U_{CB}/U_T} - 1 \right) \sinh\left(\frac{x - x_{BE}}{L_{nB}}\right) \right]$$

# Minoritätsträgerströme in der Basis

Minoritätsträger-Diffusionsstrom in der Basis:

$$I_{n_{pB}}(x) = I_{TS} \left[ - \left( e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) \cosh \left( \frac{x_{BC} - x}{L_{nB}} \right) + \left( e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right) \cosh \left( \frac{x - x_{BE}}{L_{nB}} \right) \right]$$

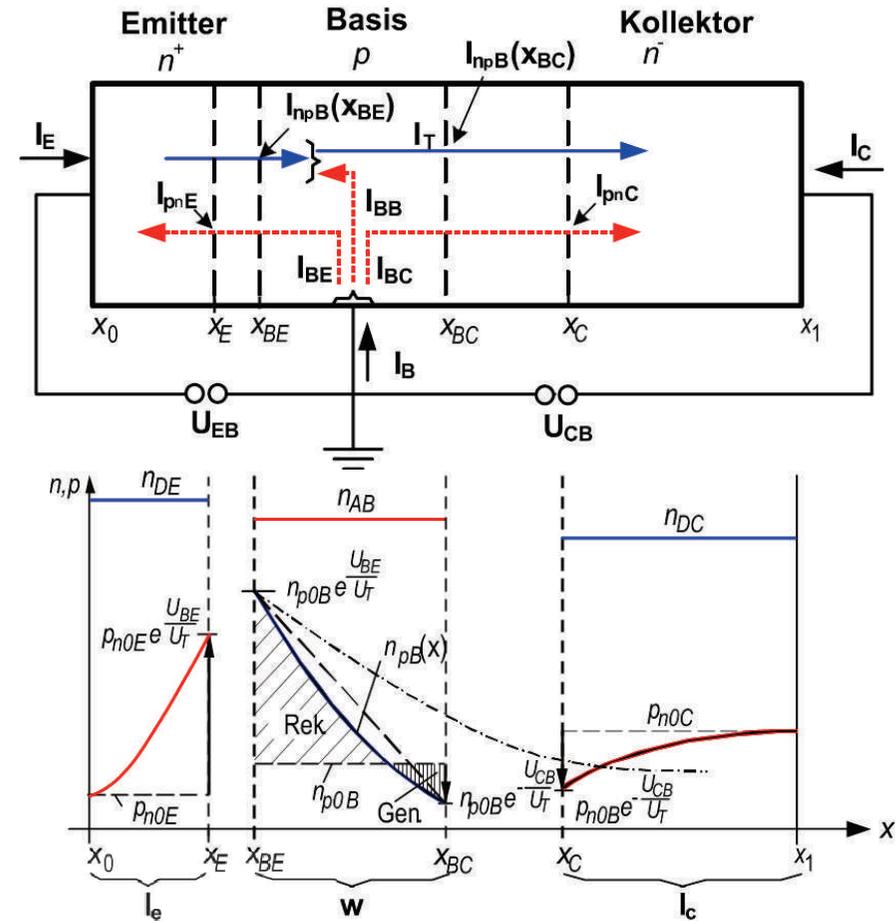
wobei  $I_{TS} = \frac{AeD_{nB}n_{p0B}}{L_{nB} \sinh \left( \frac{w}{L_{nB}} \right)}$  **Transfer-sättigungsstrom**  
 $\approx Ae \frac{D_{nB}n_{p0B}}{w}$

Transferstrom:

$$I_T = I_{n_{pB}}(x_{BC}) \approx I_{TS} \left[ - \left( e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) + \left( e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right) \right]$$

Rekombinationsstrom in der Basis:

$$I_{BB} = -I_{n_{pB}}(x_{BE}) + I_{n_{pB}}(x_{BC}) = I_{TS} \left[ \left( e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) + \left( e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right) \right] \times \left[ \cosh \left( \frac{w}{L_n} \right) - 1 \right] \approx I_{TS} \frac{1}{2} \left( \frac{w}{L_{nB}} \right)^2 \left[ \left( e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) + \left( e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right) \right] \approx -I_T \frac{1}{2} \left( \frac{w}{L_{nB}} \right)^2$$



Vorwärtsstromverstärkung, Emitterwirkungsgrad und Basistransportfaktor

# Minoritätsträgerströme im Emitter und Kollektor

Minoritätsträger-Diffusionsstrom im kurzen Emitter ( $I_E \ll L_{pE}$ ):

$$I_{BE} = -I_{p_{nE}}(x_E) = I_{BES} \left( e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right)$$

wobei 
$$I_{BES} = \frac{AeD_p E p_{n0E}}{L_{pE} \tanh\left(\frac{l_E}{L_{pE}}\right)}$$

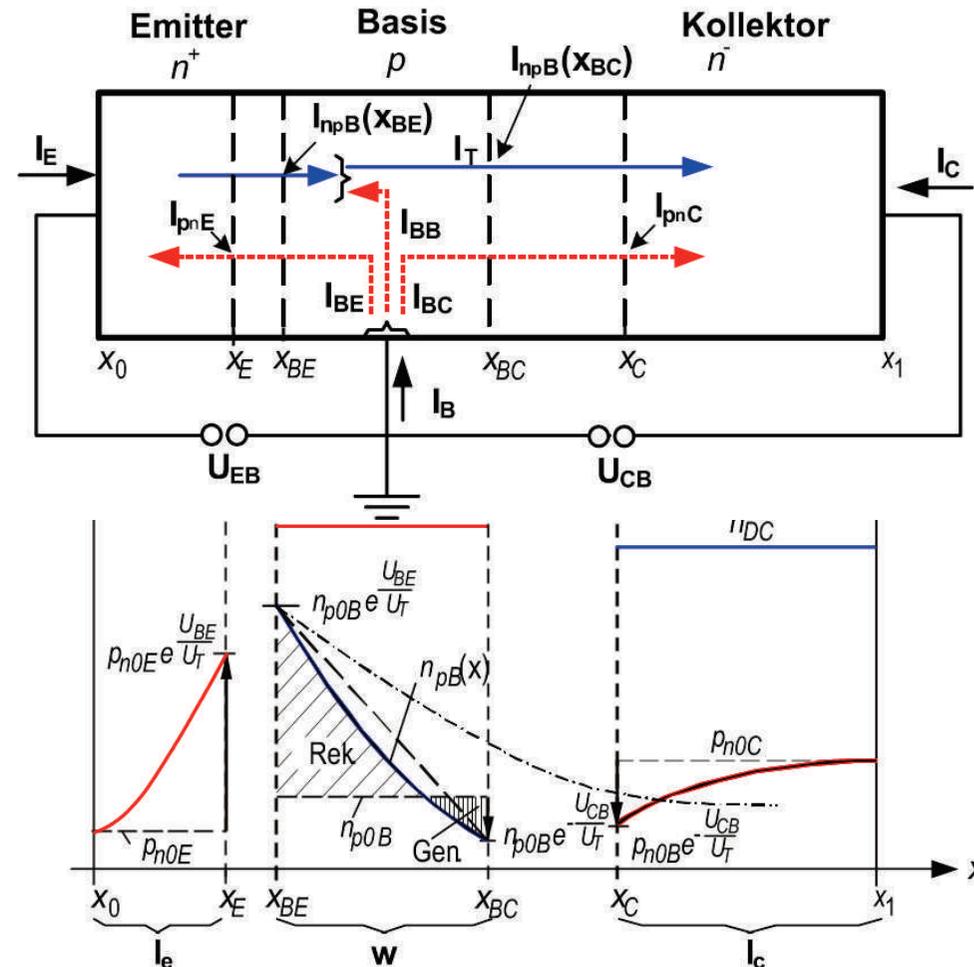
Basis-Emitter-Sättigungsstrom

Minoritätsträger-Diffusionsstrom im Kollektor:

$$I_{BC} = I_{p_{nC}}(x_C) = I_{BCS} \left( e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right)$$

wobei 
$$I_{BCS} = \frac{AeD_p C p_{n0C}}{L_{pC}}$$

Basis-Kollektor-Sättigungsstrom



# Emitter-, Basis- und Kollektorströme

Emitterstrom:

$$I_E = I_T - I_{BB} - I_{BE}$$

$$= -I_{EE} \left( e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) + I_{TS} \left( e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right) - I_{BB}$$

wobei  $I_{EE} = I_{TS} + I_{BES}$

Kollektorstrom:

$$I_C = -I_T - I_{BC}$$

$$= I_{TS} \left( e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) - I_{CC} \left( e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right)$$

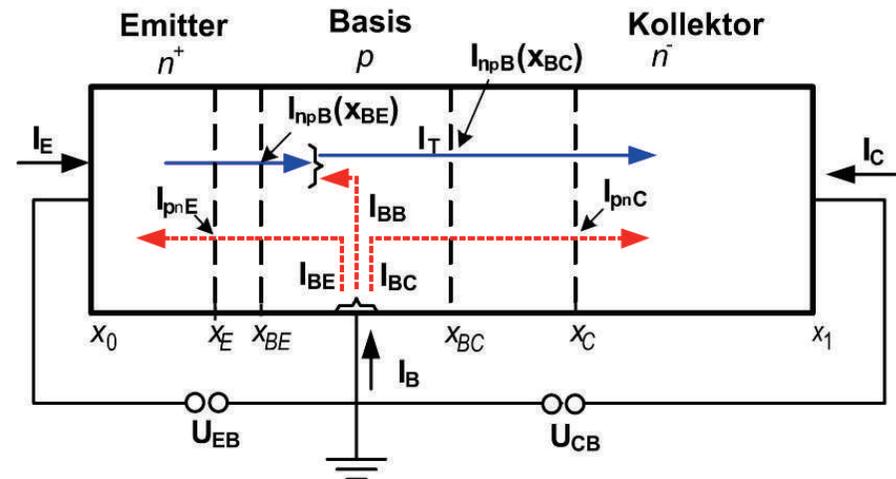
wobei  $I_{CC} = I_{TS} + I_{BCS}$

Basisstrom:

$$I_B = I_{BE} + I_{BC} + I_{BB}$$

$$= I_{BES} \left( e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) + I_{BCS} \left( e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right)$$

$$+ I_{TS} \frac{1}{2} \left( \frac{w}{L_{nB}} \right)^2 \left[ \left( e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) + \left( e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right) \right].$$



Annahme: Rekombinationsstrom in der Basis vernachlässigbar,  $I_{BB} \ll I_T$

⇒ Ebers-Moll-Gleichungen:

$$I_E = -I_{EE} \left( e^{-U_{EB}/U_T} - 1 \right) + I_{TS} \left( e^{-U_{CB}/U_T} - 1 \right)$$

$$I_C = I_{TS} \left( e^{-U_{EB}/U_T} - 1 \right) - I_{CC} \left( e^{-U_{CB}/U_T} - 1 \right)$$

Schreibweise in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} I_E \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{EE} & I_{TS} \\ I_{TS} & -I_{CC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left( e^{-\frac{U_{EB}}{U_T}} - 1 \right) \\ \left( e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & A_I \\ A_N & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_F \\ I_R \end{pmatrix}$$

wobei:  $I_F = I_{EE} \left( e^{-\frac{U_{EB}}{U_T}} - 1 \right)$

Vorwärtsstrom

$$I_R = I_{CC} \left( e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right)$$

Rückwärtsstrom

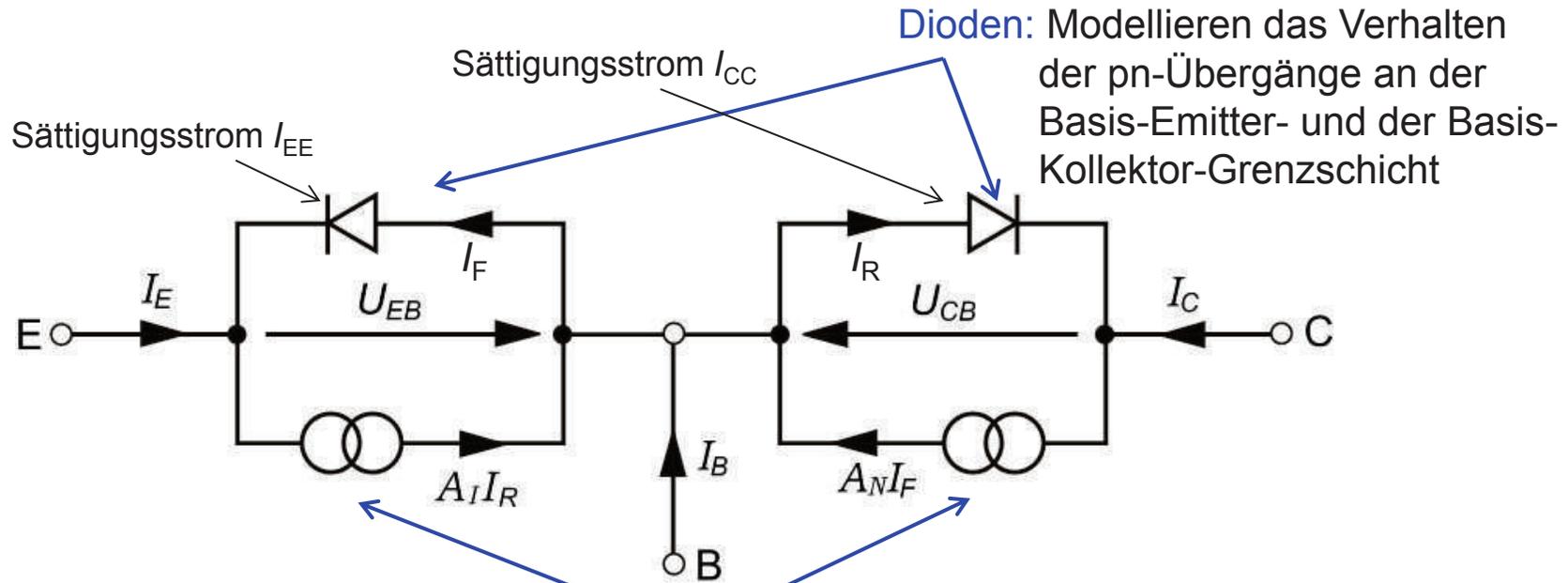
$$A_N = \frac{I_{TS}}{I_{EE}} = \frac{I_{TS}}{I_{TS} + I_{BES}} \lesssim 1$$

Vorwärtsstromverstärkung  
im Normalbetrieb

$$A_I = \frac{I_{TS}}{I_{CC}} = \frac{I_{TS}}{I_{TS} + I_{BCS}} \lesssim 1$$

Rückwärtsstromverstärkung  
im Inversen Betrieb

# Ebers-Moll-Modell und zugehöriges Ersatzschaltbild



**Dioden:** Modellieren das Verhalten der pn-Übergänge an der Basis-Emitter- und der Basis-Kollektor-Grenzschicht

$$\begin{pmatrix} I_E \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & A_I \\ A_N & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_F \\ I_R \end{pmatrix}$$

$$I_F = I_{EE} \left( e^{-\frac{U_{EB}}{U_T}} - 1 \right)$$

$$I_R = I_{CC} \left( e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right)$$

**Gesteuerte Stromquellen:** Modellieren die Kopplung zwischen den pn-Übergängen, die durch die überlappende Diffusionszone in der Basis entsteht

Anwendung in **CAD-Programmen (z.B. SPICE)**, beispielsweise zur Berechnung des Arbeitspunktes von Transistoren

# Betriebszustände des Bipolar-Transistors

Räumliche Verteilung der Minoritätsträgerdichte in der Basis (npn-Transistor):

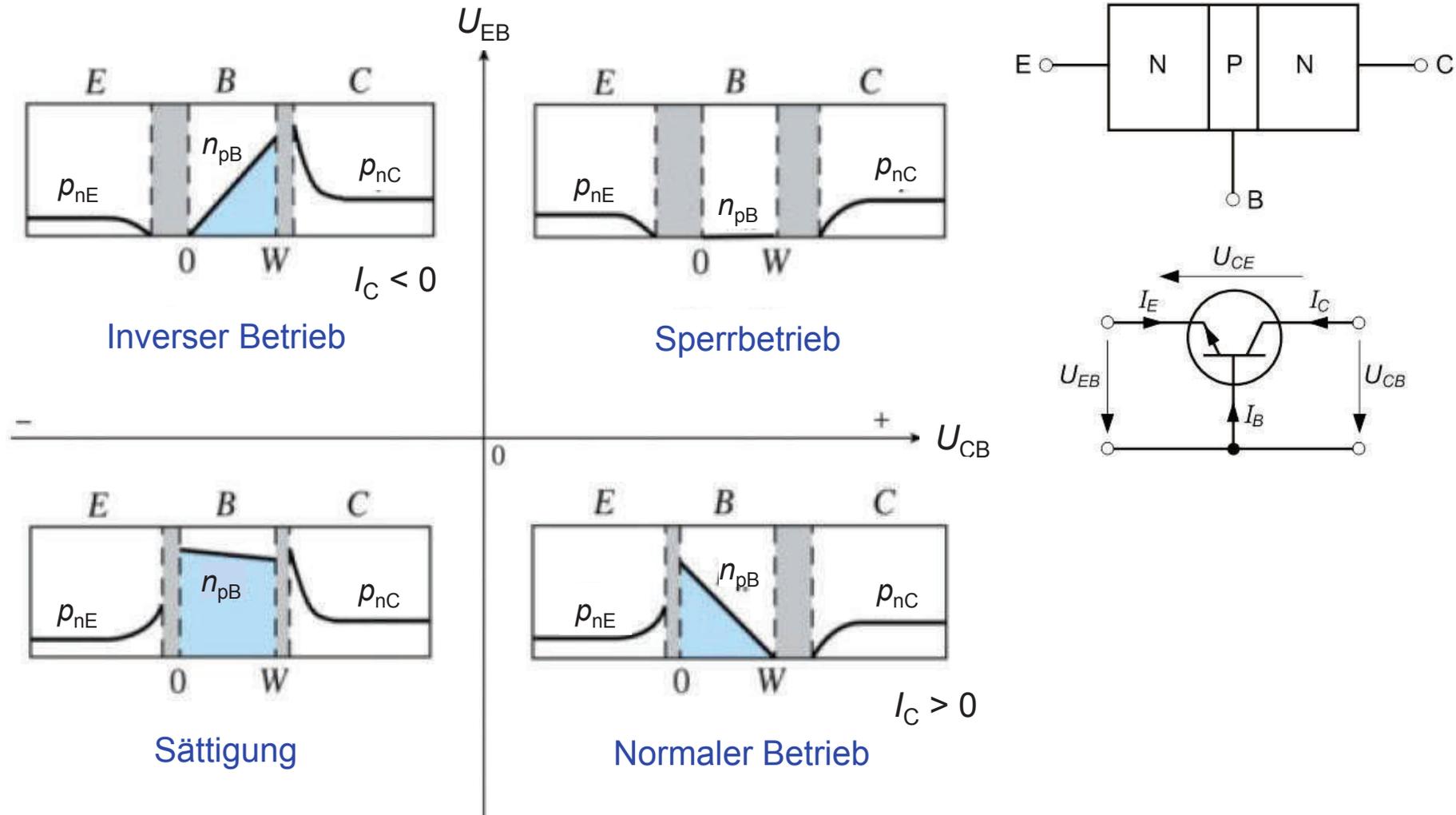
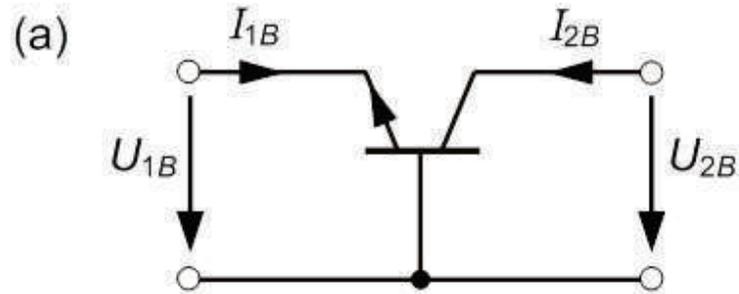


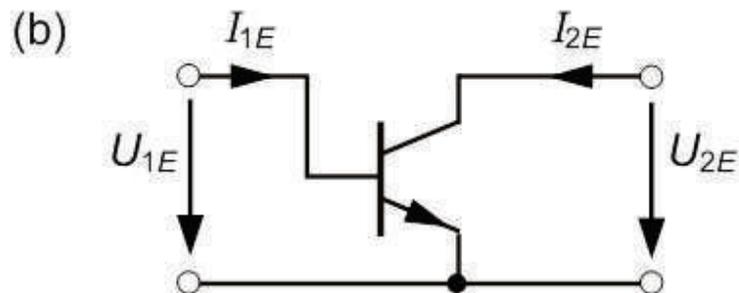
Bild nach Sze, Semiconductor Devices – Physics and Technology

# Grundschaltungen des Bipolar-Transistors



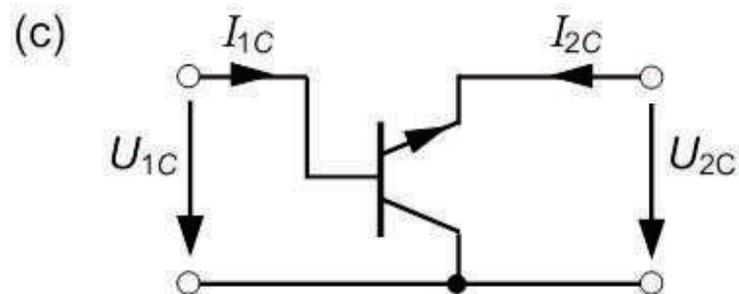
## Basisschaltung:

- Spannungsverstärkung, aber keine Stromverstärkung
- Kleine Eingangsimpedanz
- Hohe Ausgangsimpedanz



## Emitterschaltung

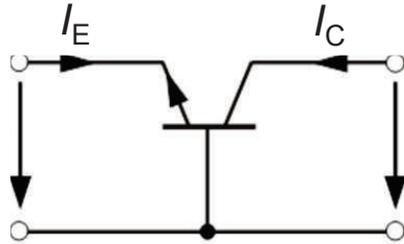
- Spannungsverstärkung und Stromverstärkung
- Höhere Eingangsimpedanz als Basisschaltung
- Hohe Ausgangsimpedanz



## Kollektorschaltung:

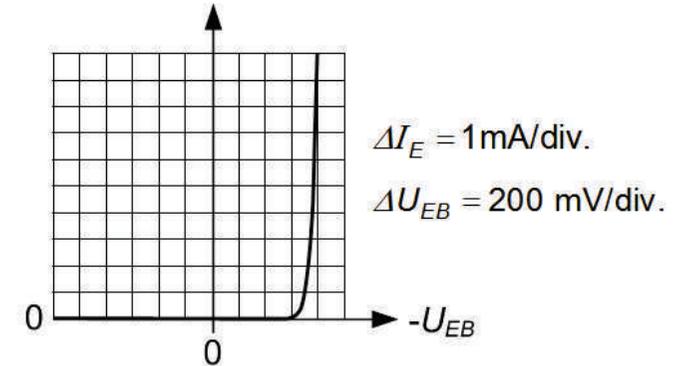
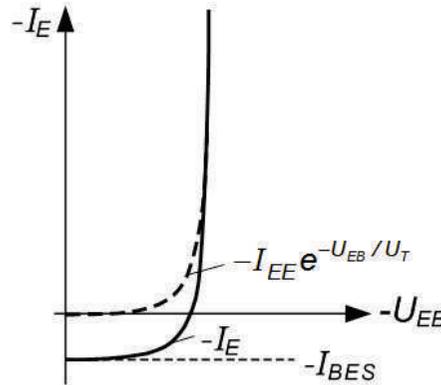
- Stromverstärkung, aber keine Spannungsverstärkung
- Hohe Eingangsimpedanz
- Kleine Ausgangsimpedanz

# Kennlinienfeld in Basisschaltung



Eingangskennlinienfeld:

$$I_E \approx -I_{EE} e^{-\frac{U_{EB}}{U_T}} + I_{BES}$$

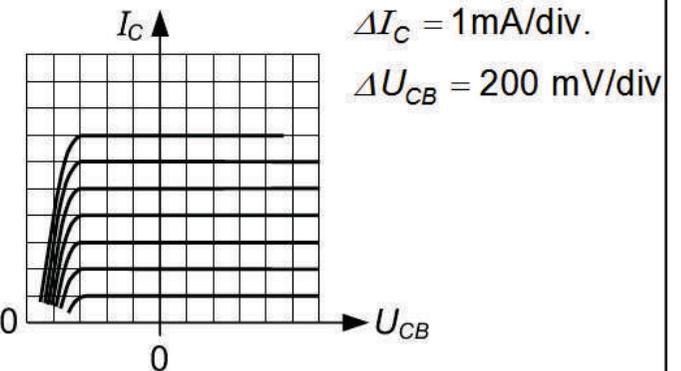
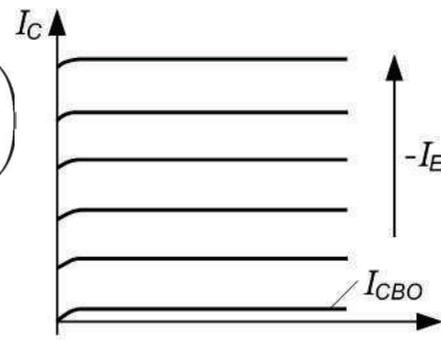


Ausgangskennlinienfeld:

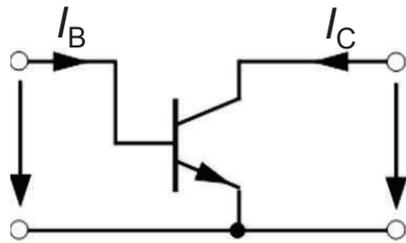
$$I_C = -A_N I_E + I_{CB0} \left( 1 - e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} \right)$$

wobei  $I_{CB0} = \left( \frac{1}{A_I} - A_N \right) I_{TS}$

Leerlaufreststrom



# Kennlinienfeld in Emitterschaltung



Eingangskennlinienfeld:

$$I_B = -(I_E + I_C)$$

$$= I_{BES} \left( e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) - I_{BCS}$$

Ausgangskennlinienfeld:

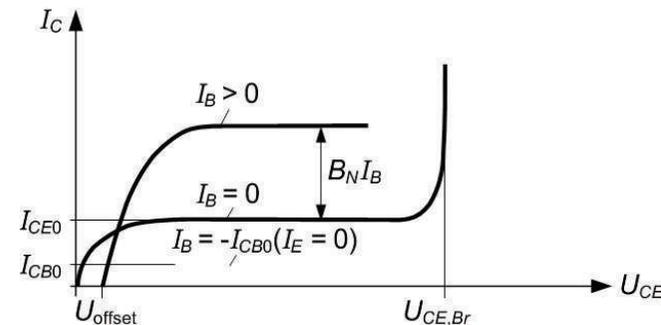
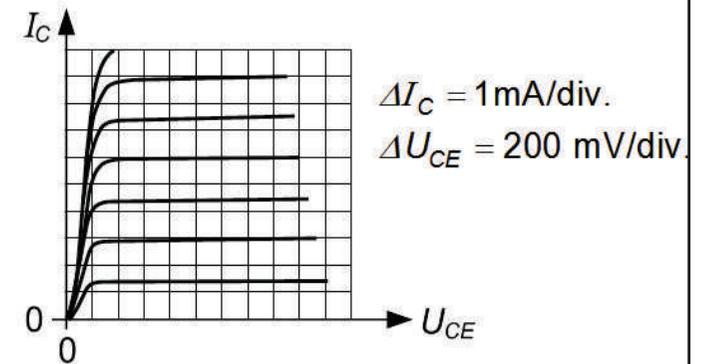
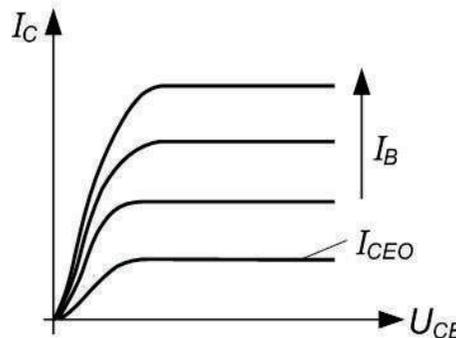
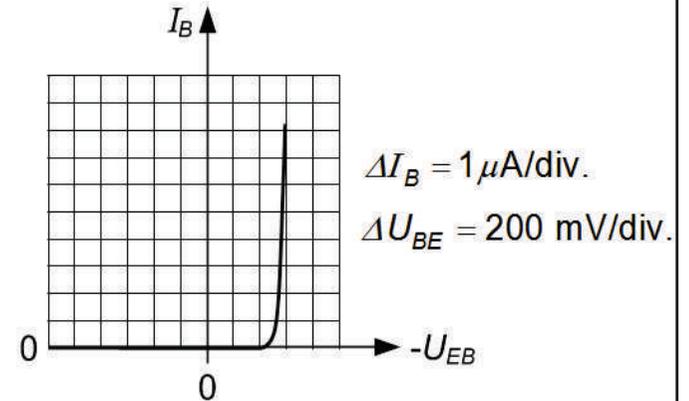
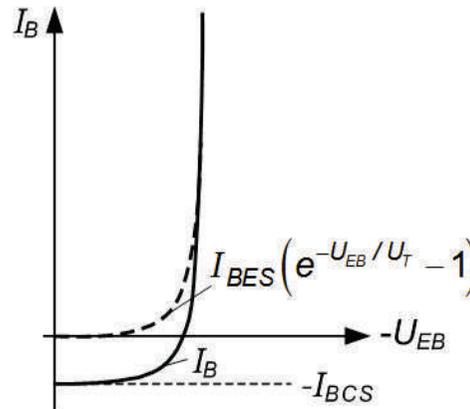
$$I_C = B_N I_B - I_{CEO} \left( e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right)$$

wobei  $I_{CEO} = (B_N + 1) I_{CB0}$

$$B_N = \frac{A_N}{1 - A_N} \quad \text{Stromverstärkung der Emitter-Schaltung}$$

Spannungsoffset beim Ausgangskennlinienfeld:

$$U_{\text{offset}} = U_T \ln \left( \frac{1}{A_I} \right)$$



# Emitterschaltung mit Stromgegenkopplung

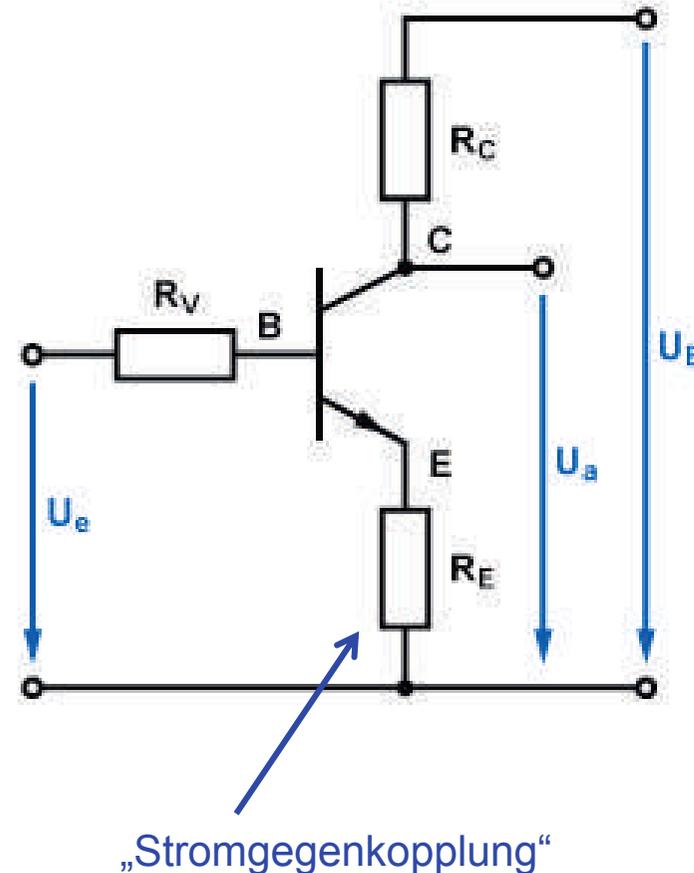
## Emitterschaltung mit Stromgegenkopplung:

Temperaturinduzierter Anstieg von  $B_N$  oder  $I_B$

⇒ Anstieg von  $I_C = B_N I_B$

⇒ Anstieg von  $I_E$  und Anstieg des Spannungsabfalls über  $R_E$

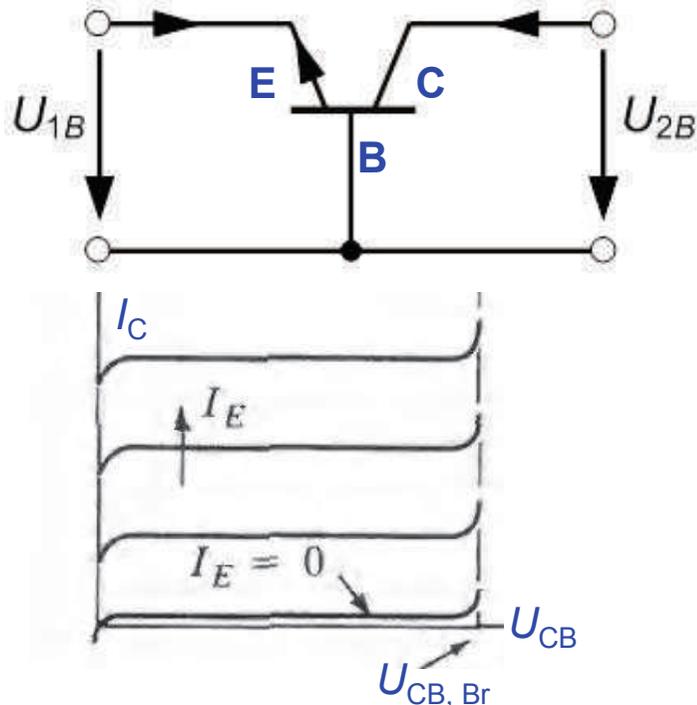
⇒  $U_{BE}$  sinkt und  $I_B$  verringert sich wieder; dies wirkt der Störung entgegen.



