

Halbleiterbauelemente

Christian Koos

Institute of Photonics and Quantum Electronics



Vorlesung 1

19.10.2015

- Siehe Informationsblatt, verfügbar unter http://www.ipq.kit.edu/lectures_HLB.php
- Übung:
Erster Termin: Freitag, 30. Oktober 2015, 14:00 Uhr
Gruppeneinteilung:

Gruppe 1 (Nachnamen A – G)
AOC 101 (30.45) Betreuer: T. Harter
tobias.harter@kit.edu

Gruppe 2 (Nachnamen H – O)
AOC 201 (30.45) Betreuer: S. Wolf
s.wolf@kit.edu

Gruppe 3 (Nachnamen P – Z)
NTI (30.10) Betreuer: S. Mühlbrandt
sascha.muehlbrandt@kit.edu

- Die Lösungen zu den Übungsblättern werden dreimal pro Semester unangekündigt eingesammelt. Wer mehr als 66% der Aufgaben sinnvoll bearbeitet hat, bekommt **jeweils zwei Punkte** in der schriftlichen Prüfung gutgeschrieben.
- Bei den drei eingesammelten Übungsblättern werden insgesamt **maximal vier Punkte** gutgeschrieben. Diese Punkte müssen in einem Semester erworben werden, eine Addition der Punkte aus zwei Semestern ist nicht möglich.
- Die gesammelten Punkte **verfallen** nach 1 Jahr.
Beispiel: Wurden die Übungsblätter im WS 15/16 abgegeben, können die daraus resultierenden Punkte letztmalig zur Klausur im Frühjahr 2017 angerechnet werden.
- **Pro Person** muss **eine Lösung** ausgearbeitet und abgegeben werden; Gruppenarbeiten werden nicht anerkannt. Die gemeinsame Lösung in Lerngruppen ist selbstverständlich erwünscht!
- „**Sinnvoll bearbeitet**“ heißt:
 1. Aufgabenblatt ist klar beschriftet mit Name und Matrikelnummer und Aufgaben-Nr.
 2. Jede Lösung beginnt mit einer klaren Auflistung dessen, was gegeben ist (geg.: ...), und enthält eine mathematische Umsetzung dessen, was gesucht ist (ges.: ...)
 3. Es folgt eine Lösung, die aus einem mathematischen Ansatz und einer Lösung bzw. einem sinnvollen Lösungsversuch besteht. Es wird dabei nicht bewertet, ob das Ergebnis korrekt ist.

Skript:

- Wird im Laufe des Semesters überarbeitet und in der jeweils aktuellen Fassung auf die Webseite gestellt
- Altes Skript aus dem Jahr 2012 ist ebenfalls auf der Webseite verfügbar

Folien:

- Foliensatz vom vergangenen Jahr auf der Webseite verfügbar
- Aktualisierter Foliensatz wird nach der Vorlesung auf der Webseite zum Download angeboten

Übungsaufgaben:

- Werden in der Vorlesung / Übung verteilt und zusätzlich auf der Webseite zum Download angeboten

Halbleiter-Bauelemente:

- Sze, S. M. und Ng, Kwok K.: „Physics of Semiconductor Devices“, Third Edition, John Wiley, 2006.
- Sze, S. M. und Lee, M. K.: „Semiconductor Devices, Physics and Technology“, Third Edition, John Wiley, 2012.
- Streetman, B.G. und Banerjee, S.K.: „Solid State Electronic Devices“, 6th ed., Pearson Prentice Hall, 2006.
- Pierret, R.F.: „Semiconductor Device Fundamentals“. Addison Wesley, 1996.
- Reisch, M.: „Halbleiter-Bauelemente“. Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 2005.
- Thuselt, F.: „Physik der Halbleiterbauelemente“: Springer-Verlag, 2. Auflage, 2011.
- Müller, R.: „Grundlagen der Halbleiter-Elektronik“, Springer-Verlag, 7. Auflage, 1995.

Festkörperphysikalische Grundlagen:

- Ashcroft, N. W.; Mermin, N. D.: „Solid State Physics“, Saunders College, 1976.
- Kittel, Ch.: „Einführung in die Festkörperphysik“, 7. Auflage, Oldenburg Verlag, 1988.
- Ibach, H. und Lüth, H.: „Festkörperphysik“, Springer, 2002 .

Festkörperphysikalische Grundlagen

(vgl. auch Vorlesung „Festkörperlektronik“):

- Grundlegende Eigenschaften von Halbleitern
- Bandstruktur der Festkörper
- Eigenhalbleiter und dotierte Halbleiter

Ladungsträgertransport und Grundgleichungen

- Ladungsträgertransport im Halbleiter
- Die Grundgleichungen des Halbleiters

pn-Übergänge und Dioden

- Bandstruktur und ideale Kennlinie
- Reale Diodenkennlinien
- Spezielle Dioden und deren Anwendungen

Bipolar-Transistoren

- Aufbau und Wirkungsweise
- Modelle und Kennliniefelder
- Spezielle Bipolar-Transistoren

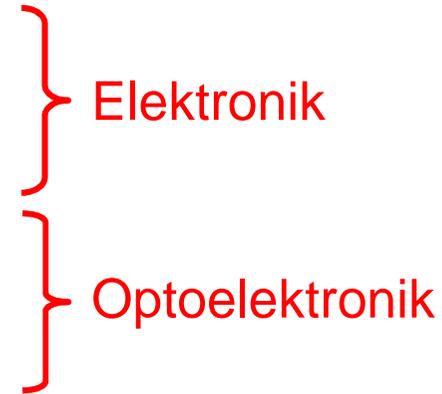
Halbleiter-Grenzschichten und Feldeffekt-Transistoren

- Physik der Metall-Isolator-Halbleiter-Struktur
- Der MOSFET
- Spezielle Feldeffekt-Transistoren

Halbleiter – Historie und Bedeutung

Halbleiterbauelemente werden in allen Anwendungsfeldern der Elektrotechnik eingesetzt:

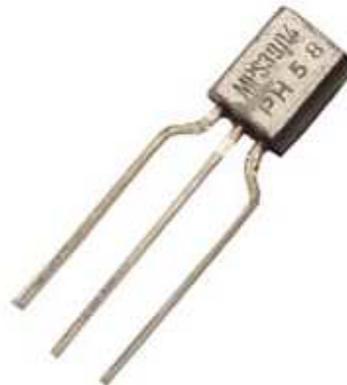
- Prozessoren und Speicher
- Leistungselektronik
- Mobilfunkelektronik
- Leuchtdioden, Laser, Photodioden und andere optische Bauteile
- CCD und CMOS Kameras



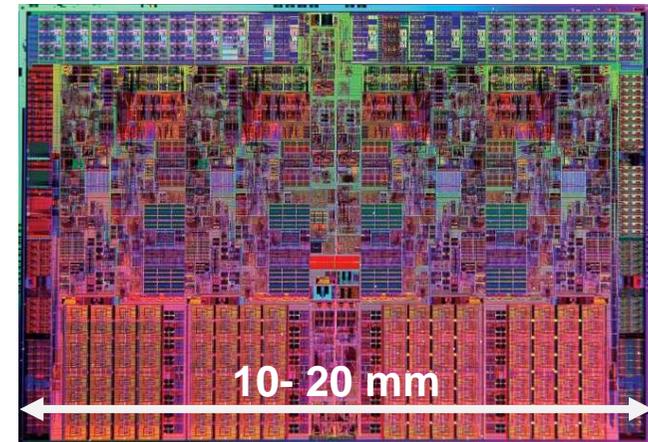
Sie werden als diskrete Bauelemente oder in integrierten Schaltungen verwendet:



Laserdiode



Transistor

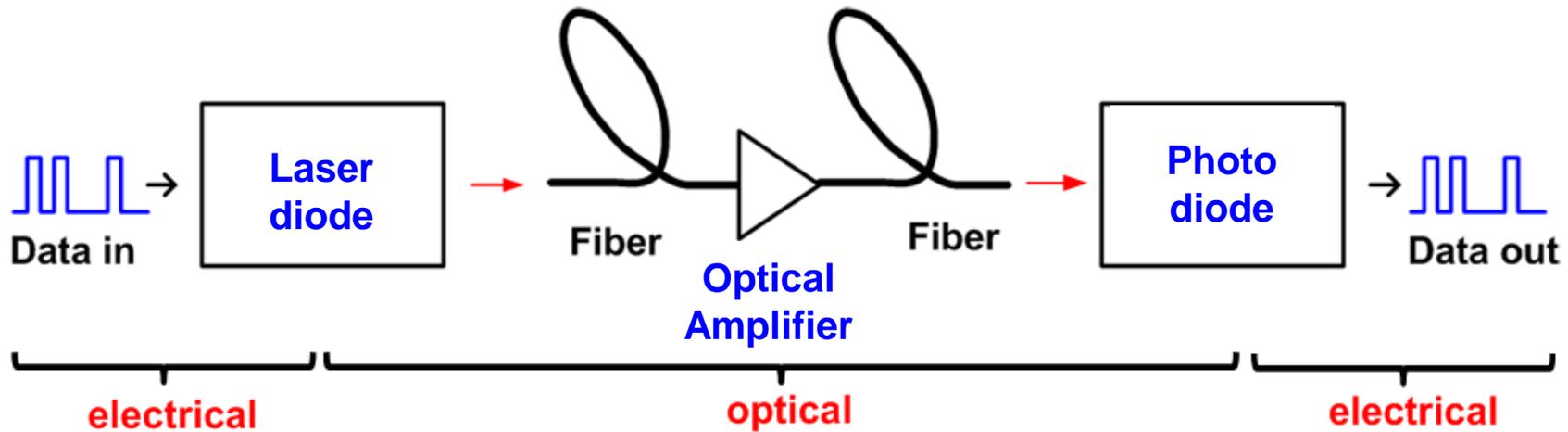


> 10^9 Transistoren (Intel Core i7-3820QM)

<http://www.pcmag.com>

Halbleiterbauelemente – Anwendungsbeispiele in der Optoelektronik

Optische Kommunikationstechnik



Photovoltaik

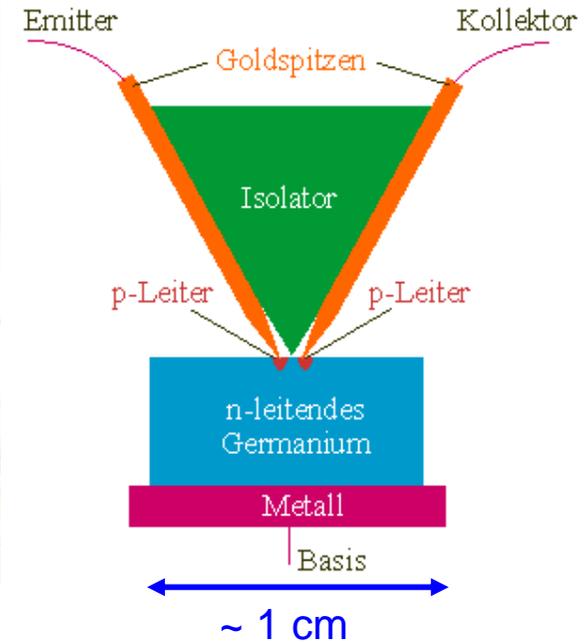
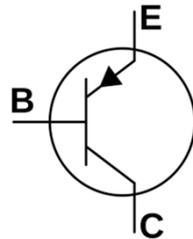


Lichttechnik

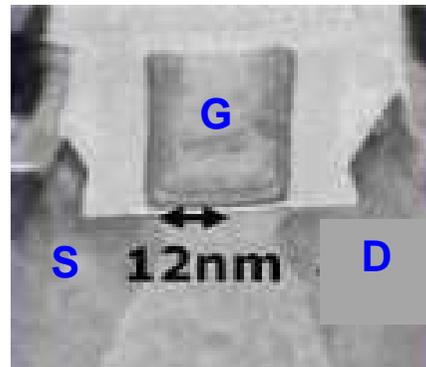
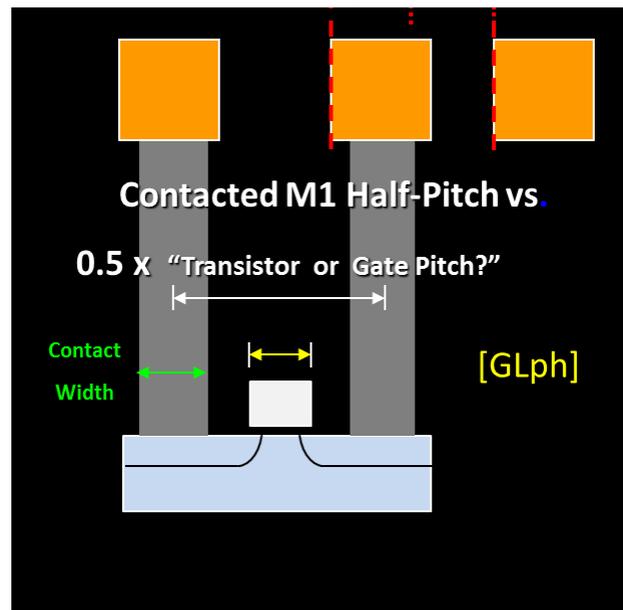


Der Transistor – Historie und Bedeutung

1947/48: Erster Demonstrator eines Bipolar-Transistors durch **Shockley, Bardeen und Brattain** (Nobelpreis 1956)



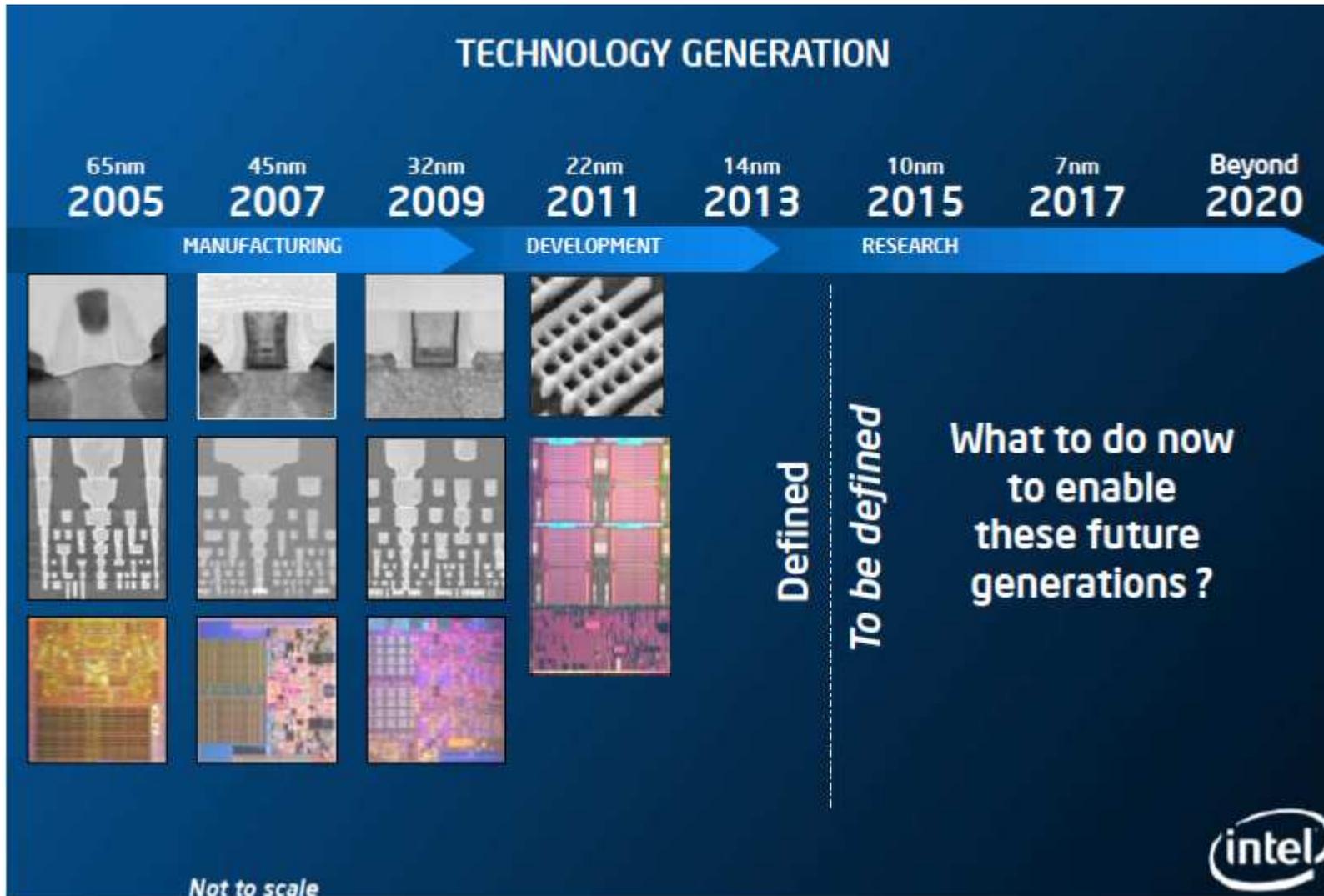
“Metal-contact half-pitch”



Heute: Feldeffekt-Transistoren mit Gate-Längen von ca. 20 nm

Definition von sog. **Technologieknoten** (Technology Nodes) über Abstand der Gate-Kontakte („Metal contact half pitch“) oder über halbe Gate-Weite („Gate half-pitch“).

„Technology Nodes“ in der Halbleiterindustrie

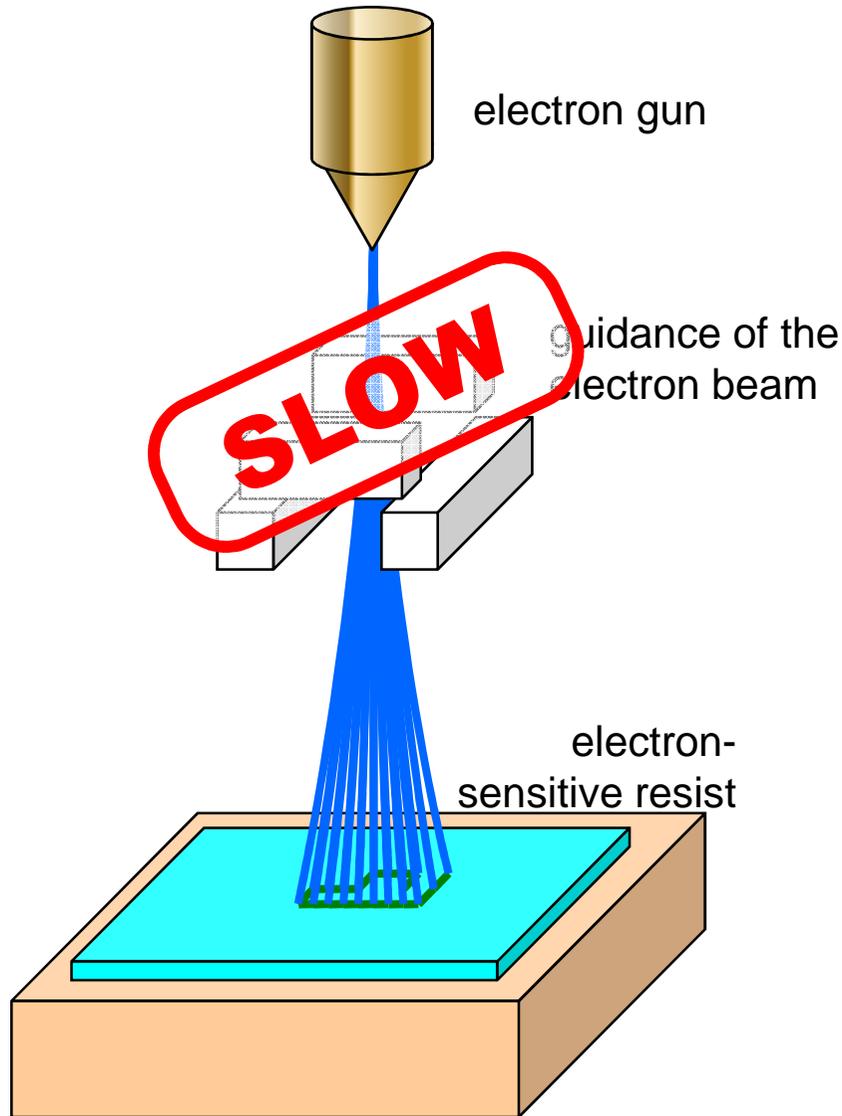


Quelle: Intel 2011

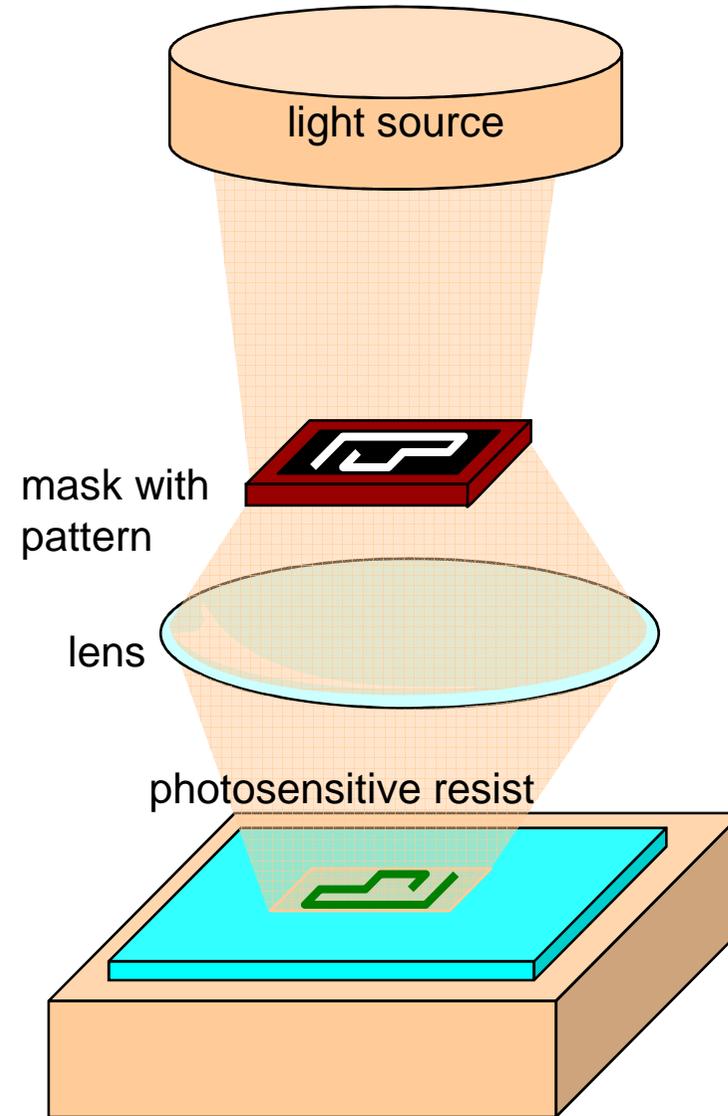
Siehe auch: [International Technology Roadmap for Semiconductors \(ITRS\)](#)

Hochauflösende Lithographie mit hohem Durchsatz

Electron-beam lithography



Optical lithography



Das derzeitige „Arbeitspferd“ der Halbleiterindustrie: Immersionslithographie bei einer Wellenlänge von 193 nm



$$\text{res} = k_1 \frac{\lambda}{\text{NA}}$$

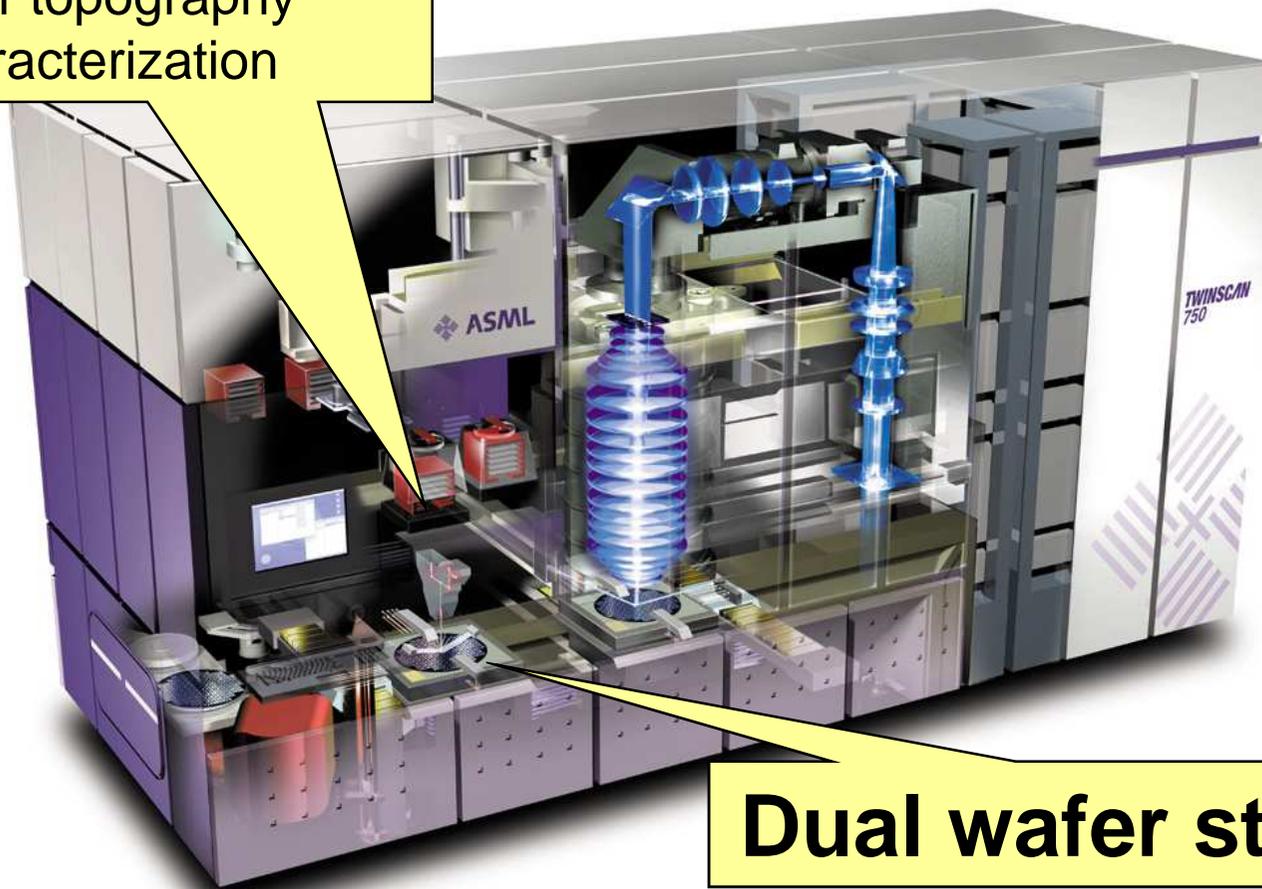
$\lambda = 193 \text{ nm}$, $\text{NA} = 1.35$

Further improvement by reduction of technology parameter k_1
(e.g., by double patterning)

⇒ Resolution: 32 nm

ASML Wafer Stepper TWINSCAN™: Deep-UV (DUV) Lithography at 193 nm

Separate metrology
wafer topography
characterization

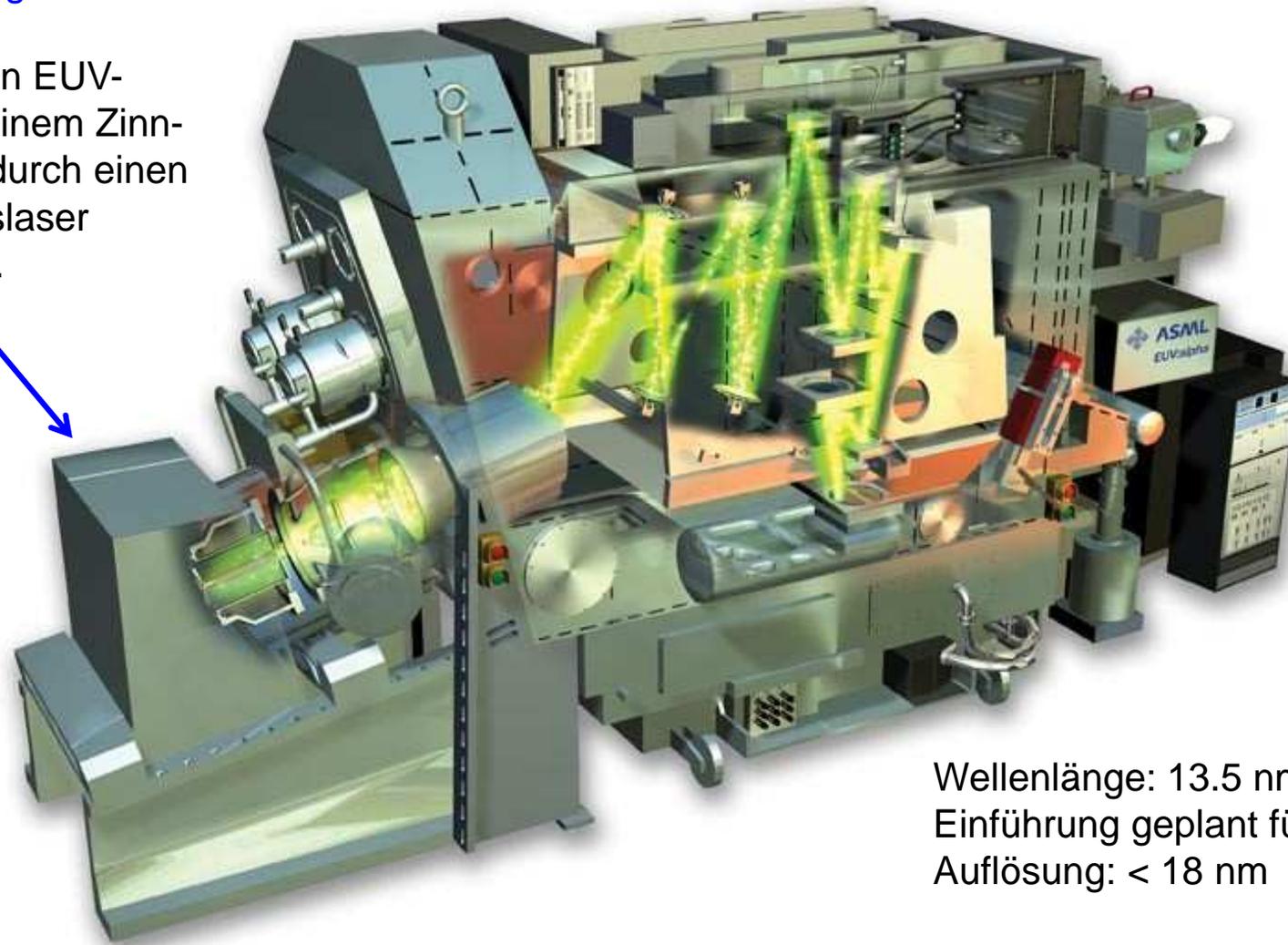
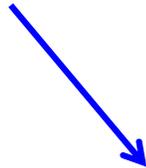


Dual wafer stage

Die Zukunft: Lithographie im extremen UV (EUV)

Hauptschwierigkeit: Die Lichtquelle

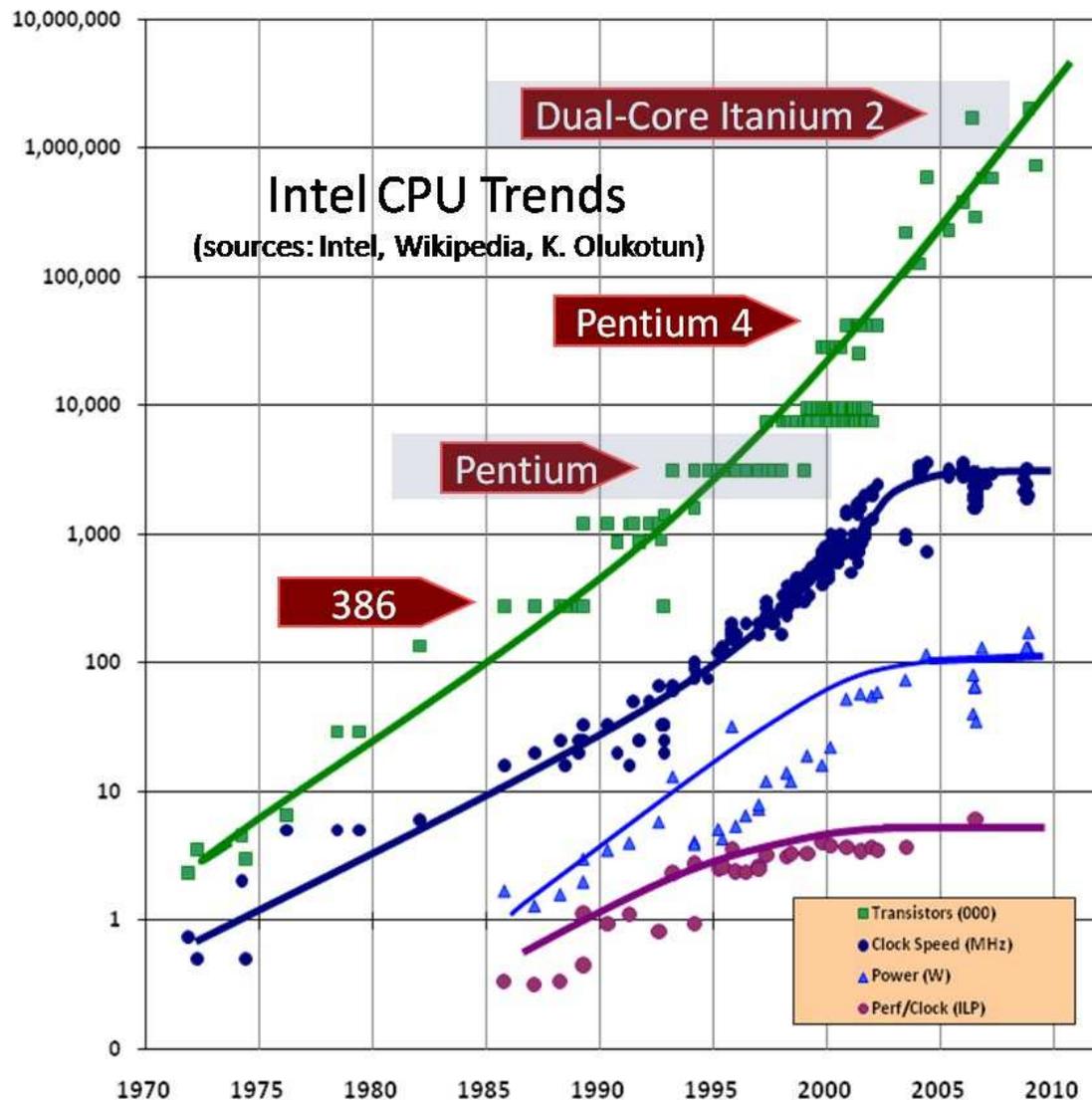
Erzeugung von EUV-Strahlung in einem Zinn-Plasma, das durch einen Hochleistungslaser gepumpt wird.



Wellenlänge: 13.5 nm
Einführung geplant für 2015
Auflösung: < 18 nm

<http://www.hardware-infos.com>

Die Zukunft des Moore'schen „Gesetzes“ ...



“Moore’s law will be dead within a decade”

(Robert Colwell, ehemals Chefarchitekt der Intel P6-Familie, August 2013)

- **Physikalische Grenzen** werden bei 5 – 7 nm vermutet (~ 2020)
- Schon heute kann die **Geschwindigkeit** der Transistoren nicht weiter erhöht werden
- Die **Zahl der Transistoren** pro Chip ist durch die Verlustleistung begrenzt

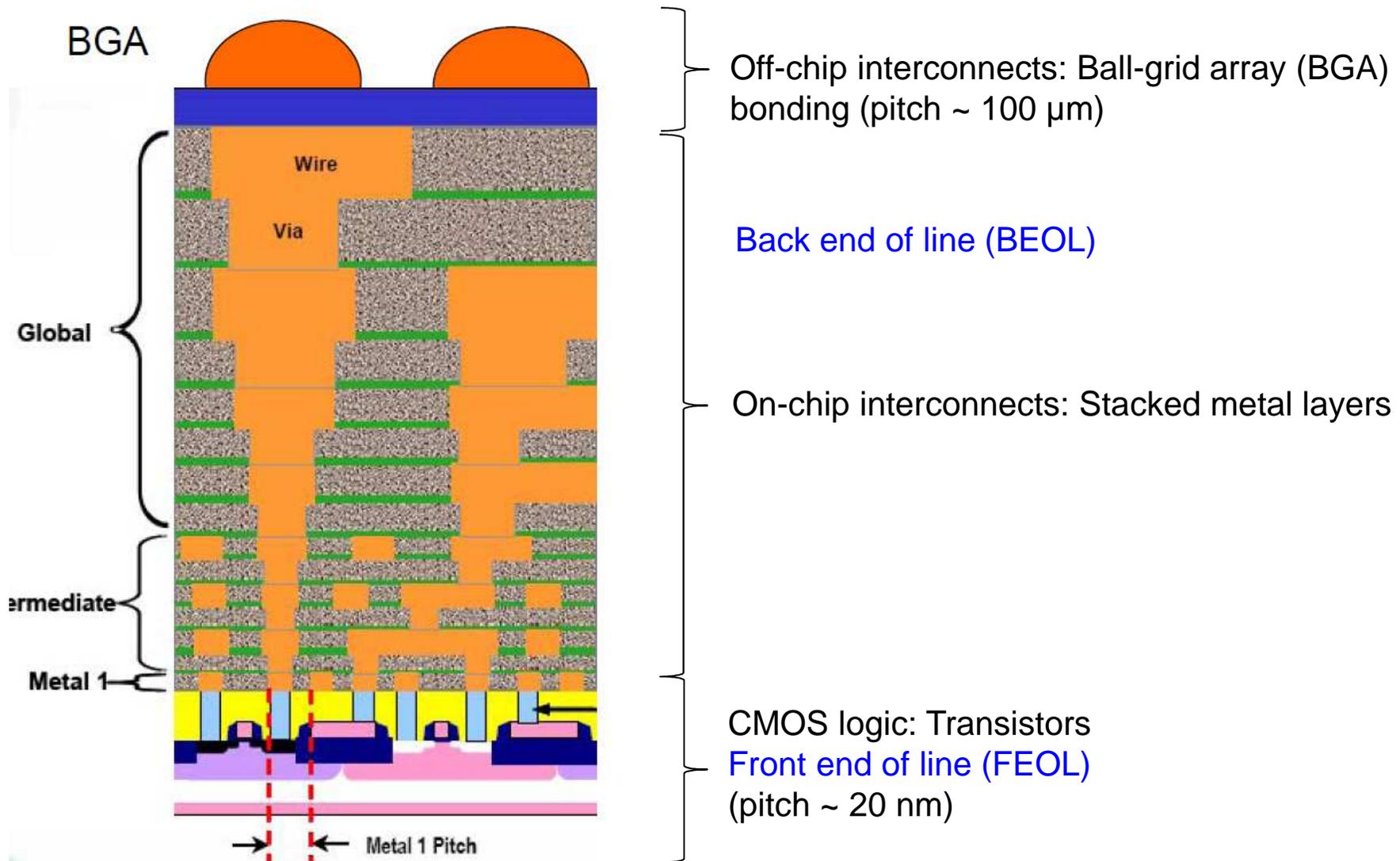
Derzeit: Steigerung der Leistungsfähigkeit von Prozessoren durch **Parallelisierung** („Multi-Core“)

⇒ Engpässe bei der Kommunikation zwischen den Prozessorkernen

⇒ **Optische Interconnects** (laufende Forschungsarbeiten am IPQ)

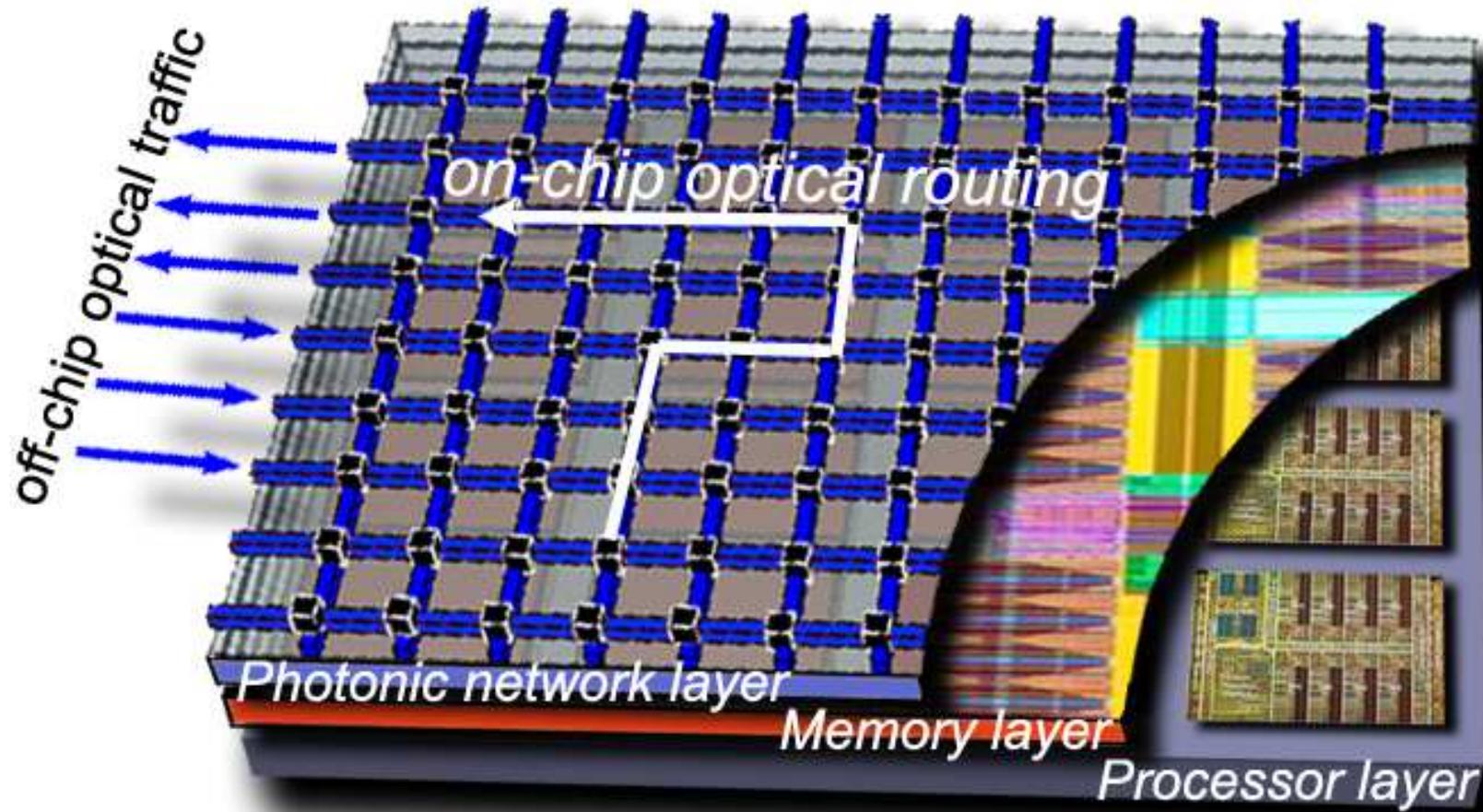
<http://www.extremetech.com>

Der Flaschenhals: Verbindung der Transistoren



http://domino.research.ibm.com/comm/research_projects.nsf/pages/photronics.index.html

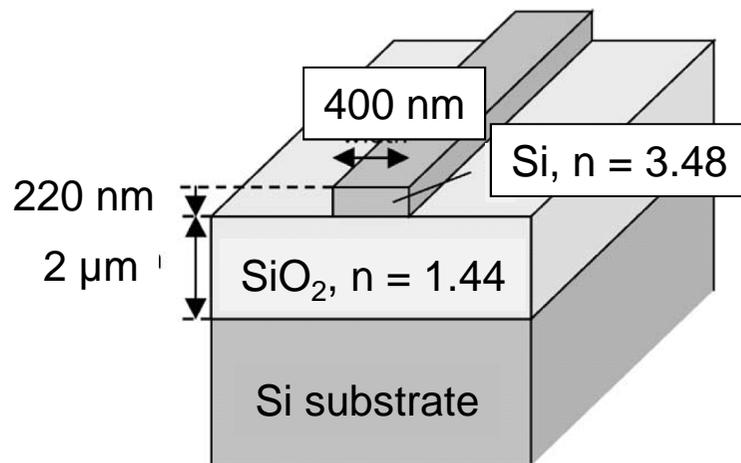
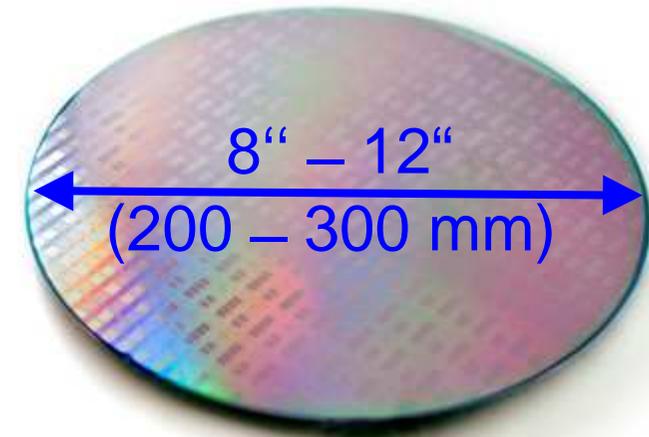
Die Vision: Optische On-Chip Interconnects



http://domino.research.ibm.com/comm/research_projects.nsf/pages/photonics.index.html

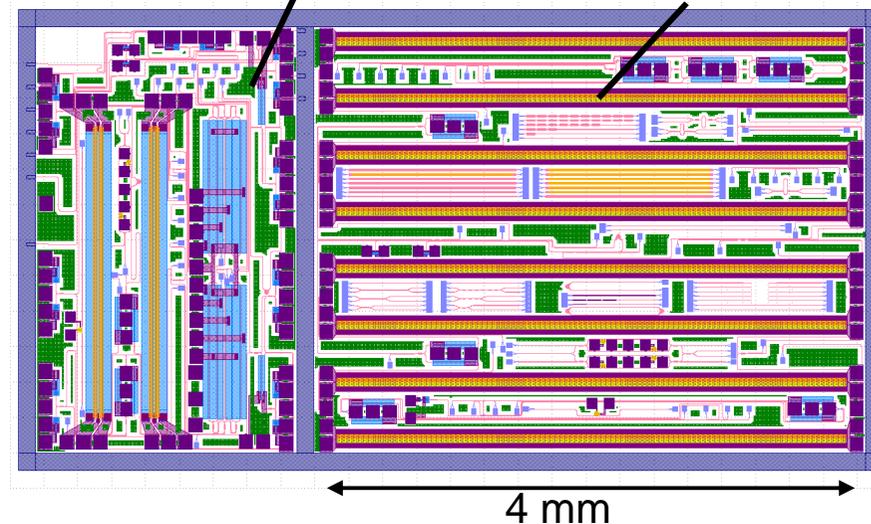
Strengths:

- High-index-contrast silicon-on-insulator (SOI) waveguides
 - ⇒ High integration density
- Mature CMOS technology
 - ⇒ Large-scale photonic-electronic integration with high yield
- Ecosystem of foundry services, e.g., ePIXfab (<http://www.epixfab.eu/>) or IME (www.a-star.edu.sg)
 - ⇒ Share investment and development costs by multi-project-wafer (MPW) runs and process design kits (PDK)



Germanium photodiodes
(up to 40 Gbit/s)

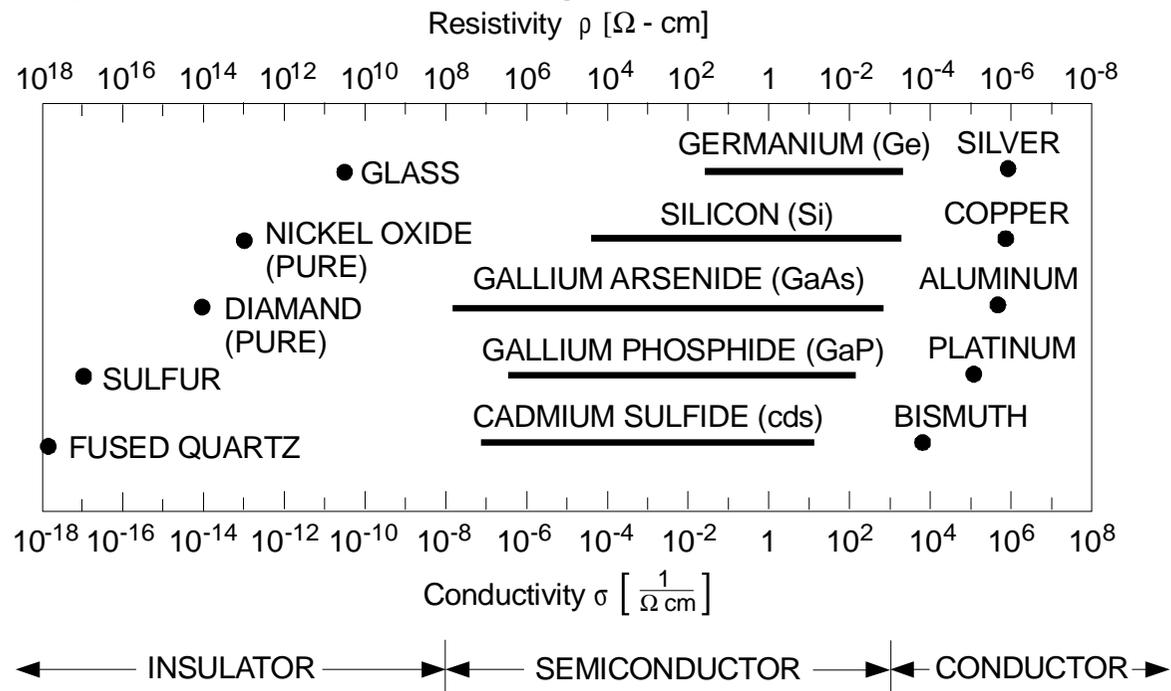
Mach-Zehnder modulators
(25 Gbit/s)



Grundlegende Eigenschaften von Halbleitern

Halbleiter : Definition und Eigenschaften

Halbleiter (engl. "Semiconductor"): Elemente bzw. Verbindungen, deren Leitfähigkeit bei Zimmertemperatur und bei höchster Reinheit zwischen jener der Metalle und jener von Isolatoren liegt.