<http://www.elektronik-kompodium.de/sites/slt/0204134.htm>

# Durchbruchverhalten

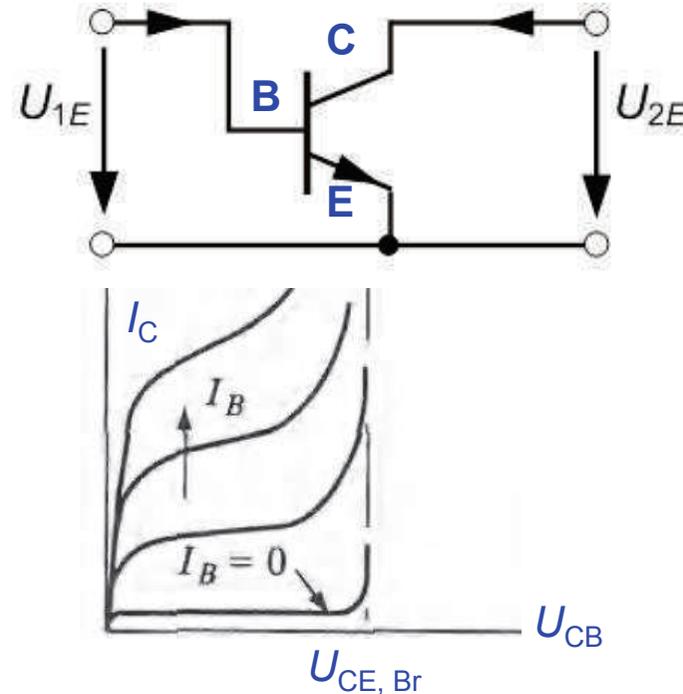
## Basisschaltung (npn):



- Ausgangsspannung  $U_2$  fällt vollständig über der Kollektor-Basis-Diode ab
- Durchbruch erfolgt, wenn Durchbruchspannung  $U_{CB,Br}$  der Kollektor-Basis-Diode erreicht wird
- In der Regel: **Lawinendurchbruch**, lange RLZ im schwach dotierten Kollektor

Bilder: Streetman, Solid-State Electronic Devices

## Emitterschaltung (npn):

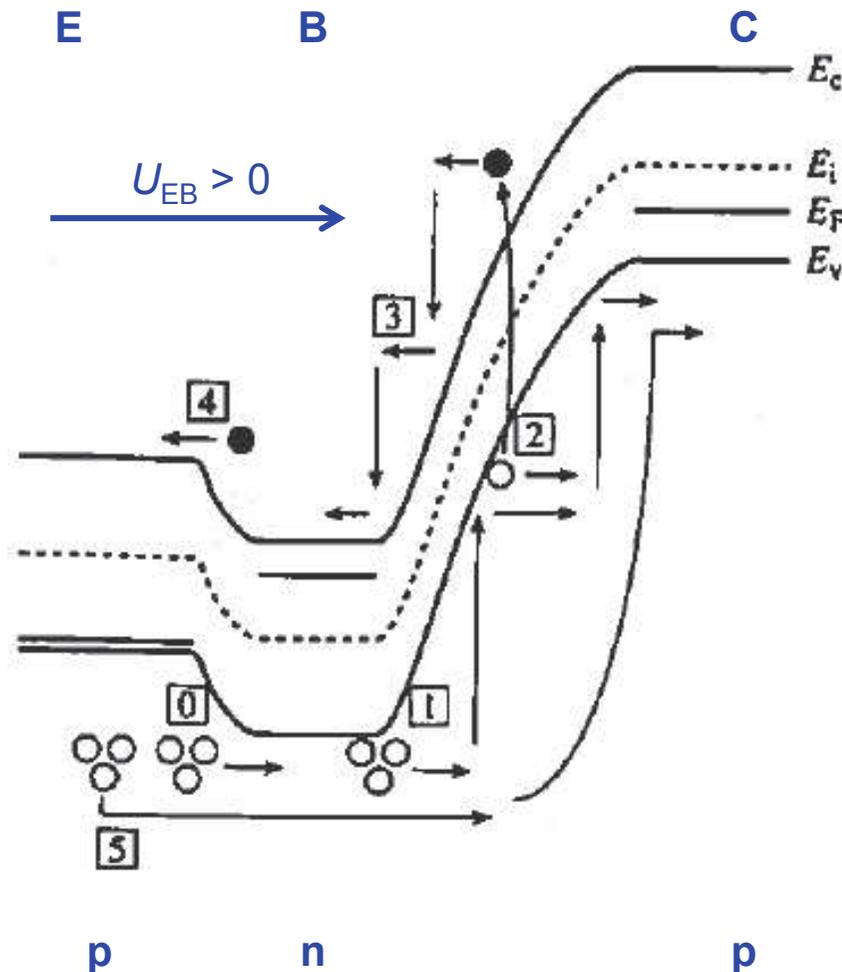


- Ausgangsspannung  $U_2 = U_{CE} = U_{CB} + U_{BE} \approx U_{CB}$ , da  $U_{BE} \approx 0.6 \text{ V} \ll U_{CE}$
- **Aber:**  $U_{CE,Br} < U_{CB,Br}$ , d.h. die Durchbruchspannung in Emitterschaltung ist wesentlich kleiner als in Basisschaltung
- Grund: **Positive Rückkopplung** bei einsetzender Lawinenmultiplikation durch Raumladungen in der Basis

# Durchbruchverhalten in Emitterschaltung

Erklärung der positiven Rückkopplung beim Lawinendurchbruch:

Hier: pnp-Transistor !



0. **Starke Löcherinjektion** (Vorwärtsstrom des  $E$ - $B$ -Überganges!) aus dem Emitter in die Basis ...
1. ... und von dort weiter in den Kollektor.
2. **Lawinenmultiplikation durch einzelne Löcher**, lange bevor die Lawinen-Durchbruchspannung des  $B$ - $C$ -Überganges erreicht wird.
3. Erzeugte Elektronen fließen zurück in die Basis und können dort nicht über den Basisanschluss abfließen, da der Basisstrom durch die äußere Schaltung eingepreßt wird (Arbeitspunkt des Transistors). Dies führt zu **einer negativen Aufladung** der Basis.
4. Die Aufladung der Basis hat eine **Vergrößerung der Vorwärtsspannung  $U_{EB}$  und des Basisstromes  $I_B$**  zur Folge. Dadurch steigt sowohl der in den Emitter injizierte Elektronenstrom ...
5. ... als auch der in die Basis injizierte Löcherstrom, der den beschriebenen Effekt weiter verstärkt

Bild: Pierret, Semiconductor Device Fundamentals

# Vorlesung 13

24.01.2014

# Änderung im Vorlesungsplan

- Vorlesung statt Übung am kommenden Freitag, dem 24.01.14
- Am Montag, dem 03.02.14, findet dann eine Übung anstelle der Vorlesung statt

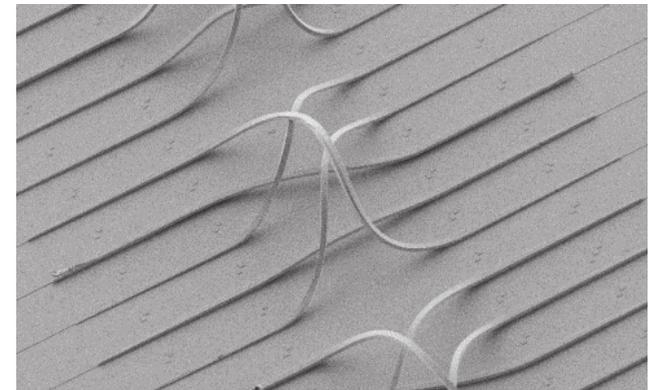
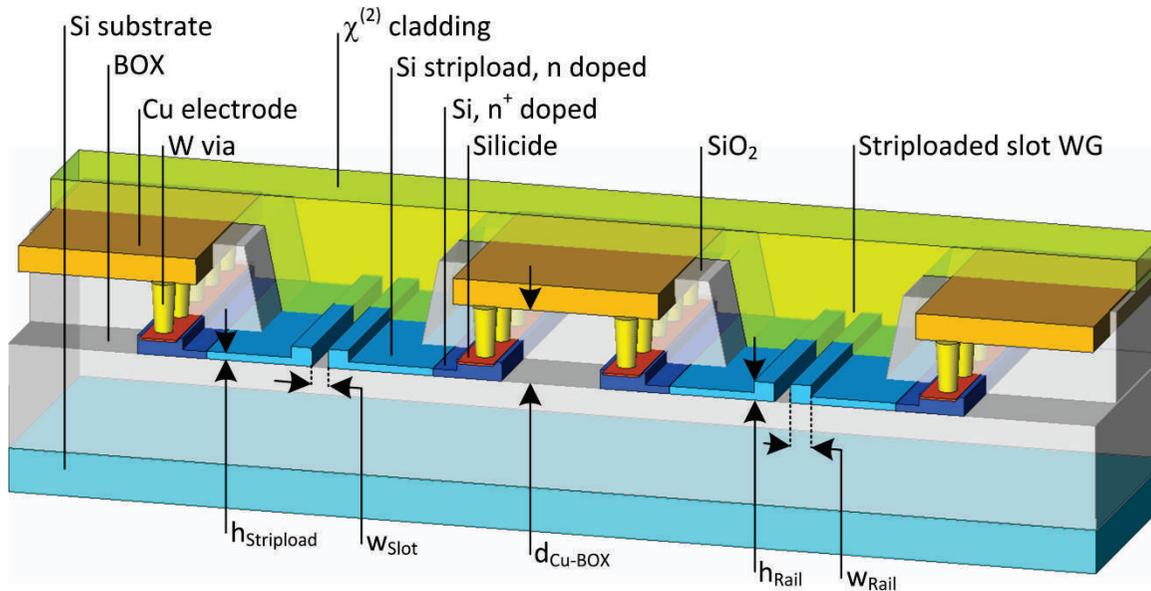
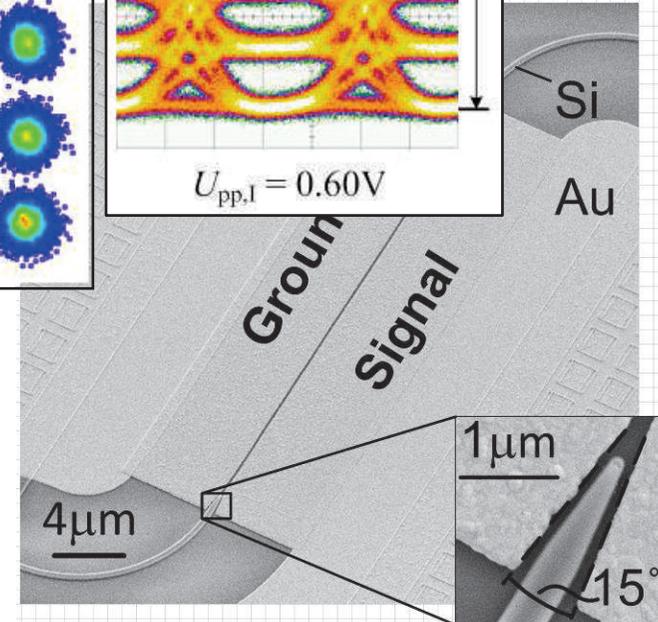
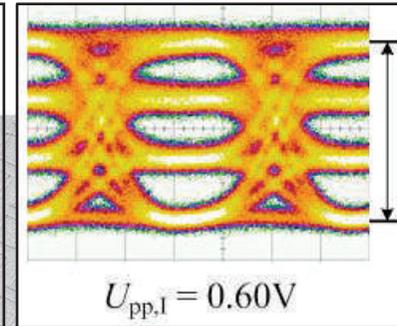
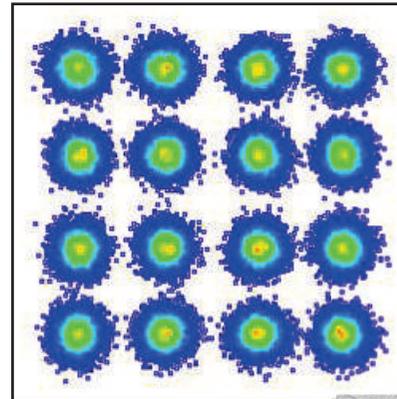
Montag, 21.10.13: Vorlesung 1	Freitag, 25.10.13: Vorlesung 2
Montag, 28.10.13: Vorlesung 3	Freitag, 01.11.13: Feiertag (Allerheiligen)
Montag, 04.11.13: Vorlesung 4	Freitag, 08.11.13: Übung 1
Montag, 11.11.13: Vorlesung 5	Freitag, 15.11.13: Übung 2
Montag, 18.11.13: Vorlesung 6	Freitag, 22.11.13: Übung 3
Montag, 25.11.13: Vorlesung 7	Freitag, 29.11.13: Übung 4
Montag, 02.12.13: Vorlesung 8	Freitag, 06.12.13: Übung 5
Montag, 09.12.13: Vorlesung 9	Freitag, 13.12.13: Übung 6
Montag, 16.12.13: Vorlesung 10	Freitag, 20.12.13: Übung 7
Montag, 06.01.14: Feiertag (Heilige Drei Könige)	Freitag, 10.01.14: Übung 8
Montag, 13.01.14: Vorlesung 11	Freitag, 17.01.14: Übung 9
Montag, 20.01.14: Vorlesung 12	Freitag, 24.01.14: Vorlesung 13
Montag, 27.01.14: Vorlesung 14	Freitag, 31.01.14: Übung 10
Montag, 03.02.14: Übung 11	Freitag, 07.02.14: Übung 12
Montag, 10.02.14: Vorlesung 15	Freitag, 14.02.14: Übung 13

# IPQ Labortour am Freitag, dem 14.02.2014

Führung durch das IPQ und Vorstellung laufender Arbeiten auf den Gebieten **Nanophotonik und Teratronik**:

- Silizium-Photonik und Plasmonik
- Optische Systemintegration und „photonisches Wirebonden“
- Photonische Terabit-Kommunikation
- Optische Messtechnik

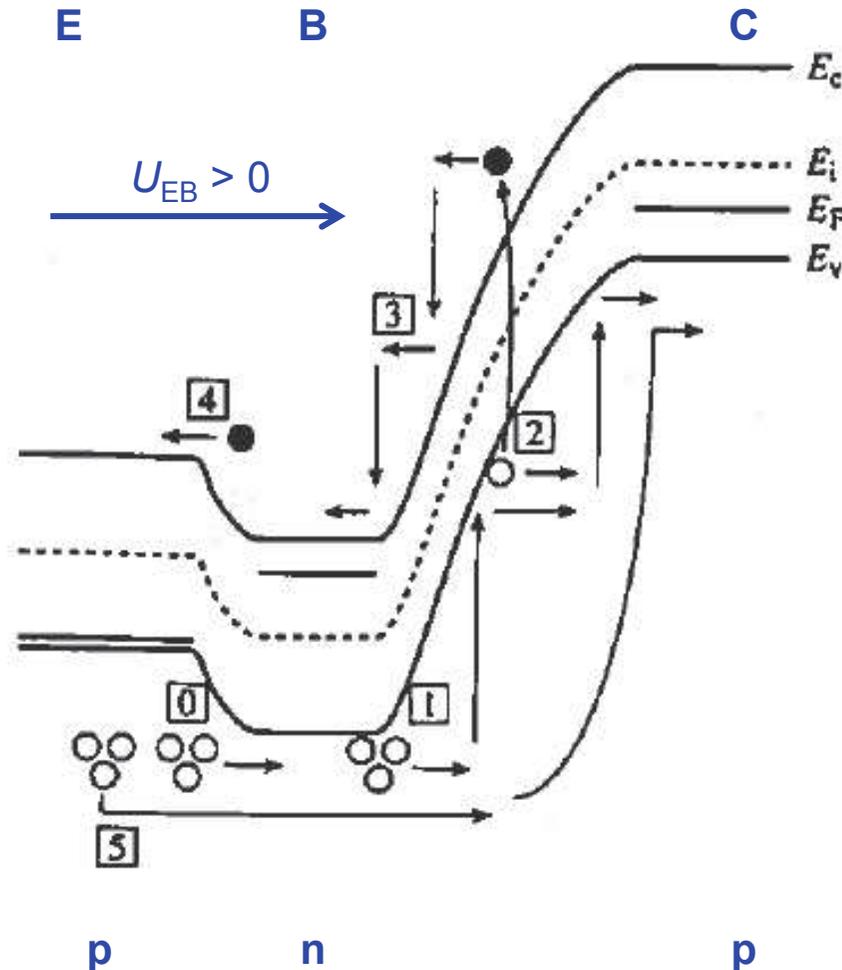
Fragen zum Institut werden bei **Kaffee und Kuchen** beantwortet.



# Durchbruchverhalten in Emitterschaltung

Erklärung der positiven Rückkopplung beim Lawinendurchbruch:

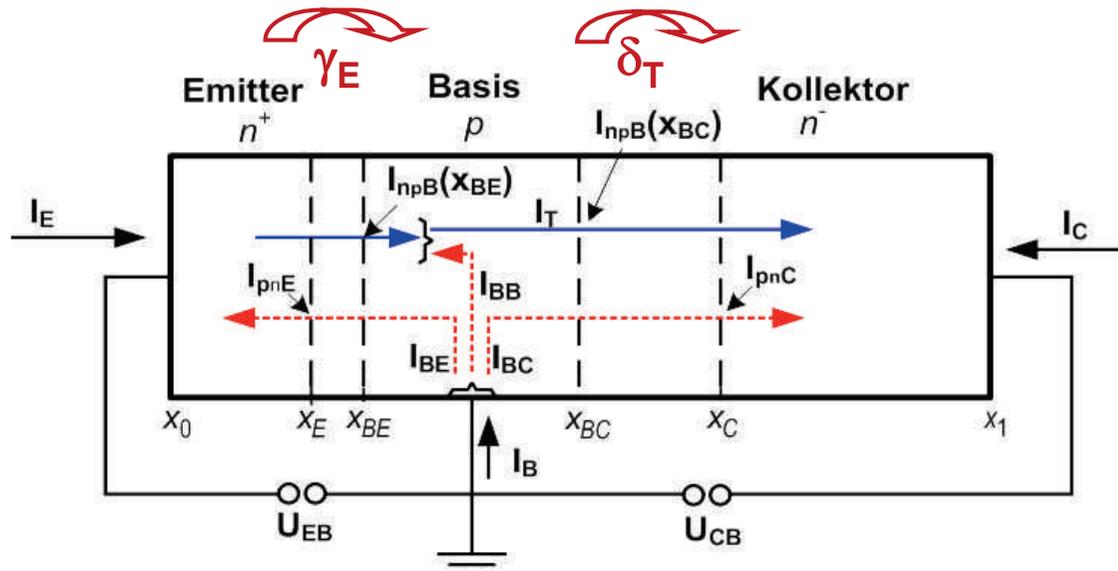
Hier: pnp-Transistor !



0. **Starke Löcherinjektion** (Vorwärtsstrom des  $E$ - $B$ -Überganges!) aus dem Emitter in die Basis ...
1. ... und von dort weiter in den Kollektor.
2. **Lawinenmultiplikation durch einzelne Löcher**, lange bevor die Lawinen-Durchbruchspannung des  $B$ - $C$ -Überganges erreicht wird.
3. Erzeugte Elektronen fließen zurück in die Basis und können dort nicht über den Basisanschluss abfließen, da der Basisstrom durch die äußere Schaltung eingepreßt wird (Arbeitspunkt des Transistors). Dies führt zu **einer negativen Aufladung** der Basis.
4. Die Aufladung der Basis hat eine **Vergrößerung der Vorwärtsspannung  $U_{EB}$  und des Basisstromes  $I_B$**  zur Folge. Dadurch steigt sowohl der in den Emitter injizierte Elektronenstrom ...
5. ... als auch der in die Basis injizierte Löcherstrom, der den beschriebenen Effekt weiter verstärkt

Bild: Pierret, Semiconductor Device Fundamentals

# Vorwärtsstromverstärkung, Emitterwirkungsgrad und Basistransportfaktor



**Annahme:** Emitterlänge  $l_{nE}$  ist wesentlich kleiner als die Diffusionslänge der Löcher im Emitter,  $l_{nE} \ll L_{pE}$

**Vorwärtsstromverstärkung:**

$$\begin{aligned}
 A_N &= -\frac{I_C}{I_E} \Big|_{\text{Normalbetrieb}} \\
 &= \frac{-I_T}{-I_T + I_{BE} + I_{BB}} \\
 &= \gamma_E \times \delta_T
 \end{aligned}$$

wobei 
$$\gamma_E = \frac{-I_T + I_{BB}}{-I_T + I_{BE} + I_{BB}} = \frac{1}{1 + \frac{I_{BE}}{-I_T + I_{BB}}} \approx \frac{1}{1 + \frac{\mu_{pE} n_{AB} L_{nB}}{\mu_{nB} n_{DE} l_E} \tanh\left(\frac{w}{L_{nB}}\right)}$$

Anteil des Emitterstroms, der als Minoritätsträgerstrom in die Basis injiziert wird

Gesamter Emitterstrom

**Emitterwirkungsgrad:**

$$\delta_T \approx \frac{-I_T}{-I_T + I_{BB}} = \frac{1}{1 + \frac{I_{BB}}{-I_T}} \approx \frac{1}{\cosh\left(\frac{w}{L_{nB}}\right)}$$

Strominjektion von der Basis in den Kollektor

**Basistransportfaktor:**

Gesamter Minoritätsträgerstrom, der in die Basis injiziert wird

## Minoritätsträgerströme in der Basis

# Rückwärtsstromverstärkung und Dotierungsprofil

Analoge Herleitung: Rückwärtsstromverstärkung:

$$A_I = -\frac{I_C}{I_E} \Big|_{\text{inv. Betrieb}} = \frac{-I_T}{-I_T + I_{BC} + I_{BB}} = \gamma_C \times \delta_T$$

wobei 
$$\gamma_C \approx \frac{1}{1 + \frac{\mu_{pC} n_{AB} L_{nB}}{\mu_{nB} n_{DC} L_{pC}} \tanh\left(\frac{w}{L_{nB}}\right)}$$

Kollektorwirkungsgrad

Design von Basisweite und Dotierungsprofil:

Ziele: 
$$\gamma_E = \frac{1}{1 + \frac{\mu_{pE} n_{AB} L_{nB}}{\mu_{nB} n_{DE} l_E} \tanh\left(\frac{w}{L_{nB}}\right)} \rightarrow 1$$

$$\delta_T = \frac{1}{\cosh\left(\frac{w}{L_{nB}}\right)} \rightarrow 1$$

- $w/L_{nB} \ll 1$ : Typische Diffusionslängen in dotierten Materialien sind von der Größenordnung von 1  $\mu\text{m}$ ; Basisweite  $w < 100\text{nm}$  sind technisch möglich
- $n_{AB} \ll n_{DE}$ : Emitter muss wesentlich höher als die Basis dotiert werden; heute üblich:  $n_{DE} > 10^{20} \text{cm}^{-3}$ ;  $n_{AB} \approx 10^{17} \text{cm}^{-3}$

$$\gamma_C = \frac{1}{1 + \frac{\mu_{pC} n_{AB} L_{nB}}{\mu_{nB} n_{DC} L_{pC}} \tanh\left(\frac{w}{L_{nB}}\right)} \quad \text{so klein wie möglich!}$$

- $n_{AB} \gg n_{DC}$ : Kollektor muss möglichst schwach dotiert werden; üblich:  $n_{DC} \approx 10^{16} \text{cm}^{-3}$

$\frac{w}{L_{nB}}$	0,05	0,1
$\cosh\left(\frac{w}{L_{nB}}\right)$	1,001	1,005
$\tanh\left(\frac{w}{L_{nB}}\right)$	0,0499	0,0996
$\delta_T$	0,998	0,995
$\gamma_E$	0,9999	0,9999
$A_N$	0,9987	0,9949
$B_N$	768	196
$\gamma_C$	0,666	0,500
$A_I$	0,666	0,498

Für viele Anwendungen von Transistoren interessiert nur das Verhalten bei kleinen Strom- und Spannungsänderungen  $\Delta I$  bzw.  $\Delta U$

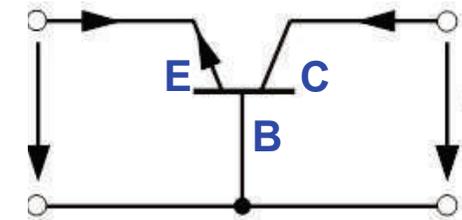
⇒ Linearisierung der Kennlinien um einen Arbeitspunkt:

$$\alpha = -\frac{\Delta I_C}{\Delta I_E} \quad \text{Stromverstärkung in Emitterschaltung}$$

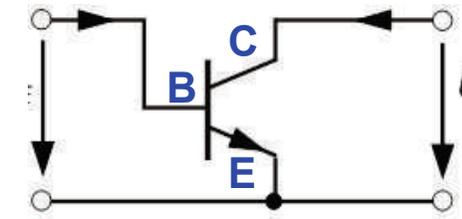
$$\beta = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} \quad \text{Stromverstärkung in Basisschaltung}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \gg 1$$

Basisschaltung (npn):



Emitterschaltung (npn):



Quasistationäre Analyse im Niederfrequenz-Fall:

- Die Änderung der Ströme und Spannungen langsam im Vergleich zu den Trägerlebensdauern im Transistor, so dass Ladungsspeichereffekte vernachlässigt werden können
- Einfluss der Ausgangsspannung  $U_{CB}$  auf den Kollektorstrom  $I_C$  wird vernachlässigt
- Generation- und Rekombination in der Basis wird vernachlässigt,  $I_{BB} = 0$

⇒ Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Basis-Emitter-Spannung und Kollektorstrom durch die Steilheit  $g_m$  (engl. Transconductance):

$$\Delta I_C = g_m \Delta U_{BE} \quad \text{wobei} \quad g_m = \frac{\Delta I_C}{\Delta U_{BE}} \approx -\frac{\Delta I_T}{\Delta U_{BE}} = \frac{I_T}{U_T} \approx \frac{|I_C|}{U_T} \approx \left| \frac{I_C}{\text{mA}} \right| \cdot 0,04 \text{ S}$$

# Kleinsignal-Analyse im Niederfrequenz-Fall

Berechnung der Stromverstärkung:

$$\beta_0 = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B}$$

Annahmen:

- $U_{CB} \ll -U_T$
- Kurze Diffusionszone im Emitter und in der Basis,

$$w \ll L_{npb}, \quad l_E \ll L_{pne}$$

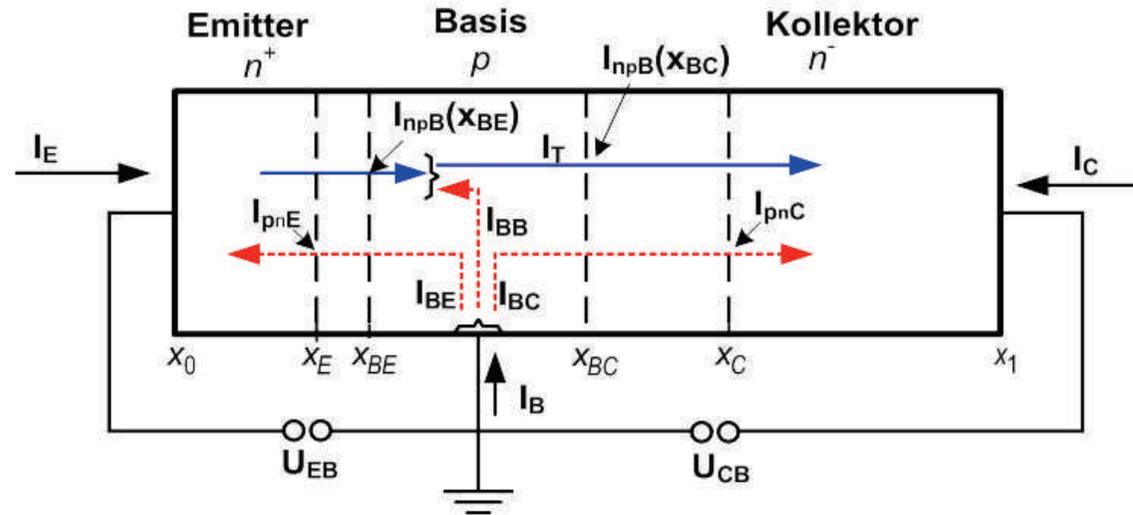
$$I_T \approx -I_{TS} e^{\frac{U_{BE}}{U_T}}$$

$$I_{BE} \approx I_{BES} e^{\frac{U_{BE}}{U_T}}$$

$$I_{BES} = \frac{AeD_p E p_{no} E}{l_E}$$

$$I_{BB} \approx I_{TS} \frac{1}{2} \left( \frac{w}{L_{nB}} \right)^2 e^{\frac{U_{BE}}{U_T}}$$