Eigenschaften von Halbleitern:

- Leitfähigkeit ändert sich über mehrere Dekaden in Abhängigkeit von der Temperatur und der Reinheit
- Leitfähigkeit steigt mit Temperatur stark an (vgl. Metall: Leitfähigkeit sinkt mit steigender Temperatur)

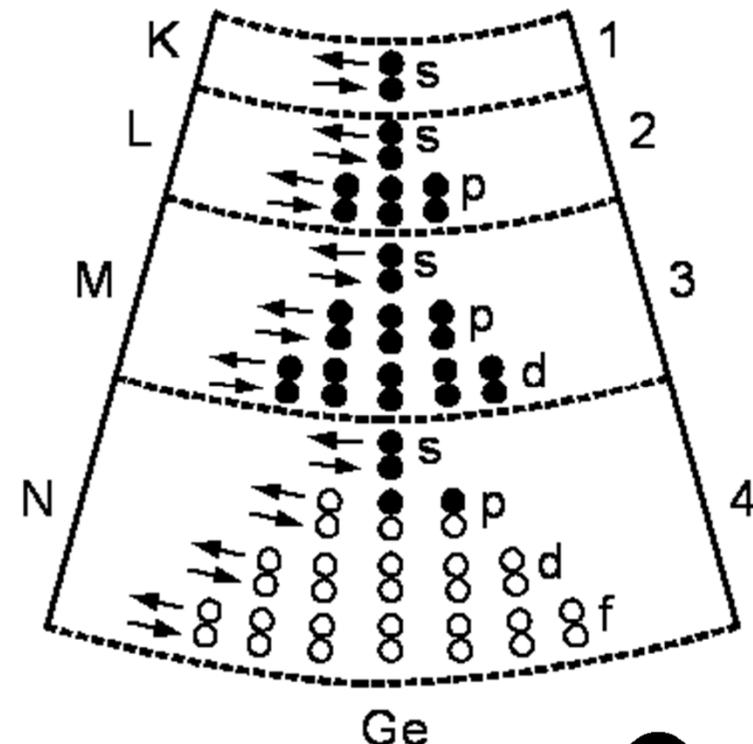
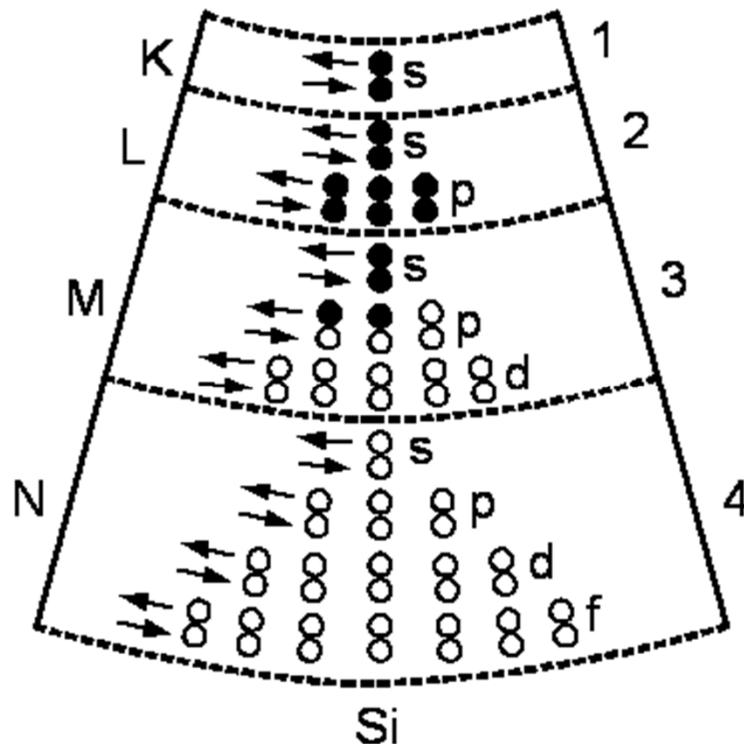
Elementhalbleiter im Periodensystem der Elemente

Das Periodensystem der Elemente

Perioden	Hauptgruppen																																													
	I II III IV V VI VII VIII																																													
	1																	2																												
	1	H																	He																											
	2	Li	Be															B	C	N	O	F	Ne																							
	3	Na	Mg	Nebengruppen										Al	Si	P	S	Cl	Ar																											
	4	K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr																											
5	Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe																												
6	Cs	Ba	La	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn																												
7	Fr	Ra	Ac	Ku	Ha	Wasserstoff Alkalimetalle Erdalkalimetalle Metalle Halbmethalle Nichtmetalle Edelgase <u>radioaktiv</u> Halbleiter																																								
Lanthanoide			<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>58</td><td>59</td><td>60</td><td>61</td><td>62</td><td>63</td><td>64</td><td>65</td><td>66</td><td>67</td><td>68</td><td>69</td><td>70</td><td>71</td> </tr> <tr> <td>Ce</td><td>Pr</td><td>Nd</td><td>Pm</td><td>Sm</td><td>Eu</td><td>Gd</td><td>Tb</td><td>Dy</td><td>Ho</td><td>Er</td><td>Tm</td><td>Yb</td><td>Lu</td> </tr> </table>																58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu
58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71																																	
Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu																																	
Actinoide			<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>90</td><td>91</td><td>92</td><td>93</td><td>94</td><td>95</td><td>96</td><td>97</td><td>98</td><td>99</td><td>100</td><td>101</td><td>102</td><td>103</td> </tr> <tr> <td>Th</td><td>Pa</td><td>U</td><td>Np</td><td>Pu</td><td>Am</td><td>Cm</td><td>Bk</td><td>Cf</td><td>Es</td><td>Fm</td><td>Md</td><td>No</td><td>Lr</td> </tr> </table>																90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103																																	
Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr																																	

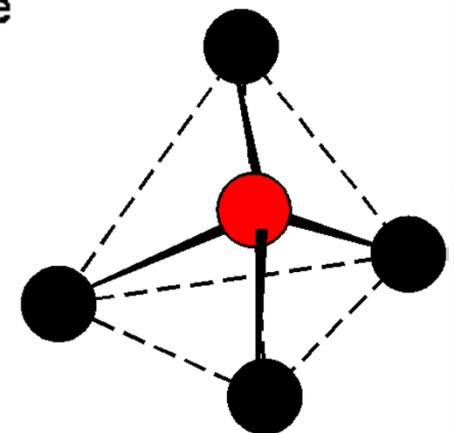
- **Elementhalbleiter** bilden eine Untergruppe der Halbmethalle, die zwischen Metallen und Nichtmetallen stehen
- Die wichtigsten Hableiter **Silizium (Si)** und **Germanium (Ge)** stehen in der **vierten Hauptgruppe**

Elektronenkonfiguration und Bindungen bei den Elementhalbleitern Silizium und Germanium



Kovalente Bindungen: Vollständig aufgefüllte Elektronenschalen stellen einen günstigeren Energiezustand dar („Edelgas-Zustand“); dies kann durch „gemeinsame Nutzung“ von Elektronen erreicht werden.

Hier: Bildung von vier **unterscheidbaren $3sp^3$ -Hybridorbitalen**; diese richten sich tetraedrisch im Raum aus (Bindungswinkel ca. 109.5°)
 ⇒ **Diamantgitter!**



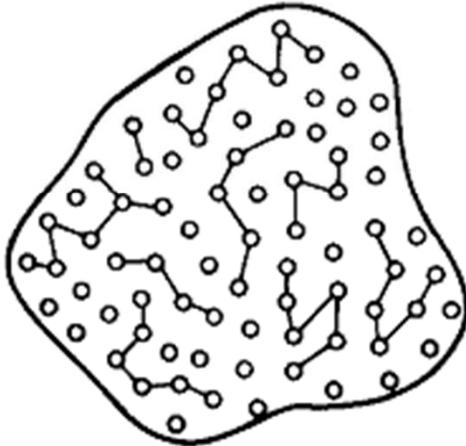
General Classification	Semiconductor	
	Symbol	Name
Element	Si	Silicon
	Ge	Germanium
Binary compound		
IV-IV -----	SiC	Silicon carbide
III-V -----	AlP	Aluminum phosphide
	AlAs	Aluminum arsenide
	AlSb	Aluminum antimonide
	GaN	Gallium nitride
	GaP	Gallium phosphide
	GaAs	Gallium arsenide
	GaSb	Gallium antimonide
	InP	Indium phosphide
	InAs	Indium arsenide
	InSb	Indium antimonide
II-VI -----	ZnO	Zinc oxide
	ZnS	Zinc sulfide
	ZnSe	Zinc selenide
	ZnTe	Zinc telluride
	CdS	Cadmium sulfide
	CdSe	Cadmium selenide
	CdTe	Cadmium telluride
	HgS	Mercury sulfide
IV-VI -----	PbS	Lead sulfide
	PbSe	Lead selenide
	PbTe	Lead telluride
Ternary compound	$Al_xGa_{1-x}As$	Aluminum gallium arsenide
	$Al_xIn_{1-x}As$	Aluminum indium arsenide
	$GaAs_{1-x}P_x$	Gallium arsenic phosphide
	$Ga_xIn_{1-x}N$	Gallium indium nitride
	$Ga_xIn_{1-x}As$	Gallium indium arsenide
	$Ga_xIn_{1-x}P$	Gallium indium phosphide
Quaternary compound	$Al_xGa_{1-x}As_ySb_{1-y}$	Aluminum gallium arsenic antimonide
	$Ga_xIn_{1-x}As_yP_y$	Gallium indium arsenic phosphide

Verbindungshalbleiter:

- **IV-IV-Halbleiter:** Verbindungen von Elementen der IV. Hauptgruppe,
- **III-V-Halbleiter:** Verbindungen von Elementen der III. und der V. Hauptgruppe
- **II-VI-Halbleiter:** Verbindungen von Elementen der II. und VI. Hauptgruppe.
- **IV-VI-Halbleiter:** Verbindungen von Elementen der IV. und VI. Hauptgruppe
- **Binäre Halbleiter** bestehen aus zwei Elementen, z.B. GaAs
- **Ternäre Halbleiter** bestehen aus drei Elementen, z.B. $Al_{1-x}Ga_xAs$ oder $Al_{1-x}In_xAs$
- **Quaternäre Halbleiter** bestehen aus vier Elementen, z.B. $In_{1-x}Ga_xAs_{1-y}P_y$

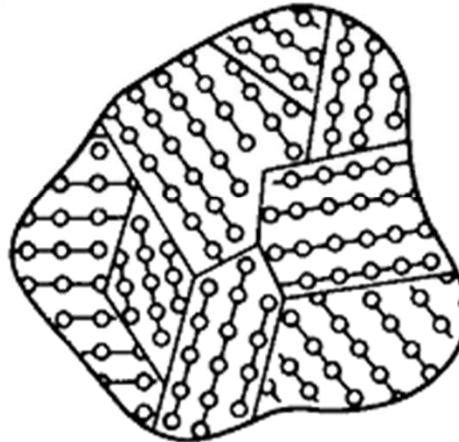
Quelle: Sze/Klee, Semiconductor Devices – Physics and Technology

(a)



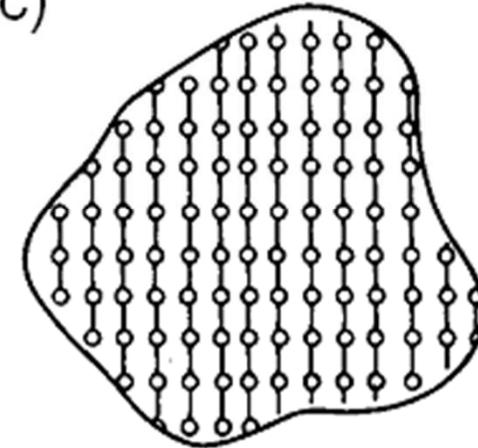
Amorpher Festkörper: Atome oder Molekülen bilden keine geordneten Strukturen, sondern ein unregelmäßiges Muster (lediglich Nahordnung, keine Fernordnung)

(b)



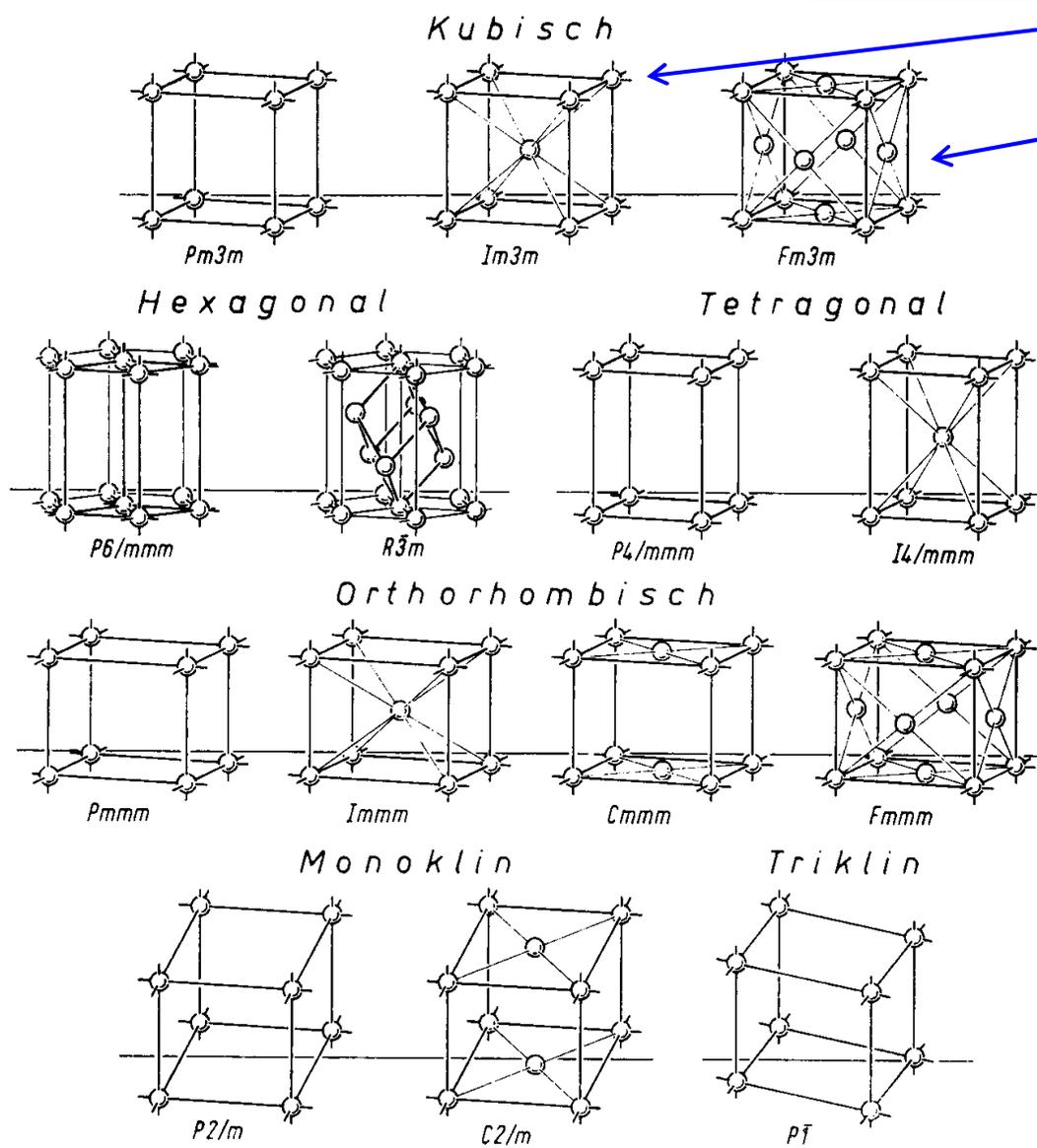
Polykristalliner Festkörper: Besteht aus kleinen Einzelkristallen (Kristalliten) besteht, die durch Korngrenzen voneinander getrennt werden (Fernordnung begrenzter „Reichweite“, bestimmt durch die Größe der Kristallite).

(c)



Kristalliner Festkörper: Bausteine (Atome, Ionen oder Moleküle) sind regelmäßig in einer Kristallstruktur angeordnet (Nah- und Fernordnung).

Bravais-Gitter und Kristallgitter



Kubisch-raumzentriert
(body-centered cubic, bcc)

Kubisch-flächenzentriert
(face-centered cubic, fcc)

Bravais-Gitter (Translationsgitter):

- Gitterpunkte lassen sich durch eine Linearkombinationen von drei **Gittervektoren** beschreiben („In einem Bravaisgitter sieht man immer die gleiche Umgebung, wenn man sich auf einen Gitterpunkt stellt und in eine bestimmte Richtung schaut.“)
- In drei Dimensionen gibt es **14 Bravais-Gitter**
- **Kristallgitter** sind nicht notwendigerweise Bravaisgitter, lassen sich aber immer durch Translation einer **Einheitszelle** auf einem Bravais-Gitter beschreiben

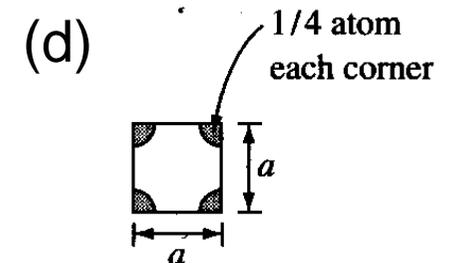
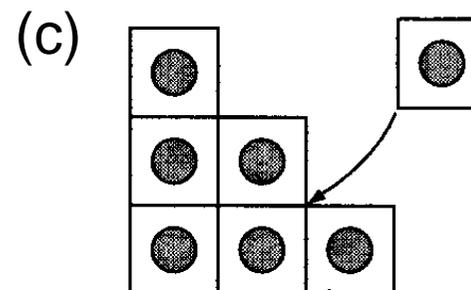
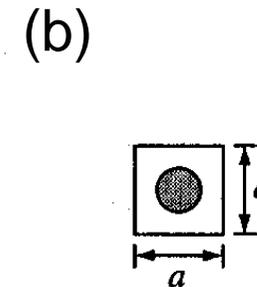
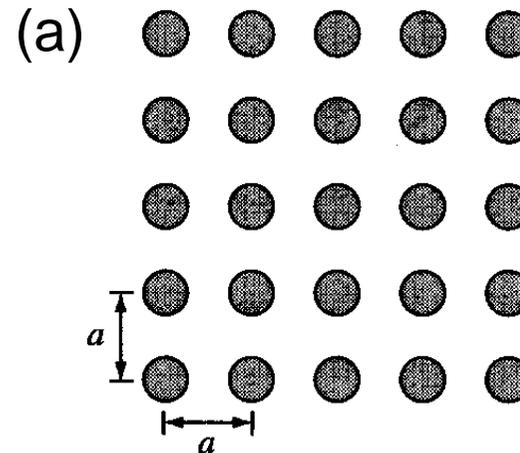
Quelle: <http://positron.physik.uni-halle.de>

Beschreibung von Kristallgittern durch Einheitszellen

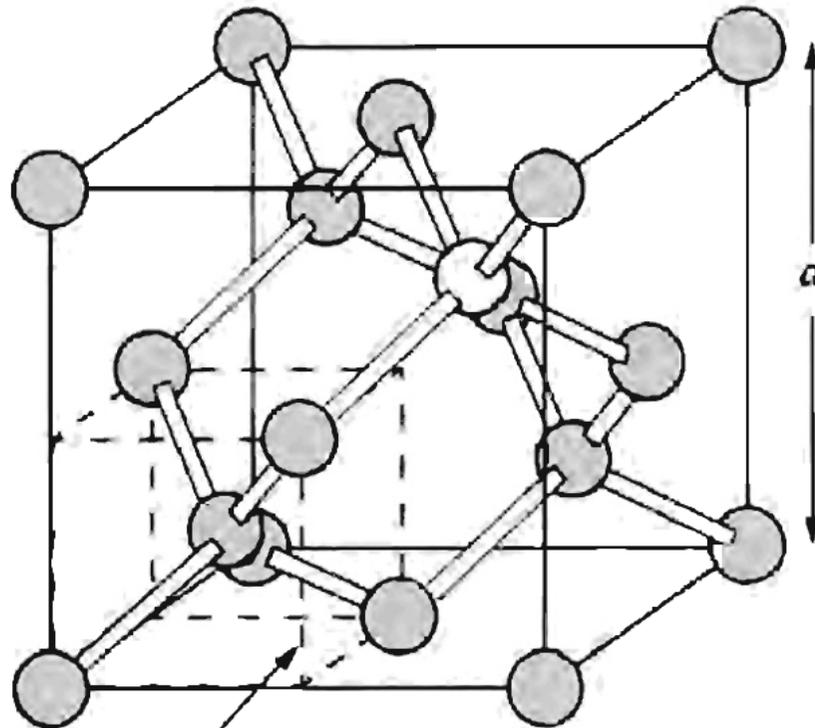
Einheitszelle: Volumenelement, aus dem sich durch Translation auf einem Bravaisgitter das gesamte Kristallgitter erzeugen lässt.

Anmerkung: Die Einheitszelle enthält alle Symmetrieeigenschaften des gesamten Kristallgitters.

Minimalbeispiel: Einheitszelle besteht aus einem einzelnen Atom (Kristallgitter = Bravaisgitter)



Kristallstruktur der Elementhalbleiter Silizium und Germanium



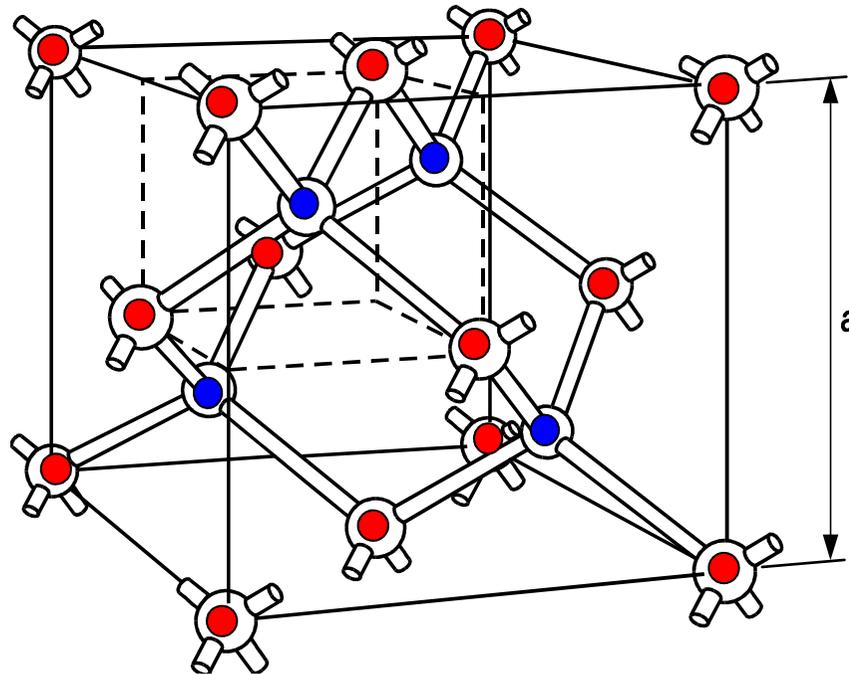
Tetraedrische
Grundstruktur

Si und Ge kristallisieren im
Diamantgitter

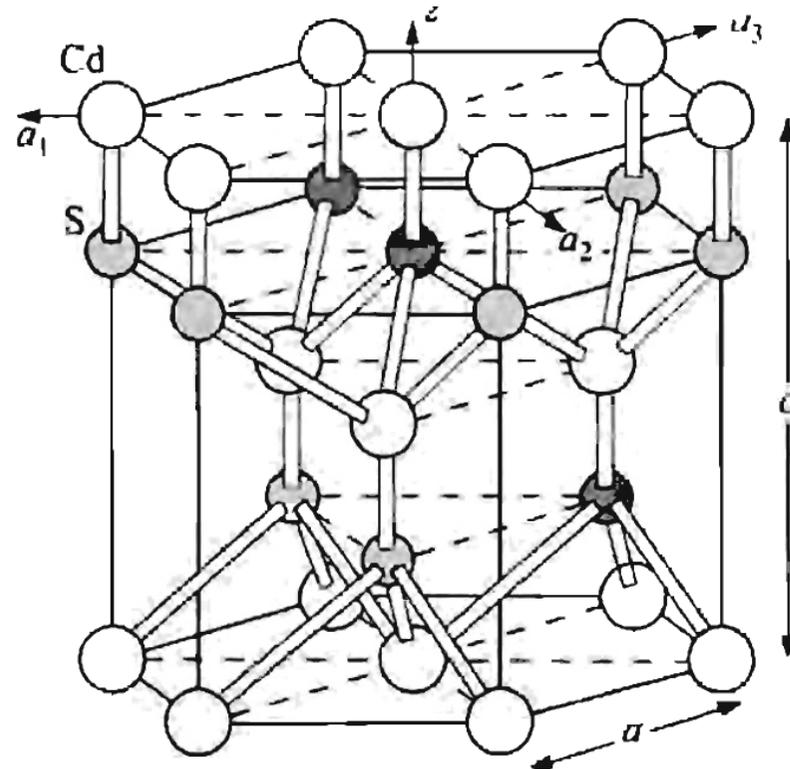
Anmerkungen:

- Die Diamantstruktur hat ein **kubisch-flächenzentriertes (fcc) Gitter** mit einer Einheitszelle, die aus zwei Atomen bei $(0,0,0)$ und $(1/4, 1/4, 1/4)a$ besteht
- **Äquivalente Aussage:** Die Diamantstruktur ist zusammengesetzt aus **zwei fcc-Gittern**, die gegeneinander um ein Viertel der Raumdiagonalen verschoben sind.

Quelle: Sze/Klee, Semiconductor Devices – Physics and Technology



Zinkblendestruktur: Eine gleiche Anzahl von **Ga** und **As** Atomen sind so auf einem Diamantgitter verteilt, dass jedes Atom vier Nachbarn der jeweils anderen Art hat; typisch für III-V-Halbleiter wie GaAs, InP, InGaAsP usw.



Wurtzit-Struktur, bestehend aus zwei Hexagonalgittern, die gegeneinander um $1/3$ des Ebenenabstandes in Richtung der Längsachse verschoben sind, typisch für II-VI-Halbleiter wie CdS, ZnS etc.

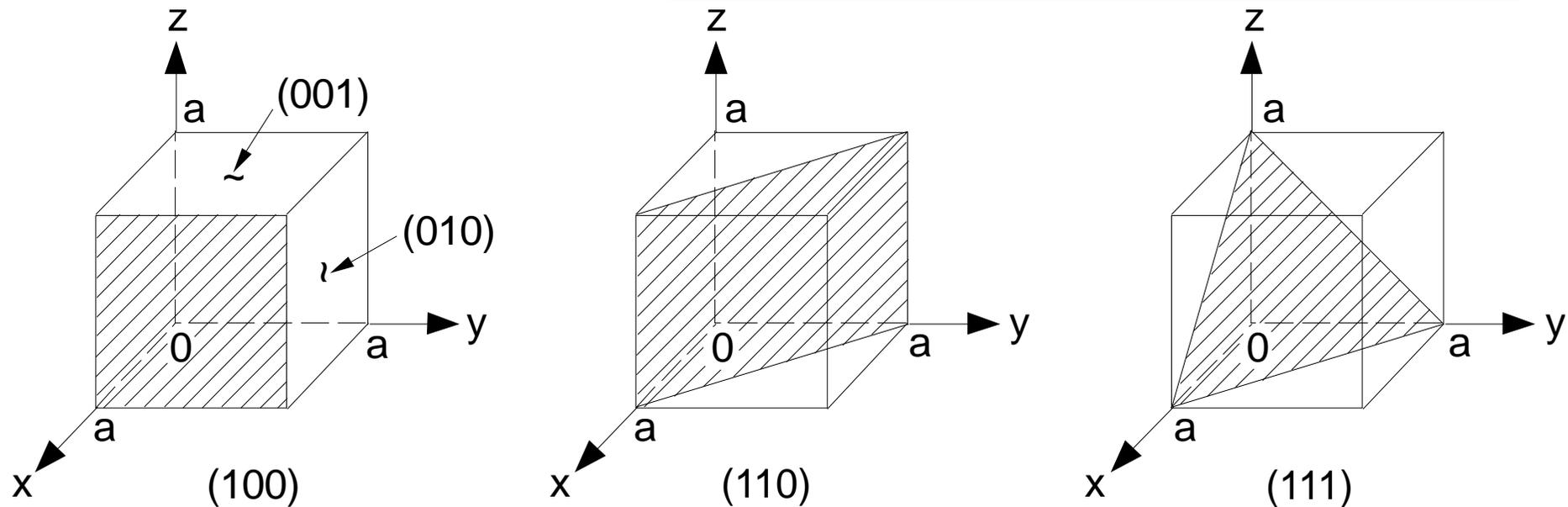
Quelle: Sze/Klee, Semiconductor Devices – Physics and Technology

Kristallstrukturen von Verbindungshalbleitern

Compound	Structure	Lattice parameter (Å)	Density (g/cm ³)
AlN	wurtzite	$a = 3.11(1), c = 4.98(1)$	3.255
AlP	zinc blende	$a = 5.4635(4)$	2.40(1)
AlAs	zinc blende	$a = 5.660$	3.760
AlSb	zinc blende	$a = 6.1355(1)$	4.26
GaN	wurtzite	$a = 3.190, c = 5.187$	
GaP	zinc blende	$a = 5.4505(2)$	4.138
GaAs	zinc blende	$a = 5.65325(2)$	5.3176(3)
InN	wurtzite	$a = 3.5446, c = 5.7034$	6.81
InP	zinc blende	$a = 5.868(1)$	4.81
InAs	zinc blende	$a = 6.0583$	5.667
InSb	zinc blende	$a = 6.47937$	5.7747(4)

Kristallstrukturen, Gitterparameter und Dichten verschiedener **III-V Verbindungshalbleiter**. Die eingeklammerten Nachkommastellen deuten die Genauigkeit der Messungen an.

Quelle: <http://cnx.org/content/m23905/latest/>



- [hkl] Angabe der **Richtung**, z.B. bezeichnet [100] die x-Achse
- <hkl> umfasst all zu [hkl] **äquivalenten Richtungen**
- (hkl) Angabe der **Gitterebene**, welche normal zur Achse [hkl] steht
- {hkl} umfasst all zu (hkl) **äquivalenten Gitterebenen**

Vorlesung 2

23.10.2015

Terminänderung Tutorium

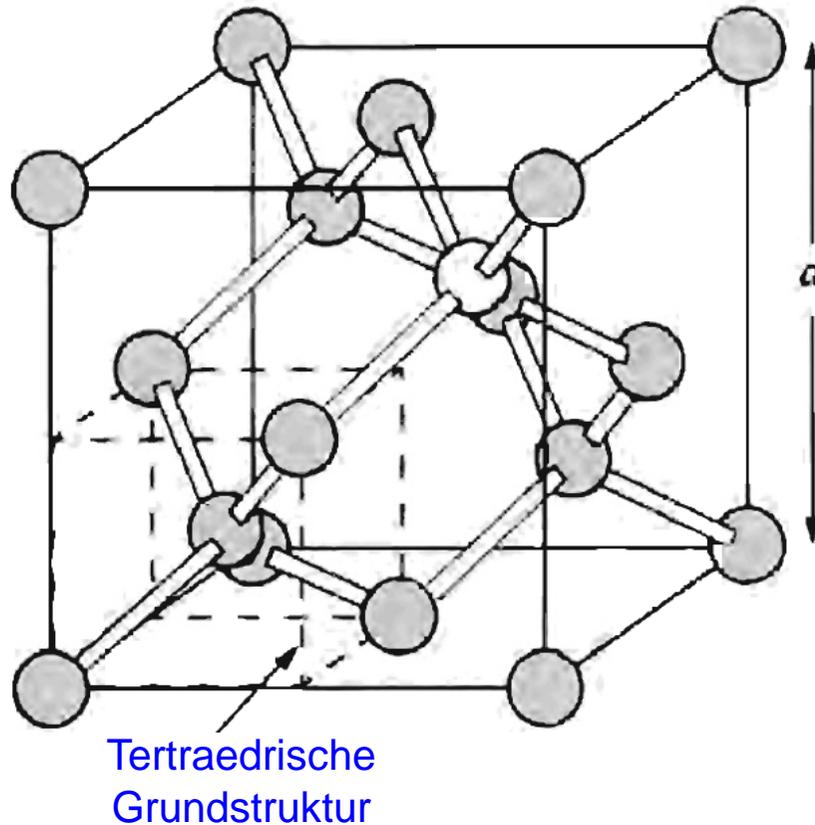
Neuer Ort: **Gebäude 30.10, Raum 3.42**
(Seminarraum des IPQ)

Neue Zeit: **Dienstags, 12:15 bis 13:45 Uhr**

Erstes Tutorium am Di, dem 27.10.15

Ort und Termin für **Übung und Vorlesung unverändert.**

Kristallstruktur der Elementhalbleiter Silizium und Germanium



Si und Ge kristallisieren im
Diamantgitter

Anmerkungen:

- Die Diamantstruktur hat ein **kubisch-flächenzentriertes (fcc) Gitter** mit einer Einheitszelle, die aus zwei Atomen bei $(0,0,0)$ und $(1/4, 1/4, 1/4)a$ besteht
- **Äquivalente Aussage:** Die Diamantstruktur ist zusammengesetzt aus **zwei fcc-Gittern**, die gegeneinander um ein Viertel der Raumdiagonalen verschoben sind.

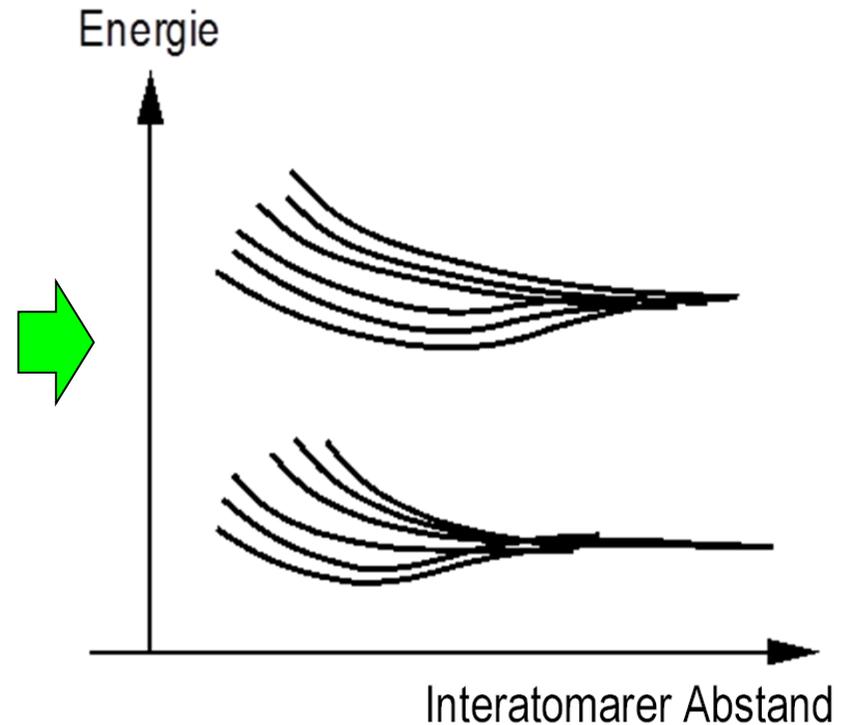
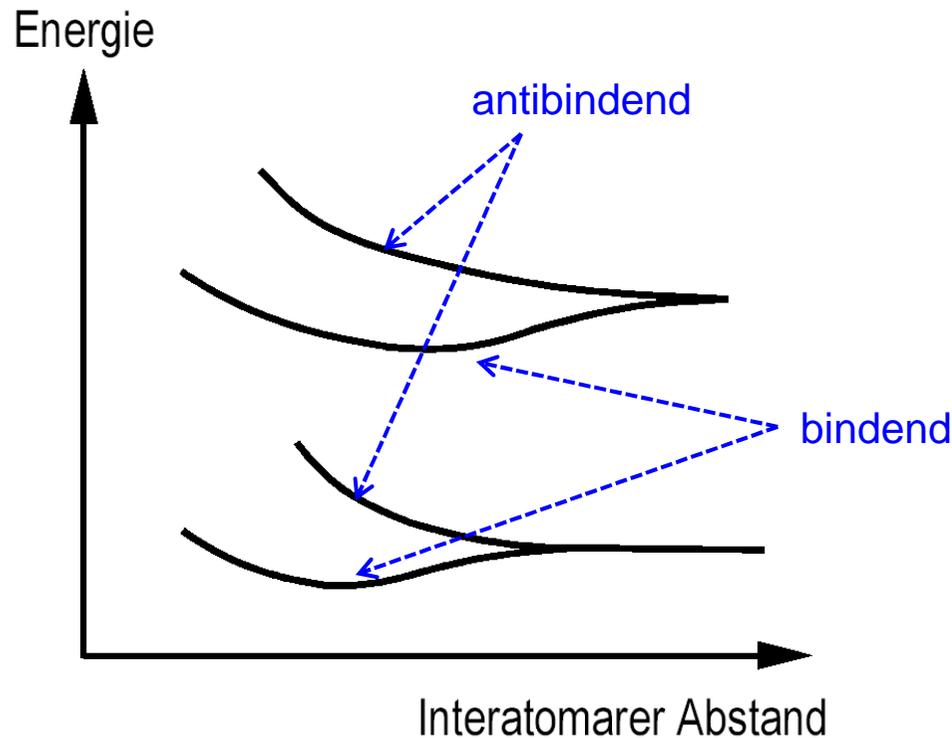
Quelle: Sze/Klee, Semiconductor Devices – Physics and Technology

Vom Einzelatom zum Kristall: Aufspaltung von Energieniveaus durch Wechselwirkung

Gedankenexperiment: Annähern zweier gleicher Atome und Untersuchung der Energieniveaus der gekoppelten elektronischen Zustände

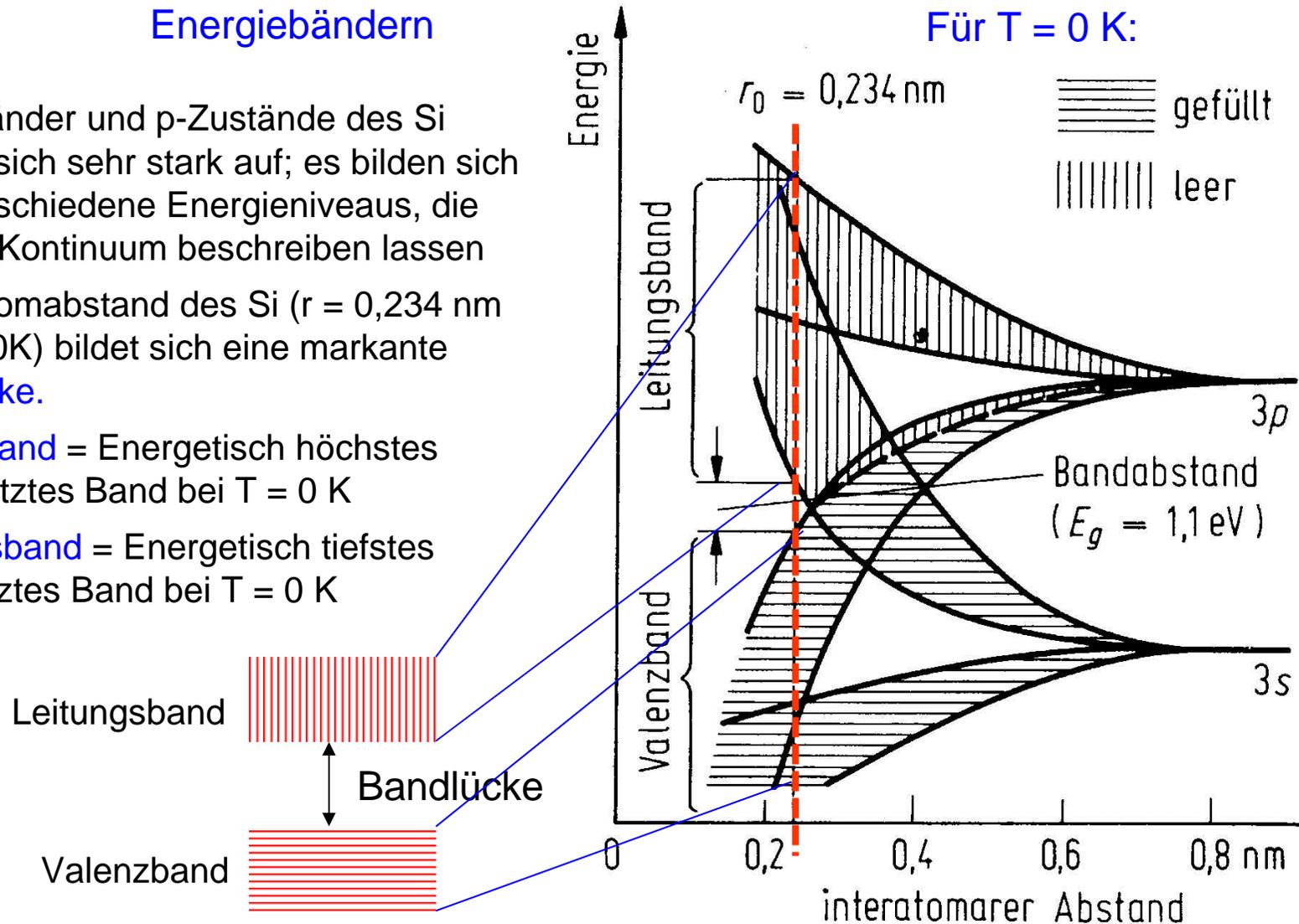
⇒ **Aufspaltung der Energieniveaus** in bindende und antibindende Zustände

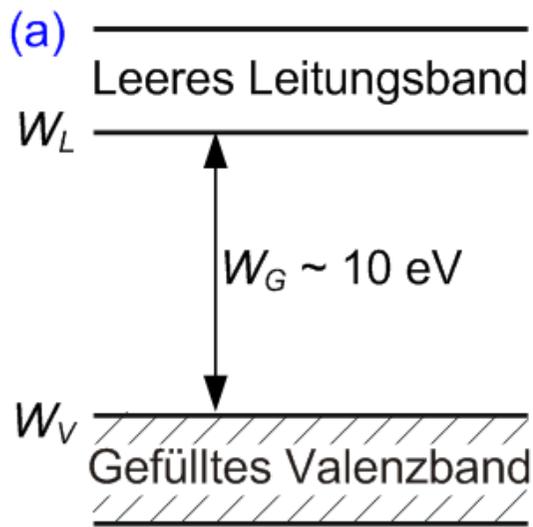
Bei 6 Atomen: Aufspaltung in 6 diskrete Energieniveaus



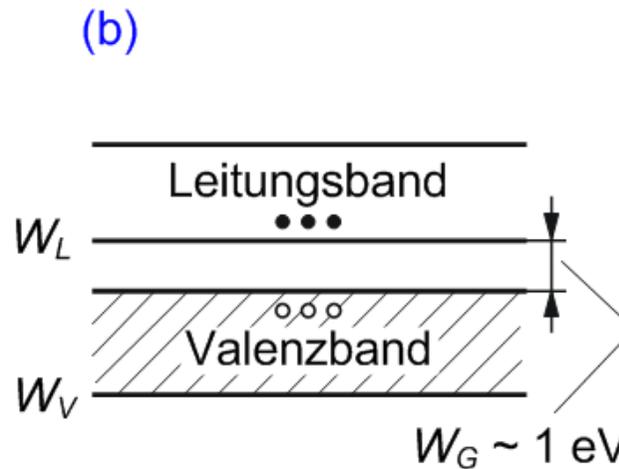
Bei 10^{23} Atomen: Bildung von kontinuierlichen Energiebändern

- Die s-Bänder und p-Zustände des Si spalten sich sehr stark auf; es bilden sich 10^{23} verschiedene Energieniveaus, die sich als Kontinuum beschreiben lassen
- Beim Atomabstand des Si ($r = 0,234$ nm bei $T = 0$ K) bildet sich eine markante **Bandlücke**.
- **Valenzband** = Energetisch höchstes vollbesetztes Band bei $T = 0$ K
- **Leitungsband** = Energetisch tiefstes unbesetztes Band bei $T = 0$ K

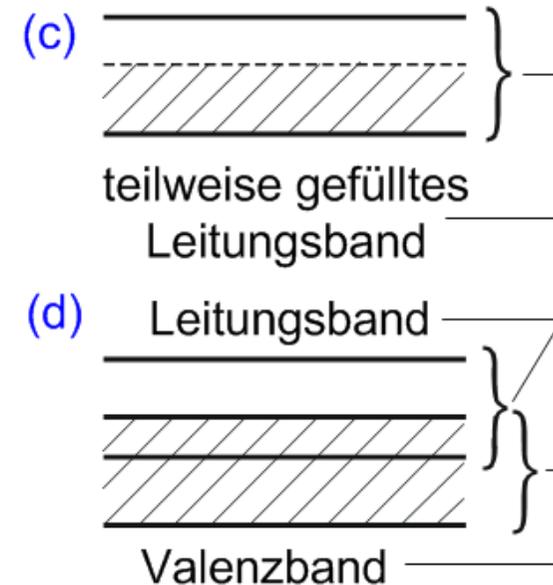




Isolator



Halbleiter



Metall

Bei Raumtemperatur:

- **Isolator:** (Nahezu) unbesetztes Leitungsband, volles Valenzband
- **Halbleiter:** Durch thermische Anregung teilweise besetztes Leitungs- und Valenzband
- **Metall:** Bei $T = 0 \text{ K}$ liegt bereits ein nur teilweise besetztes Leitungsband vor, siehe (c), oder Leitungs- und Valenzband überlappen sich, siehe (d)

Qualitatives Modell:

$T = 0 \text{ K}$: Stabile Bindungen

$T > 0 \text{ K}$: Kovalente Bindung können aufgebrochen werden.