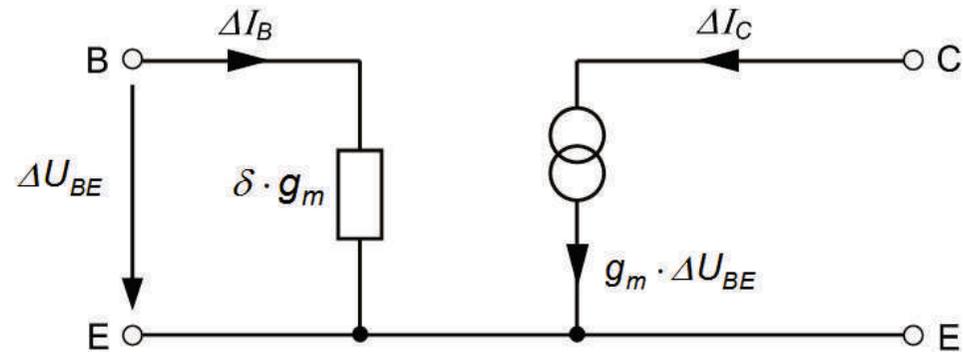
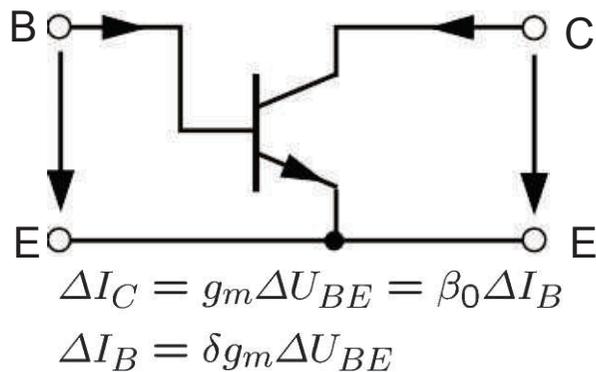
$$I_{TS} \approx Ae \frac{D_{nB} n_{poB}}{w}$$



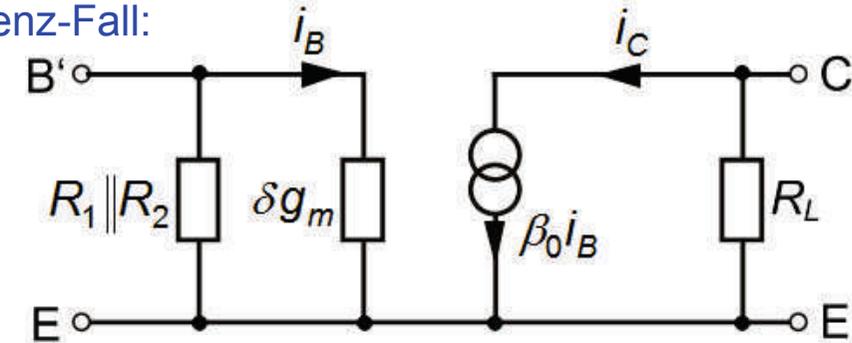
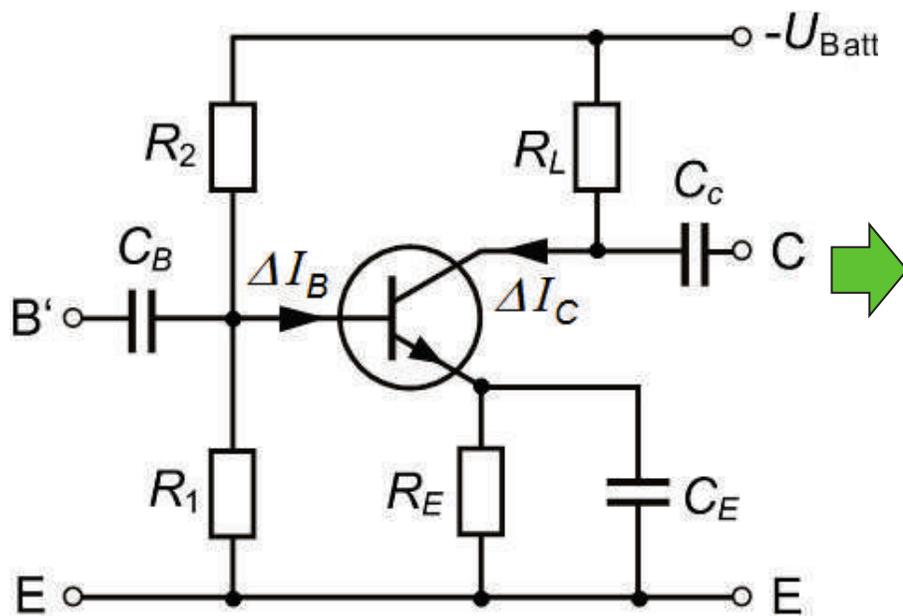
$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\Delta I_B}{\Delta I_C} &= \frac{\Delta I_B / \Delta U_{BE}}{\Delta I_C / \Delta U_{BE}} \\ &= \frac{D_{pE} w n_{AB}}{D_{nB} l_E n_{DE}} + \frac{1}{2} \left( \frac{w}{L_{nB}} \right)^2 \\ &= \delta = \frac{1}{\beta_0} \end{aligned}$$

$\beta_0$  = Kleinsignal-Niederfrequenz-Stromverstärkung in Emitterschaltung

# Niederfrequenz-Ersatzschaltbild in Emitterschaltung



Kleinsignal-Schaltungsanalyse im Niederfrequenz-Fall:



Beispiel:  $\delta = 0.004$ ,  $I_C = 10 \text{ mA}$ ,  $R_L = 1 \text{ k}\Omega$

$$G_U = \frac{u_{CE}}{u_{BE}} = -R_L g_m = -400$$

Spannungsverstärkung

$$G_I = \frac{i_C}{i_B} = \beta_0 = 250$$

Stromverstärkung

$$G_P = |G_U G_i| = 100\,000$$

Leistungsverstärkung

Vgl. dynamisches Verhalten der Diode: Modellierung von Ladungsspeicher-Effekten durch Sperrschichtkapazitäten und Diffusionskapazitäten

Hier: npn-Transistor im Normalbetrieb

### Basis-Emitter-Übergang:

Vorspannung in Sperrrichtung

⇒  $C_{BE}$  = Sperrschichtkapazität + emitterseitige Diffusionskapazität

### Basis-Kollektor-Übergang:

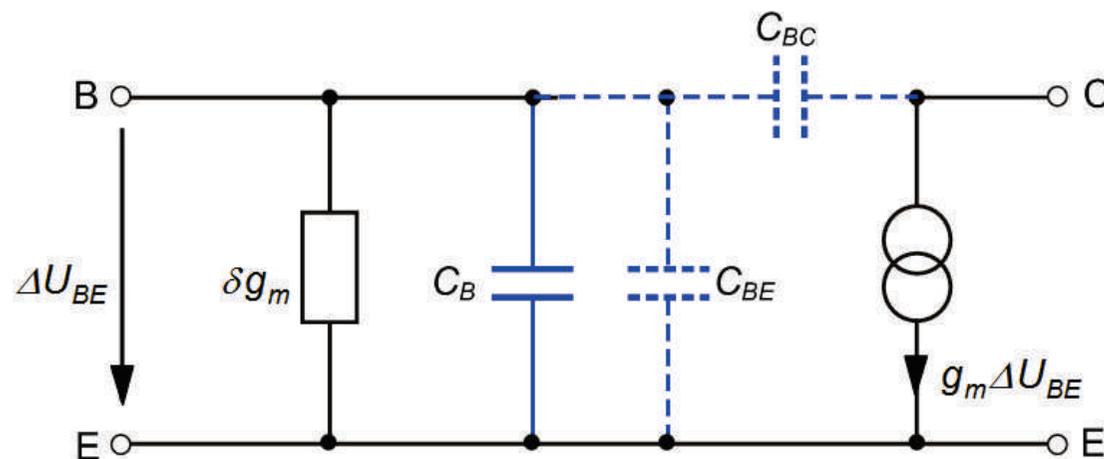
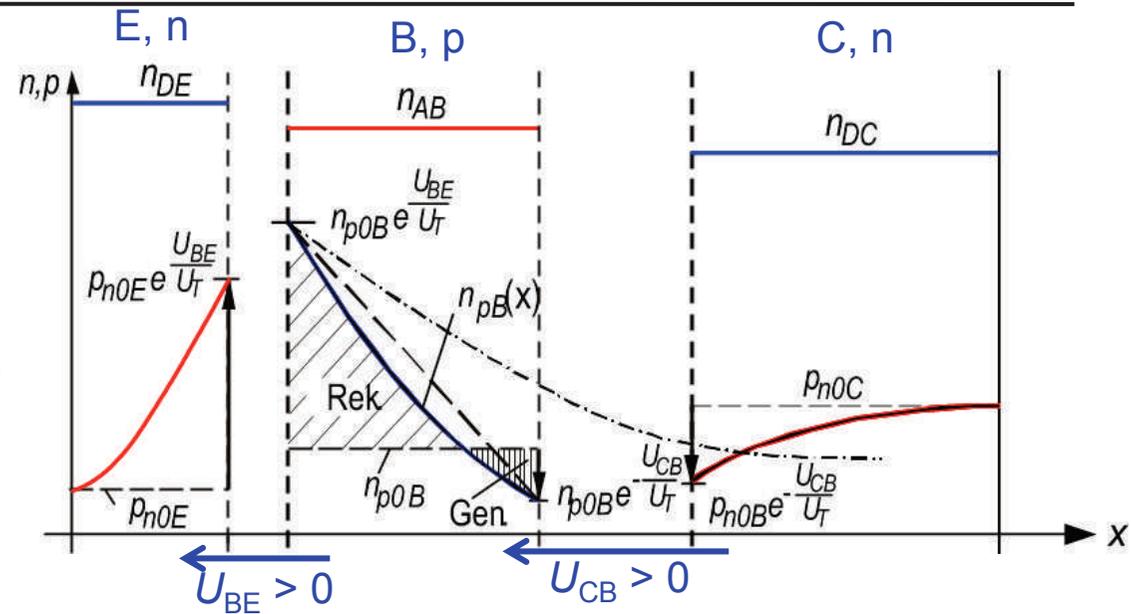
Vorspannung in Durchlassrichtung

⇒  $C_{BC}$  = Sperrschichtkapazität

### Basis:

Gemeinsame Diffusionszone der beiden pn-Übergänge

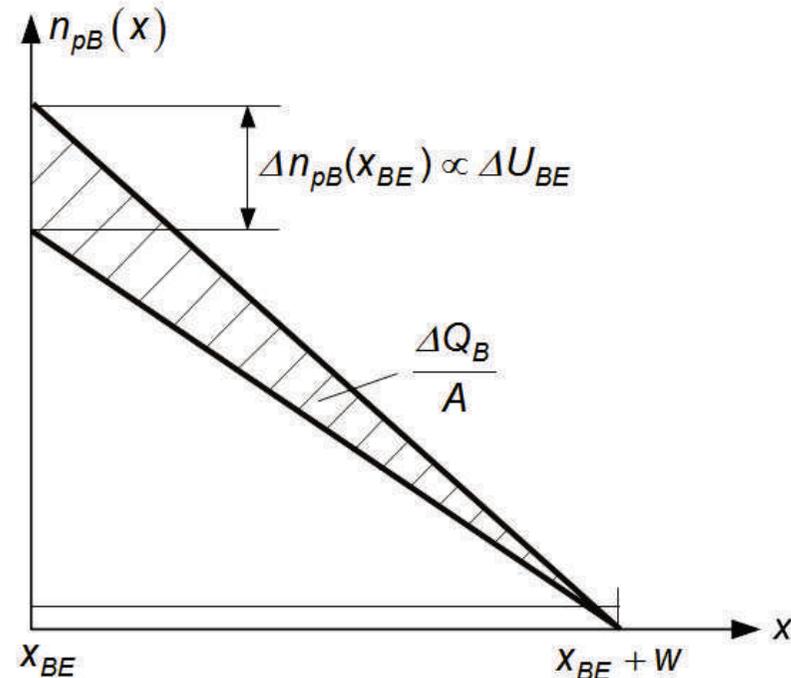
⇒ Basis-Kapazität  $C_B$



# Ladungsspeicherung in der Basis

- Eine Änderung  $U_{BE}$  bewirkt eine Änderung der in der Ladungsträgerdichte  $n_{pB}(x_{BE})$  am linken Rand der Basis-Diffusionszone und damit eine Änderung der gespeicherten Ladungen
- Die Ladungsträgerdichte  $n_{pB}(x_{BE}+w)$  am rechten Rand ist nahezu Null und spielt daher keine Rolle

**Anmerkung:** In der Basis liegt eine kurze Diffusionszone vor. In diesem Fall ist die Rekombination vernachlässigbar, und der Ladungstransfer durch externe Anschlüsse kann direkt aus der Änderung der internen Ladungen berechnet werden.



⇒ Änderung der positiven Majoritätsträgerladung, die zur Kompensation der Elektronendichte in der DZ benötigte wird:

$$\Delta Q_B = \frac{1}{2} e A w \Delta n_{pB}(x_{BE}) = C_B \Delta U_{BE}$$

wobei  $C_B = \frac{1}{2} \frac{w^2}{D_{npB}} g_m$  **Basiskapazität**

# Basisweitenmodulation (Early-Effekt)

**Early-Effekt:** Eine Änderung der Kollektor-Basis-Spannung führt zu einer Änderung  $\Delta w$  der Basisweite  $w$ .

⇒ Lineare Näherung mit Hilfe der **Early-Spannung  $U_A$** : 
$$\frac{\Delta w}{w} = - \frac{\Delta U_{CB}}{U_A}$$

**Konsequenzen:**

1. **Anwachsen des Kollektorstromes  $I_C$  mit  $U_{CE}$**  durch Erhöhung der Steigung des Ladungsträgerprofils in der Basis

$$I_C = eA \frac{n_{pnB}(x_{BE}) - n_{pnB}(x_{BC})}{w}$$

$$\Rightarrow \Delta I_C = -I_C \frac{\Delta w}{w} = \frac{I_C}{U_A} \Delta U_{CB}$$

$$\approx g_m \eta_w \Delta U_{CB}$$

$$\approx g_m \eta_w \Delta U_{CE}$$

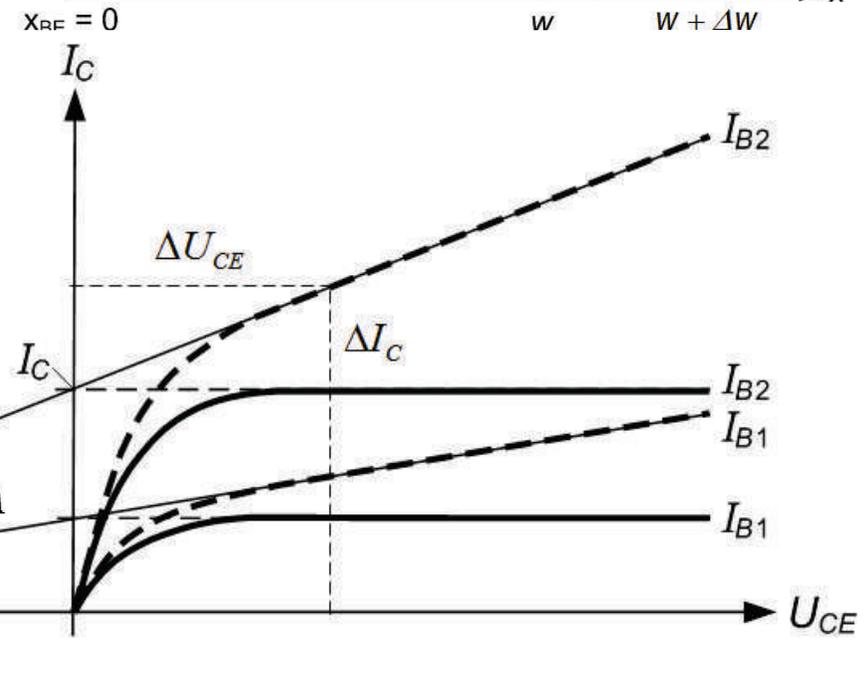
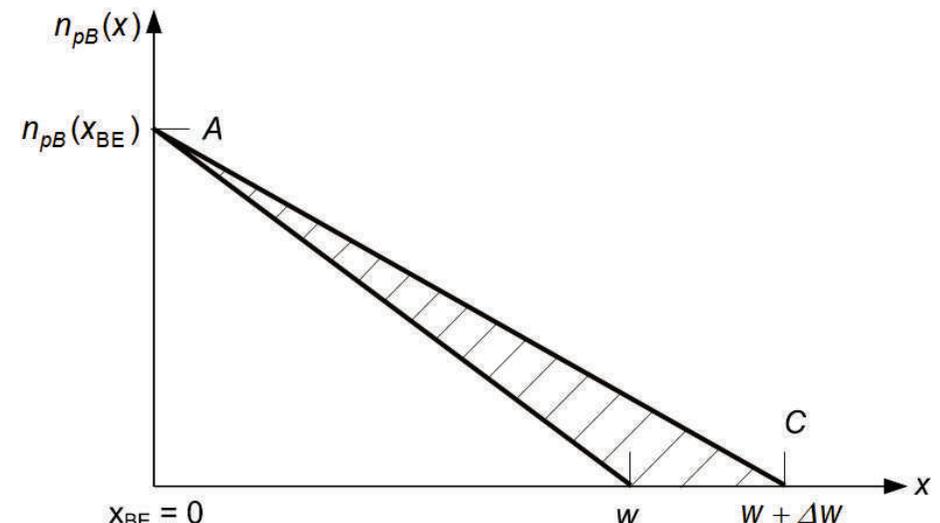
wobei  $g_m = \frac{I_C}{U_T}$ ;  $\eta_w = \frac{U_T}{U_A}$

⇒ Modellierung durch einen

**Leitwert  $g_m \eta_w$**  im

**Kleinsignal-ESB**

$-U_A$



2. Änderung des Basis-Rekombinationsstromes  $I_{BB}$  mit  $U_{CB}$  durch Erhöhung der Steigung des Ladungsträgerprofils in der Basis:

$$I_{BB} = I_{TS} \frac{1}{2} \left( \frac{w}{L_{nB}} \right)^2 \left[ \left( e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) + \left( e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right) \right]$$

wobei 
$$I_{TS} = \frac{AeD_{nB}n_{p0B}}{L_{nB} \sinh\left(\frac{w}{L_{nB}}\right)} \approx Ae \frac{D_{nB}n_{p0B}}{w}$$

$\Rightarrow \Delta I_B \approx \Delta I_{BB} = -g_m \delta_{rek} \eta_w \Delta U_{CB}$  Modellierung durch einen **Leitwert**  $g_m \eta_w \delta_{rek}$  zwischen Kollektor und Basis im Kleinsignal-ESB

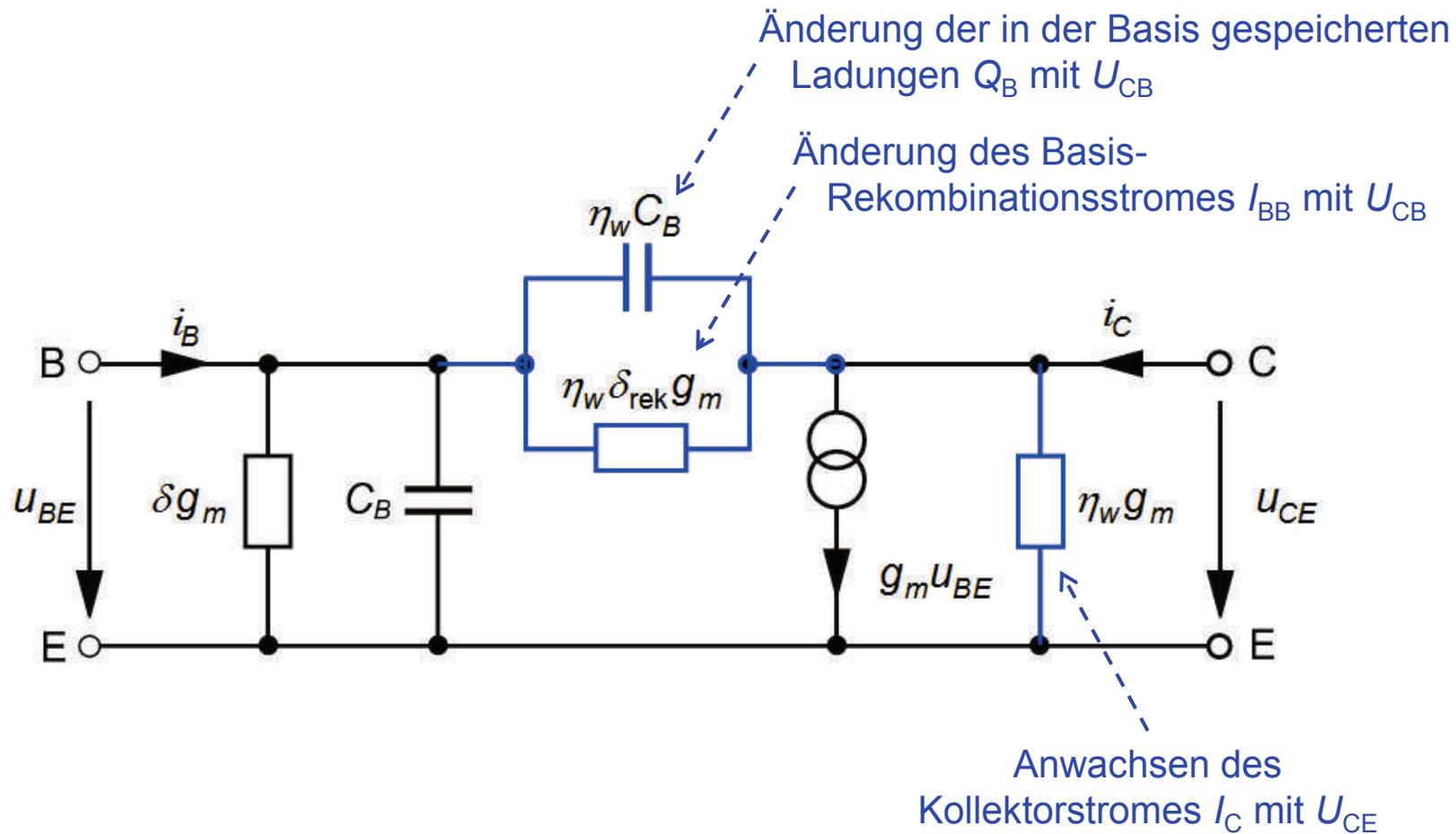
$$g_m = \frac{I_c}{U_T}; \quad \eta_w = \frac{U_T}{U_A}; \quad \delta_{rek} = \frac{1}{2} \left( \frac{w}{L_{nB}} \right)^2$$

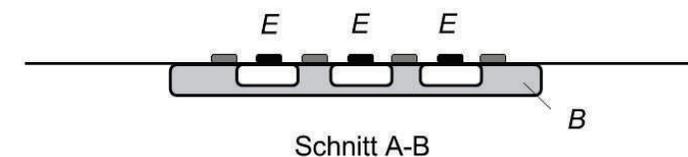
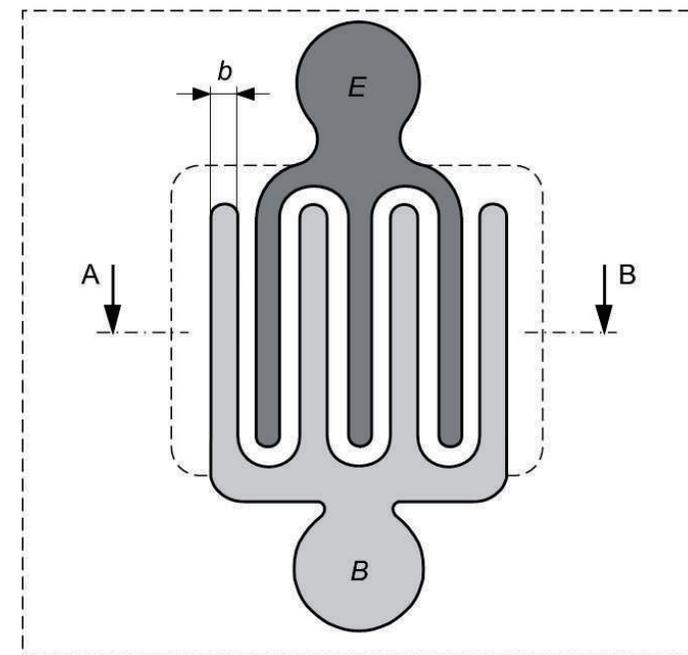
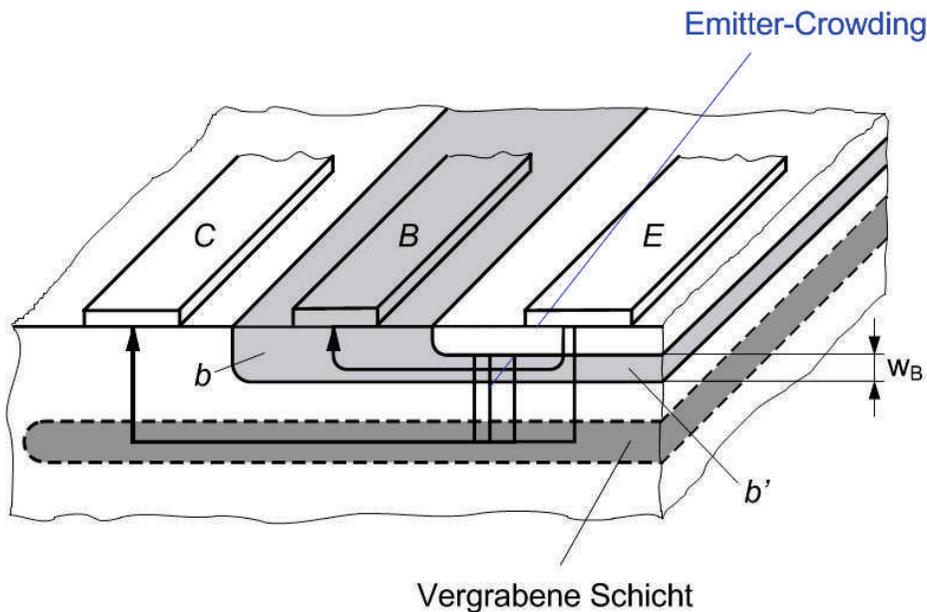
Anteil des in die Basis injizierten Minoritätsträgerstromes, der in der Basis rekombiniert.