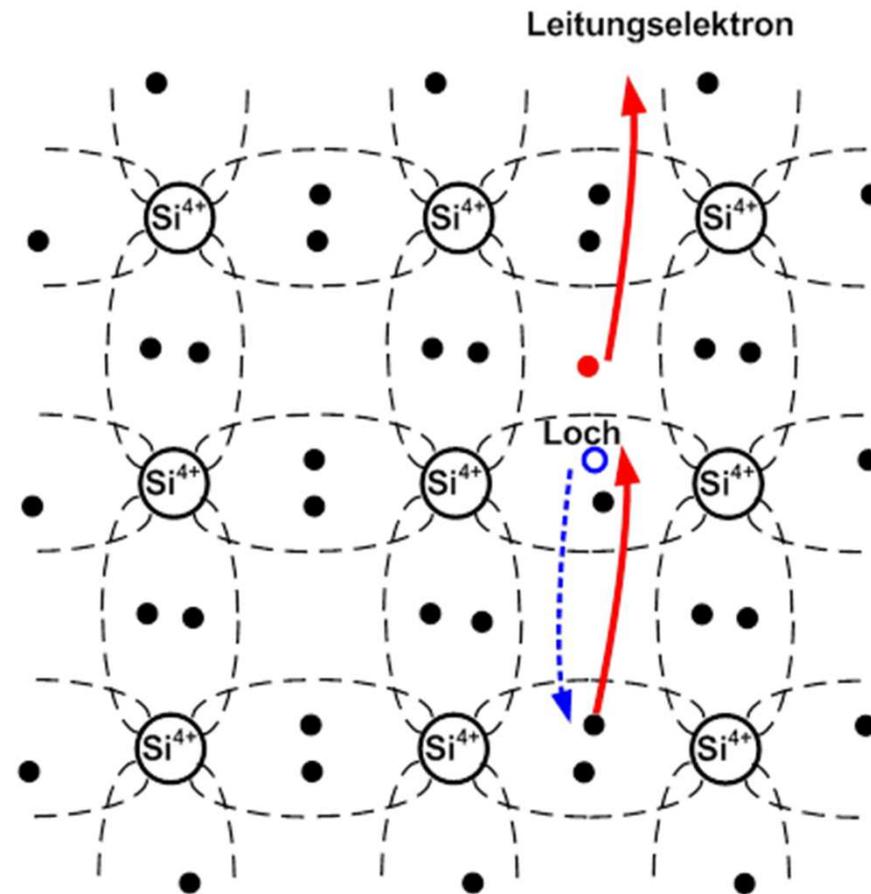
⇒ Zwei (Quasi-)Teilchen:

- Freies Elektron im Leitungsband
- Loch im Valenzband

⇒ Zwei Anteile an Stromfluss und Leitfähigkeit

⇒ Leitfähigkeit steigt mit Temperatur

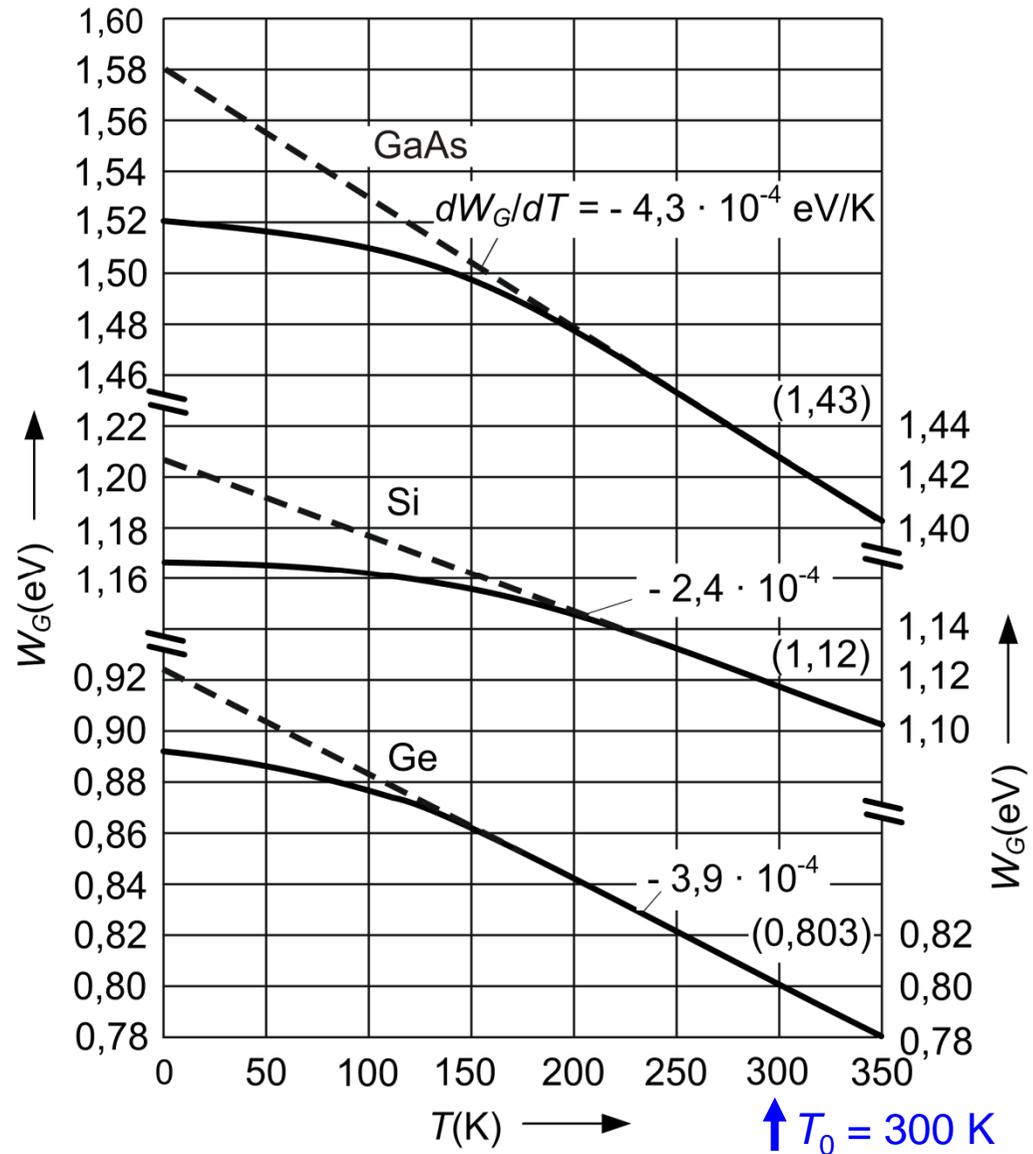
Anmerkung: Die Teilchen haben unterschiedliche Beweglichkeiten und tragen daher unterschiedlich stark zum Stromfluss bei!



Temperaturabhängigkeit der Bandlücke

- Die Bandlücke von Halbleitern nimmt üblicherweise mit zunehmender Temperatur ab!
- In der Umgebung der Raumtemperatur T_0 kann man die Temperaturabhängigkeit der Bandlücke durch eine lineare Funktion annähern:

$$W_G(T) = W_G(T_0) + \left. \frac{dW_G}{dT} \right|_{T=T_0} (T - T_0)$$



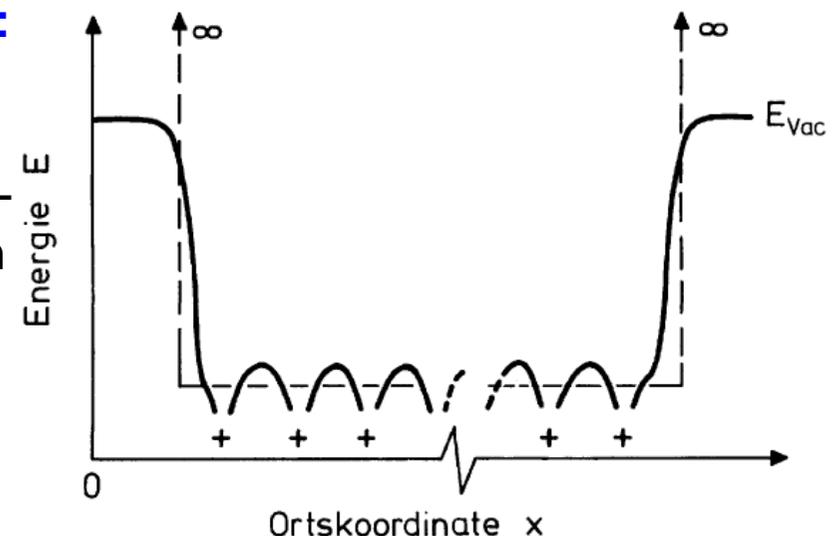
Bandstruktur von Halbleitern

Vorgehen:

- Zeitabhängige und zeitunabhängige **Schrödinger-Gleichung**
- Das **freie Elektron** im konstanten Potential
- Das lokalisierte Elektron: **Wellenpakete und Gruppengeschwindigkeit**
- **Zustandsdichte** im Festkörper
- **Periodisches Potential** und **Bloch-Theorem**
- Semi-klassische Bewegungsgleichungen und **effektive Masse**
- **Banddiagramme** in drei Dimensionen
- **Parabolische Annäherung** der Bandverläufe

Vereinfachte quantenmechanische Modelle:

- Eindimensionale Betrachtung
- **Grundlage:** Verhalten eines freien Elektrons
- **Modell 1:** Potentialbarriere an der Halbleiter-Oberfläche; konstantes Potential im Inneren
- **Modell 2:** Periodisches Potential im Kristallgitter



Quelle: Ibach/Lüth, Festkörperphysik

- Jedes Partikel in einem System wird durch eine **Wellenfunktion** $\Psi(x,y,z,t)$ beschrieben. Diese Funktion ist stetig, endlich und wohldefiniert.
- Die Wahrscheinlichkeit, das durch $\Psi(\mathbf{r},t)$ beschriebene Partikel im Volumenelement $dx dy dz$ anzutreffen, ist gegeben durch $|\Psi(\mathbf{r},t)|^2 dx dy dz$.

$$|\Psi(\mathbf{r},t)|^2 = \text{Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte}$$

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \text{Wahrscheinlichkeitsdichteamplitude}$$

Normierung: $\iiint |\Psi(\mathbf{r},t)|^2 dx dy dz = 1$

- Klassische Größen („Observablen“) wie z.B. die Energie W (in der englischsprachigen Literatur oft auch als E bezeichnet) oder der Impuls p entsprechen einem abstrakten **quantenmechanischen Operator**:

	Klassische Variable	Quantenmech. Operator
Ort	x	x
	$f(x)$	$f(x)$
Impuls	$\mathbf{p}(x)$	$-j\hbar\nabla$
Energie	W	$j\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

- Der **Erwartungswert** $\langle Q \rangle$ für eine Observable Q lässt sich aus der Wellenfunktion $\Psi(x,y,z,t)$ mit Hilfe des zugehörigen Operators \mathbf{Q}_{op} berechnen,

$$\langle Q \rangle = \iiint \Psi^*(\mathbf{r},t) \mathbf{Q}_{op} \Psi(\mathbf{r},t) dx dy dz.$$

- Es gibt zu jeder Observablen Q einen Satz von speziellen Zuständen Ψ_Q , bei denen das Ergebnis einer Messung eindeutig feststeht. Ein solcher Zustand wird **Eigenzustand** der betreffenden Observablen genannt, und das zugehörige Messergebnis ist einer der **Eigenwerte des zur Observablen gehörenden Operators Q_{op}** ,

$$Q_{op}\Psi_Q = Q\Psi_Q$$

Die **zeitabhängige Schrödinger-Gleichung** ergibt sich durch Ausnutzung der Tatsache, dass die Gesamtenergie des Partikels aus der Summe von kinetischer und potentieller Energie ergibt:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + W_{pot}(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}, t) = j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t)$$

Die **zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung** ergibt sich durch einen Separationsansatz der Form $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})\phi(t)$ und durch die Verwendung einer harmonischen Zeitabhängigkeit $\phi(t) = \phi_0 \exp(-jWt/\hbar)$ (W = Gesamtenergie des Partikels)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + W_{pot}(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = W\psi(\mathbf{r})$$

Betrachte ein Elektron mit **Gesamtenergie** W in einem räumlich konstanten **Potenzialfeld** mit potentieller Energie W_{pot}
⇒ Lösung der (zeitabhängigen) **Schrödinger-Gleichung**:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{j\left(\mathbf{k}\mathbf{r} - \frac{W(k)}{\hbar}t\right)},$$

Die **Dispersionsrelation** beschreibt den Zusammenhang zwischen **Gesamtenergie** W und **Impuls** $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ des Elektrons bzw. zwischen **Frequenz** und **Wellenzahl** der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichtewelle,

$$W(k) = W_0 + \frac{(\hbar\mathbf{k})^2}{2m}$$

- Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ es Elektrons ist räumlich konstant, d.h. es ist unmöglich, dem Elektron einen Aufenthaltsort zuzuschreiben. Dies ist eine Folge der **Heisenberg'schen Unschärferelation**, die die Varianzen im Ort und im Impuls miteinander verbindet

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2},$$

- Der Impuls eines lokalisierten Elektrons lässt sich also nur durch ein Spektrum an **Wellenzahlen** beschreiben.

Das **lokalisierte Elektron mit mittlerem Impuls $\hbar\mathbf{k}$** lässt sich darstellen durch ein **Wellenpaket mit mittlerem Wellenvektor \mathbf{k}** und einer zeitlich-örtliche **Einhüllenden $a(x,t)$**

$$\Psi(x, t) = a(x, t) e^{j\left(k_0 x - \frac{W(k_0)}{\hbar} t\right)}$$

Anmerkung: Betrachte Propagation in x-Richtung,
 $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x$ (o.B.d.A).

Beschreibung der zeitlichen Evolution im k -Raum:

$$\Psi(x, 0) = a(x, 0) e^{jk_0 x}$$

$$\Psi(x, t) = a(x - v_g t, 0) e^{j\left(k_0 x - \frac{W(k_0)}{\hbar} t\right)}$$



$$\tilde{\Psi}(k, 0) = \tilde{a}(k - k_0, 0)$$



$$\tilde{\Psi}(k, t) = \tilde{a}(k - k_0, t) e^{-j\frac{W(k)}{\hbar} t}$$

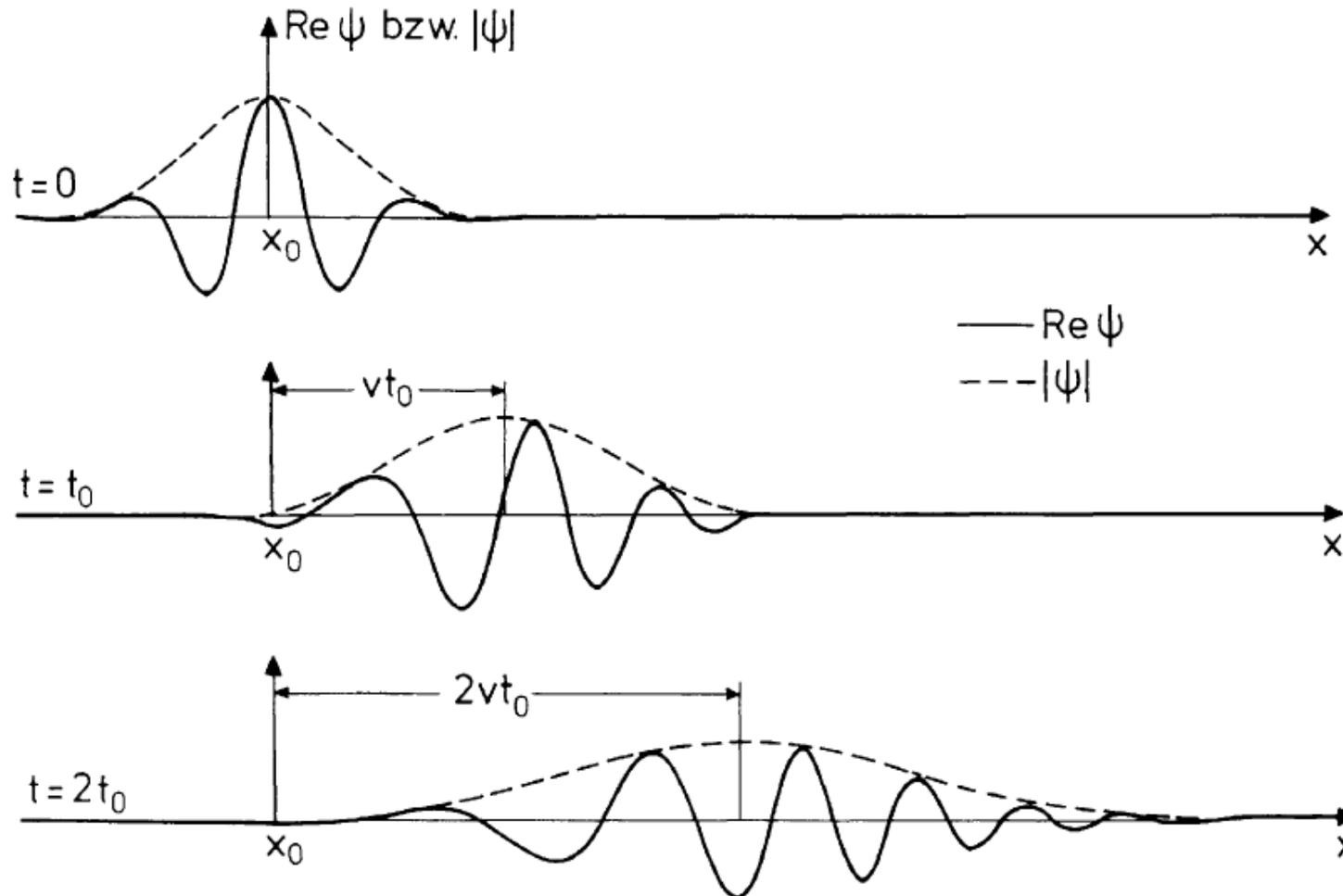
Taylor-Entwicklung der Dispersionsrelation um die mittlere Wellenzahl k_0 :

$$W(k) = W(k_0) + \left. \frac{\partial W}{\partial k} \right|_{k=k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 W}{\partial k^2} \right|_{k=k_0} (k - k_0)^2$$

Gruppengeschwindigkeit:

$$v_g = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial W}{\partial k} \quad (\text{entlang } x)$$

$$\mathbf{v}_g = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} W(\mathbf{k}) \quad (\text{in 3D})$$



- Terme **zweiter und höherer Ordnung** in der Taylorentwicklung von $W(k)$ führen aufgrund der anfänglichen Impulsverteilung zum „Zerfließen“ des Wellenpaketes für $t > 0$

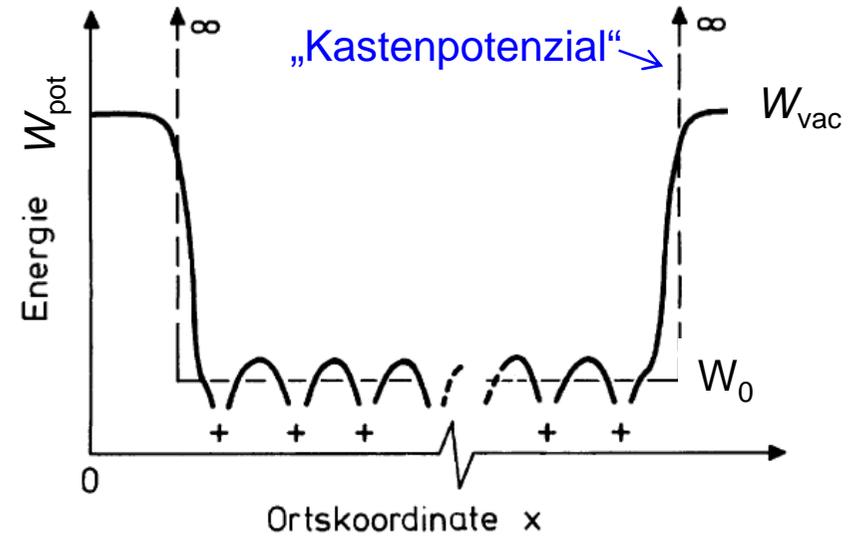
Quelle: Ibach/Lüth, Festkörperphysik

Vereinfachtes Modell eines Halbleiterkristalls:

- Atomkerne führen zu einem **statischen Potential**, das dieselbe **Periodizität** aufweist wie das **Kristallgitter** (\mathbf{R} = Gittervektor),

$$W_{\text{pot}}(\mathbf{r}) = W_{\text{pot}}(\mathbf{r} + \mathbf{R})$$

- Wechselwirkungen zwischen Elektronen werden vernachlässigt; man betrachtet also nur ein **einzelnes Elektron** in einem **statischen periodischen Potenzial** (**Einelektronen-Näherung**)



Sommerfeld-Modell:

- Zusätzlich wird das periodische Potenzial im Kristall vernachlässigt und die Austrittsarbeit an der Oberfläche mit ∞ angenähert
⇒ **Freies Elektron im (würfelförmigen) Potentialkasten:**

$$W_{\text{pot}} \begin{cases} = W_0 & \text{falls } 0 < x, y, z < L \\ \rightarrow \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Quelle: Ibach/Lüth, Festkörperphysik

Lösung der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung:

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) & \text{falls } 0 < x, y, z < L, \\ \rightarrow 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{wobei } k_x L = n_x \pi, \quad k_y L = n_y \pi, \quad k_z L = n_z \pi$$

Zugehörige Energien:

W

$$W = W_0 + \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2m},$$

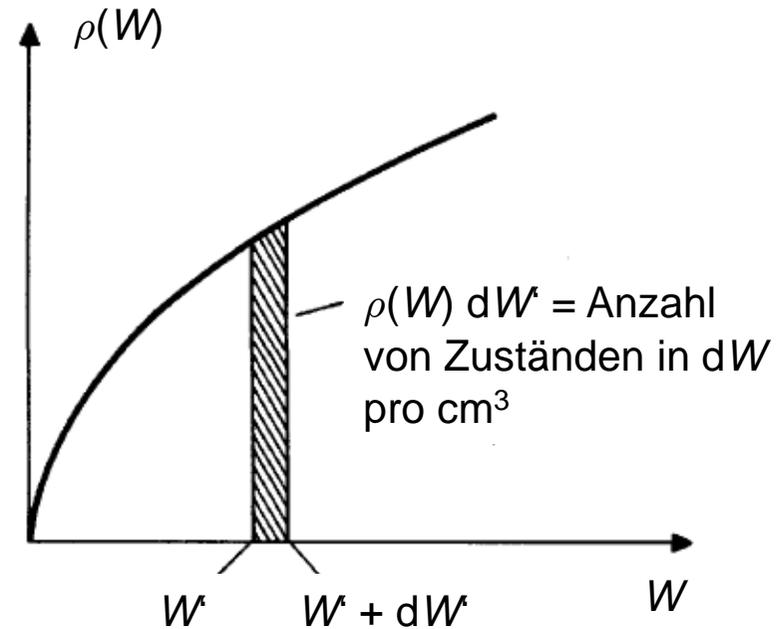
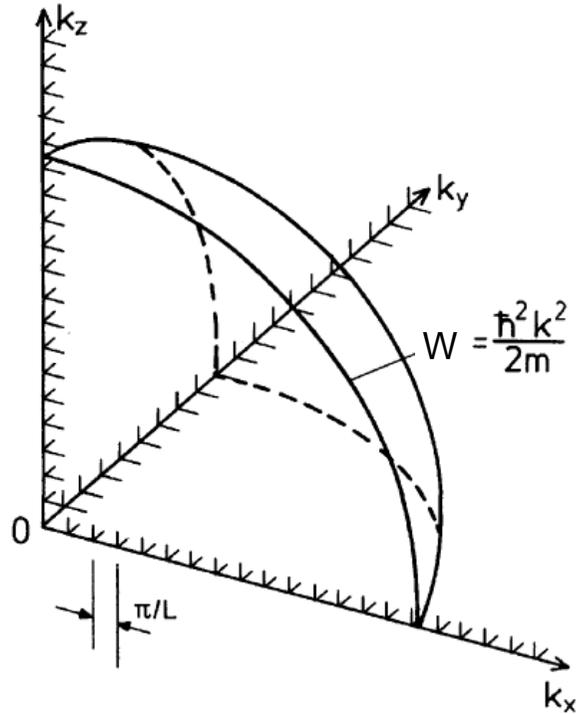
$$\text{wobei } |\mathbf{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

Für $L \rightarrow \infty$: Kontinuum an möglichen Energieniveaus anstelle diskreter Zustände
 \Rightarrow Betrachtung der auf das Volumen bezogenen **Zustandsdichte** als Funktion der Energie

$|\mathbf{k}|$

Zustandsdichte des freien Elektronengases

Zustandsdichte: Anzahl der besetzbaren Zustände pro Energieintervall und pro Volumen



$$\rho(W) = \frac{1}{V} \frac{dN}{dW} = 4\pi \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \sqrt{W - W_0}$$

Anmerkung: Die Energie wird in der Literatur manchmal auch mit E bezeichnet!

Quelle: Ibach/Lüth, Festkörperphysik

Vorlesung 3

26.10.2015

Terminänderung Tutorium

Neuer Ort: **Gebäude 30.10, Raum 3.42**
(Seminarraum des IPQ)

Neue Zeit: **Dienstags, 12:15 bis 13:45 Uhr**

Erstes Tutorium am Di, dem 27.10.15

Ort und Termin für **Übung und Vorlesung unverändert.**

Behandlung des periodischen Gitterpotenzials mit Hilfe des **Bloch-Theorems**:

Die Lösungen der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung für ein periodisches Potential $W_{\text{pot}}(\mathbf{r}) = W_{\text{pot}}(\mathbf{r} + \mathbf{R})$ sind das Produkt aus einer ebenen Welle $\exp(j\mathbf{k}\mathbf{r})$ und einer Funktion $u_k(\mathbf{r})$, die die gleiche Periodizität aufweist wie das Kristallgitter,

$$\psi_k(\mathbf{r}) = u_k(\mathbf{r}) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

$$u_k(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = u_k(\mathbf{r}).$$

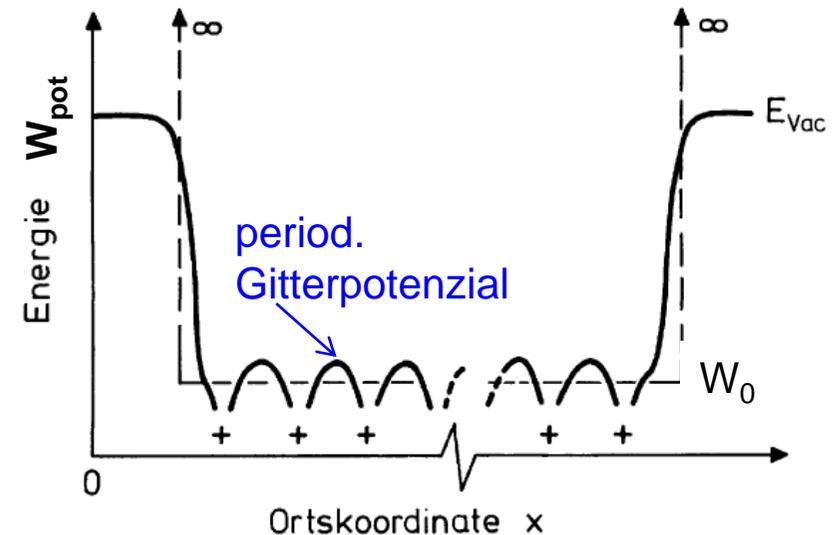
Veranschaulichung im Eindimensionalen: $\psi_k(x) = u_k(x) e^{jkx}$ $u_k(x+a) = u_k(x)$

- Die periodische Funktion $u_k(x)$ lässt sich in eine Fourier-Reihe entwickeln:

$$u_k(x) = \sum_{\nu} c_{k,\nu} e^{j\nu Kx}$$

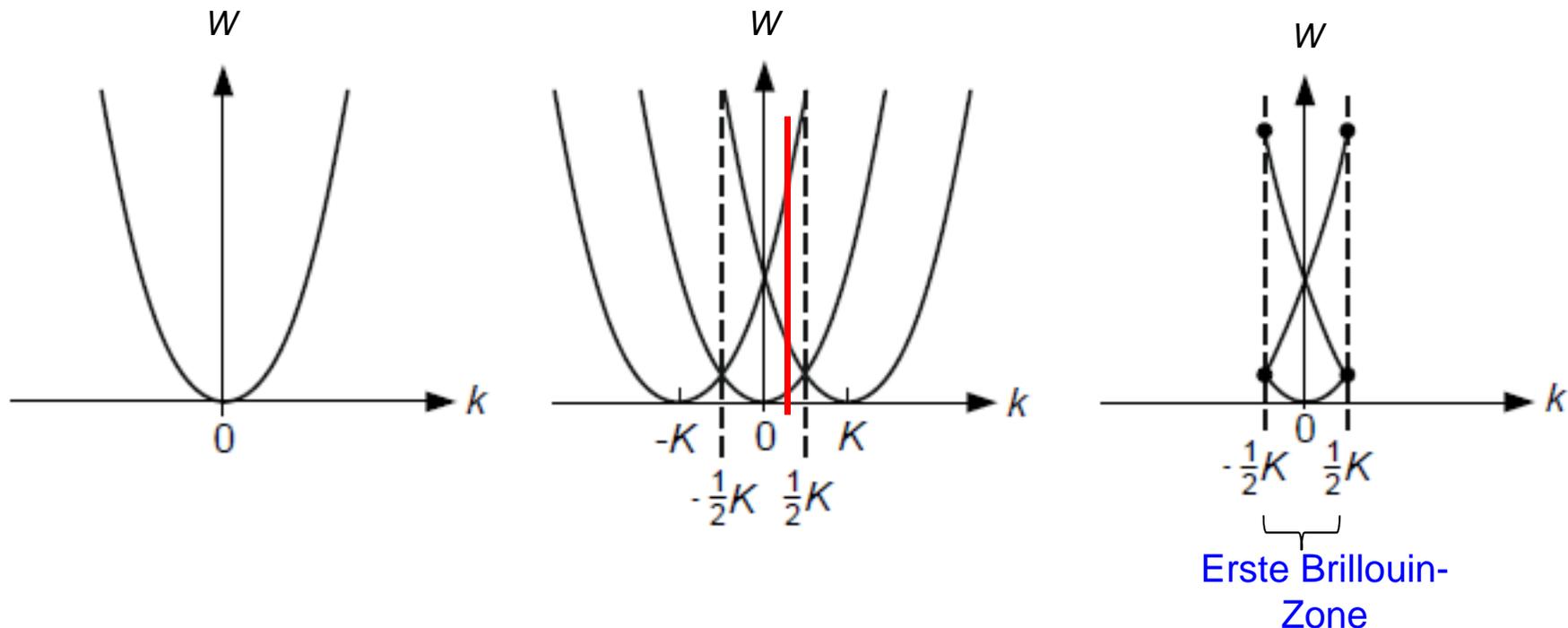
⇒ Der mit der Wellenzahl k indizierte Zustand $\psi_k(x)$ **umfasst alle Wellenzahlen $k+\nu K$** und damit auch die zugehörigen Energien!

- **Gedankenexperiment:** Betrachte ein freies Elektron in einem „infinitesimal schwachen“ periodischen Potenzial



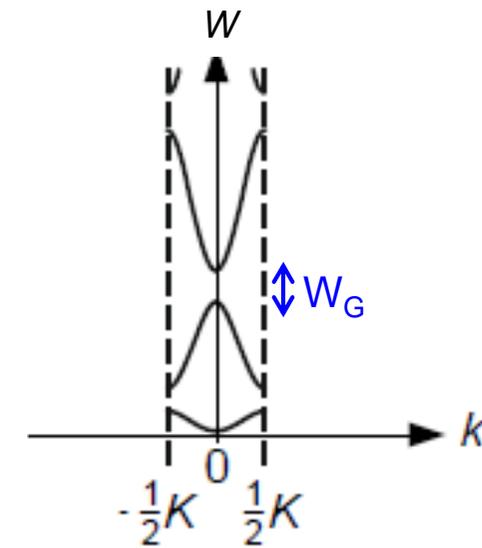
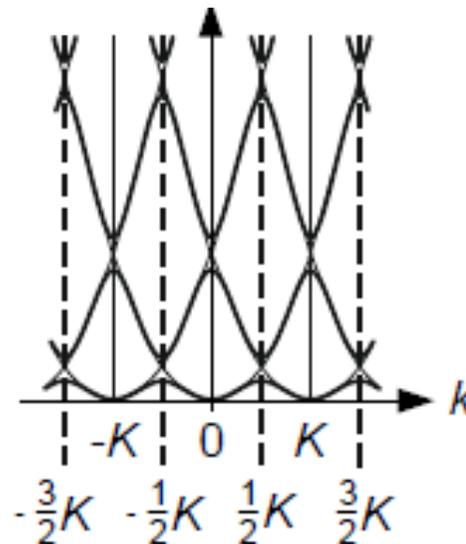
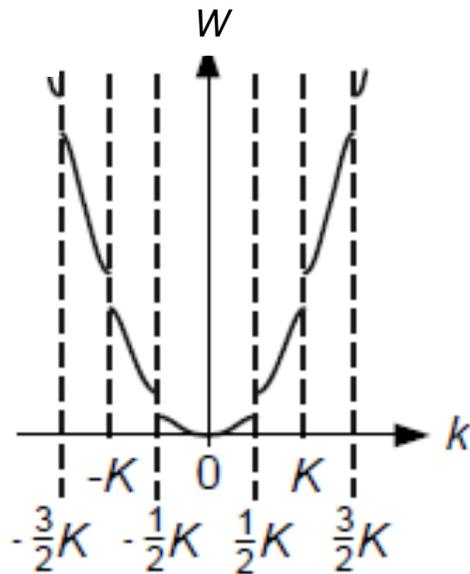
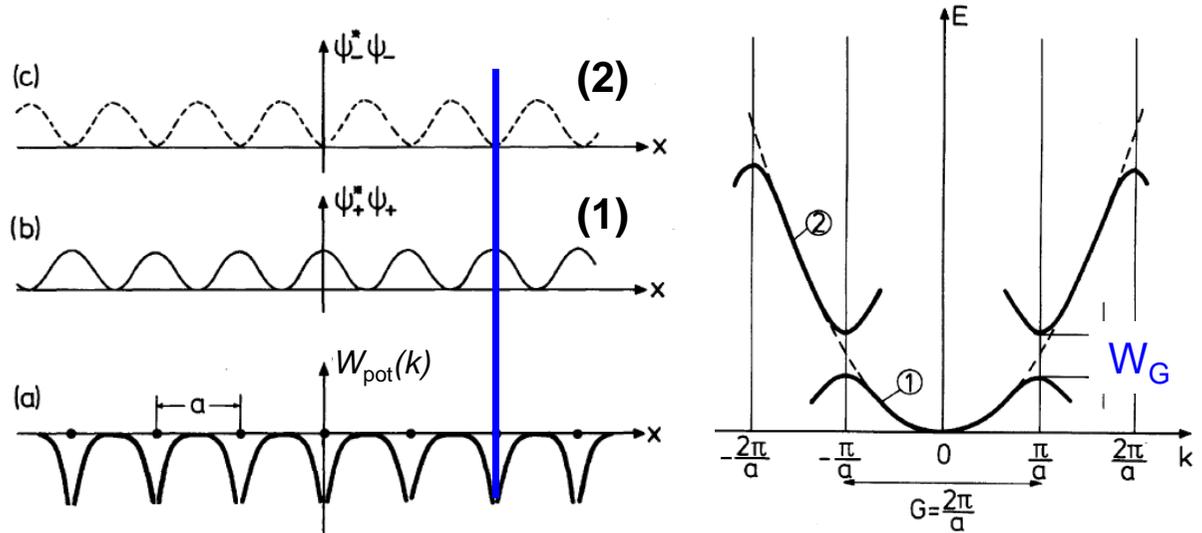
Das freie Elektron im „infinitesimal schwachen“ periodischen Potential („leeres Gitter“)

- „Infinitesimal schwach“: Die parabelförmige Dispersionsrelation des freien Elektrons bleibt im wesentlichen erhalten.
⇒ Energien zum Zustand mit Wellenzahl k :
$$W_\nu(k) = \frac{\hbar^2 (k + \nu K)^2}{2m}$$
- Aufgrund der Periodizität genügt eine Betrachtung des k -Raumes zwischen $-K/2$ und $K/2$ (sog. erste Brillouin-Zone)



Das Elektron im „etwas stärkeren“ periodischen Potential

- Am Rand der ersten Brillouin-Zone ($k = \pm K/2$): liegen **stehende Wellen** vor. Dies führt zu einer **Deformation** der Dispersionsrelation $W(k)$, zu einer **Aufspaltung** der Energiezustände und zur Bildung einer **Bandlücke W_G** .



Quelle: Ibach/Lüth, Festkörperphysik

Banddiagramm in drei Dimensionen – das reziproke Gitter

Kristallgitter: Charakterisierung durch Translationsvektoren \mathbf{R} im **Ortsraum** (Gittervektoren)

Reziprokes Gitter: Charakterisierung durch Translationsvektoren im k -Raum (inverse Gittervektoren)

$$\mathbf{R} = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2 + \mu_3 \mathbf{a}_3,$$



$$\mathbf{K} = \nu_1 \mathbf{b}_1 + \nu_2 \mathbf{b}_2 + \nu_3 \mathbf{b}_3$$

wobei $\mathbf{a}_\nu \cdot \mathbf{b}_\mu = 2\pi \delta_{\nu\mu}$

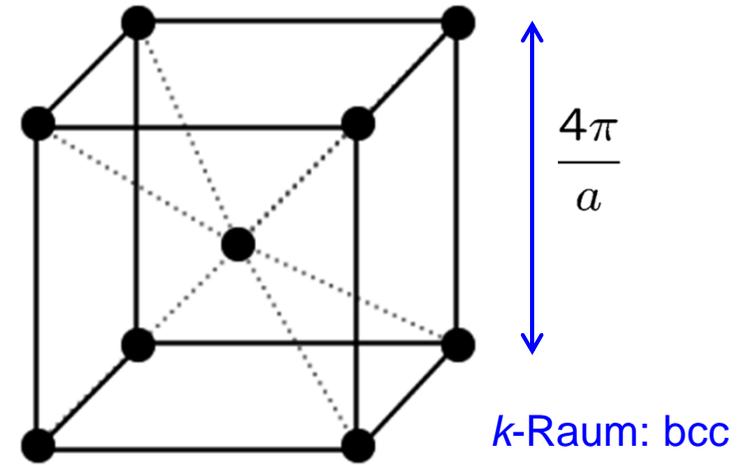
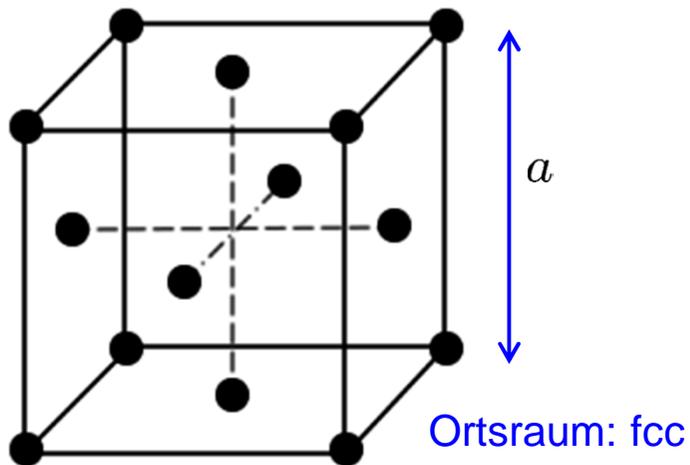
Konstruktion des reziproken Gitters:

$$\mathbf{b}_1 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)};$$

$$\mathbf{b}_2 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)};$$

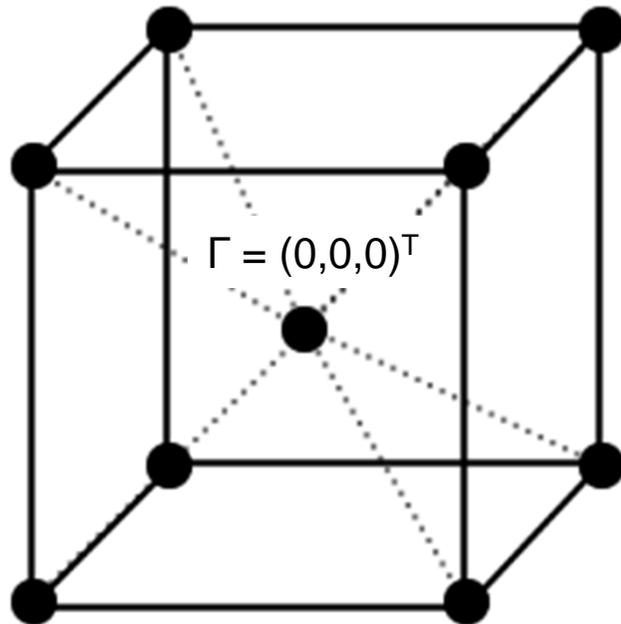
$$\mathbf{b}_3 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}$$

Beispiel: Zu einem kubisch-flächenzentrierten Kristallgitter im Ortsraum gehört ein kubisch-raumzentriertes reziprokes Gitter im k -Raum

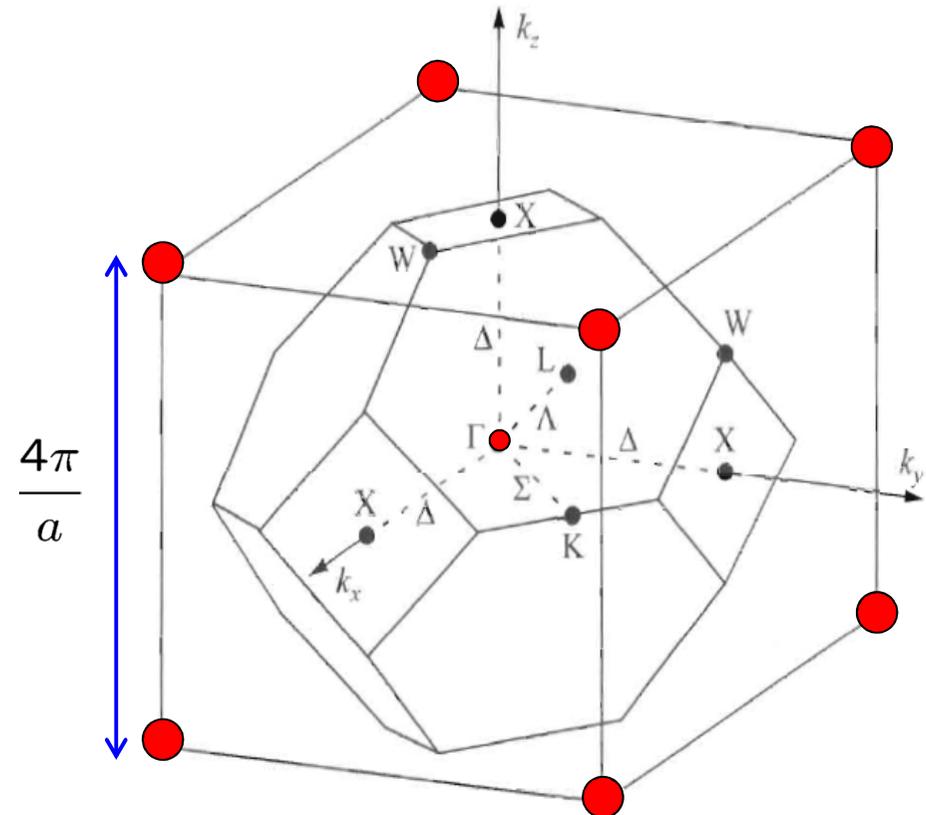


Brillouin-Zone in drei Dimensionen

Erste Brillouin-Zone: Menge aller Punkte im k -Raum, die näher am Gitterpunkt $\Gamma = (0,0,0)$ liegen als an irgendeinem anderen Gitterpunkt
 \Rightarrow Konstruktion mit Hilfe der **Mittellot-Ebenen** zwischen benachbarten Gitterpunkten