3. Änderung der in der Basis gespeicherten Ladungen: Betrachte Majoritätsträgerladung, die zur Kompensation der geänderte Elektronendichte in der DZ benötigt wird

$$\Delta Q_B = \frac{1}{2} e A n_{pB} (x_{BE}) \Delta w = -C_B \eta_w \Delta U_{CB}$$

Modellierung durch eine zusätzliche **Kapazität**  $C_B \eta_w$  zwischen Basis und Kollektor





Schnitt A-B  
**Interdigitaltransistor**

**Kollektor und Emitter:** Bahnwiderstände können durch große Querschnittsfläche klein gehalten werden

**Basis:** Basisweite  $w$  / Querschnittsfläche muss klein bleiben (hoher Emitterwirkungsgrad)

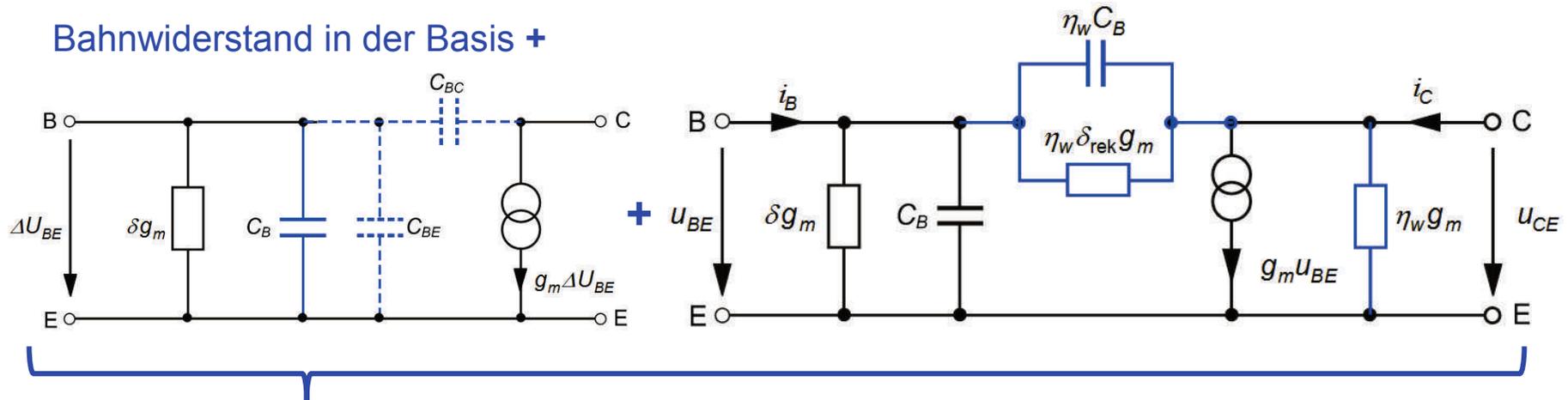
⇒ Hoher Bahnwiderstand

⇒ Die näher am Basisanschluss liegende Transistorzone führt eine höhere Stromdichte (**Emitter Crowding**):

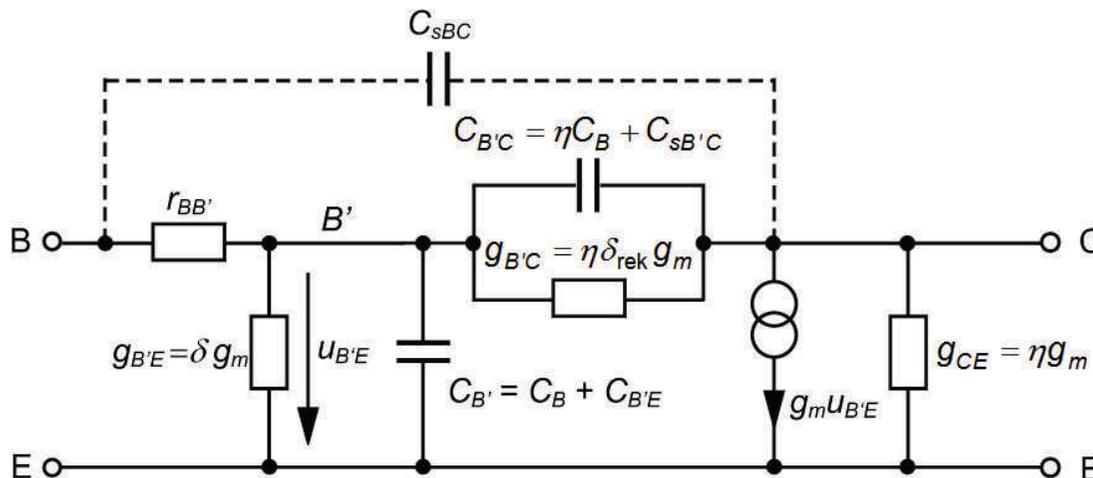
- Berücksichtigung im ESB durch Unterscheidung eines **inneren und äußeren Basisanschlusses**
- Abhilfe: Interdigitalstruktur bei Hochfrequenz und Leistungstransistoren

# Ersatzschaltbild nach Giacoletto

## Bahnwiderstand in der Basis +



⇒ Ersatzschaltbild nach Giacoletto:



Physikalische Effekte und ESB-Größen:

$R_{BB'}$	Bahnwiderstand des Basis-Anschlusses
$C_B$	Ladungsspeicherung in der Basis
$\eta C_B$	Einfluss der Basisweitenmodulation
$C_{sB'C}$	Kollektor-Basis-Sperrschichtkapazität des <b>inneren Basisanschlusses</b>
$C_{sB'C}$	Kollektor-Basis-Sperrschichtkapazität des <b>äußeren Basisanschlusses</b>
$C_{B'E}$	Sperrschicht- und emitterseitige Diffusionskapazität des Basis-Emitter-Überganges

# Grenzfrequenzen

Frequenzgang der Kleinsignal-Stromverstärkung in Emitter-Schaltung:

$$\beta = \frac{I_C}{I_B} = \frac{g_m U_{BE}}{(\delta g_m + j\omega C_B) U_{BE}} = \frac{\beta_0}{1 + j\frac{f}{f_\beta}}$$

wobei  $f_\beta = \frac{\delta g_m}{2\pi C_B}$  Grenzfrequenz der Stromverstärkung in Emitter-Schaltung

Transitfrequenz:  $f_T \approx \beta_0 f_\beta$

Frequenz, bei der die Kleinsignal-Stromverstärkung in Emitterschaltung auf 1 abgesunken ist

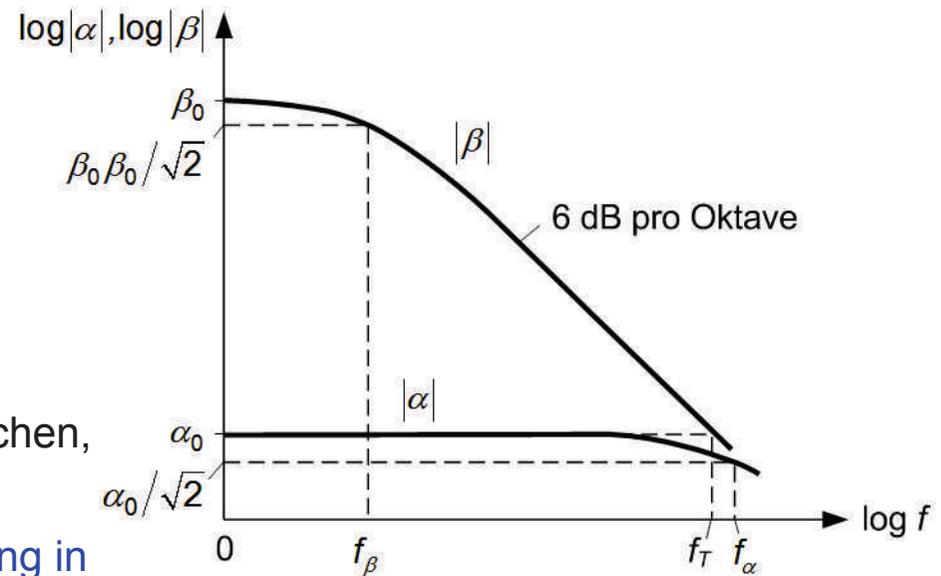
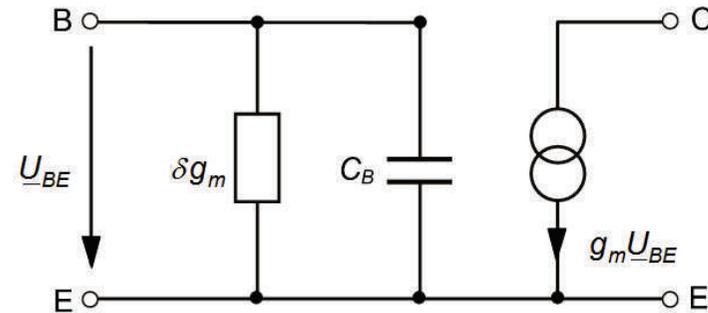
Transitzeit:  $\tau_T = \frac{1}{2\pi f_T} = \frac{1}{2} \frac{w^2}{D_{npB}}$

Zeit, die die Minoritätsträger im Mittel brauchen, um aus der Basis „herauszudiffundieren“

Frequenzgang der Kleinsignal-Stromverstärkung in Basis-Schaltung:

$$\alpha = -\frac{I_C}{I_E} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta}} = \frac{\alpha_0}{1 + j\frac{f}{f_\alpha}}$$

wobei  $f_\alpha = (1 + \beta_0) f_\beta \approx f_T$  Grenzfrequenz der Stromverstärkung in Basis-Schaltung



# Erhöhung der Bandbreite

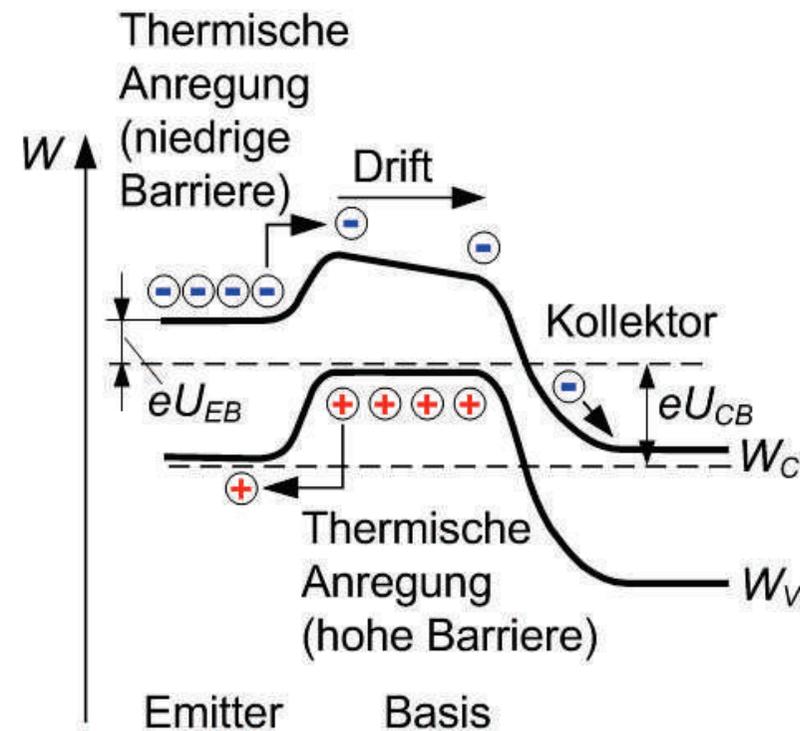
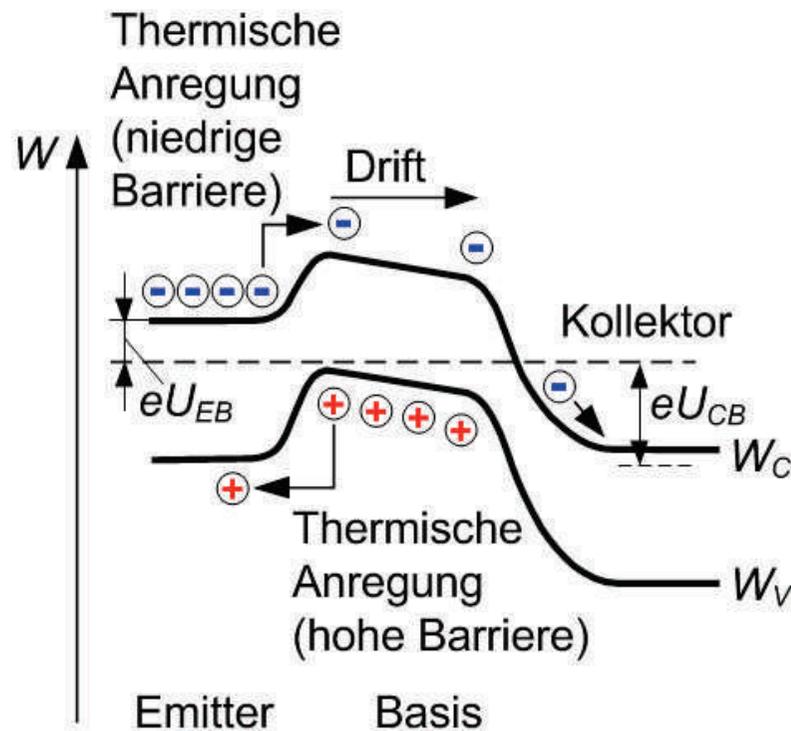
**Ziel:** Beschleunigtes Ausräumen von Minoritätsträger aus der Basis

## Inhomogene Dotierung der Basis

- ⇒ Gradient des Leitungsbandes
- ⇒ Driftstrom

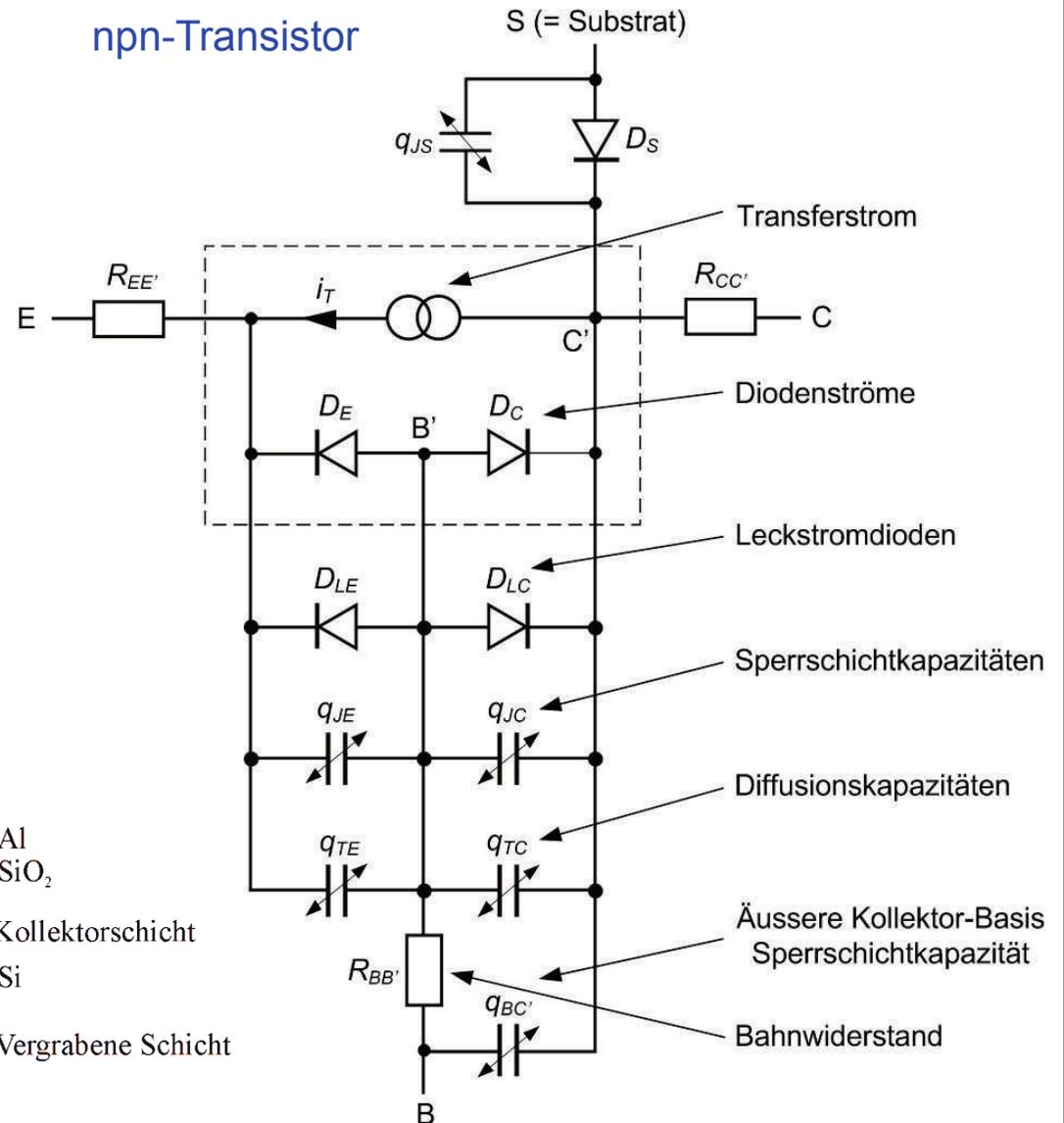
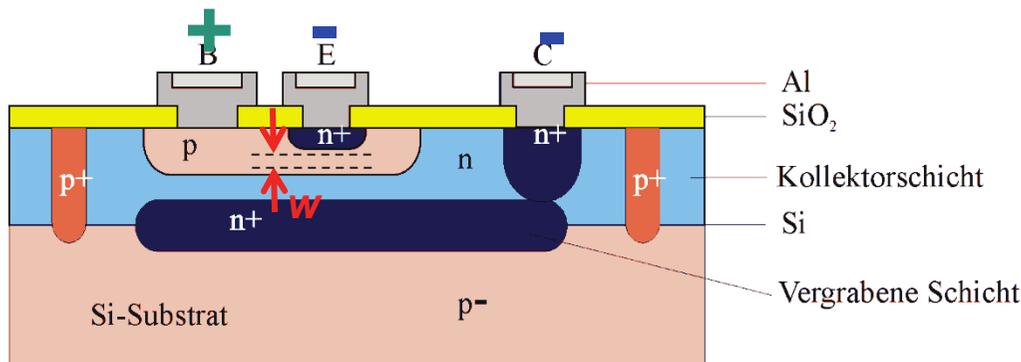
## Räumlich variabler Bandabstand in der Basis

- ⇒ Gradient des Leitungsbandes
- ⇒ Driftstrom



# Gummel-Poon-Modell

- Komplexes Modell, das alle Betriebszustände des Transistors richtig beschreibt
- Verwendung in Simulationsprogrammen wie z.B. SPICE („Simulation Programm with Integrated Circuit Emphasis“)
- Parameter können aus Datenblättern der jeweiligen Transistoren entnommen werden



# Vorlesung 14

27.01.2014

# Änderung im Vorlesungsplan

- Am Montag, dem 03.02.14, findet dann eine Übung anstelle der Vorlesung statt

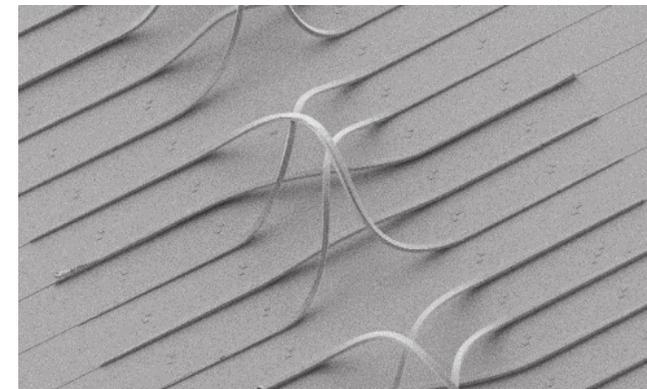
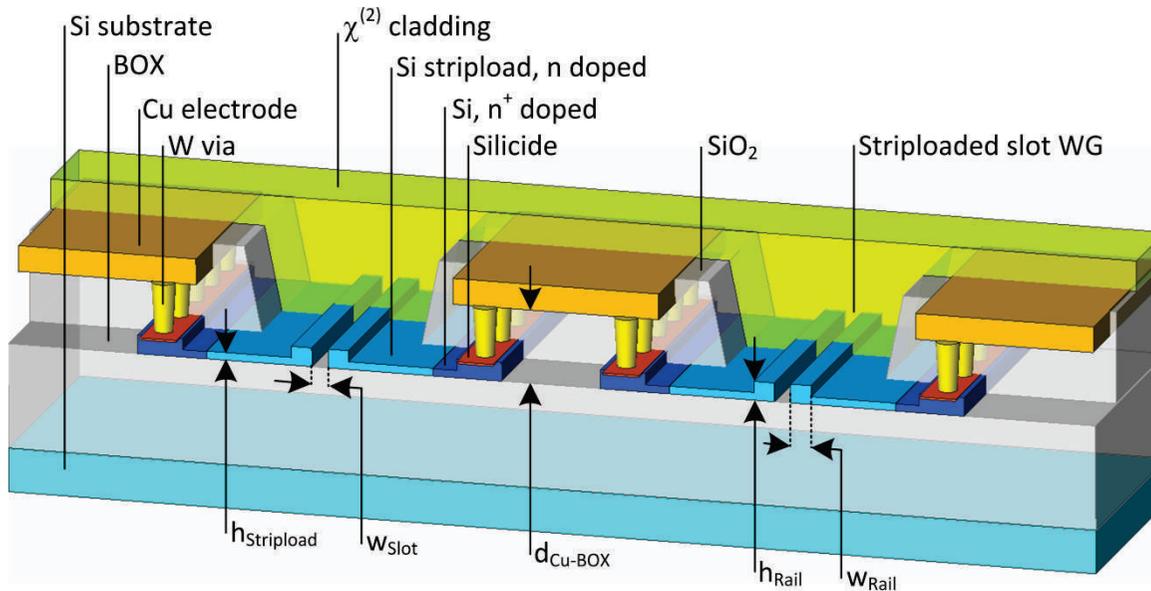
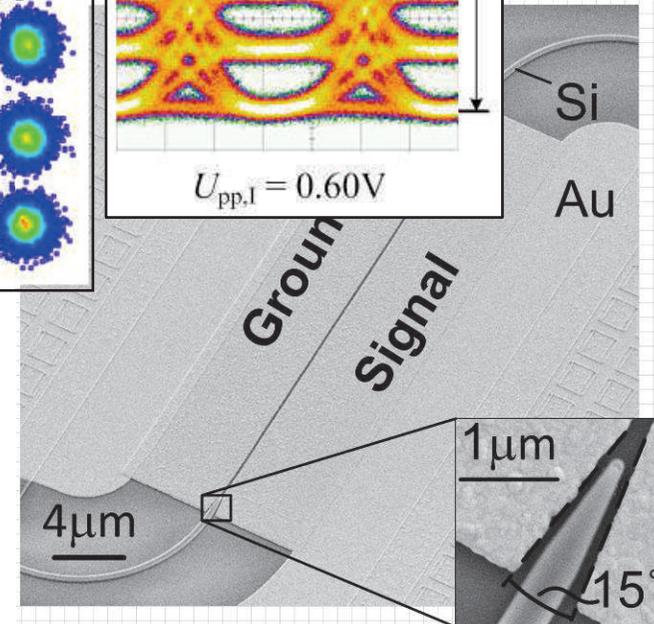
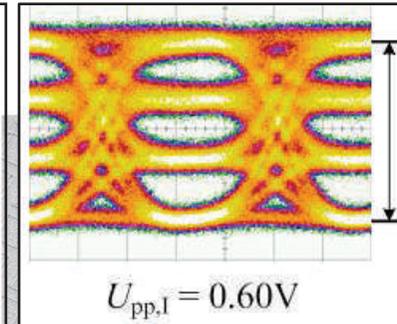
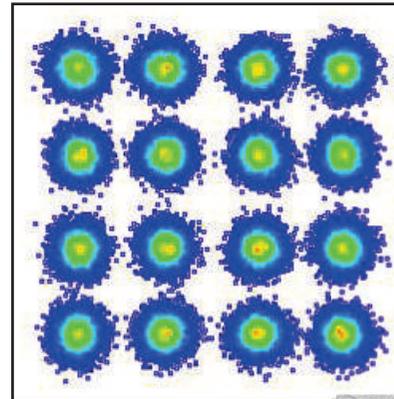
Montag, 21.10.13: Vorlesung 1	Freitag, 25.10.13: Vorlesung 2
Montag, 28.10.13: Vorlesung 3	Freitag, 01.11.13: Feiertag (Allerheiligen)
Montag, 04.11.13: Vorlesung 4	Freitag, 08.11.13: Übung 1
Montag, 11.11.13: Vorlesung 5	Freitag, 15.11.13: Übung 2
Montag, 18.11.13: Vorlesung 6	Freitag, 22.11.13: Übung 3
Montag, 25.11.13: Vorlesung 7	Freitag, 29.11.13: Übung 4
Montag, 02.12.13: Vorlesung 8	Freitag, 06.12.13: Übung 5
Montag, 09.12.13: Vorlesung 9	Freitag, 13.12.13: Übung 6
Montag, 16.12.13: Vorlesung 10	Freitag, 20.12.13: Übung 7
Montag, 06.01.14: Feiertag (Heilige Drei Könige)	Freitag, 10.01.14: Übung 8
Montag, 13.01.14: Vorlesung 11	Freitag, 17.01.14: Übung 9
Montag, 20.01.14: Vorlesung 12	Freitag, 24.01.14: Vorlesung 13
Montag, 27.01.14: Vorlesung 14	Freitag, 31.01.14: Übung 10
Montag, 03.02.14: Übung 11	Freitag, 07.02.14: Übung 12
Montag, 10.02.14: Vorlesung 15	Freitag, 14.02.14: Übung 13

# IPQ Labortour am Freitag, dem 14.02.2014

Führung durch das IPQ und Vorstellung laufender Arbeiten auf den Gebieten **Nanophotonik und Teratronik**:

- Silizium-Photonik und Plasmonik
- Optische Systemintegration und „photonisches Wirebonden“
- Photonische Terabit-Kommunikation
- Optische Messtechnik

Fragen zum Institut werden bei **Kaffee und Kuchen** beantwortet.



# Hetero-Bipolartransistor (HBT)

Problem beim Design von Transistoren mit Homoübergang:

- Hoher Emittierwirkungsgrad limitiert die Dotierungsdichte der Basis ( $n_{p0B} \gg p_{n0E}$ )

$$\gamma_E = \frac{1}{1 + \frac{\mu_{pE} p_{n0E} L_{nB}}{\mu_{nB} n_{p0B} L_{nE}} \tanh\left(\frac{w}{L_n}\right)}$$

- Geringe Dotierung in der Basis führt zu starker Basisweitenmodulation und hohem Bahnwiderstand, und damit zu „Current Crowding“ und Bandbreitebegrenzungen durch RC-Effekte

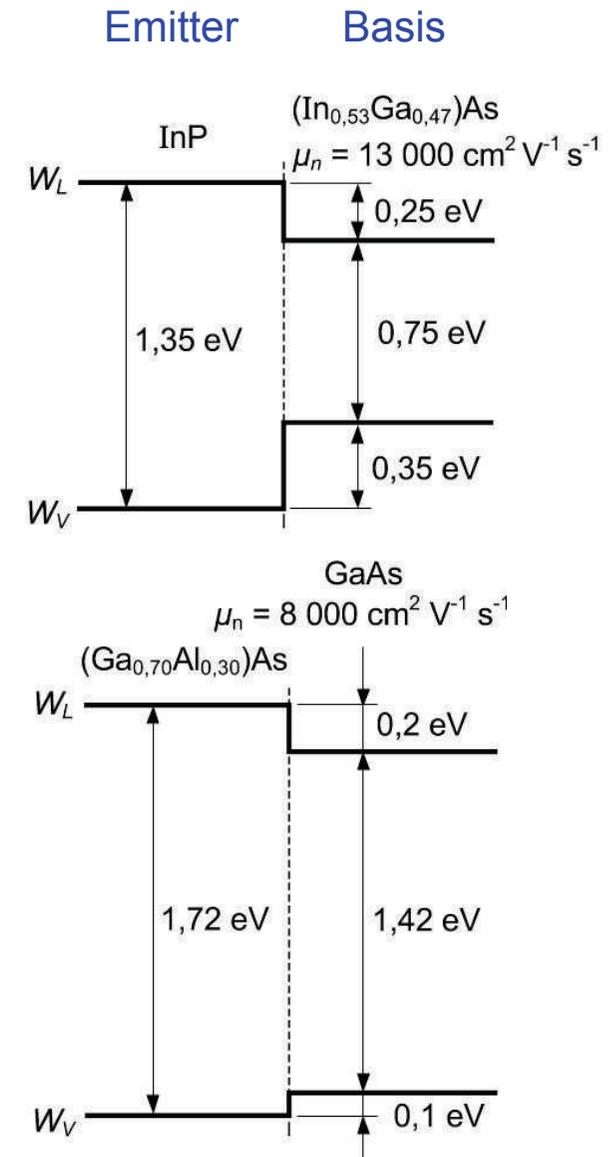
Lösung des Zielkonfliktes durch Verwendung Heteroübergängen mit einem kleineren Bandabstand in der Basis („Hetero-Bipolartransistor“):

$$n_{p0B} = \frac{n_{iB}^2}{n_{AB}} \quad \text{kann für kleinen Bandabstände in der Basis auch bei hohen Dotierungen große Werte annehmen}$$

Besonders vorteilhaft: InP:InGaAs

- Große Differenz der Bandlückenenergien
- Hohe Beweglichkeit der Elektronen in der Basis

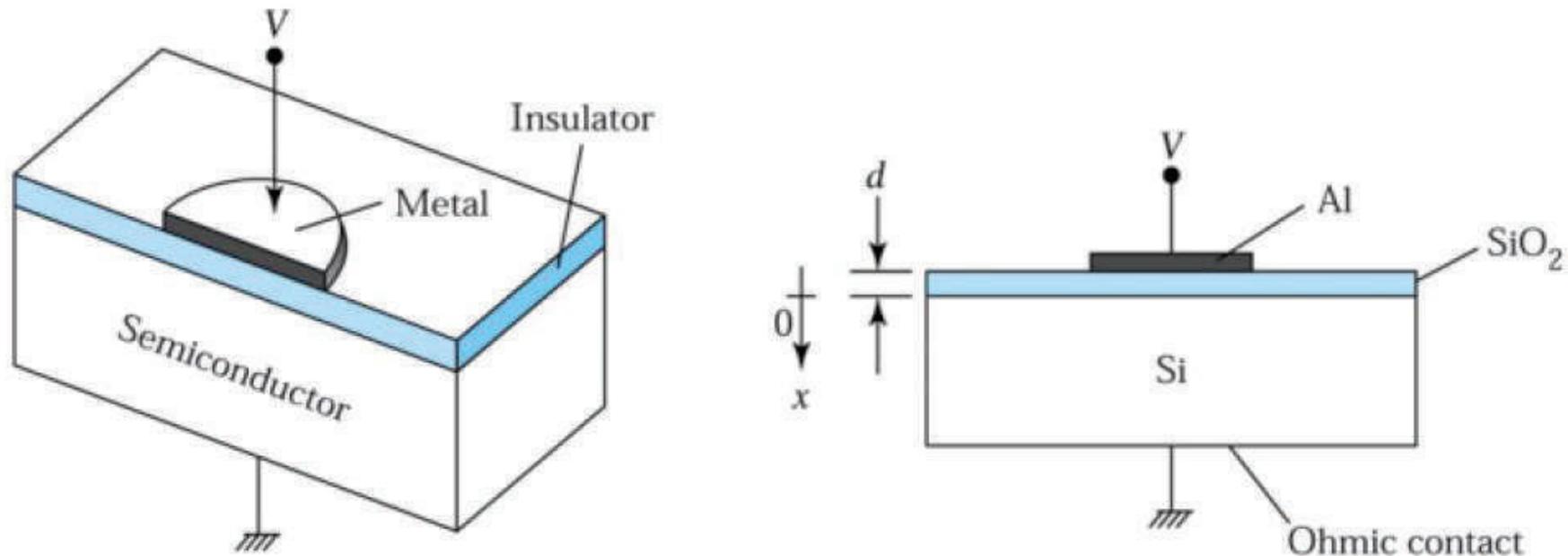
Weitere Materialsysteme: GaAlAs:GaAs; SiGe:Si



# Kapitel 9: Halbleiter-Grenzschichten

# Metal-Isolator-Halbleiter-Struktur

engl. „Metal-Oxide-Semiconductor-(MOS-)Struktur“  
bzw. „Metal-Insulator-Semiconductor-(MIS-)Struktur“ (wenn ein anderes Oxidmaterial als  $\text{SiO}_2$  verwendet wird):

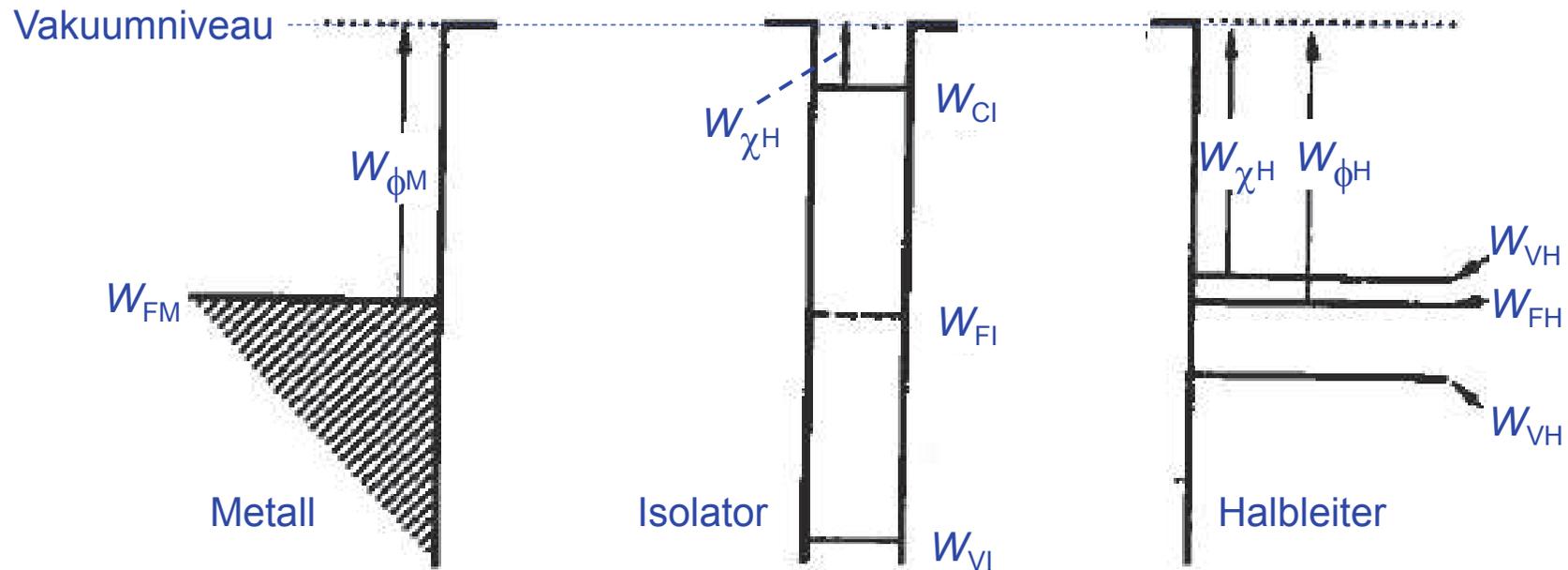


**MOS-Strukturen** sind von überragender Bedeutung in der Halbleitertechnik:

- Speicherkondensatoren in Halbleiterschaltungen und Charge-Coupled Devices (CCD)
- Grundstruktur von Feldeffekt-Transistoren (Metal-Oxide-Semiconductor Field Effect Transistor, MOSFET)
- Wichtige Teststruktur zur Untersuchung von Halbleiteroberflächen

Bilder nach Sze, „Semiconductor Devices – Physics and Technology“

# Banddiagramme und Definition von Energieniveaus



- Gemeinsame Referenz für Energien und Potentiale: „Vakuumniveau“ weit entfernt vom Halbleiter
- Austrittsarbeit  $W_{\phi}$  (engl. „work function“):
  - Entspricht der Arbeit die aufgewandt werden muss, um ein Elektron aus einem ungeladenen Festkörper zu lösen
  - Bei einem Metall ist das Abstand des Fermi-Niveaus vom Vakuumniveau; diese Definition wird auch auf Halbleiter übertragen
- Elektronenaffinität  $W_{\chi}$ :
  - Entspricht der Arbeit, die aufgewandt werden muss, um ein Elektron aus dem Leitungsband eines ungeladenen Festkörpers auszulösen, also dem Abstand des Leitungsbandes vom Vakuumniveau

Bild nach Pierret, „Semiconductor Device Fundamentals“

# MIS-Struktur: Qualitative Betrachtung am Energiediagramm

## Ideale MIS-Struktur:

- Metall und Halbleiter weisen dieselben Austrittsarbeiten auf,  $W_{\phi M} = W_{\phi H}$   
⇒ **Flachbandfall** wird bei einer äußeren Spannung von  $U = 0$  erreicht.
- Isolator ist frei von Raumladungen
- Kein Ladungstransport durch den Isolator; dieser weist einen unendlich hohen Widerstand auf.