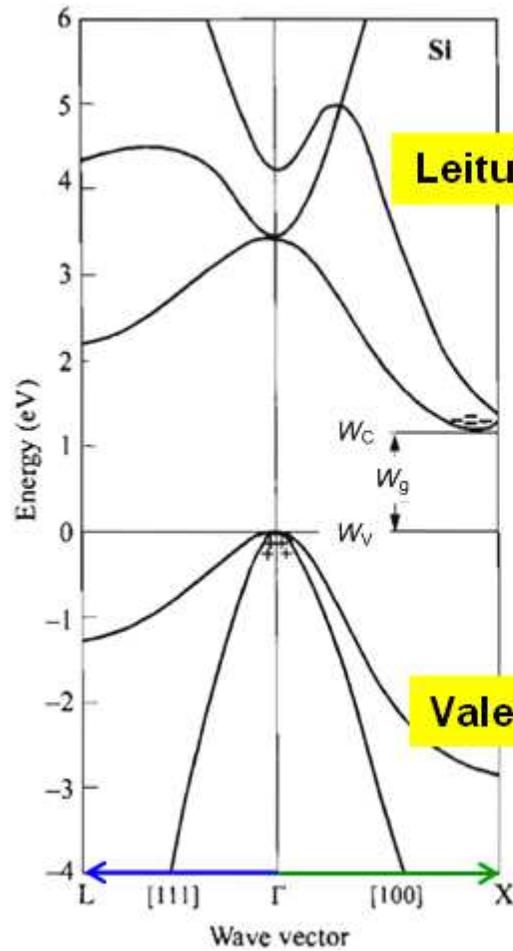


Reziprokes Gitter
eines fcc-Gitters im Ortsraum

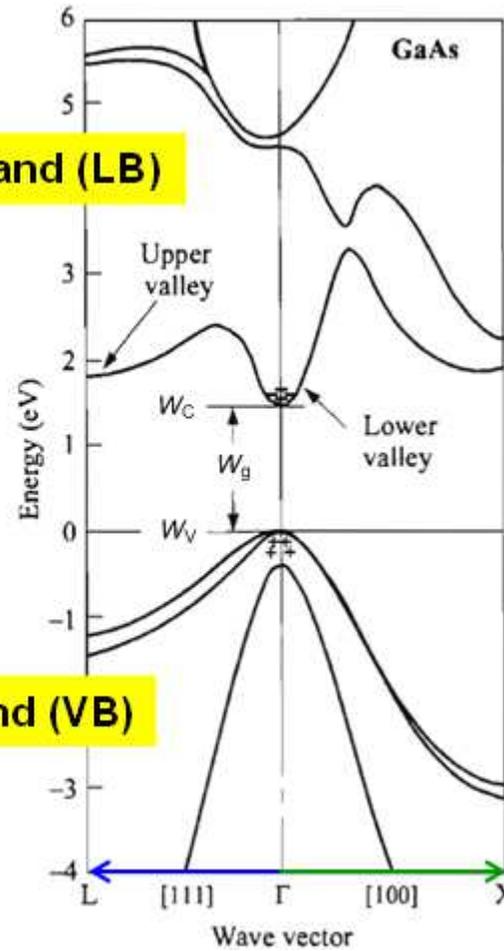


Brillouin-Zone des fcc-Gitters

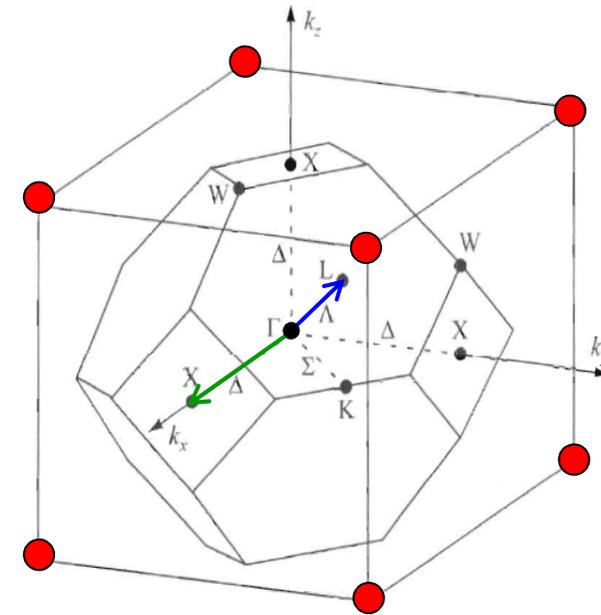
Bandstrukturen in 3D



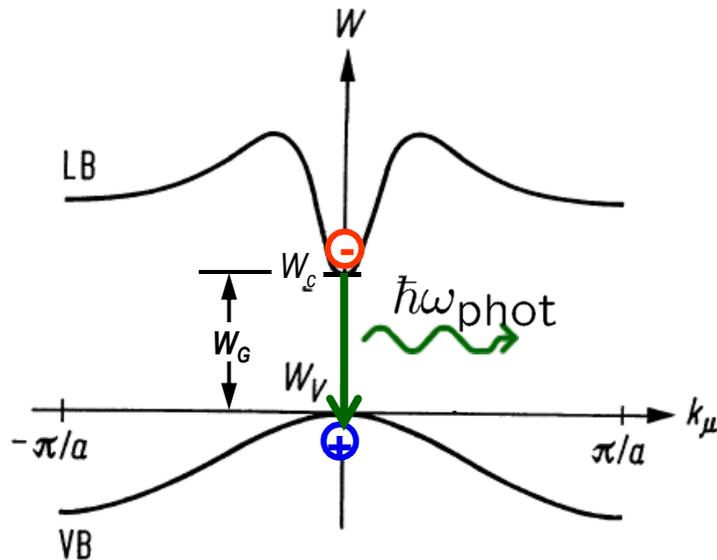
Indirekte Bandlücke



Direkte Bandlücke



Quelle: Sze, Semiconductor Devices



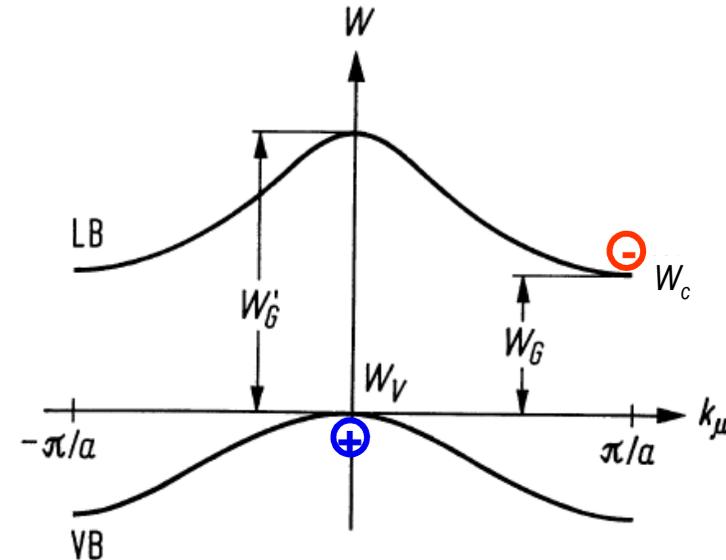
Direkter Halbleiter, z.B. InP, GaAs...

- Maximum des VB und Minimum des LB liegen beim gleichen Kristallimpuls
- **Strahlender Übergang erfüllt sowohl Energie- als auch Impulserhaltung**

$$\Delta W = \hbar\omega_{\text{phot}} \gtrsim W_C - W_V$$

$$\Delta p \approx 0$$

⇒ **Effiziente Emission / Absorption von Licht**



Indirekter Halbleiter, z.B. Si, Ge...

- Maximum des VB und Minimum des LB liegen bei unterschiedlichen Kristallimpulsen
- **Strahlende Übergänge unwahrscheinlich:** Impulserhaltung erfordert Wechselwirkung mit einem Phonon, das den Impuls aufnimmt ("Dreierstoß")

$$\Delta p = \underbrace{\hbar\pi/a}_{\text{Phonon}} \gg \underbrace{\hbar 2\pi/\lambda_p}_{\text{Photon}}$$

⇒ **Keine effiziente Emission / Absorption von Licht**

Impuls- und Geschwindigkeitszunahme im externen elektrischen Feld:

$$\frac{\partial (\hbar\mathbf{k})}{\partial t} = -e\mathbf{E} \quad \hbar\mathbf{k} = \text{„Kristallimpuls“}$$
$$\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial t} = \frac{1}{m^*} (-e\mathbf{E})$$

Die effektive **Masse m^*** ist invers proportional zur Krümmung der Dispersionsrelation:

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W(k)}{\partial k^2}$$

In der räumlichen Betrachtung ist die **inverse effektive Masse $1/m^*$** eine **3x3-Matrix**, die im wesentlichen der Hesse-Matrix der Dispersionsrelation entspricht,

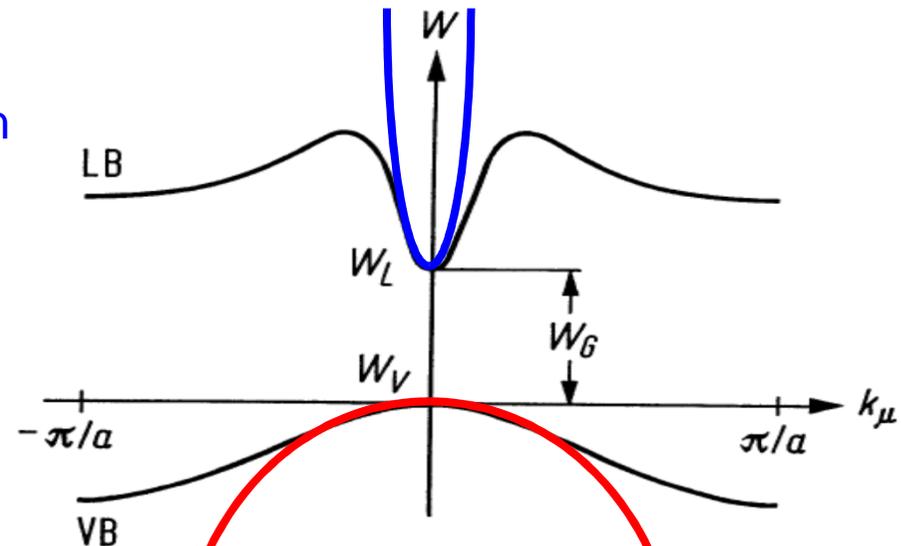
$$\left(\frac{1}{m^*} \right)_{l,m} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W(k)}{\partial k_l \partial k_m}$$

Für das **freie Elektron** stimmt die effektive Masse m^* mit der Ruhemasse m des **Elektrons überein**. Für Elektronen in einem Halbleiterkristall kann die effektive Masse hingegen sehr unterschiedliche und insbesondere auch negative Werte annehmen.

- **Sommerfeld-Modell:** Berechnung der Zustandsdichte mit Hilfe der parabolischen Dispersionsrelation des „freien“ Elektrons:

$$W(k) = W_0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad \rho(W) = \frac{1}{V} \frac{dN}{dW} = 4\pi \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \sqrt{W - W_0}$$

- **Bloch-Modell:** Parabolische Annäherung des Bandverlaufes mit Hilfe der **effektiven Massen** für Elektronen und Löcher



$$W = W_L + \frac{|k - k_0|^2}{2m_n}, \quad \frac{1}{m_n} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W_L(k)}{\partial k^2}, \quad \rho_n(W) = 4\pi \frac{(2m_n)^{3/2}}{h^3} \sqrt{W - W_L}$$

$$W = W_V - \frac{|k - k_0|^2}{2m_p}, \quad \frac{1}{m_p} = -\frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W_V(k)}{\partial k^2}, \quad \rho_p(W) = 4\pi \frac{(2m_p)^{3/2}}{h^3} \sqrt{W_V - W}$$

Ladungsträgerdichte im Halbleiter

Besetzungswahrscheinlichkeit eines Zustandes mit Energie W ist gegeben durch die **Fermi-Dirac Verteilung**:

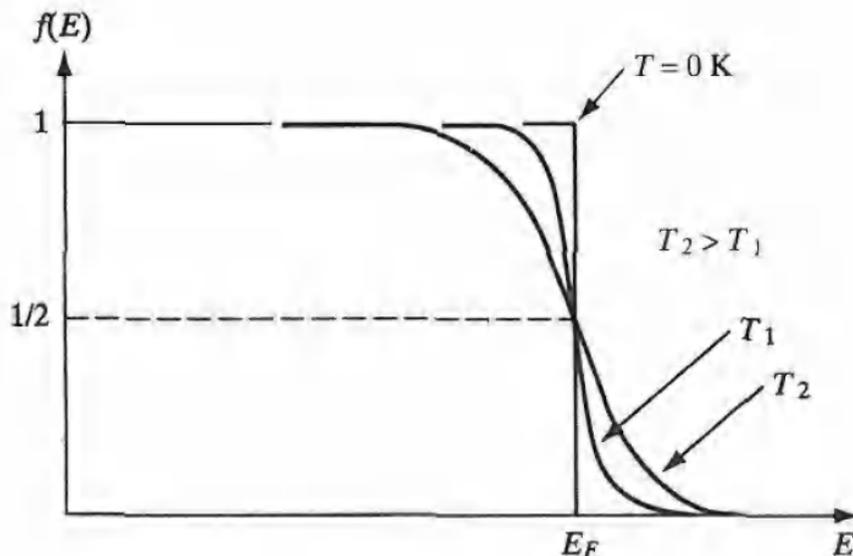
$$f(W) = \frac{1}{1 + e^{\frac{W - W_F}{kT}}}$$

$W_F =$ **Fermi-Energie** als freier Parameter (Energie mit Besetzungswahrscheinlichkeit 0.5)

Grundlage der Fermi-Dirac-Verteilung: Quantenstatistik + zusätzliche Annahmen:

- Elektronen sind **ununterscheidbar**, d.h. die Vertauschung zweier Teilchen ergibt keinen neuen Zustand der in der statistischen Betrachtung extra gezählt werden muss.
- Fermionen (Teilchen mit halbzahligem Spin) gehorchen dem **Pauli-Prinzip**, d.h., jeder Zustand ist mit maximal einem Teilchen besetzt.
- Teilchen weisen **keine Wechselwirkung** auf („ideales Fermi-Gas“)

(siehe auch Ibach/Lüth, Festkörperphysik)



Quelle: Streetman, Solid-State Electronic Devices

Eigenschaften:

- Für $T \rightarrow 0$ K nähert sich die Fermi-Verteilung einer Sprungfunktion an.
- Für Energien weit entfernt von W_F kann die Fermi-Dirac-Verteilung durch die **Boltzmann-Verteilung** angenähert werden:

$$W \gg W_F : \quad f(W) \approx e^{-\frac{(W - W_F)}{kT}}$$

$$W \ll W_F : \quad 1 - f(W) \approx e^{-\frac{(W_F - W)}{kT}}$$

Für $|W - W_F| > 3 kT$ ist die Näherung besser als 5%!

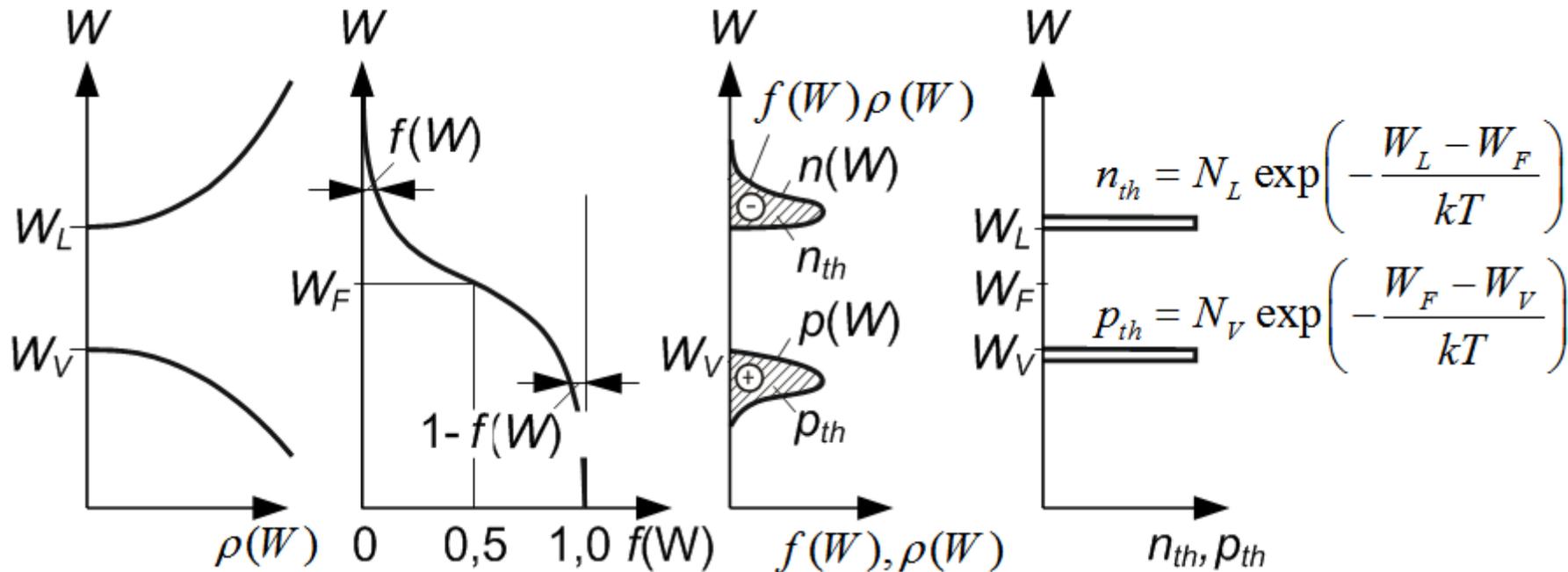
Ladungsträgerkonzentration im intrinsischen Halbleiter

Die **Ladungsträgerkonzentration** erhält man aus der Gesamtzahl der besetzten Zustände:

$$n_{th} = \int_{W_L}^{\infty} f(W) \rho_n(W) dW \approx N_L e^{-\frac{W_L - W_F}{kT}} \quad \text{wobei} \quad N_L = 2 \left(\frac{2\pi m_n kT}{h^2} \right)^{3/2}$$

$$p_{th} = \int_{-\infty}^{W_V} (1 - f(W)) \rho_p(E) dW \approx N_V e^{-\frac{W_F - W_V}{kT}} \quad \text{wobei} \quad N_V = 2 \left(\frac{2\pi m_p kT}{h^2} \right)^{3/2}$$

Äquivalente Zustandsdichten



Massenwirkungsgesetz

Im Halbleiter herrscht ein **dynamisches Gleichgewicht** zwischen der (temperaturabhängigen) Erzeugung von Elektron-Loch-Paaren durch „Aufreißen“ von kovalenten Bindungen und der Rekombination. Dieses lässt sich beschreiben durch

$$np = n_i^2(T) = N_L N_V \exp\left(-\frac{W_G}{kT}\right)$$

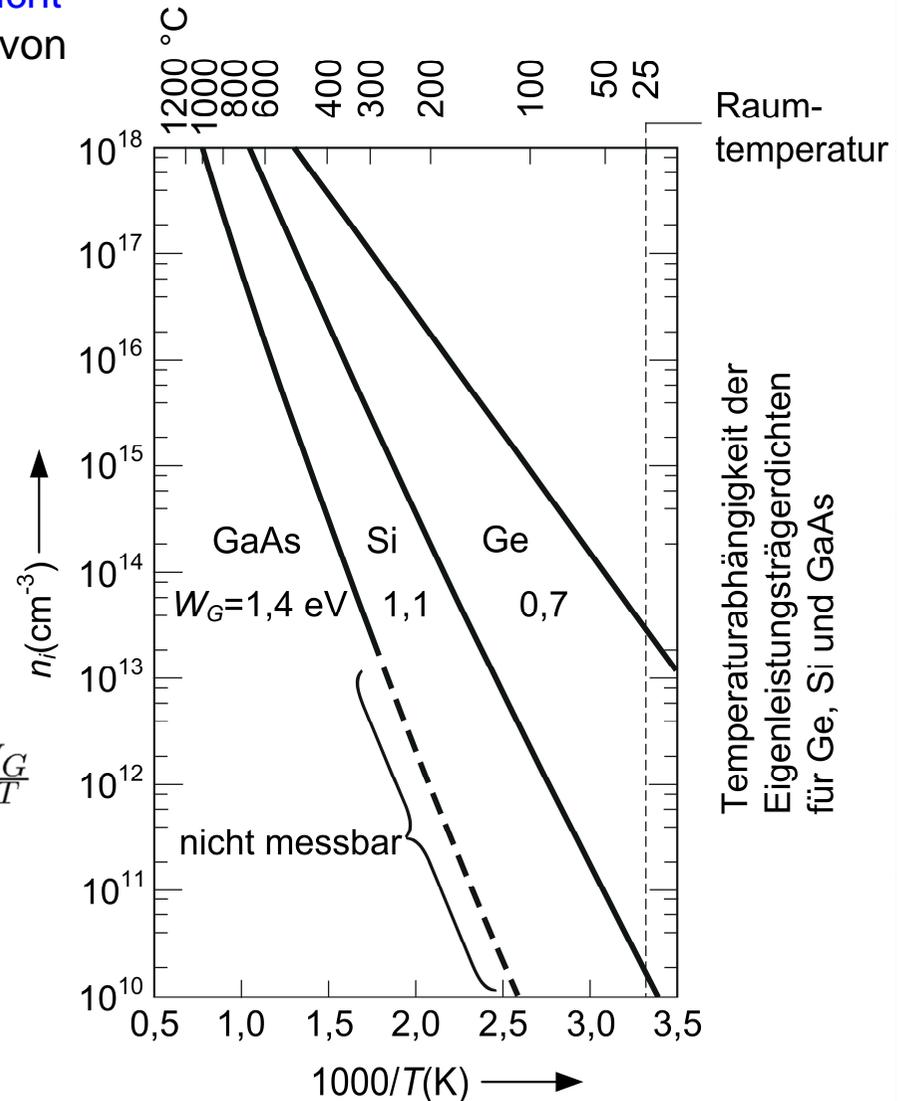
$n_i(T)$ ist eine durch das Material gegebene Konstante, die als **intrinsische Ladungsträgerdichte bzw. Eigenleitungsträgerdichte** bezeichnet wird.

Im intrinsischen (undotierten) Halbleiter gilt für die **thermisch erzeugten Elektronen- und Löcherdichten p_{th} und n_{th}** :

$$n_{th} = p_{th} = n_i(T); \quad n_i^2(T) = N_L N_V e^{-\frac{W_G}{kT}}$$

Bei Raumtemperatur (293 K):

- Ge $n_i = 2,4 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$
- Si $n_i = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$
- InP $n_i = 1,2 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-3}$
- GaAs $n_i = 1,8 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-3}$



Lage des Fermi-Niveaus im intrinsischen Halbleiter

Aus der Forderung nach **Ladungsneutralität** ($n = p = n_i$) ergibt sich die Lage des Fermi-Niveaus im intrinsischen Halbleiter:

$$W_F = \frac{1}{2}(W_V + W_L) + kT \ln \sqrt{\frac{N_V}{N_L}} = \frac{1}{2}(W_V + W_L) + \frac{3}{4}kT \ln \left(\frac{m_p}{m_n} \right)$$

- Bei $T = 0 \text{ K}$ liegt das Fermi-Niveau **in der Mitte der Bandlücke**.
- Für **hohe Temperaturen** nähert sich das Fermi-Niveau dem Band mit der **kleineren Zustandsdichte bzw. der kleinere effektiven Masse**, da dieses schneller gefüllt werden muss.

Vorlesung 4

02.11.2015

Dotierte Halbleiter

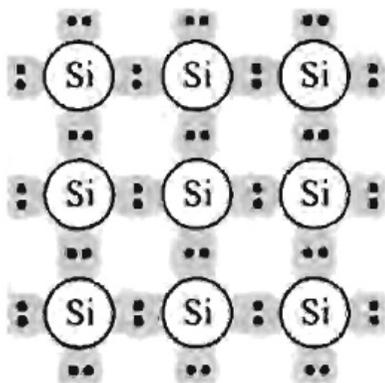
Perioden	Das Periodensystem der Elemente																																															
	Hauptgruppen I, II		Nebengruppen IIIA, IVA, VA, VIA, VIIA, VIIIA, IA, IIA										Hauptgruppen III, IV, V, VI, VII, VIII																																			
1	1	H	2	He											3	B	4	C	5	N	6	O	7	F	8	Ne																						
2	3	Li	4	Be											5	B	6	C	7	N	8	O	9	F	10	Ne																						
3	11	Na	12	Mg	13	Al	14	Si	15	P	16	S	17	Cl	18	Ar	13	Al	14	Si	15	P	16	S	17	Cl	18	Ar																				
4	19	K	20	Ca	21	Sc	22	Ti	23	V	24	Cr	25	Mn	26	Fe	27	Co	28	Ni	29	Cu	30	Zn	31	Ga	32	Ge	33	As	34	Se	35	Br	36	Kr	31	Ga	32	Ge	33	As	34	Se	35	Br	36	Kr
5	37	Rb	38	Sr	39	Y	40	Zr	41	Nb	42	Mo	43	Tc	44	Ru	45	Rh	46	Pd	47	Ag	48	Cd	49	In	50	Sn	51	Sb	52	Te	53	I	54	Xe	49	In	50	Sn	51	Sb	52	Te	53	I	54	Xe
6	55	Cs	56	Ba	57	La	72	Hf	73	Ta	74	W	75	Re	76	Os	77	Ir	78	Pt	79	Au	80	Hg	81	Tl	82	Pb	83	Bi	84	Po	85	At	86	Rn	81	Tl	82	Pb	83	Bi	84	Po	85	At	86	Rn
7	87	Fr	88	Ra	89	Ac	104	Ku	105	Ha	87	Fr	88	Ra	89	Ac	104	Ku	105	Ha	87	Fr	88	Ra	89	Ac	104	Ku	105	Ha																		

Variation der Ladungsträgerdichten durch **gezielte Hinzugabe von Fremdatomen**.