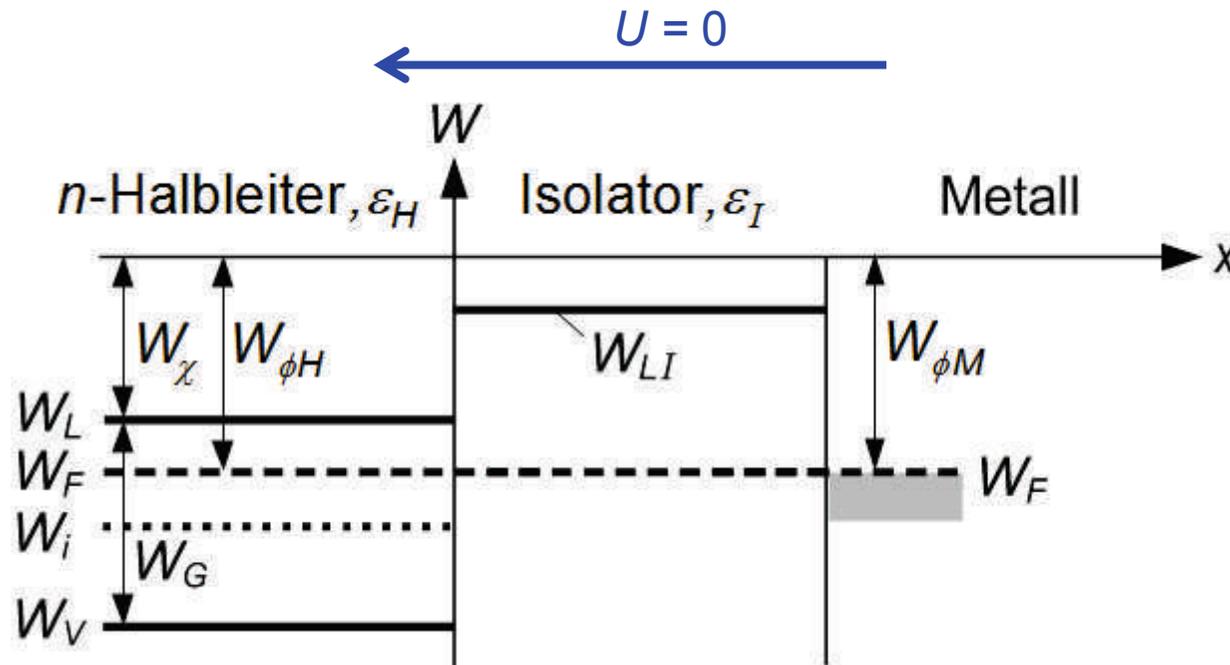
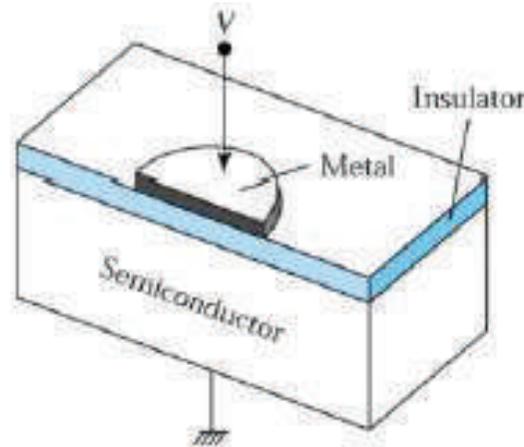
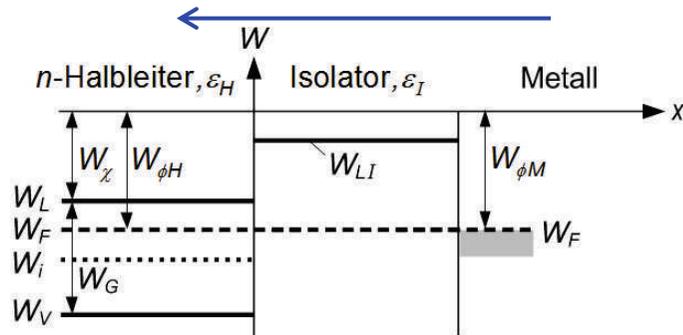


Bild nach Pierret, „Semiconductor Device Fundamentals“

# MIS-Struktur unter angelegter Spannung I

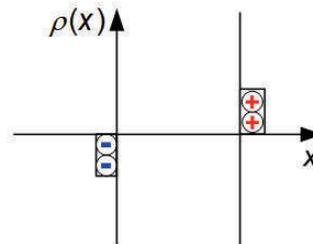
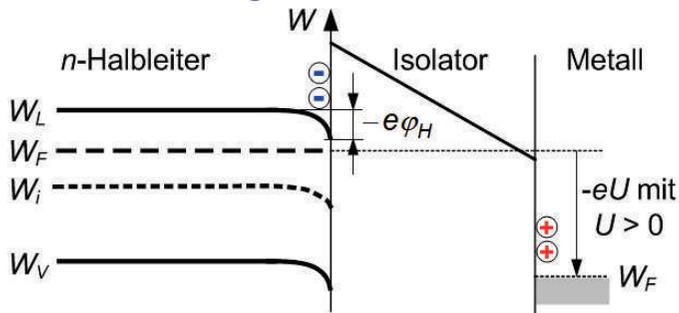
Flachbandfall:  $U = 0$



$x$

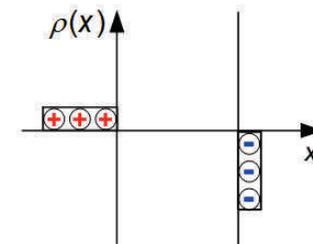
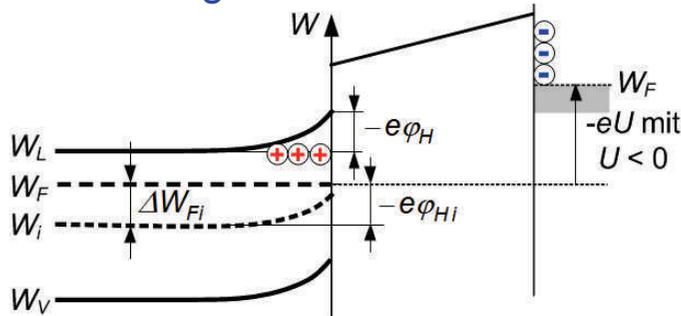
Bild nach Sze,  
„Semiconductor Devices –  
Physics and Technology“

Anreicherungsrandschicht:  $U > 0$



- Positive angelegte Spannung führt zu positivem Randpotenzial  $\phi_H > 0$
- Anreicherung von Majoritätsträgern (Elektronen)
- Ausbildung Flächenladung mit entgegengesetztem VZ im Metall

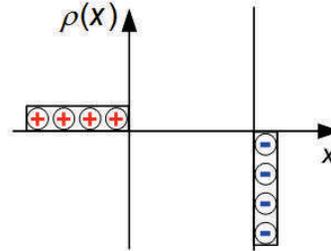
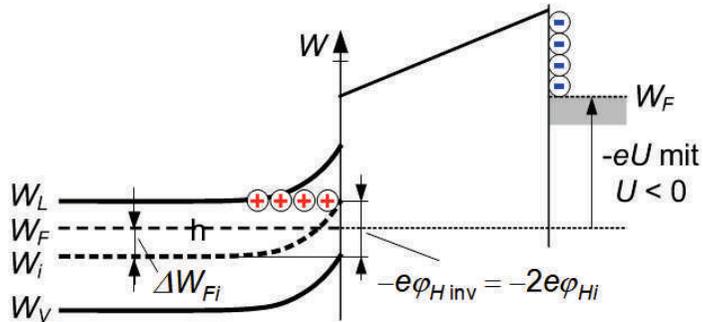
Verarmungsrandschicht:  $U < 0$



- Negative angelegte Spannung führt zu negativem Randpotenzial  $\phi_H$  wobei  $\phi_{Hi} < \phi_H < 0$
- ⇒ Abfließen von Elektronen aus dem Grenzbereich zum Isolator
- ⇒ Positive geladene Donatorrümpfe bleiben zurück

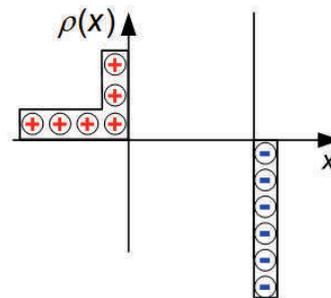
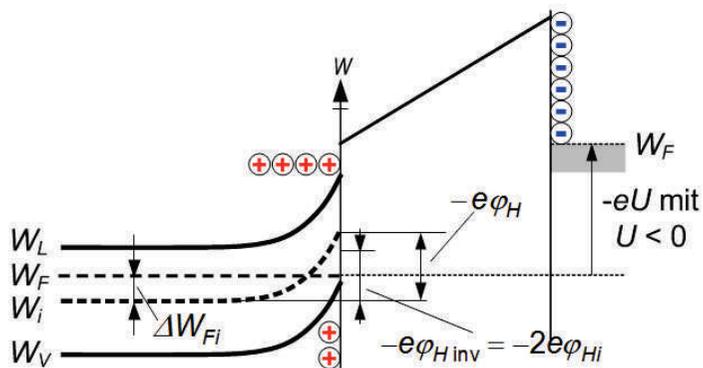
# MIS-Struktur unter angelegter Spannung II

## Schwache Inversionsrandschicht: $U < 0$



- Erhöhung der angelegten positiven Spannung senkt das Randpotential  $\phi_H$  des Halbleiters ( $2\phi_{Hi} < \phi_H < \phi_{Hi} < 0$ )
  - ⇒ Mittellinie („ $W_i$ “) der nach oben gebogenen Bänder überschreitet das Fermi-niveau
  - ⇒ Löcherdichte im Randbereich wird größer als Elektronendichte (**Inversionsrandschicht**); die Raumladungsdichte wird jedoch noch durch die positiv geladenen Donatorrümpfe dominiert.

## Starke Inversionsrandschicht: $U < 0$



- Weitere Erhöhung der angelegten positiven Spannung senkt das Randpotential  $\phi_H$  des Halbleiters weiter ( $\phi_H < 2\phi_{Hi} < 0$ )
  - ⇒ Valenzbandkante kommt in die Nähe des Fermi-Niveau
  - ⇒ Löcherdichte wird größer als Dotierungsdichte; es bildet sich eine dünne Raumladungsschicht mit sehr hoher Löcherdichte aus

# Quantitative Beschreibung der MIS-Struktur - Ansatz

Ausgangspunkt: Poisson-Gleichung in einer Dimension

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_H}$$

wobei

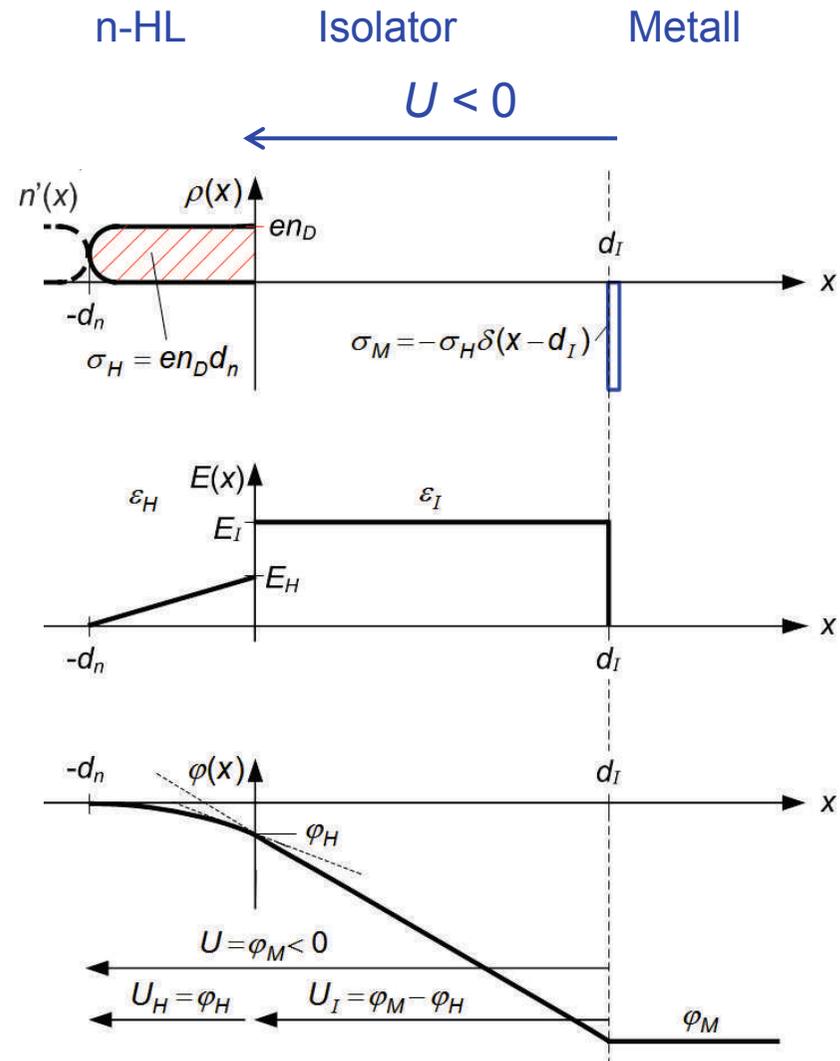
$$\rho(x) = e \left[ n_D - n_D e^{\frac{\varphi}{U_T}} + \frac{n_i^2}{n_D} e^{-\frac{\varphi}{U_T}} \right]$$

„Trick“ zur analytischen Lösung: Verwendung des Potentials  $\varphi$  als unabhängige Variable und Umschreiben der Poisson-Gleichung auf das elektrische Feld

$$E(\varphi) = -\text{sgn}(\varphi_H) \sqrt{-\frac{2}{\varepsilon_H} \int_0^\varphi \rho(\varphi') d\varphi'} = -\frac{d\varphi}{dx}$$

Anmerkung zur Lösung des Integrals:

$$\int \frac{du}{\sqrt{e^u - 1}} = 2 \arctan \sqrt{e^u - 1}$$



# Die Anreicherungsrandschicht

Ladungsträgerdichte:  $\rho(x) \approx -en_D e^{\frac{\varphi}{U_T}}$

⇒ Elektrisches Feld:  $E(\varphi) = -\frac{\sqrt{2}U_T}{L_{Dn}} \sqrt{e^{\frac{\varphi}{U_T}} - 1}$

Flächenladungsdichte:  $\sigma_H = \epsilon_H E(\varphi_H)$   
 $\approx -\frac{\sqrt{2}\epsilon_H U_T}{L_{Dn}} e^{\frac{\varphi_H}{2U_T}}$

Dicke der Anreicherungsrandschicht: Wird definiert durch die Breite des Bereiches, in dem 90% aller Ladungen enthalten sind

⇒  $\varphi \in [\varphi_H - 4.6U_T, \varphi_H]$

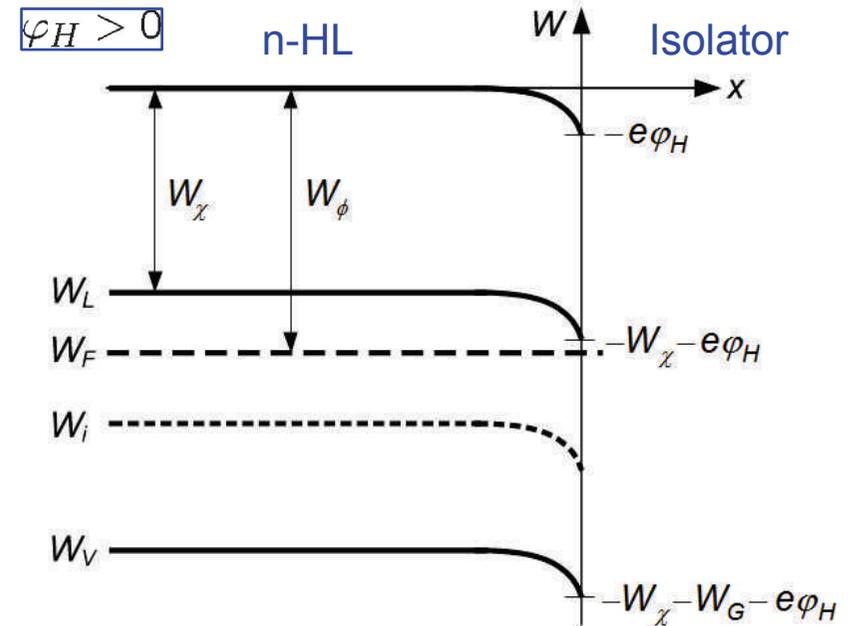
$$dx = \frac{L_{Dn}}{\sqrt{2}U_T \sqrt{e^{\frac{\varphi}{U_T}} - 1}} d\varphi$$

$$\frac{d_n}{L_{Dn}} = \sqrt{2} \arctan \sqrt{\exp\left(\frac{\varphi}{U_T}\right) - 1} \Bigg|_{\varphi_H/U_T - 4,6}^{\varphi_H/U_T}$$

Beispiel:  $\varphi_H \approx 12 U_T \approx 300 \text{ mV}$

⇒  $d_n = 0,031 L_{Dn} \approx 4 \text{ nm}$

⇒ Die Anreicherungsrandschicht verhält sich wie eine reine Flächenladung. Für hinreichend große Spannungen kann die Struktur als Plattenkondensator angenähert werden



Kleinsignal-Kapazitätsbelag: Interpretiere Gesamtkapazität  $C$  als Reihenschaltung der Kapazität  $C_H$  der Anreicherungsrandschicht und der Kapazität  $C_I$  der Isolatorschicht

$$C'_I = \frac{\sigma_I}{U_I} = \frac{\epsilon_I}{d_I}$$

$$C'_H = -\frac{\sigma_H}{2U_T} = C'_I \frac{U_I}{2U_T}$$

$$C' = \frac{C'_I C'_H}{C'_I + C'_H} = C'_I \frac{1}{1 + 2U_T/U_I} \approx C'_I$$

# Die Verarmungsrandschicht

Ladungsträgerdichte:  $\rho(x) \approx en_D$   
 $\Rightarrow$  Potentialverlauf:  $\varphi(x) = -\frac{U_T}{2L_{Dn}^2}(x + d_n)^2$

wobei  $d_n = L_{Dn} \sqrt{-\frac{2\varphi_H}{U_T}}$

Elektrisches Feld am Rand der Halbleiterschicht:  $E(x=0) = \frac{U_T d_n}{L_{Dn}^2}$

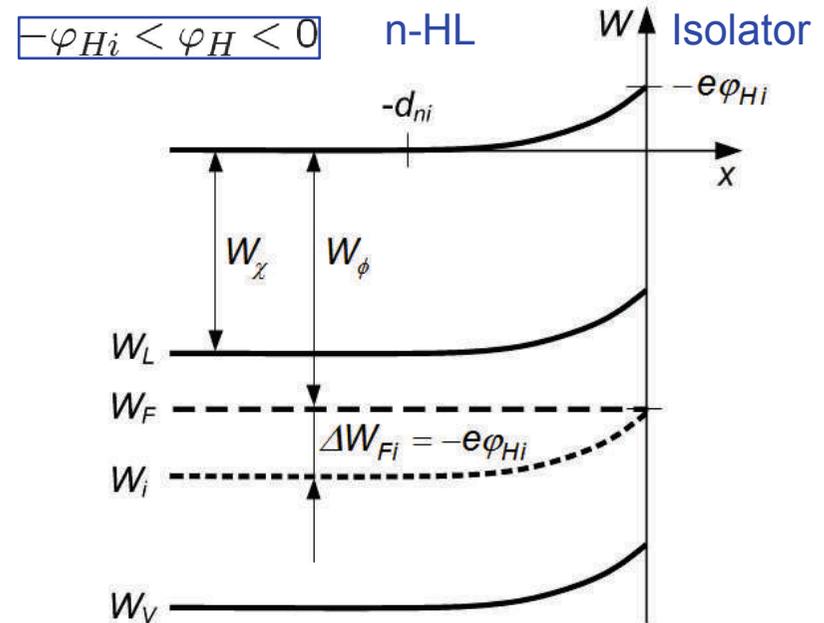
Flächenladungsdichte:  $\sigma_H = \varepsilon_H E(x=0) = \frac{\varepsilon_H U_T}{L_{Dn}} \sqrt{-\frac{2\varphi_H}{U_T}}$

**Kleinsignal-Kapazitätsbelag:** Interpretiere Gesamtkapazität  $C$  als Reihenschaltung der Kapazität  $C_H$  der Anreicherungsrandschicht und der Kapazität  $C_I$  der Isolatorschicht

$$C'_I = \frac{\sigma_I}{U_I} = \frac{\varepsilon_I}{d_I} \quad C'_H = \frac{\varepsilon_H}{d_n}$$

$$C' = \frac{C'_I C'_H}{C'_I + C'_H} = C'_I \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_I d_n}{\varepsilon_H d_I}}$$

$\Rightarrow$  Die Kleinsignalkapazität ist aufgrund der Ausdehnung der Verarmungszone kleiner als die Kapazität  $C_I$  der Isolatorschicht.



**Kleinsignalkapazität als Funktion der angelegten Spannung:**

Berechne  $d_n$  aus

$$U = \varphi_H - d_I E_I = -\frac{en_D}{2\varepsilon_H} d_n^2 - \frac{d_I}{\varepsilon_I} en_D d_n$$

$$\Rightarrow \frac{C'}{C'_I} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\varepsilon_I^2 U}{en_D \varepsilon_H d_I^2}}}$$

# Die Inversionsrandschicht

**Schwache Inversion:** Löcherdichte am Rand ist kleiner als Dotierungsdichte

$$p(0) < n_D \Rightarrow 2\varphi_{Hi} < \varphi_H < \varphi_{Hi} < 0$$

⇒ Raumladungsdichte:  $\rho(x) \approx en_D$

⇒ Beschreibung mit den Formeln für den Verarmungsfall

**Starke Inversion:** Löcherdichte am Rand ist größer als Dotierungsdichte

$$p(0) > n_D \Rightarrow \varphi_H < -2\varphi_{Hi} < 0$$

⇒ Raumladungsdichte:  $\rho(x) \approx e \frac{n_i^2}{n_D} e^{-\frac{\varphi}{U_T}}$

⇒ Beschreibung analog zum Fall der Anreicherung, unter Berücksichtigung der entsprechend angepassten Trägerdichten und des entgegengesetztem Vorzeichen des Potentials

**Elektrisches Feld:** 
$$E(\varphi) = \frac{\sqrt{2}U_T}{L_{Dn}} e^{\frac{\varphi_{Hi}}{U_T}} \sqrt{e^{-\frac{\varphi}{U_T}} - 1}$$

**Flächenladungsdichte:** 
$$\sigma_H = \epsilon_H E(\varphi_H) \approx \frac{\sqrt{2}\epsilon_H U_T}{L_{Dn}} e^{\frac{\varphi_{Hi}}{U_T}} e^{-\frac{\varphi_H}{2U_T}}$$

**Dicke der Anreicherungsrandsschicht ist wesentlich kleiner als die Debye-Länge:**

**Beispiel:**  $\varphi_H \approx 12 U_T \approx 300 \text{ mV}$

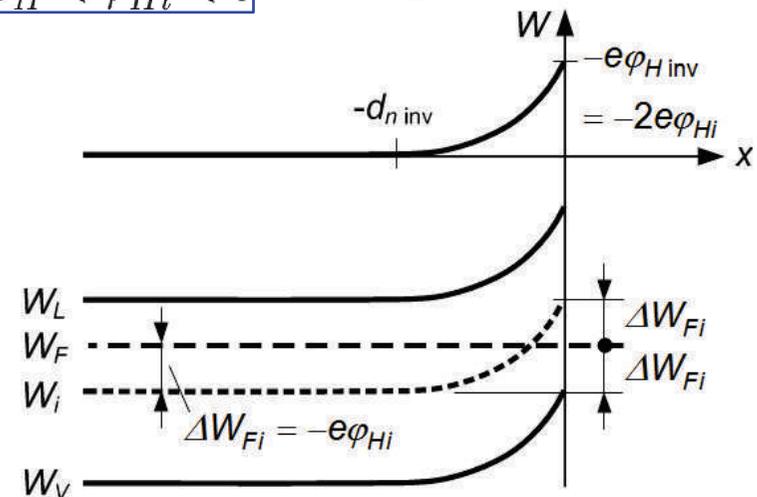
⇒  $d_n = 0,031 L_{Dn} \approx 4 \text{ nm}$

⇒ Die Anreicherungsrandsschicht verhält sich wie eine reine Flächenladung.

$$\varphi_H < \varphi_{Hi} < 0$$

n-HL

Isolator



# Raumladungsverteilung im Fall starker Inversion

Wichtig für die Funktion von Feldeffekttransistoren: Unterscheidung zwischen beweglichen und unbeweglichen Ladungsträgern an der Oberfläche des invertierten Halbleiters

⇒ Bewegliche Ladungsträger im Inversionskanal: Flächenladungsdichte  $\sigma_K$

Unbewegliche Raumladungen der Donator-Rümpfe: Flächenladungsdichte  $\sigma_{H,inv}$

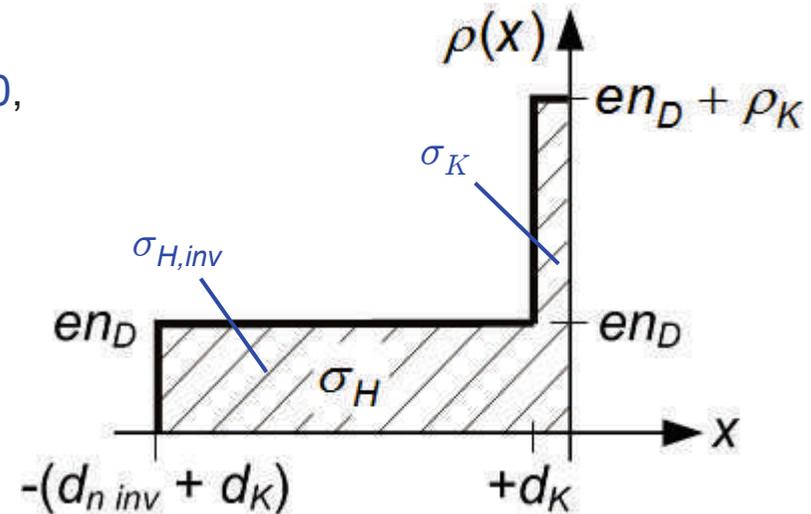
Gesamte Flächenladungsdichte:  $\sigma_H \approx \sigma_{H,inv} + \sigma_K = en_D d_{n,inv} + \rho_K d_K$

Diese Flächenladungsdichte lassen sich vereinfacht beschreiben mit Hilfe der Schwellenspannung  $U_{th} < 0$ , die am Einsatzpunkt der starken Inversion über dem Isolator abfällt:

$$\sigma_{H,inv} = en_D d_{n,inv} = -C'_I U_{th}$$

$$\sigma_K = \rho_K d_K = C'_I (U_{th} - U_I)$$

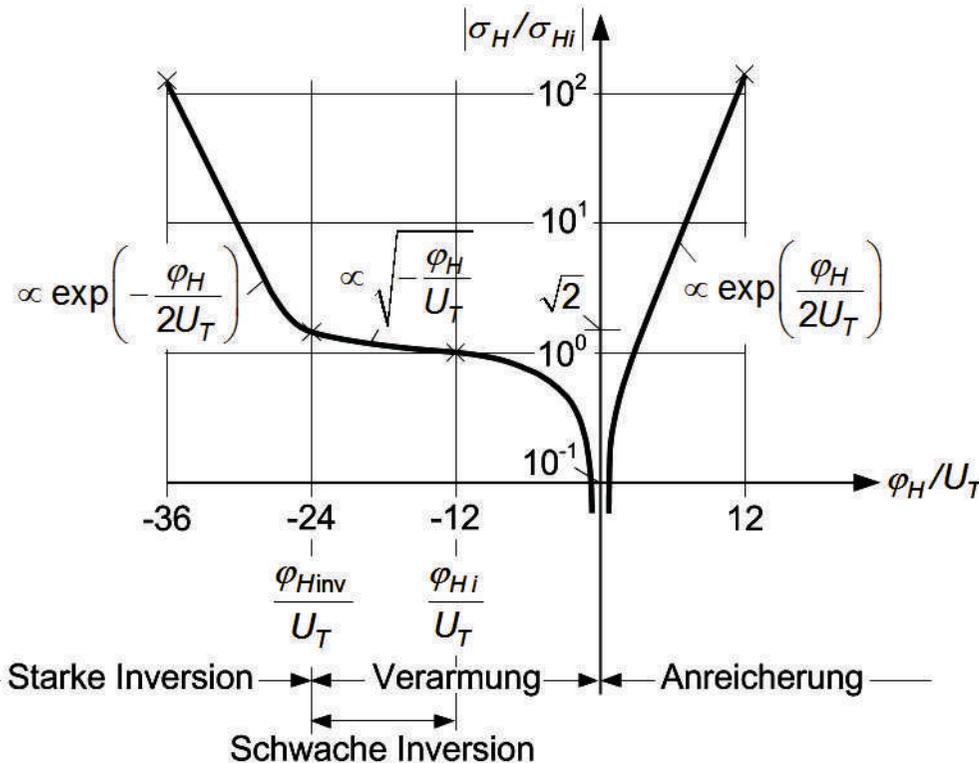
$$\Rightarrow \sigma_H = -C'_I U_{th} - C'_I (U_I - U_{th}),$$



In realen Strukturen muss zunächst noch eine sog. Flachbandspannung  $U_{FB}$  über den Isolator angelegt werden, damit sich der Flachbandfall einstellt. Die Flächenladungsdichte im Inversionskanal lässt sich dann schreiben als:

$$\sigma_K = C'_I (U_{th} + U_{FB} - U_I)$$

→ MOSFET



### Für $\phi_H > 0$ (Anreicherung):

- Sehr dünne Anreicherungsrandschicht
- MIS-Struktur verhält sich wie ein Plattenkondensator mit Elektrodenabstand  $d_1$ , „Füllung“  $\epsilon_1$
- ⇒ Kleinsignalkapazität  $C_1$

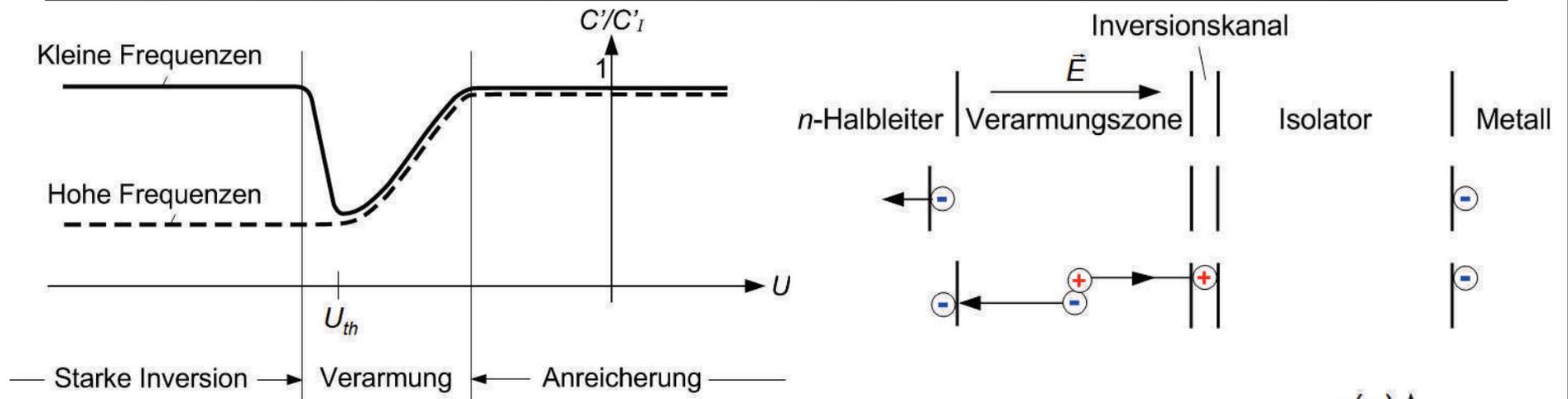
### Für $2\phi_{Hi} < \phi_H < 0$ (Verarmung und schwache Inversion):

- Raumladungsdichte wird durch die ionisierten Donatoren dominiert und erreicht ein Plateau
- Die RLZ erstreckt sich weit in den Halbleiter hinein; das vergrößert den „Plattenabstand“ des äquivalenten Plattenkondensators
- ⇒ Kleinsignalkapazität  $< C_1$ ; das Minimum wird für maximale Ausdehnung der RLZ erreicht (Einsatz der starken Inversion)

### Für $\phi_H < 2\phi_{Hi} = \phi_{H,inv}$ (Starke Inversion):

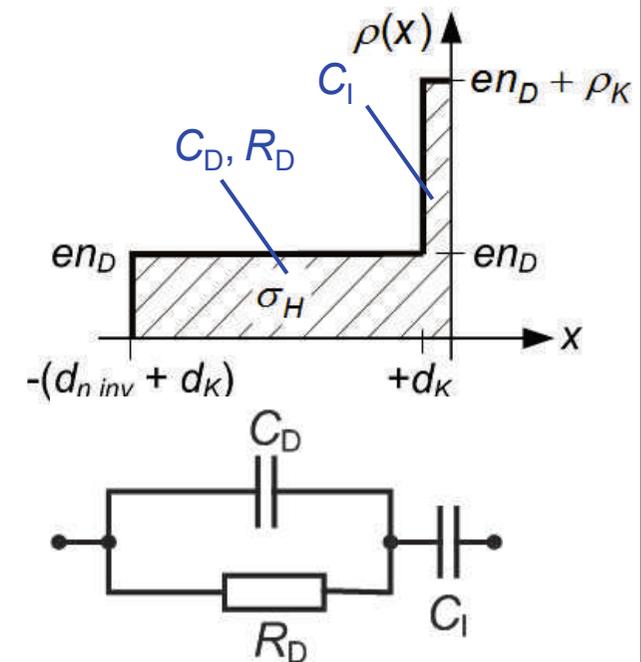
- Weitere Ladungen werden in einem sehr dünnen Inversionskanal an der Oberfläche des Halbleiters hinzugefügt bzw. aus diesem abgezogen
- Bei Spannungsänderungen verhält sich die MIS-Struktur wieder wie ein Plattenkondensator mit Elektrodenabstand  $d_1$  und „Füllung“  $\epsilon_1$
- ⇒ Kleinsignalkapazität  $C_1$

# Kleinsignalkapazität der MIS-Struktur



## Frequenzabhängigkeit:

- Ladungsänderungen an der Metall-Isolator-Grenzfläche werden zunächst durch Zu- bzw. Abfluss von Elektronen (Minoritätsträgern) am linken Rand der Verarmungszone kompensiert; dieser Vorgang erfolgt sehr schnell (**dielektrische Relaxationszeit im n-dotierten Halbleiter**)
  - Der Ausgleich von Ladungen zwischen Verarmungszone und Inversionskanal erfolgt dagegen deutlich langsamer, da dazu erst ein Elektron-Loch-Paar in der Verarmungszone generiert werden muss.
- ⇒ Die Kapazität der Inversionsschicht ist nur bei kleinen Frequenzen sichtbar!
- Verfeinerte Modelle erlauben zusätzlich die Untersuchung von Oberflächenzuständen (-> Sze, Physics of Semicond. Devices)



# CCD-Bildsensoren

- Licht wird in der halbleiterseitigen Raumladungszone der MIS-Struktur absorbiert und das entstehende Elektron-Loch-Paar im durch das interne elektrische Feld getrennt.
- Elektronen sammeln sich in der Inversionsschicht an; die gespeicherte Ladung ist proportional zu absorbierten Lichtenergie.
- Das Auslesen erfolgt zeilenweise durch schrittweises Verschieben der Ladung in benachbarte Auslesezellen hin zu einem Ausleseverstärker („Eimerkettenschaltung“)

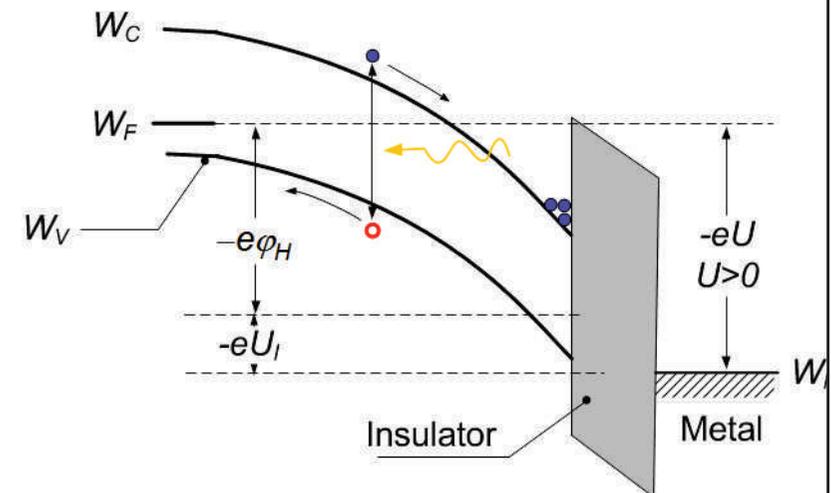
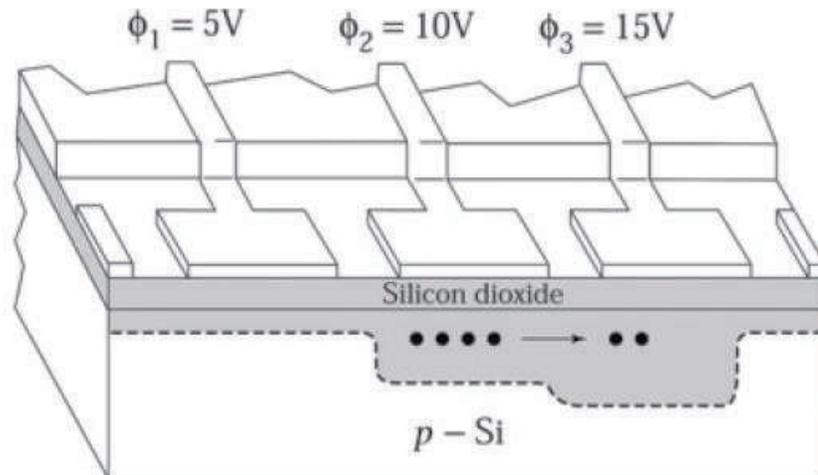
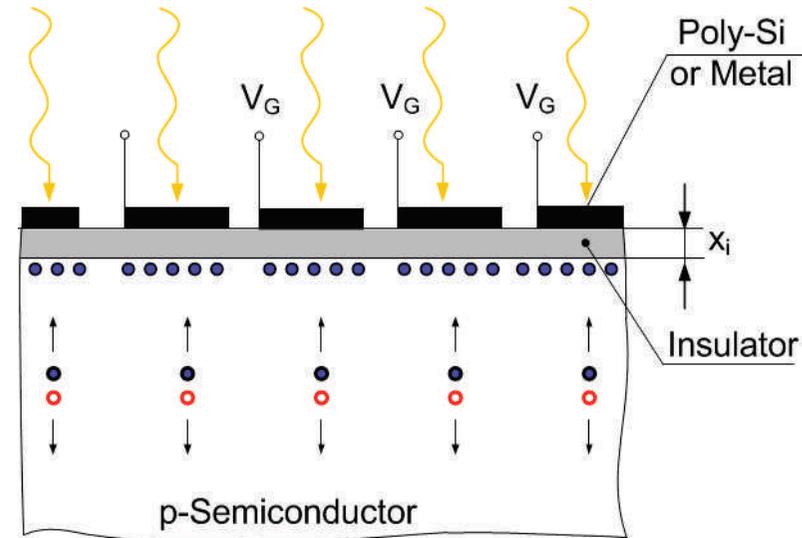
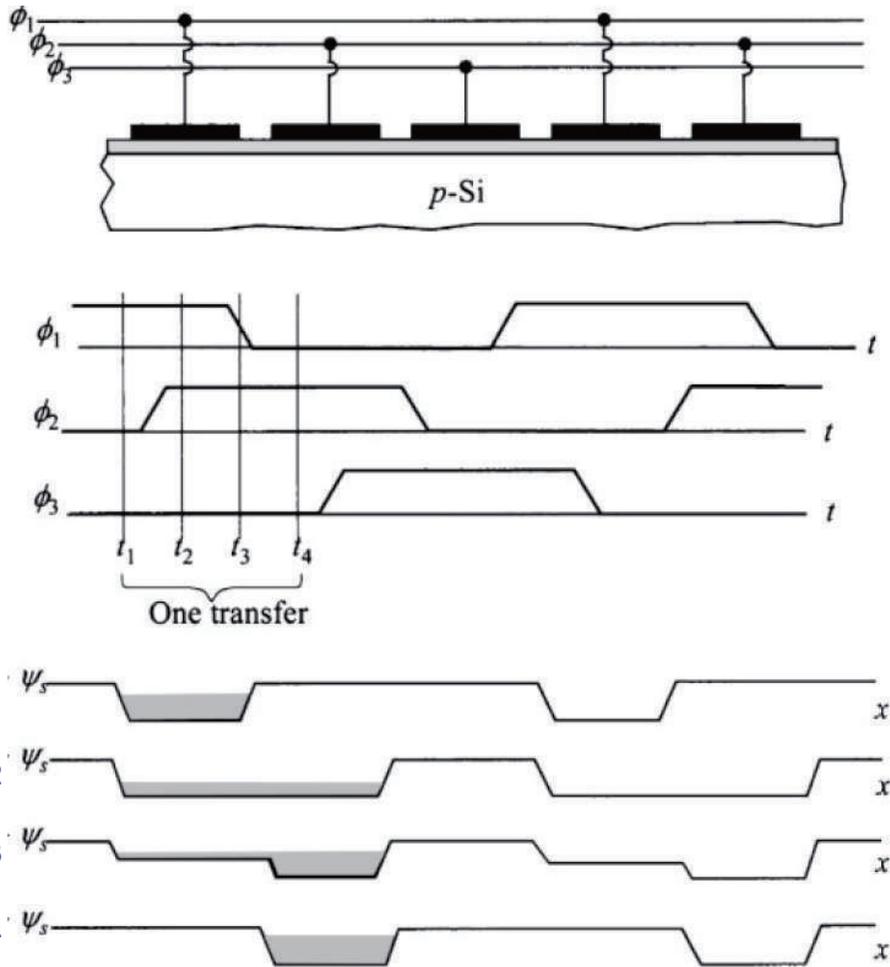
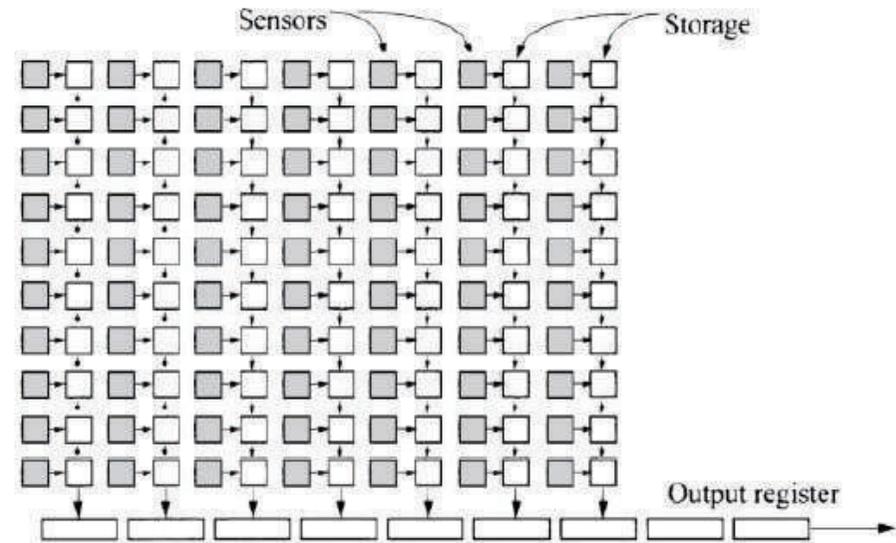


Bild nach Sze, „Semiconductor Devices: Physics and Technology“

# Auslesen von CCD-Bildsensoren



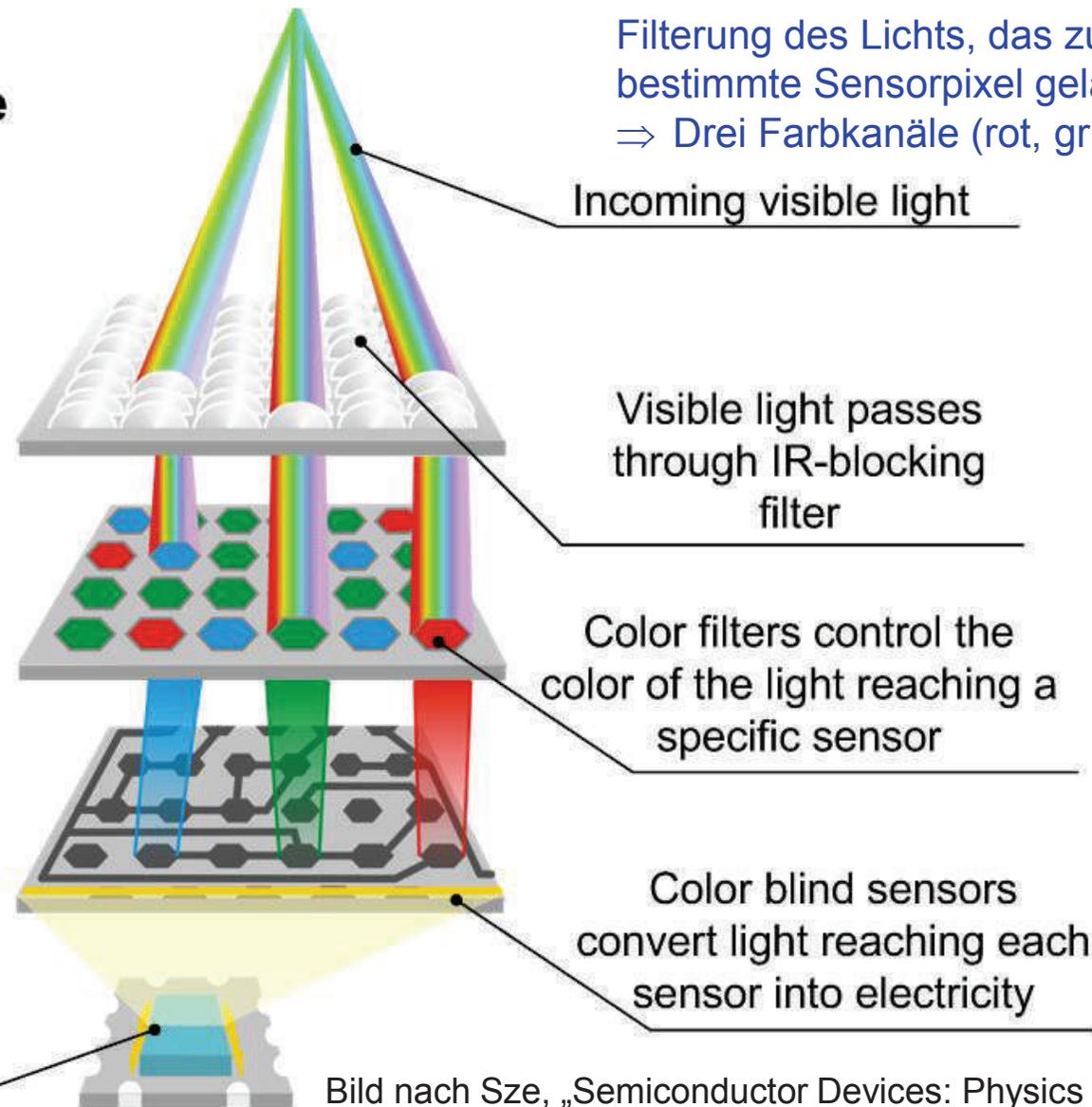
Ausleseprinzip von CCD-Sensorarrays:  
 Transport von Ladungen entlang einer Kette von CCD-Zellen durch Anlegen von drei phasenverschobenen Steuersignalen  
 ⇒ Schieberegister bzw. Eimerkettenschaltung



Bilder nach Sze, „Semiconductor Devices: Physics and Technology“

# Farbempfindliche CCD-Bildsensoren

## RGB inside the camera



Filterung des Lichts, das zu einem bestimmte Sensorpixel gelangt  
⇒ Drei Farbkanäle (rot, grün, blau)

Incoming visible light

Visible light passes through IR-blocking filter

Color filters control the color of the light reaching a specific sensor

Color blind sensors convert light reaching each sensor into electricity

Millions of light sensors

Bild nach Sze, „Semiconductor Devices: Physics and Technology“

# Vorlesung 15

10.02.2014

# Fragestunde HLB-Klausur

## Fragestunde am Montag, 17. März (eine Woche vor der Klausur)

- Hier im NTI Hörsaal, 14.00 Uhr
- Möglichkeit zur Klärung von Fragen zu Vorlesung und Übung
- Fragen bitte im Voraus, spätestens jedoch am Freitag, 14. März per Mail an:

[Simon.Schneider@kit.edu](mailto:Simon.Schneider@kit.edu)

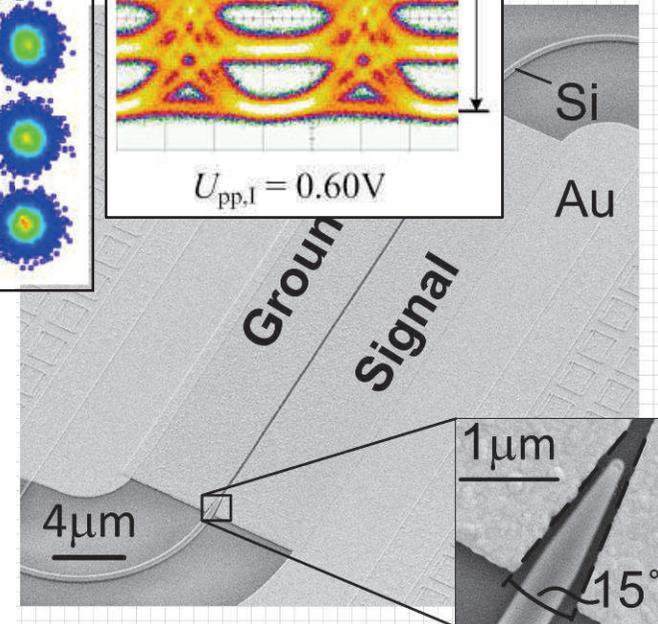
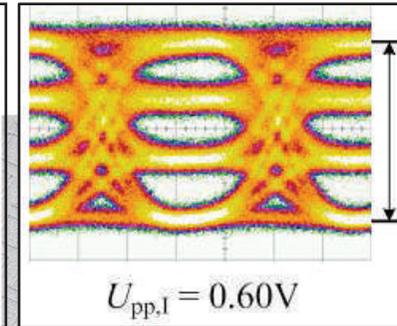
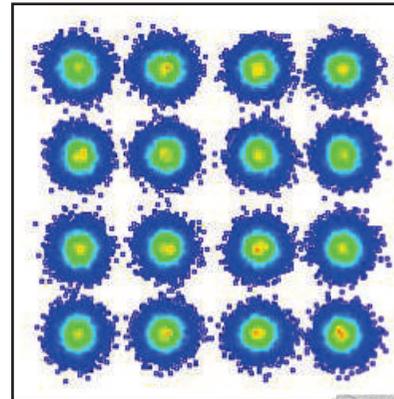
oder

[Sascha.Muehlbrandt@kit.edu](mailto:Sascha.Muehlbrandt@kit.edu)

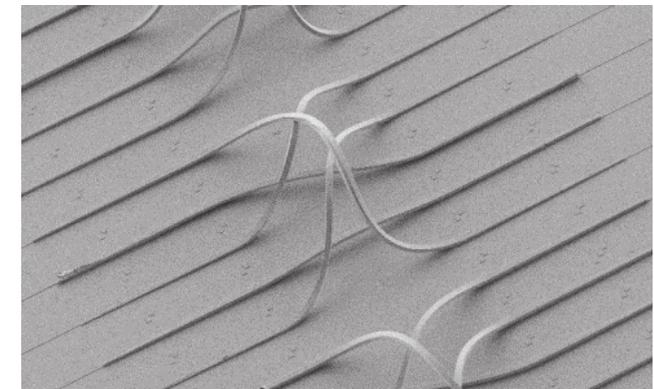
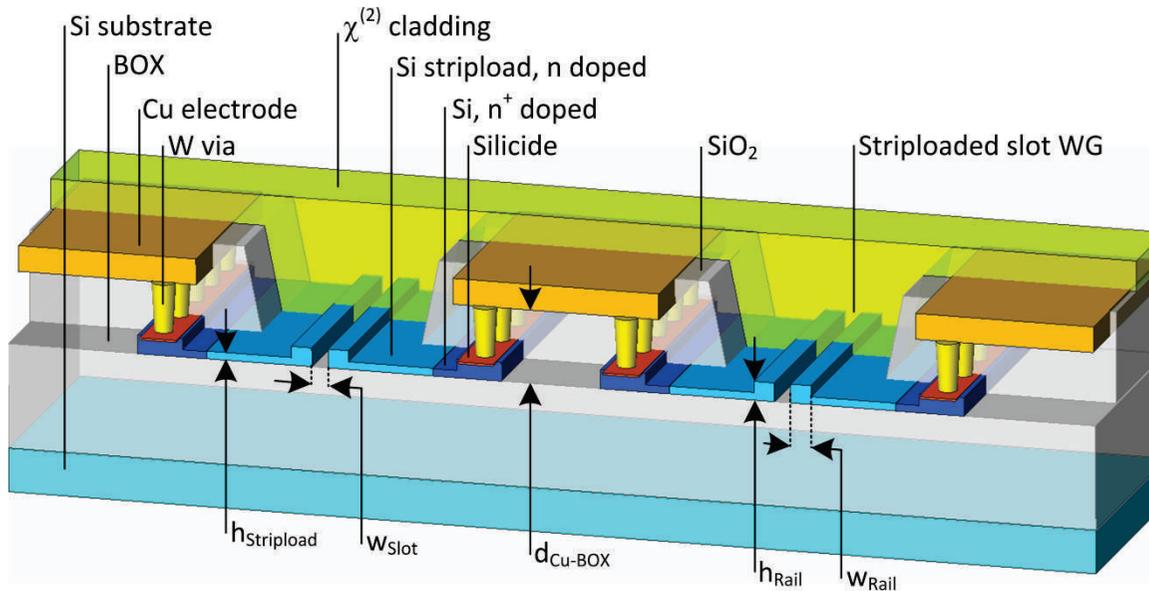
# IPQ Labortour am Freitag, dem 14.02.2014

Ab ca. 15:00 Uhr: Führung durch das IPQ und Vorstellung laufender Arbeiten auf den Gebieten **Nanophotonik und Teratronik**:

- Silizium-Photonik und Plasmonik
- Optische Systemintegration und „photonisches Wirebonden“
- Photonische Terabit-Kommunikation
- Optische Messtechnik

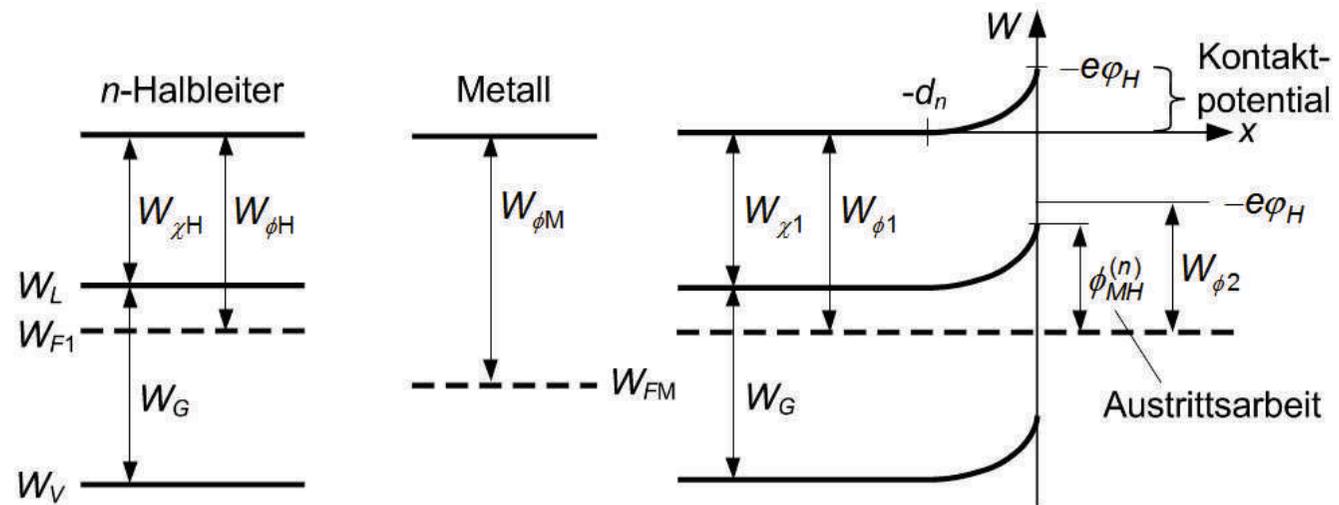


Fragen zum Institut werden bei **Kaffee und Kuchen** beantwortet.



# Der Metall-Halbleiter-Kontakt (Schottky-Kontakt)

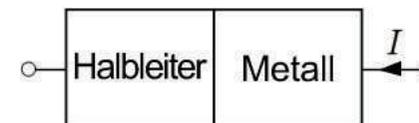
Hier:  
Verarmungszone im Halbleiter  
⇒ Gleichrichtender Kontakt



Definition von Austrittsarbeiten („Barrier Heights“):

$\phi_{MH}^{(n)}$  für Elektronen (positiv, wenn die LB-Kante bei  $x = 0$  oberhalb des Ferminiveaus des Metalls liegt)

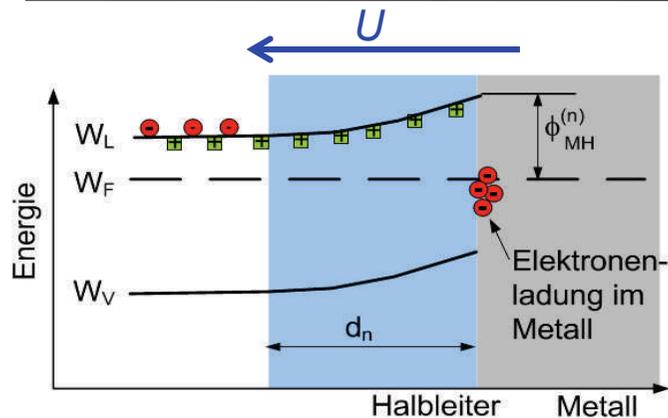
$\phi_{MH}^{(p)}$  für Löcher (positiv, wenn die VB-Kante bei  $x = 0$  unterhalb des Ferminiveaus des Metalls liegt)



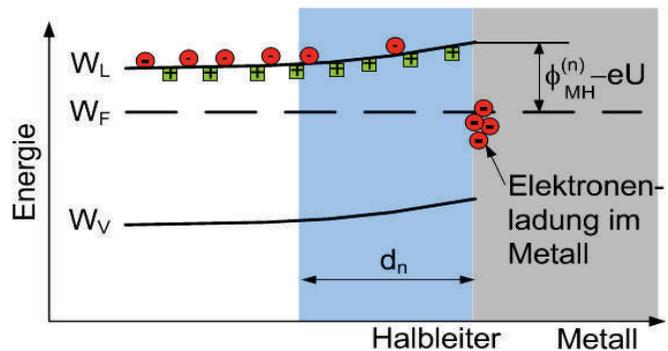
**Anmerkung:** Diese Austrittsarbeiten lassen sich i.d.R nicht aus den Austrittsarbeiten bzw. Elektronenaffinitäten des Halbleiters/Metalls berechnen. Sie müssen statt dessen für bestimmte Materialkombination separat gemessen und tabelliert werden.

**Grund:** In Realität kein abrupter Übergang zwischen den Materialien, sondern komplexe Verbindungen an den Grenzflächen, die zu Oberflächenladungen und Dipolschichten führen!

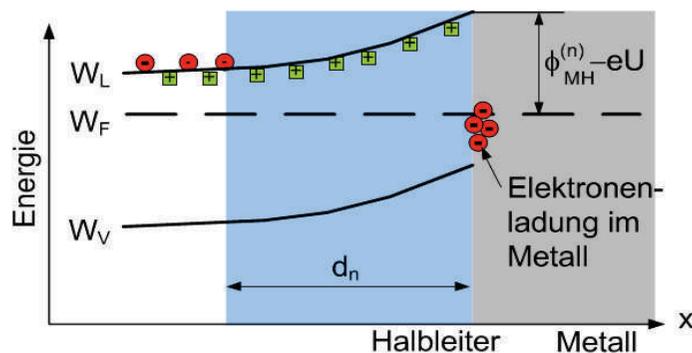
# Schottky-Diode: Gleichrichtende Wirkung



Keine äußere Spannung ( $U = 0$ ): Elektronen im Halbleiter und Metall sind durch eine Potentialbarriere voneinander getrennt



Spannung in Durchlassrichtung ( $U > 0$ ): Potentialbarriere wird kleiner; Elektronen gelangen vom Halbleiter ins Metall  
 $\Rightarrow$  Starker Stromfluss in Vorwärtsrichtung



Spannung in Sperrrichtung ( $U < 0$ ): Potentialbarriere wird größer; kein nennenswerter Elektronenfluss  
 $\Rightarrow$  Sehr kleiner Stromfluss in Rückwärtsrichtung infolge von Löcherdiffusion und Generation in der Raumladungszone

# Schottky Diode: Eigenschaften

Strom-Spannungs-Charakteristik (ohne Herleitung!):

$$I = I_n + I_p = Ae \left[ \frac{D_n n(0) d_n}{2L_{Dn}^2} + \frac{D_p p_{n0} d_n}{2L_{Dn}^2} \right] (e^{U/U_T} - 1)$$

wobei  $d_n = L_{Dn} \sqrt{-\frac{2(\varphi_H + U)}{U_T}}$       $\varphi_H < 0$       $0 < U < |\varphi_H|$

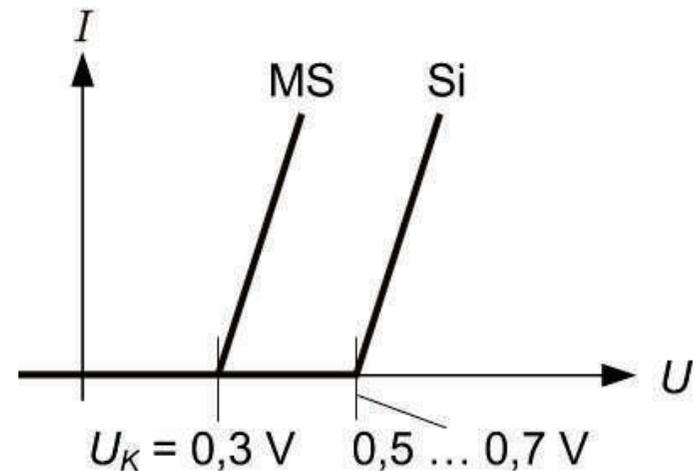
$$n(0) = n_D \exp\left(-\frac{\Phi_{MH}^{(n)}}{kT}\right)$$

Eigenschaften:

- Stromfluss wird durch **Majoritätsträger** dominiert

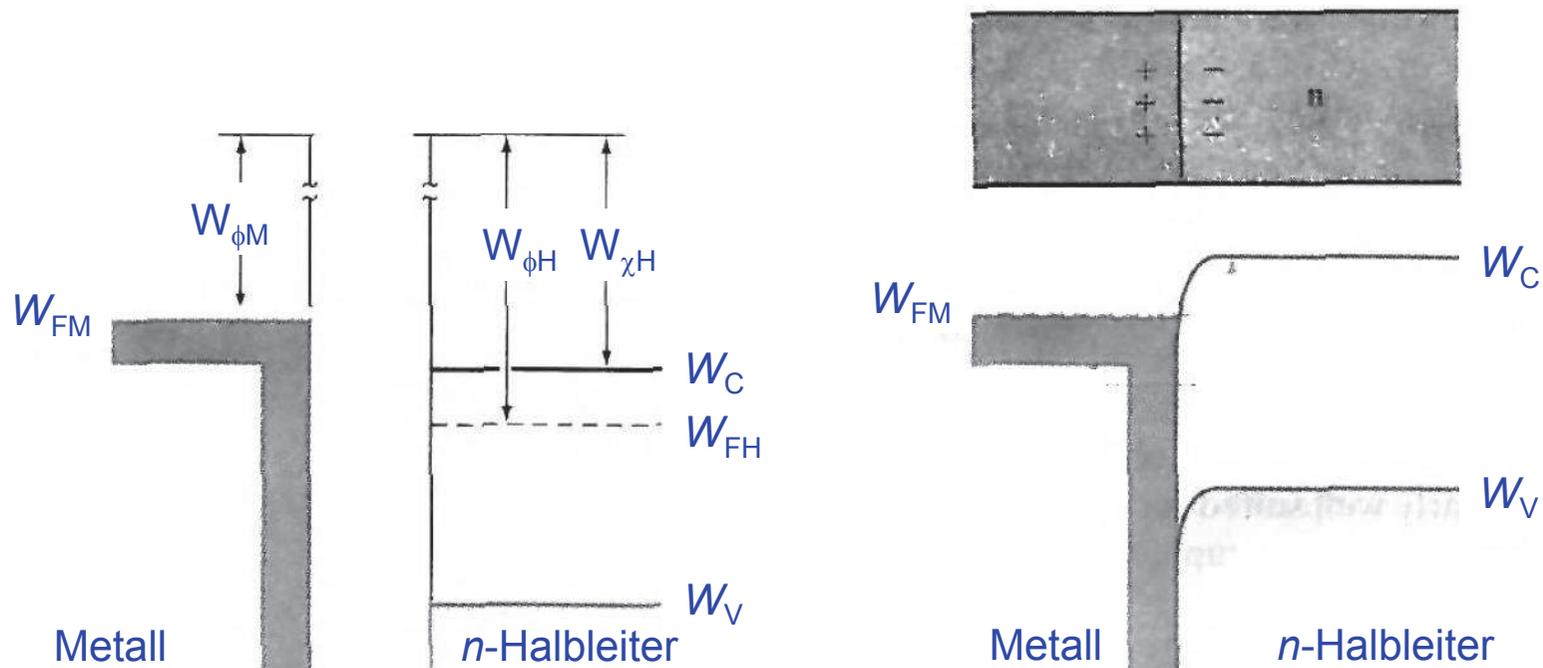
$$\frac{I_n}{I_p} \approx \gamma = \frac{n(0)}{p_{n0}} = \frac{n_D}{n_i \exp\left(\frac{\phi_{MH}^{(n)} - W_G/2}{kT}\right)} \gg 1$$

- **Hohe Schaltgeschwindigkeiten**, da sich Majoritätsträger innerhalb der dielektrischen Relaxationszeit rearrangieren
- **Geringere Durchlassspannung** („Knickspannung“), **geringere Durchbruchspannung** und **höherer Sperrstrom** als pn-Diode



# Ohmscher Kontakt

Idealer ohmscher Kontakt: Wahl der Materialien so, dass eine Angleichen der Fermienergien nach Kontaktierung durch Zufluss von Majoritätsträgern in den HL erfolgt!  
 ( $W_{FM} > W_{FH}$  im  $n$ -Halbleiter bzw.  $W_{FM} < W_{FH}$  im  $p$ -Halbleiter vor der Kontaktierung)  
 ⇒ Keine Verarmungszone im Halbleiter; verschwindender Kontaktwiderstand!



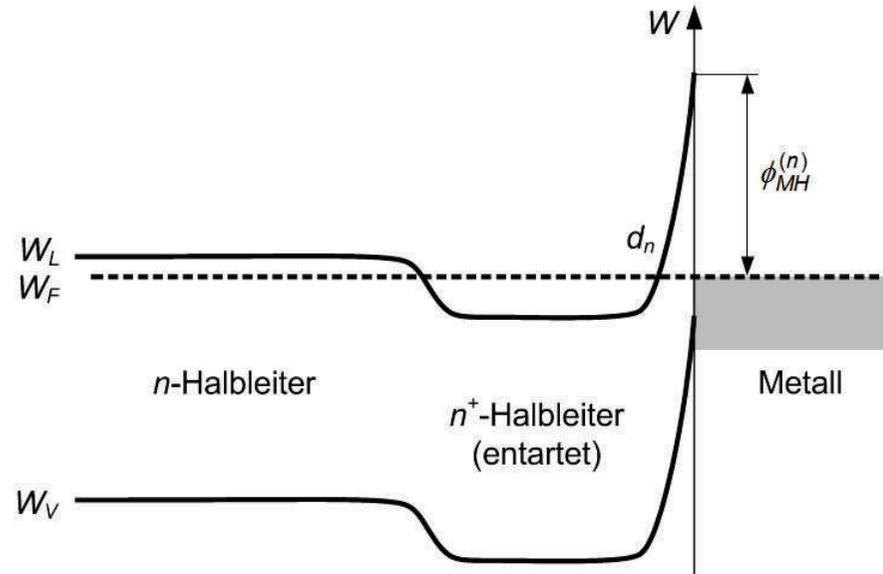
**Problem:** Erfordert beim  $n$ -HL ein Metall mit hinreichend kleiner Austrittsarbeit!

# Ohmscher Kontakt durch Tunnelstrom

Kontaktierung eines Metalls mit großer Austrittsarbeit möglich durch sehr starke Dotierung des Halbleiters (Entartung!) am Metallkontakt

⇒ Sehr schmale Potentialbarrieren, die **durchtunnelt** werden können („Tunnelkontakt“)

Wird auch angewandt, um **p-Silizium** mit **Aluminium**-Elektroden zu kontaktieren.



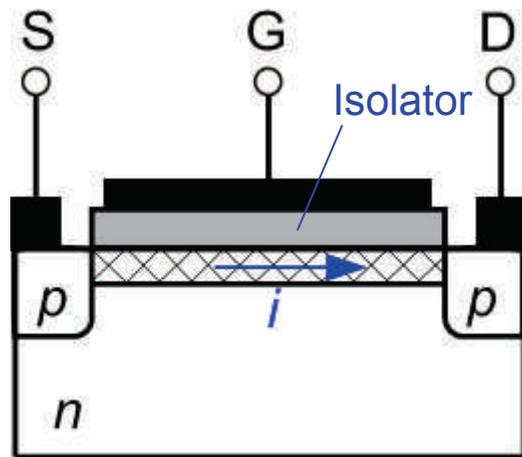
**Problem bei Metallkontakten:** Dotierung des Halbleiters an der Kontaktstelle durch Eindiffusion der Metall-Atome; bei Kontakten von n-Silizium mit Al (Akzeptor!) führt die Eindiffusion von Al beispielsweise zum „Umdotierung“ des Halbleiters.

⇒ Statt dessen: Kontaktierung über eine Schicht aus **Siliciden** (binäre metallische Verbindung von Si, z.B. mit Ti, W, Mo, Pt, Ni)

**Beispiel:** n-Si/ TiSi / TiN / Al erlaubt niederohmige Kontakte zwischen Aluminium und n-Silizium

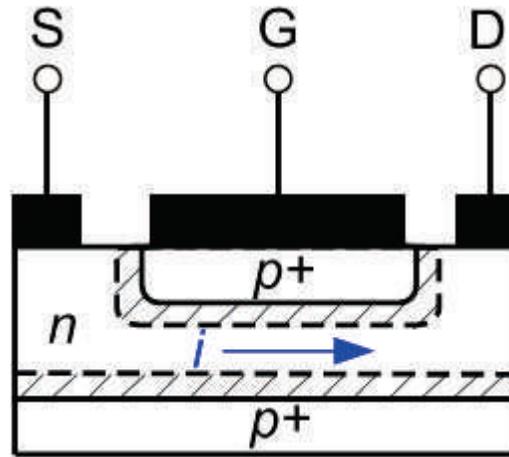
# Kapitel 10: Feldeffekttransistoren

# Klassifizierung von Feldeffekttransistoren (FET)



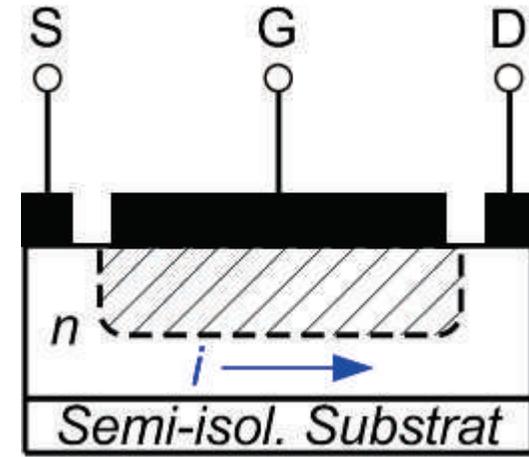
Metal-Insulator-Semiconductor FET (**MISFET**) bzw. Insulated-Gate Field Effect Transistor (**IGFET**) :

- Kontrolle des Stromflusses durch Modulation der Anreicherungs- oder Verarmungsrandschicht einer MIS-Struktur
- Falls SiO<sub>2</sub> als Isolator verwendet wird: **Metal-Oxide Semiconductor FET (MOSFET)**



Junction Field Effect Transistor (**JFET**):

- Kontrolle des Stromflusses durch Modulation der Breite der Raumladungszone eines pn-Überganges („**Junction Gate**“)



Metal-Semiconductor Field Effekt Transistor (**MESFET**) :

- Kontrolle des Stromflusses durch Modulation der Breite der Raumladungszone eines Schottky-Überganges („**Schottky Gate**“)

**Anmerkung:** Der Aufbau der Bauteile ist im Prinzip symmetrisch, d.h. die Kennlinien ändern sich nicht, wenn die Rolle von Source und Drain vertauscht wird. In der Praxis sollte man die Anschlüsse trotzdem nicht vertauschen, da die Kapazitäten zwischen Gate und Drain durch ein entsprechendes Bauteildesign häufig geringer gehalten werden als zwischen Gate und Source.

# Der MIS-Feldeffekttransistor (MOSFET)

Betrachte n-Kanal Feldeffekttransistor:

Drain-Strom:  $I_D = -\sigma_K(y) b v_n$

Annahme:  $U_I(y) > U_{th} \forall y$ , d.h. der Halbleiter unter der Gate-Elektrode ist auf der gesamten Länge invertiert.

$$\Rightarrow \sigma_K(y) = C'_I (U_{th} - U_I(y))$$

$$v_n = \mu_n \frac{dU_K(y)}{dy}$$

$$U_I(y) = U_{GS} - U_K(y)$$

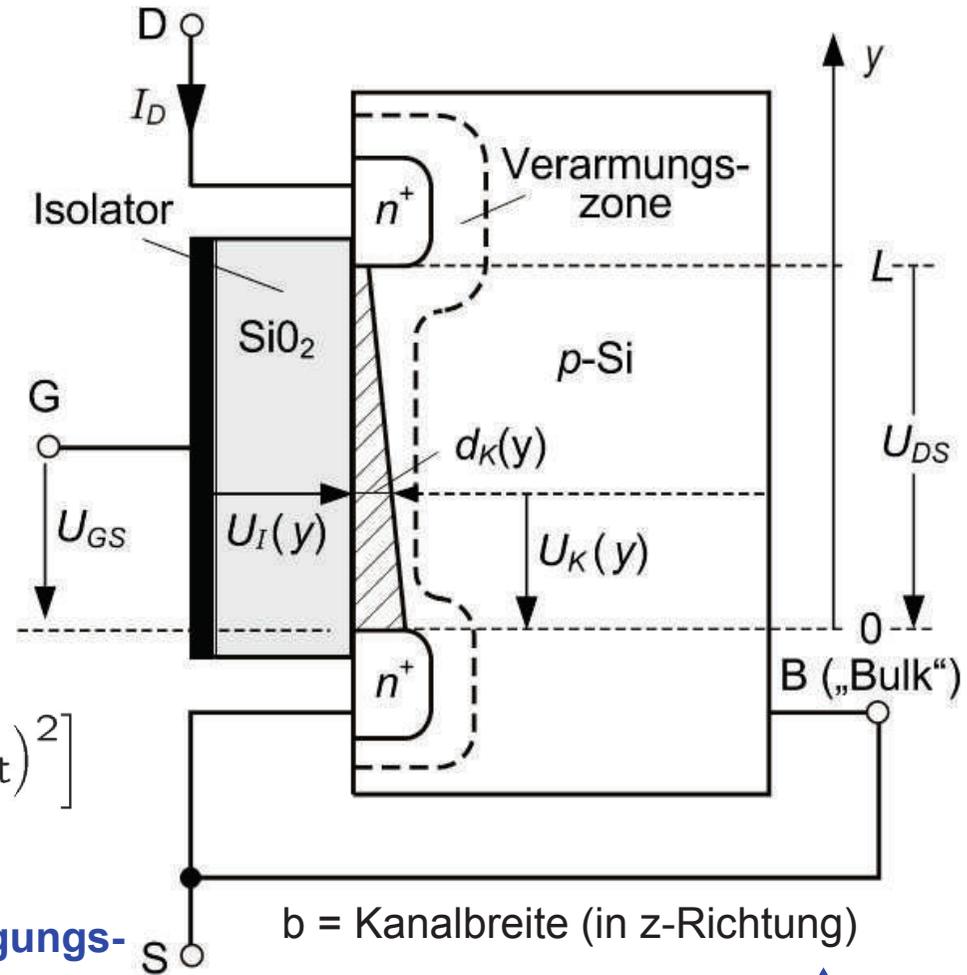
$\Rightarrow$  Drain-Strom im sog. **ohmschen Bereich** ( $U_{DS} < U_{GS} - U_{th}$ ):

$$I_D = \frac{\mu_n b C'_I}{2L} \left[ U_{DS,sat}^2 - (U_{DS} - U_{DS,sat})^2 \right]$$

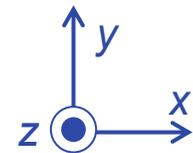
wobei  $U_{DS,sat} = U_{GS} - U_{th}$

Für  $U_{DS} > U_{GS} - U_{th}$  (**Abschnür- bzw. Sättigungsbereich**) bleibt der Drain-Strom konstant:

$$I_D = I_{D,sat} = \frac{\mu_n b C'_I}{2L} U_{DS,sat}^2$$

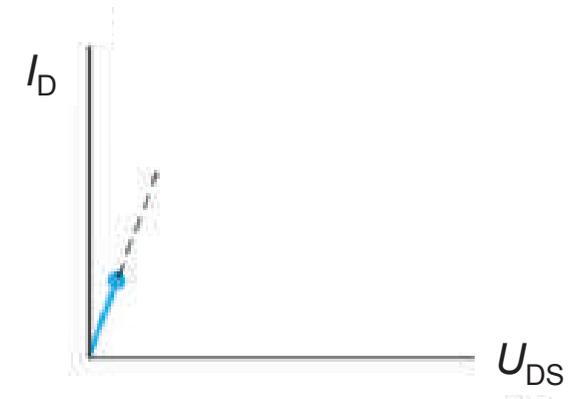
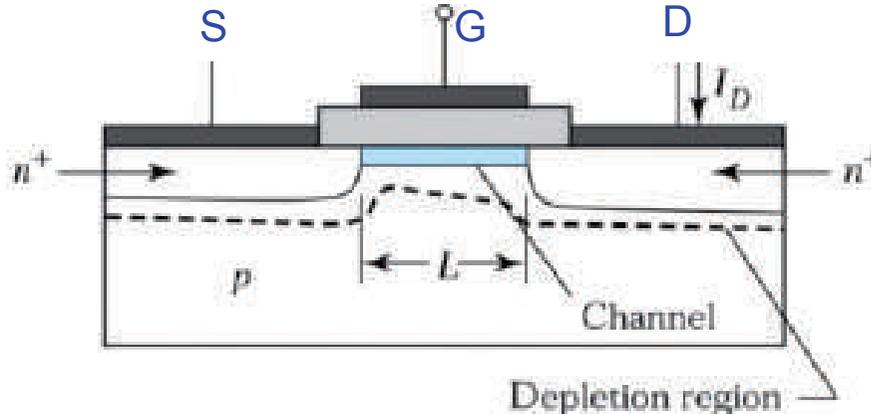


Inversionsrandschicht in der MIS-Struktur...

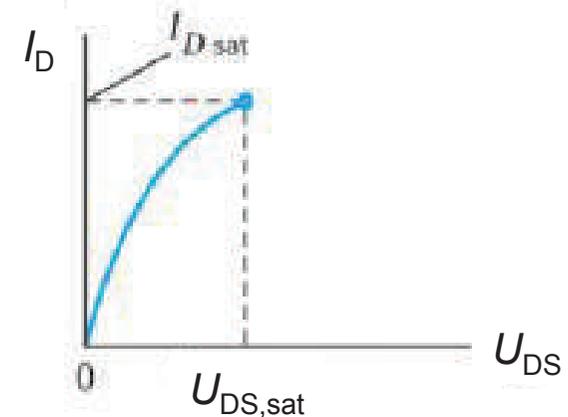
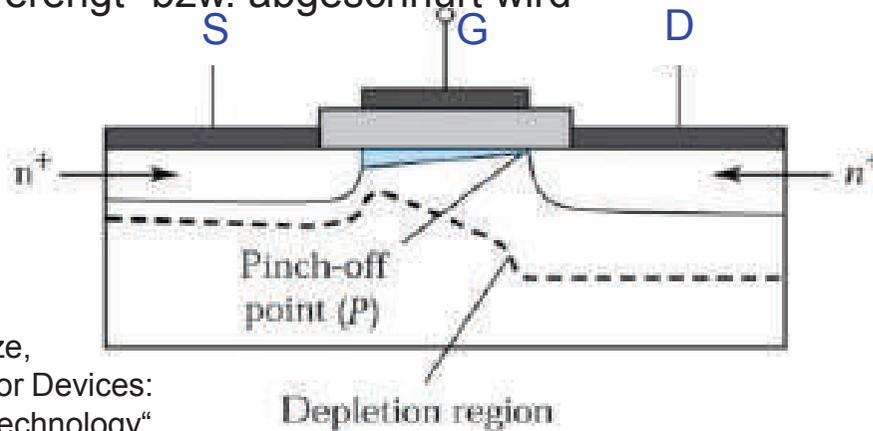


# Betriebsbereiche des $n$ -Kanal MOSFET

Ohmscher Bereich (engl. „Ohmic Region“ bzw. „Linear Region“):  $U_{DS} \ll U_{DS,sat} = U_{GS} - U_{th}$   
 „Offener Inversionskanal“; Zunahme des Drainstromes  $I_D$  mit der Drain-Source-Spannung  $U_{DS}$ ; diese Zunahme erfolgt näherungsweise linear für kleine Werte von  $U_{DS}$



Abschnürung (engl. „Saturation“) für  $U_{DS} \approx U_{DS,sat} = U_{GS} - U_{th}$   
 Zunahme des Drainstromes  $I_D$  verlangsamt sich, da der Inversionskanal am Drain-seitigen Ende „verengt“ bzw. abgeschnürt wird



Bilder nach Sze,  
 „Semiconductor Devices:  
 Physics and Technology“

# Betriebsbereiche des $n$ -Kanal MOSFET

Abschnürbereich bzw. Sättigungsbereich (engl.

„Saturation Region“):  $U_{DS} > U_{DS,sat} = U_{GS} - U_{th}$

- Drainstrom  $I_D$  nimmt bei weiterer Erhöhung von  $U_{DS}$  nicht mehr zu; statt dessen fällt die zusätzliche Spannung über den abgeschnürten Bereich des Kanals ab (hochohmig, da kleine Ladungsträgerdichte!)
- Eine geringfügige Zunahme von  $I_D$  mit  $U_{DS}$  bleibt aufgrund einer Kanallängenmodulation bestehen („Channel-Length Modulation“), ist aber in vielen Fällen vernachlässigbar.

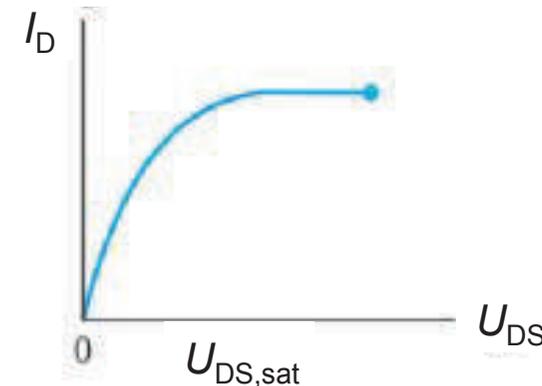
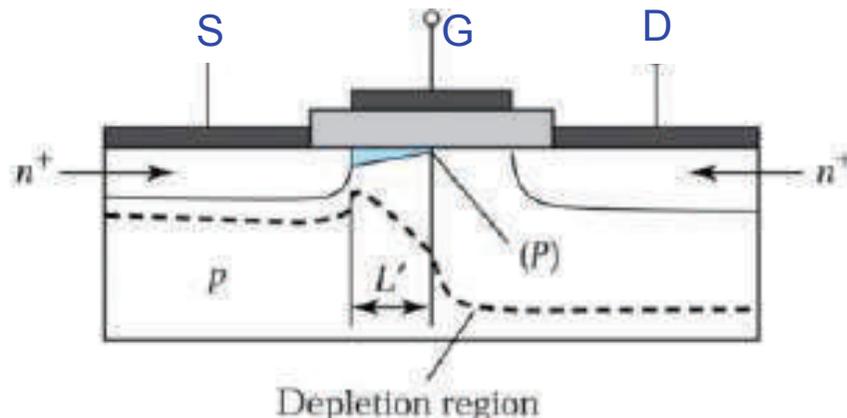
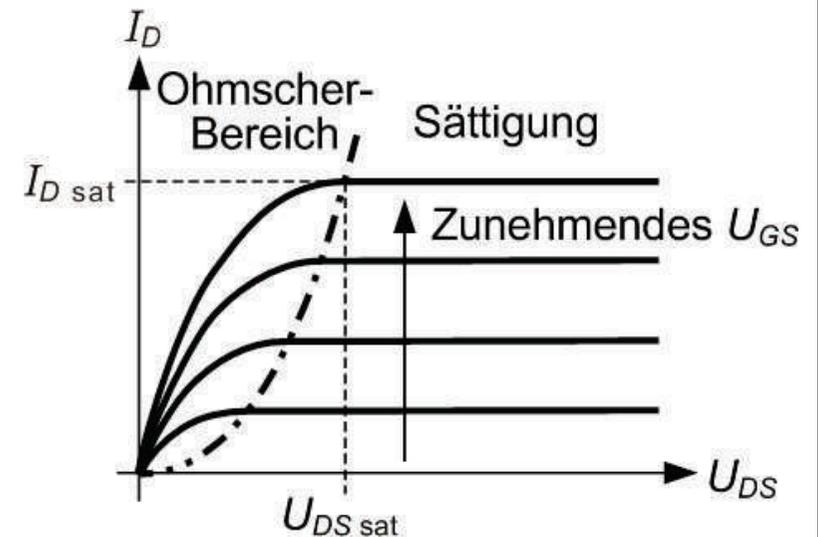


Bild nach Sze, „Semiconductor Devices: Physics and Technology“

# MOSFET: Klassifikation und Kennlinienfelder

$$V_D = U_{DS}; V_G = U_{GS}$$

$$V_T = U_{th}$$

n-Kanal  
Anreicherungstyp  
(selbstsperrend)

n-Kanal  
Verarmungstyp  
(selbstleitend)

p-Kanal  
Anreicherungstyp  
(selbstsperrend)

p-Kanal  
Verarmungstyp  
(selbstleitend)

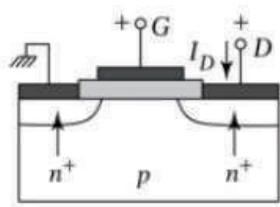
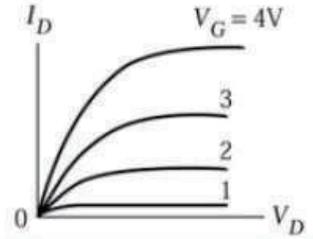
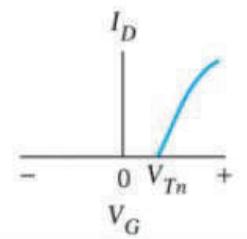
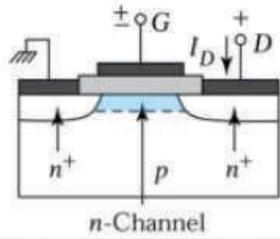
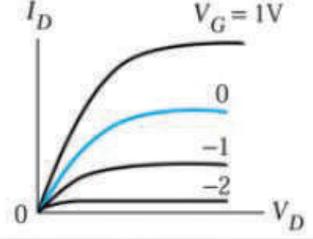
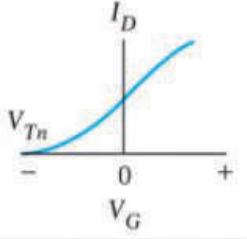
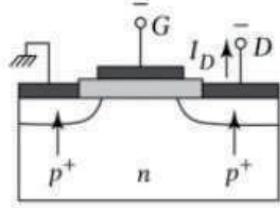
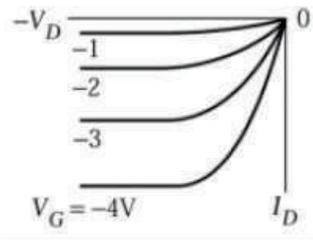
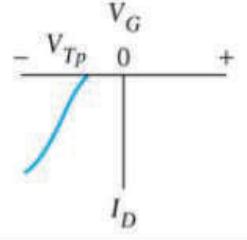
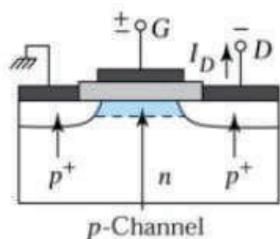
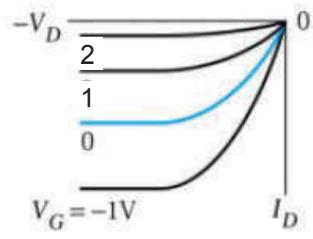
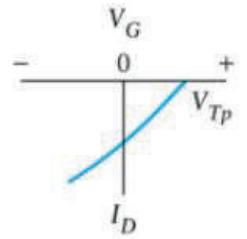
Type	Cross Section	Output Characteristics	Transfer Characteristics
n-Channel Enhancement (Normally Off)			
n-Channel Depletion (Normally On)			
p-Channel Enhancement (Normally Off)			
p-Channel Depletion (Normally On)			

Bild nach Sze, „Semiconductor Devices: Physics and Technology“

# MOSFET: Kleinsignal-Ersatzschaltbild

**Niederfrequenz-Fall:** Das Kleinsignal-ESB ergibt sich aus der Linearisierung der Großsignal-Charakteristik um einen Arbeitspunkt ( $U_{GS}$ ,  $U_{DS}$ ,  $I_D$ )

$$i_D = g_m u_{GS} + g_d u_{DS}$$

wobei  $g_m = \frac{\partial I_D}{\partial U_{GS}} = \begin{cases} \frac{\mu_n b C'_I}{L} U_{DS} & \text{für } U_{DS} < U_{GS} - U_{th} \\ \frac{\mu_n b C'_I}{L} [U_{GS} - U_{th}] & \text{für } U_{DS} > U_{GS} - U_{th} \end{cases}$  Steilheit

$g_d = \frac{\partial I_D}{\partial U_{DS}} = \begin{cases} \frac{\mu_n b C'_I}{L} [U_{GS} - U_{th} - U_{DS}] & \text{für } U_{DS} < U_{GS} - U_{th} \\ 0 & \text{für } U_{DS} > U_{GS} - U_{th} \end{cases}$  Kanal-Leitwert

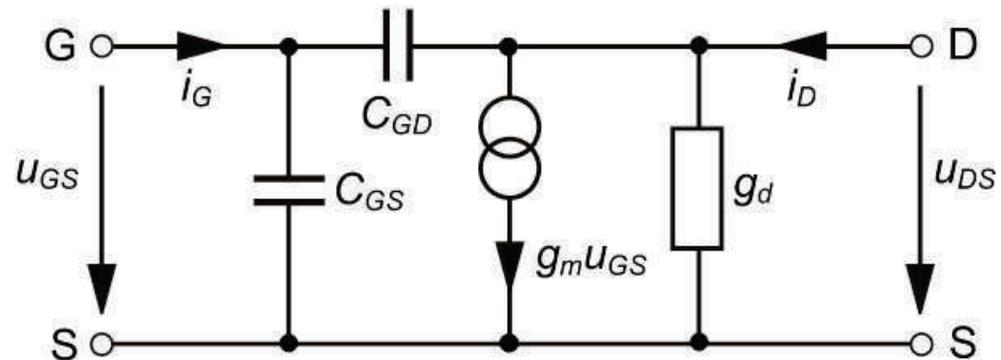
**Hochfrequenz-Fall:** Kapazitive Kopplung zwischen Gate und Source bzw. zwischen Gate und Drain wird durch die Kapazitäten  $C_{GS}$  und  $C_{GD}$  berücksichtigt.

**Grenzfrequenz:** Die Grenzfrequenz (Cut-Off-Frequency) ist erreicht, wenn die Kurzschluss-Stromverstärkung auf 1 abgefallen ist.

Komplexe Kleinsignal-Amplitude  $\frac{\underline{I}_D}{\underline{I}_G} = \left| \frac{g_m - j\omega C_{GD}}{j\omega (C_{GD} + C_{GS})} \right|$

$\approx \frac{g_m}{\omega C_{GS}} = \frac{\mu_n U_{DS}}{\omega L^2}$

$\Rightarrow$  Grenzfrequenz:  $\omega_G = \frac{\mu_n U_{DS}}{L^2}$



**Kleine Schaltspannung am Gate:** Betrachte Spannungshub  $\Delta U_{GS}$  der für eine bestimmte Änderung der Flächenladungsdichte  $\sigma_K$  im Kanal benötigt wird:

$$\Delta\sigma_K = \epsilon_I \Delta E_I = \frac{\epsilon_I}{d_I} \Delta U_{GS}$$

- ⇒
- Dünnes Gate-Dielektrikum (nach unten begrenzt durch Tunnelströme und Gefahr von dielektrischen Durchbrüchen)
  - Hohe Dielektrizitätszahl  $\epsilon_I$  (→ „High-k Dielectrics“)

**Großer Drainstrom / hohe Steilheit  $g_m$ :**

$$I_D = \frac{\mu_n b \epsilon_I}{2L d_I} \left[ U_{DS,sat}^2 - (U_{DS} - U_{DS,sat})^2 \right]$$

- ⇒
- Hohe Beweglichkeit  $\mu_n$  im Kanal (→ „High Electron-Mobility Transistor“, HEMT)
  - Hohe Dielektrizitätszahl  $\epsilon_I$
  - Geringe Kanallänge  $L$
  - Dünnes Gate-Dielektrikum

**Hohe Grenzfrequenz:**

$$\omega_G = \frac{\mu_n U_{DS}}{L^2}$$

- ⇒
- Hohe Beweglichkeit  $\mu_n$  im Kanal
  - Geringe Kanallänge  $L$

# MOSFET-Skalierung

„Constant-Field Scaling“ bzw. „Dennard Scaling“: Reduzierung aller Bauteilabmessungen und aller angelegten Spannungen um einen Skalierungsfaktor  $\kappa$ ; gleichzeitig Erhöhung aller Dotierdichten um denselben Faktor.

⇒ Interne elektrische Felder bleiben unverändert

Device Parameter	Scaling Factor
Device dimensions: $d_{ox}, L, b \dots$	$1/\kappa$
Doping concentration $n_A, n_D$	$\kappa$
Voltage $U$	$1/\kappa$



Device or Circuit Parameter	Scaling Factor
Electric field $E$	1
Carrier velocity $v_n, v_p$	1
Channel resistance $R$	1
Current (drift) $I$	$1/\kappa$
Depletion layer width ( $I_n, I_p, I$ )	$1/\kappa$
Capacitance $eA/d$	$1/\kappa$
Inversion-layer charge density $\sigma_K$	1
Circuit delay time / RC time constant $UC/I$	$1/\kappa$
Power dissipation per circuit $UI$	$1/\kappa^2$
Circuit density	$\kappa^2$
Power density $UI/A$	1

Absehbare Grenze der Skalierbarkeit: Oxid-Dicke  $d$  (Durchschlagfestigkeit, Tunnelströme)

⇒ Verwendung von „High-k Dielectrics“ mit großer Bandlücke:

material	Band gap (eV)	Relative dielectric constant	Conduction band offset (eV)	Leakage current reduction (ref SiO <sub>2</sub> )
SiO <sub>2</sub>	9	3.9	3.15	
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	8.8	9.5-12	2.8	$10^2-10^3$
ZrO <sub>2</sub>	5.7-5.8	12-16	1.4-1.5	$10^4-10^5$
HfO <sub>2</sub>	4.5-6	16-30	1.5	$10^4-10^5$
ZrSiO <sub>4</sub>	~6	10-12	1.5	
HfSiO <sub>4</sub>	~6	~10	1.5	

# Technologiegenerationen und die ITRS-Roadmap

Die Skalierung der CMOS-Technologie bedarf einer Vielzahl aufeinander abgestimmter Innovationen auf verschiedenen Gebieten.

⇒ Firmenübergreifende Koordinierung der Forschungs- und Entwicklungsziele durch die [International Technology Roadmap for Semiconductors \(ITRS\)](http://www.itrs.net) (<http://www.itrs.net>)

Year of first product shipment	1997	1999	2002	2005	2008	2011	2014
Feature size (nm)	250	180	130	100	70	50	35
DRAM size (bit)	256M	1G	—	8G	—	64G	—
Wafer size (mm)	200	300	300	300	300	300	450
Gate oxide (nm)	3–4	1.9–2.5	1.3–1.7	0.9–1.1	<1.0	—	—
Junction depth (nm)	50–100	42–70	25–43	20–33	15–30	—	—

# Sperrschicht-FET (JFET) und Metal-Halbleiter FET (MESFET)

Betrachte Drain-Strom

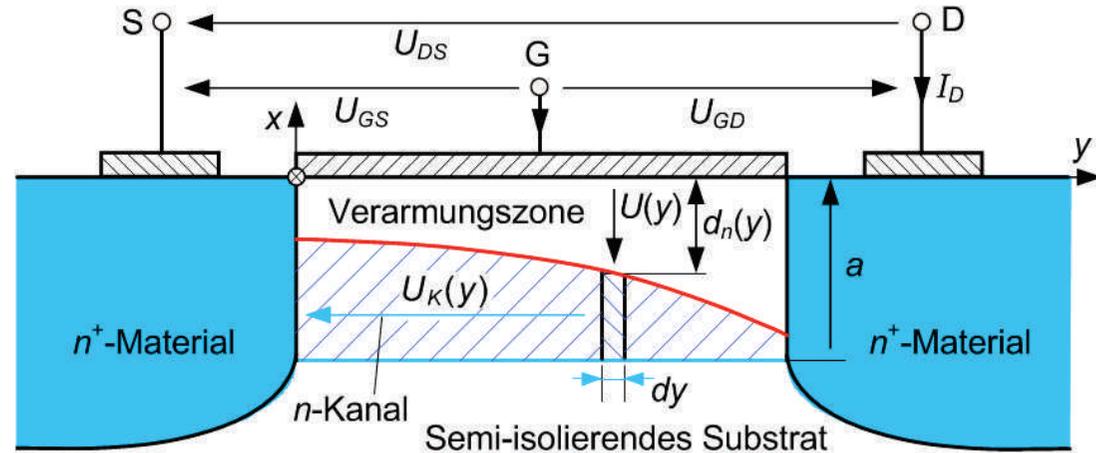
$$I_D = -\sigma_n b (a - d_n(y)) E_y$$

$$= \sigma_n b (a - d_n(y)) \frac{dU_K(y)}{dy}$$

wobei

$$U_K(y) = U_{GS} - U(y)$$

$$d_n(y) = \begin{cases} L_{Dn} \sqrt{\frac{-2[\varphi_H + U(y)]}{U_T}} & \text{für MESFET (Schottky-Übergang)} \\ L_{Dn} \sqrt{\frac{2[U_D - U(y)]}{U_T}} & \text{für JFET (einseitig abrupter p-n-Übergang mit } n_D \ll n_A) \end{cases}$$



für MESFET (Schottky-Übergang)

für JFET (einseitig abrupter p-n-Übergang mit  $n_D \ll n_A$ )

⇒ Die Sperrschichtdicken für JFTE und MESFET lassen sich mit äquivalenten Formeln beschreiben! Die entsprechenden Beziehungen für den MESFET erhält man, indem man  $U_D$  durch  $-\varphi_H$  ersetzt.

„Pinch-Off“: Der Kanal wird am Drain-seitigen Ende abgeschnürt, wenn die über die Sperrschicht abfallende Spannung  $U(L)$  hinreichend negativ wird,  $U(L) = U_P < 0$  (Pinch-Off). Die Abschnürspannung bzw. Pinch-Off-Spannung  $U_P$  ist gegeben durch

$$U_D - U_P = \frac{1}{2} U_T \left( \frac{a}{L_{Dn}} \right)^2$$

# Funktionsweise des JFET bzw. MESFET

Lösen der DGL für  $U_k(y)$  und Entwickeln des Ergebnisses in eine Potenzreihe führt zu:

$$I_D \approx \begin{cases} \frac{\mu_n b C'}{2L} \left[ 2U_{DS} (U_{GS} - U_P) - U_{DS}^2 \right] & \text{für } U_{DS} < U_{GS} - U_P \\ \frac{\mu_n b C'}{2L} \left[ (U_{GS} - U_P)^2 \right] & \text{für } U_{DS} > U_{GS} - U_P \end{cases}$$

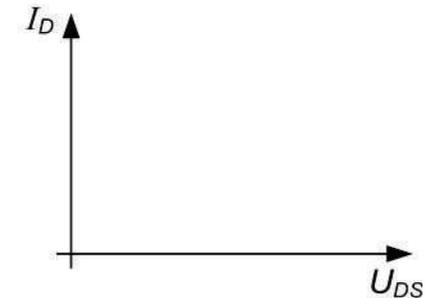
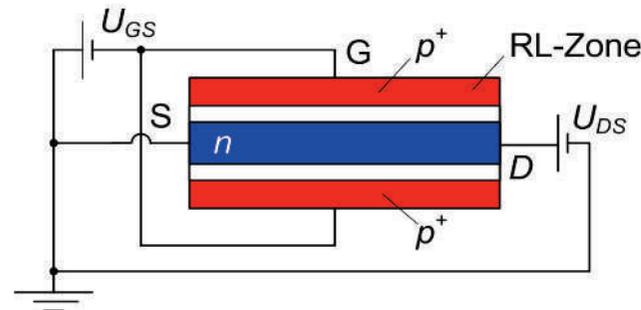
wobei  $C' = \frac{\epsilon H}{a}$

Der JFET bzw. MESFET weist ein zum MISFET äquivalentes Verhalten auf. Man erhält die Formeln für den JFET, wenn in den Beziehungen für den MISFET die Schwellenspannung  $U_{th}$  durch die Pinch-Off-Spannung  $U_p$  und der Kapazitätsbelag  $C_1$  durch den Kapazitätsbelag  $C'$  eines in voller Breite verarmten Kanals ersetzt werden.

## Verhalten des JFET:

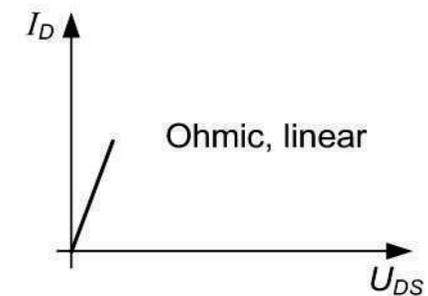
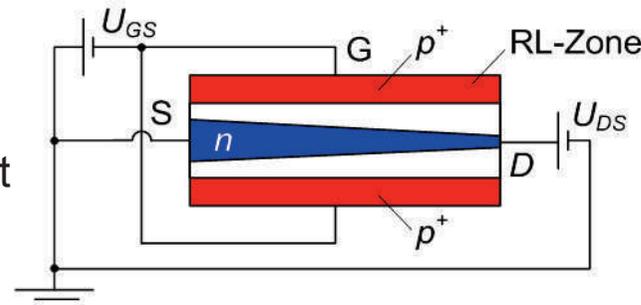
- Keine äußeren Spannungen  
⇒ Kein Stromfluss

(a)  $U_{GS} = 0 \text{ V}, U_{DS} = 0 \text{ V}$



- Mit Drain-Source-Spannung, pn-Übergang auf der Drain-Seite in Sperrrichtung gepolt  
⇒ Verbreiterung der RLZ, macht sich bei kleinen Spannungen aber noch nicht bemerkbar.

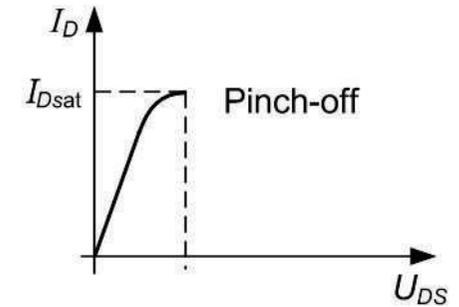
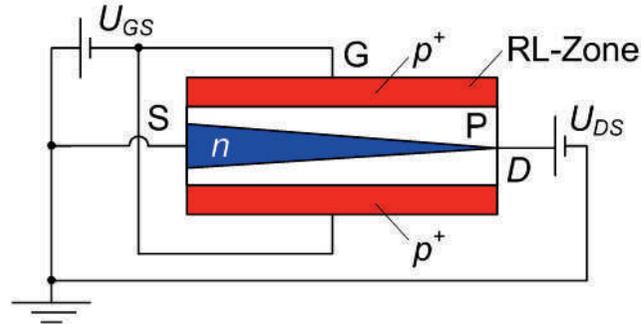
(b)  $U_{GS} = 0 \text{ V}, U_{DS} > 0 \text{ V}$



# Funktionsweise des JFET bzw. MESFET

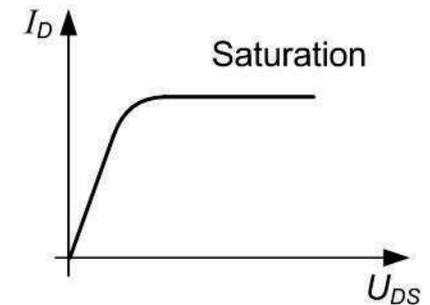
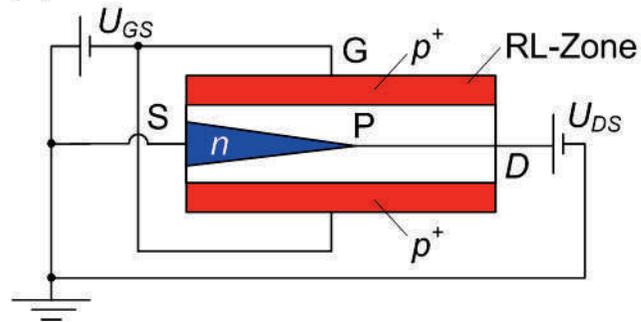
- **Pinch-off ( $U_P$ ):** Drainseitige Sperrspannung schließt leitfähigen Kanal

(c)  $U_{GS} = 0 \text{ V}, U_{DS} = V_{DSat}$



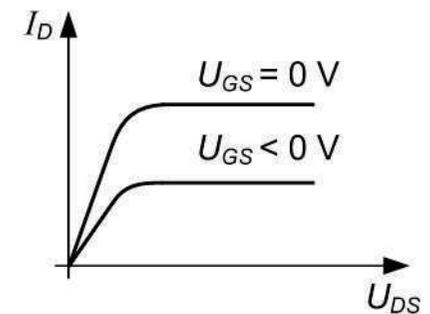
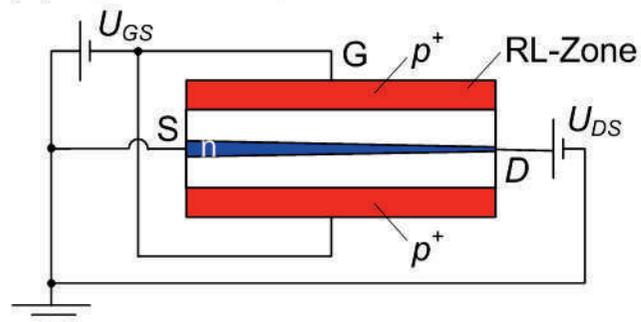
- **Sättigung:** Abschnürpunkt verschiebt sich nach links  
 $\Rightarrow$  Drain-Strom steigt mit wachsender Drain-Source-Spannung nicht mehr weiter an

(d)  $U_{GS} = 0 \text{ V}, U_{DS} > 0 \text{ V}$



- **Negative Gate-Spannung** führt zu Verbreiterung der RLZ und zur Verengung des Kanals  
 $\Rightarrow$  Kleinerer Drain-Strom; Pinch-Off wird früher erreicht

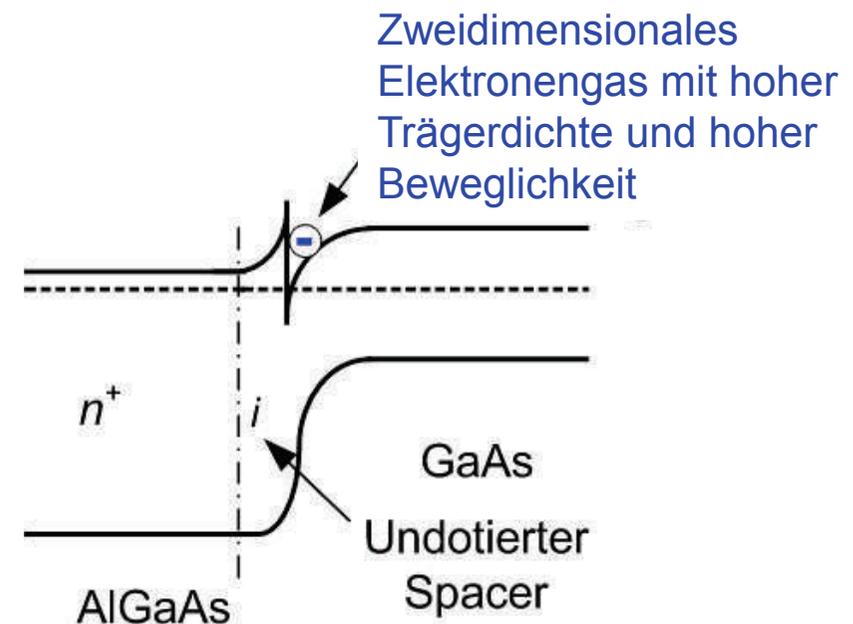
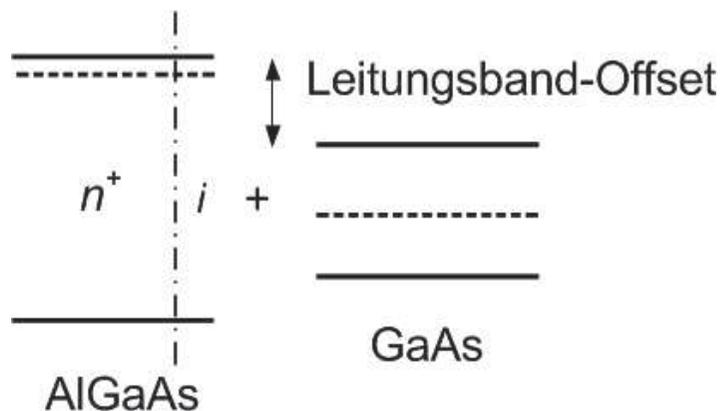
(e)  $U_{GS} < 0 \text{ V}, U_{DS} > 0 \text{ V}$



# Der High-Electron-Mobility-Transistor (HEMT)

## Zielkonflikt beim Design von JFET:

- Hohe Steilheit erfordert hohe Kanalleitfähigkeit und damit starke Dotierung.
  - Starke Dotierung verringert die Beweglichkeit der Träger im Kanal und führt daher zu einer großen Transit-Zeit.
- ⇒ **Lösung:** Kanal ist undotiert; Ladungsträger werden von einem benachbarten Halbleiter mit hoher Dotierung und größerer Bandlücke geliefert
- ⇒ **High-Electron-Mobility-Transistor (HEMT)** (auch: Modulation-Doped Field-Effect Transistor, MODFET)



# HEMT: Bauteilstruktur

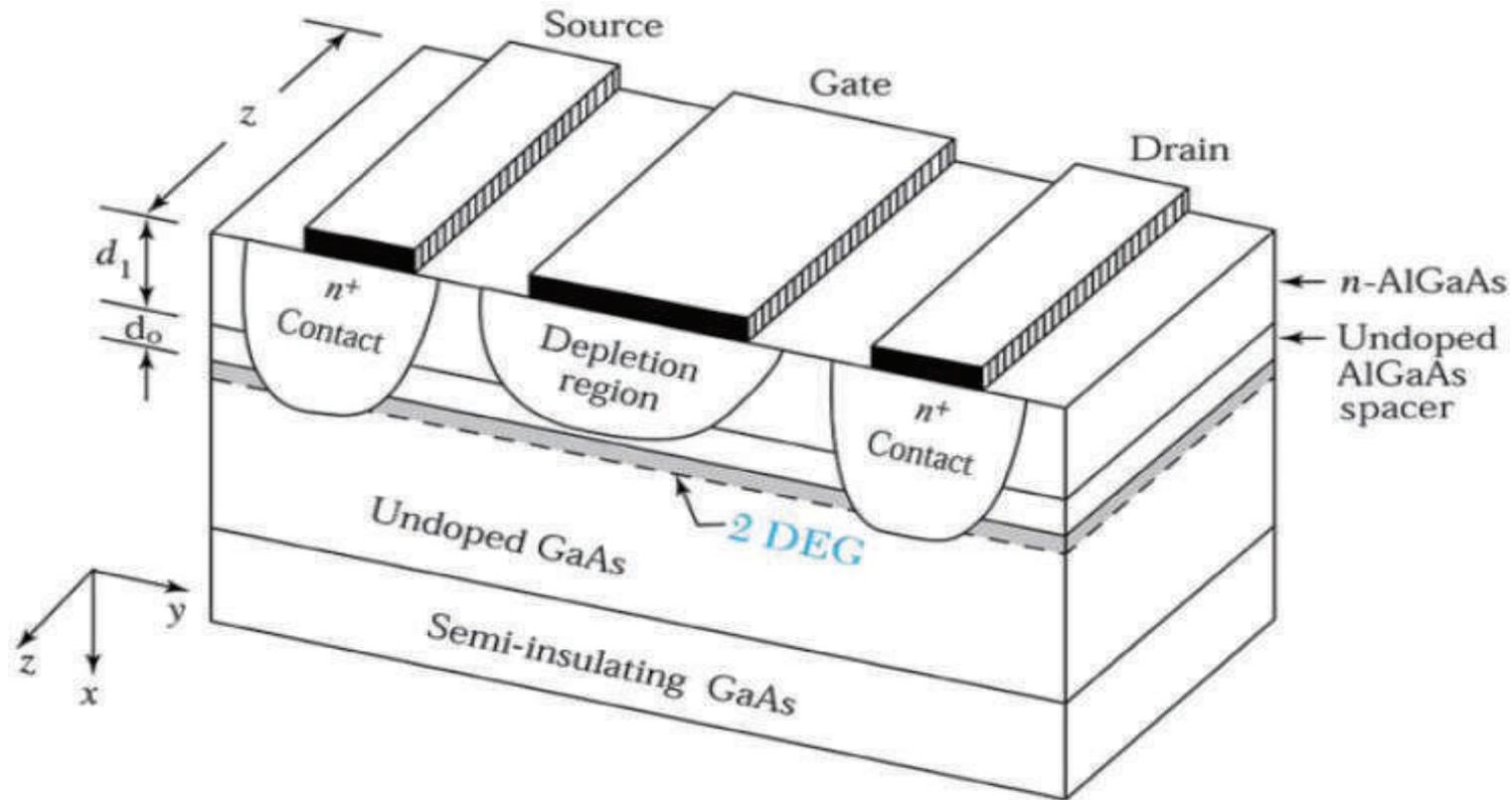
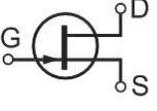
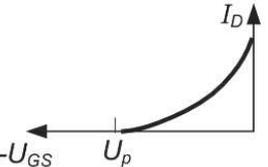
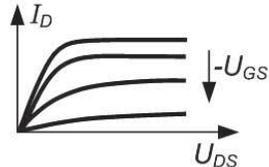
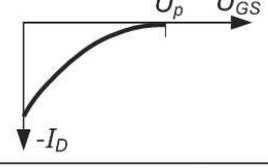
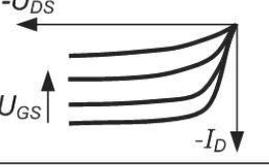
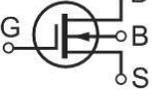
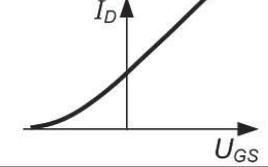
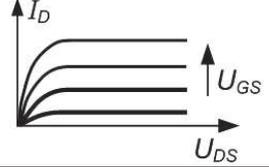
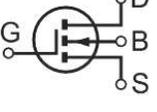
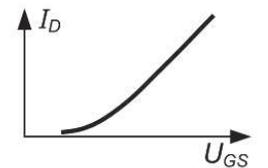
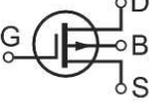
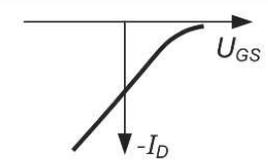
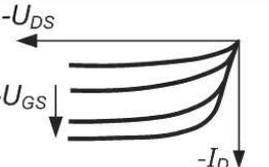
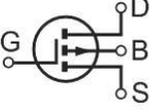
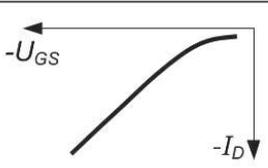
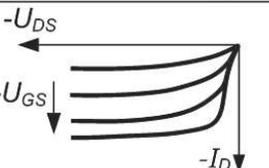


Bild nach Sze, „Semiconductor Devices: Physics and Technology“

# Schaltungssymbole und Kennlinienfelder von FET

Typ	Symbol	Übertragungscharakteristik	Ausgangscharakteristik
<i>n</i> -Kanal Sperrschicht FET selbstleitend			
<i>p</i> -Kanal Sperrschicht FET selbstleitend			
<i>n</i> -Kanal MOS FET selbstleitend			
<i>n</i> -Kanal MOS FET selbstsperrend			
<i>p</i> -Kanal MOS FET selbstleitend			
<i>p</i> -Kanal MOS FET selbstsperrend			

## Schaltungssymbole:

### JFET / MESFET:

- Gate wird durch einen einzigen dicken Strich dargestellt
- Pfeil zeigt in Durchlassrichtung des Gate-Überganges

### MISFET/MOSFET:

- Gate wird durch zwei Striche dargestellt
- Drain-Source-Linie durchgezogen für selbstleitende Bauteile bzw. unterbrochen für selbstsperrende Bauteile
- Beim *n*-Kanal-Bauteil zeigt der Pfeil zum Gate, sonst vom Gate weg („Bewegungsrichtung der Elektronen beim Schaltvorgang“)

- Kombination von p-Kanal- und n-Kanal-Feldeffekttransistoren
  - Komplementäre Ausführung jeder Logikoperation – einmal in p-Kanal und einmal in n-Kanal-Technik; dabei sperrt immer ein Transistor, während der andere leitet.
- ⇒ Stromfluss nur im Moment des Umschaltens (im Gegensatz zur Realisierung mit Arbeitswiderständen!)
- ⇒ **Sehr geringer Leistungsverbrauch**

CMOS ist heute die meistgenutzte Logik-Familie!

## Beispiel: CMOS-Inverter