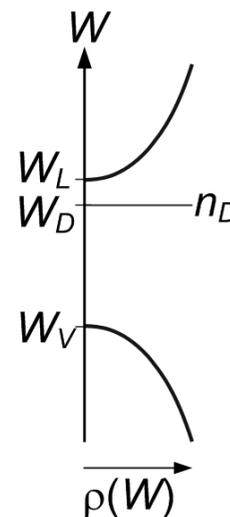
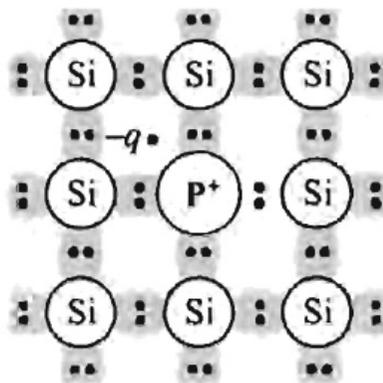
Beispiel: Silizium

- Donator-Dotierung (n-Dotierung) durch Elemente der V. Hauptgruppe (P, As, ...)
- Akzeptor-Dotierung (p-Dotierung) durch Elemente der III. Hauptgruppe (B, Al, ...)

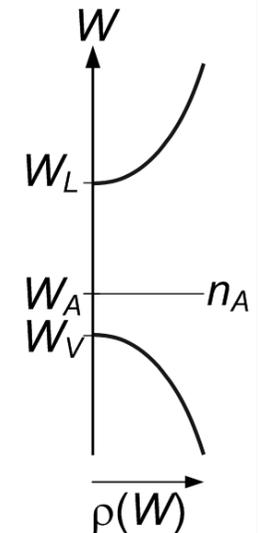
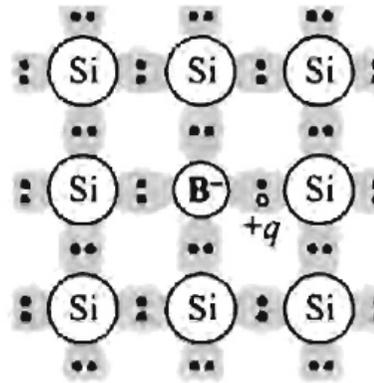
Intrinsisch:



n-Dotierung:

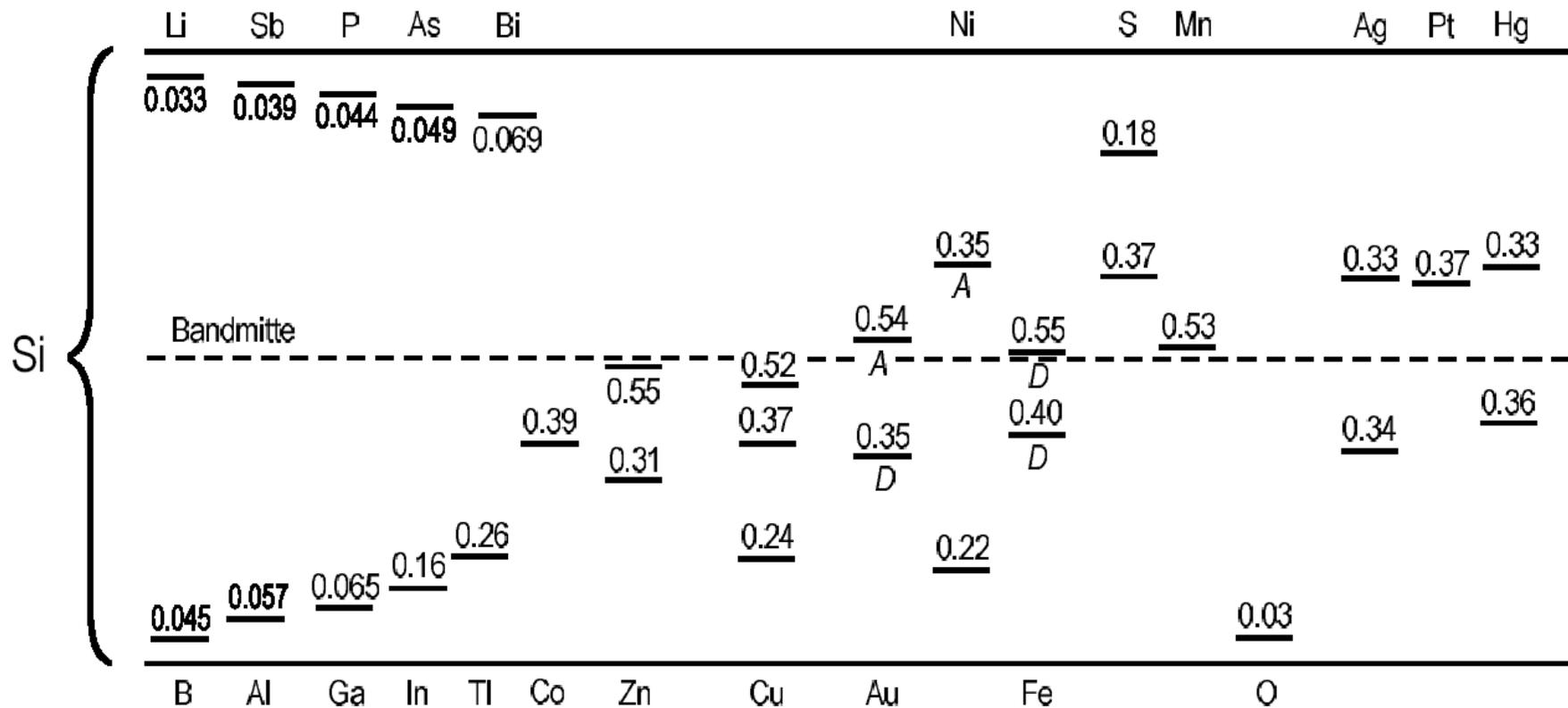


p-Dotierung:



Quelle: Sze, Physics of Semiconductor Devices

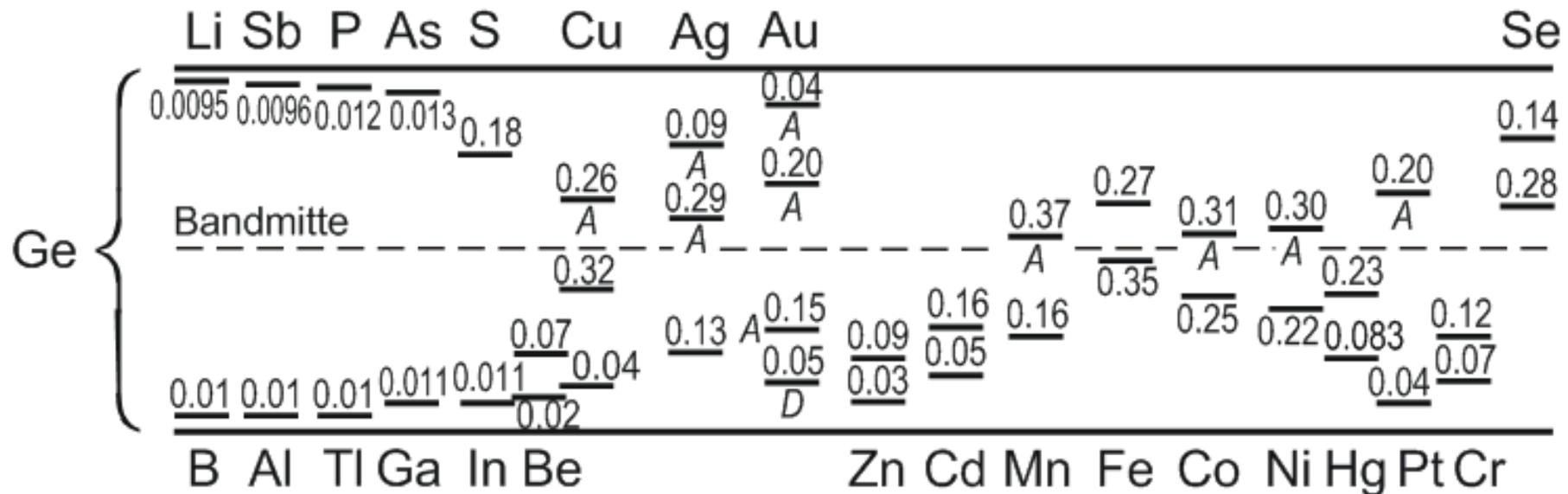
Lage der Energieniveaus bei verschiedenen Dotanden



$W_G = 1.12 \text{ eV}$

Ionisierungsenergien in eV für verschiedene Dotanden in Si. Die Niveaus unter der Bandmitte sind von der oberen Bandkante des Valenzbandes gemessen und stellen Akzeptorniveaus dar, wenn nicht durch D (Donator) gekennzeichnet; die Niveaus über der Bandmitte sind von der unteren Bandkante des Leitungsbandes gemessen und stellen Donatorniveaus dar, wenn nicht durch A (Akzeptor) gekennzeichnet.

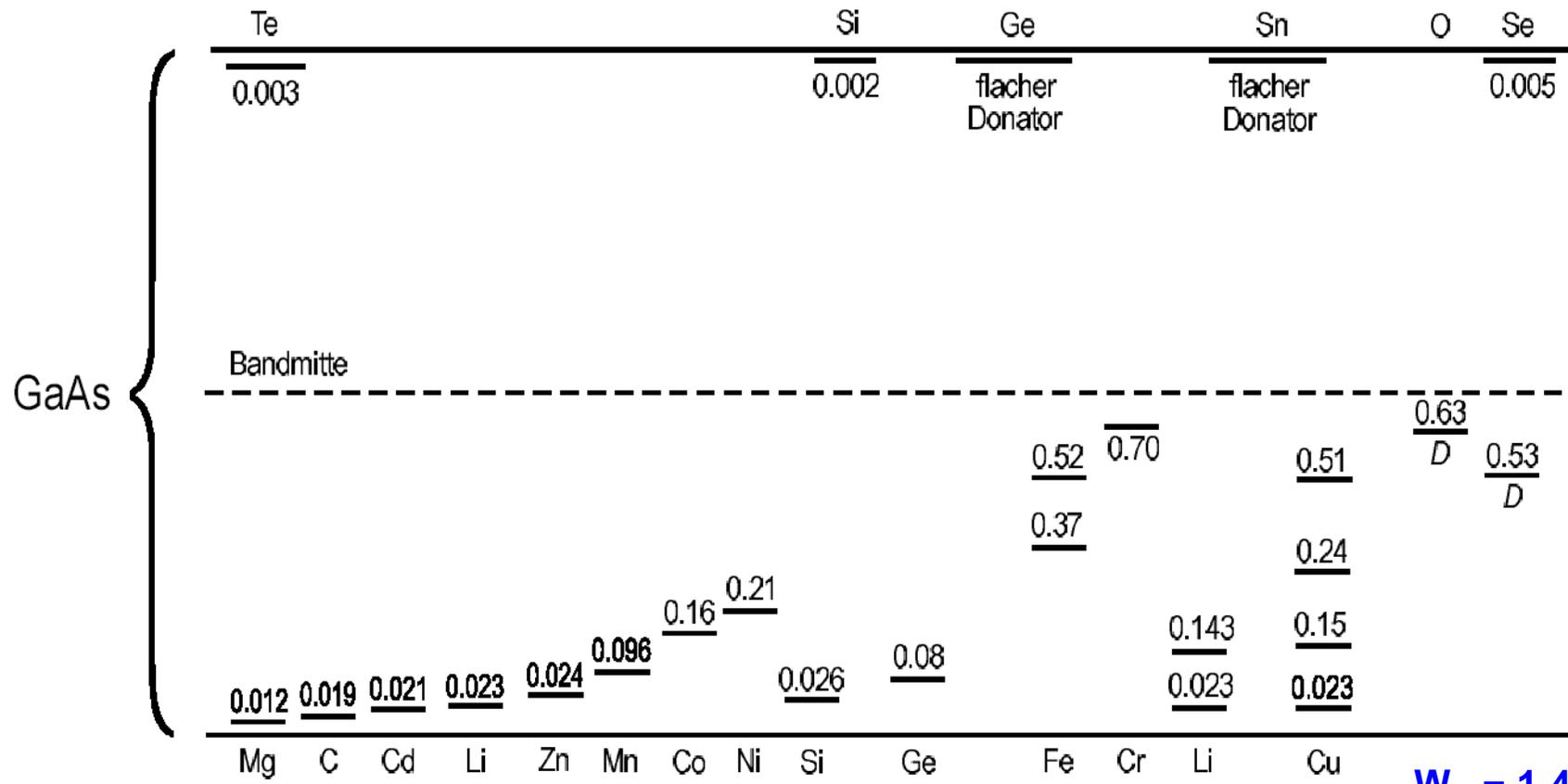
Lage der Energieniveaus bei verschiedenen Dotanden



$$W_G = 0.76 \text{ eV}$$

Ionisierungsenergien in eV für verschiedene Dotanden in Ge. Die Niveaus unter der Bandmitte sind von der oberen Bandkante des Valenzbandes gemessen und stellen Akzeptorniveaus dar, wenn nicht durch D (Donator) gekennzeichnet; die Niveaus über der Bandmitte sind von der unteren Bandkante des Leitungsbandes gemessen und stellen Donatorniveaus dar, wenn nicht durch A (Akzeptor) gekennzeichnet.

Lage der Energieniveaus bei verschiedenen Dotanden



$W_G = 1.42 \text{ eV}$

Ionisierungsenergien in eV für verschiedene Dotanden in GaAs. Die Niveaus unter der Bandmitte sind von der oberen Bandkante des Valenzbandes gemessen und stellen Akzeptorniveaus dar, wenn nicht durch D (Donator) gekennzeichnet; die Niveaus über der Bandmitte sind von der unteren Bandkante des Leitungsbandes gemessen und stellen Donatorniveaus dar, wenn nicht durch A (Akzeptor) gekennzeichnet.

Amphotere Dotierungen:

- In Verbindungshalbleitern können Fremdatome auf verschiedenen Gitterplätzen eingebaut werden und dort als Donator oder Akzeptor fungieren. Solche Störstellen nennt man **amphoter**.

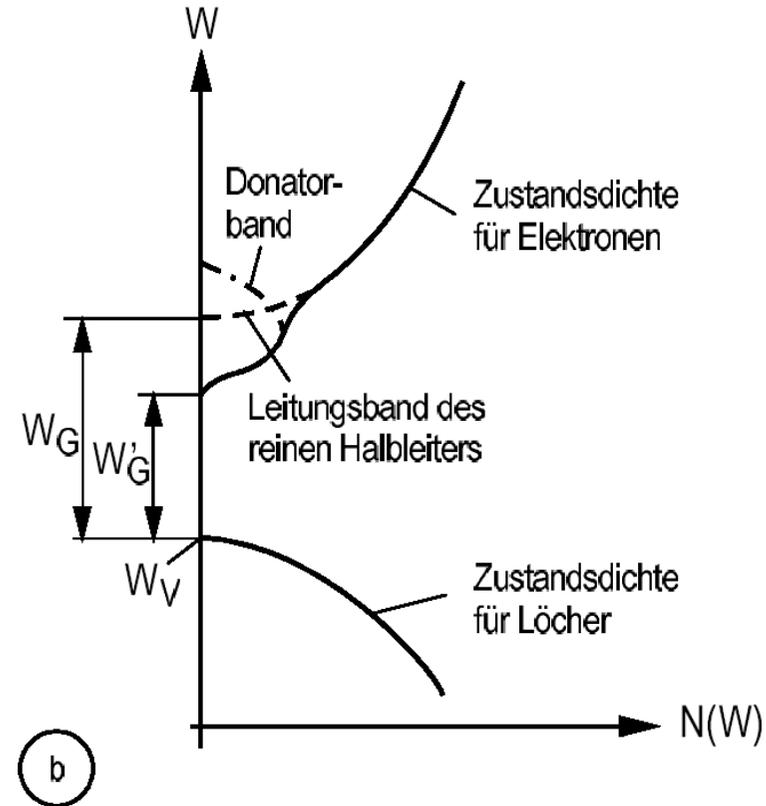
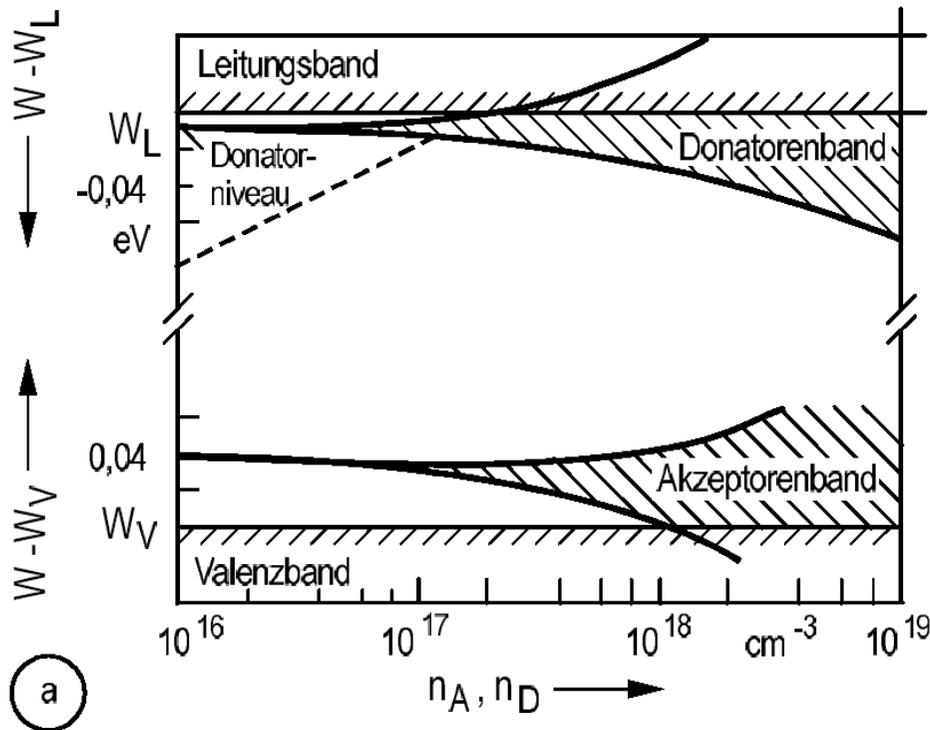
Beispiel: Elemente der IV-Gruppe (z.B. Si) können in einem III-V-Halbleiter als Donator (auf einem Ga-Platz) oder als Akzeptor (auf einem As-Platz) eingebaut werden.

Leitfähigkeitsdotierung:

- Abstand der Energieniveaus von der Bandkante liegt in der Größenordnung von $W_L - W_D \approx kT$

Semi-isolierende Dotierung / Lebensdauerdotierung:

- Energieniveaus der Störstellen liegen in der Mitte der Bandlücke und fungieren als Rekombinationszentren für Elektron-Loch-Paare anstatt durch Abgabe von Elektronen / Löchern zur Trägerkonzentration beizutragen
- **Beispiel: Semiisolierendes GaAs** mit sehr geringer Leitfähigkeit durch Dotierung von GaAs mit Cr (z.B. für HF-Bauteile)



- Bei sehr hoher Dotierung kommt es durch die Wechselwirkung der Störstellen zu einem **Aufspalten des Störstellenniveaus** und zu einer **Überlappung mit dem Leitungs- bzw. Valenzband**.
 - Außerdem rückt das Fermi-Niveau sehr nahe an die Bandkante heran bzw. dringt in das Band ein.
- ⇒ Halbleiter zeigt **metallähnliches Verhalten** (entarteter Halbleiter).

Bei der Berechnung der Besetzungswahrscheinlichkeiten muss die zweifache **Spin-Entartung des besetzten Donator- bzw. des unbesetzten Akzeptorzustandes** berücksichtigt werden:

$$\Rightarrow f_D(W_D) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{\frac{W_D - W_F}{kT}}}$$

$$f_A(W_A) = \frac{1}{1 + 2e^{\frac{W_A - W_F}{kT}}}$$

$$\left. \vphantom{\begin{matrix} f_D(W_D) \\ f_A(W_A) \end{matrix}} \right\} f_{B,D,A}(W) = \frac{1}{1 + \frac{1}{g}e^{\frac{W - W_F}{kT}}}$$

wobei $g = \begin{cases} 1 & \text{Bandzustände (B)} \\ 2 & \text{Donatoren (D)} \\ \frac{1}{2} & \text{Akzeptoren (A)} \end{cases}$

⇒ Konzentration der **ionisierten Donator- bzw. Akzeptor-Atome**:

$$n_D^+ = n_D [1 - f_D(W_D)] = \frac{n_D}{1 + 2 \exp\left(\frac{W_F - W_D}{kT}\right)},$$

$$n_A^- = n_A f_A(W_A) = \frac{n_A}{1 + 2 \exp\left(\frac{W_A - W_F}{kT}\right)}.$$

Siehe auch: Spenke, E.: Elektronische Halbleiter, Springer Verlag, Berlin, 1965.

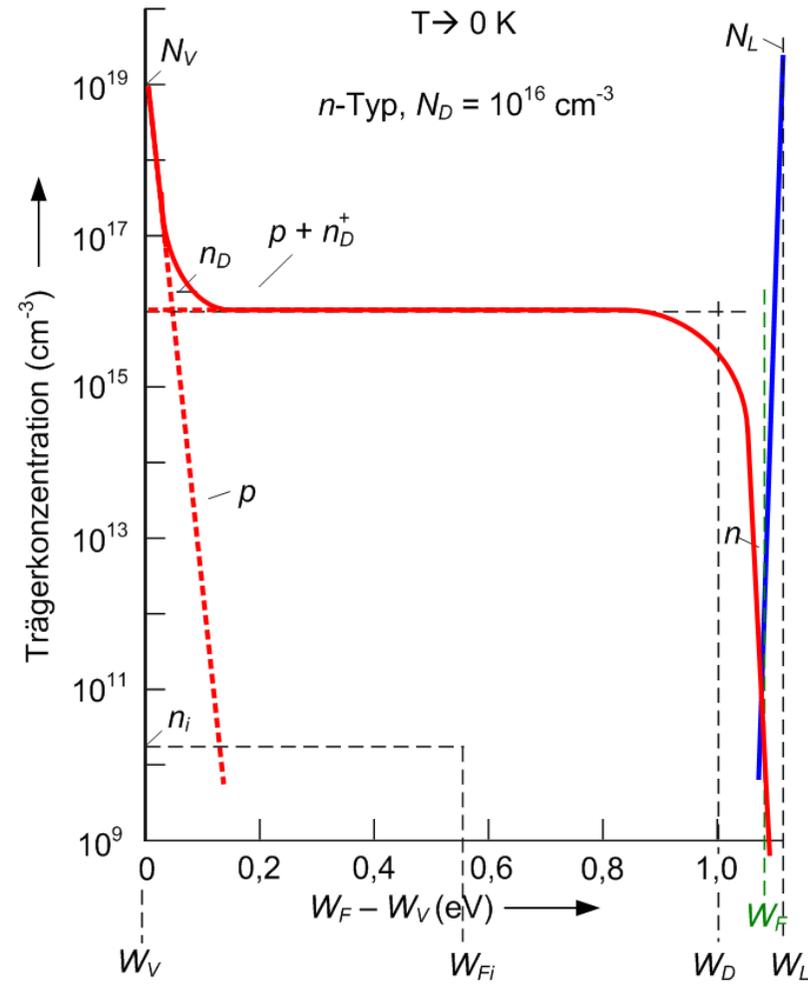
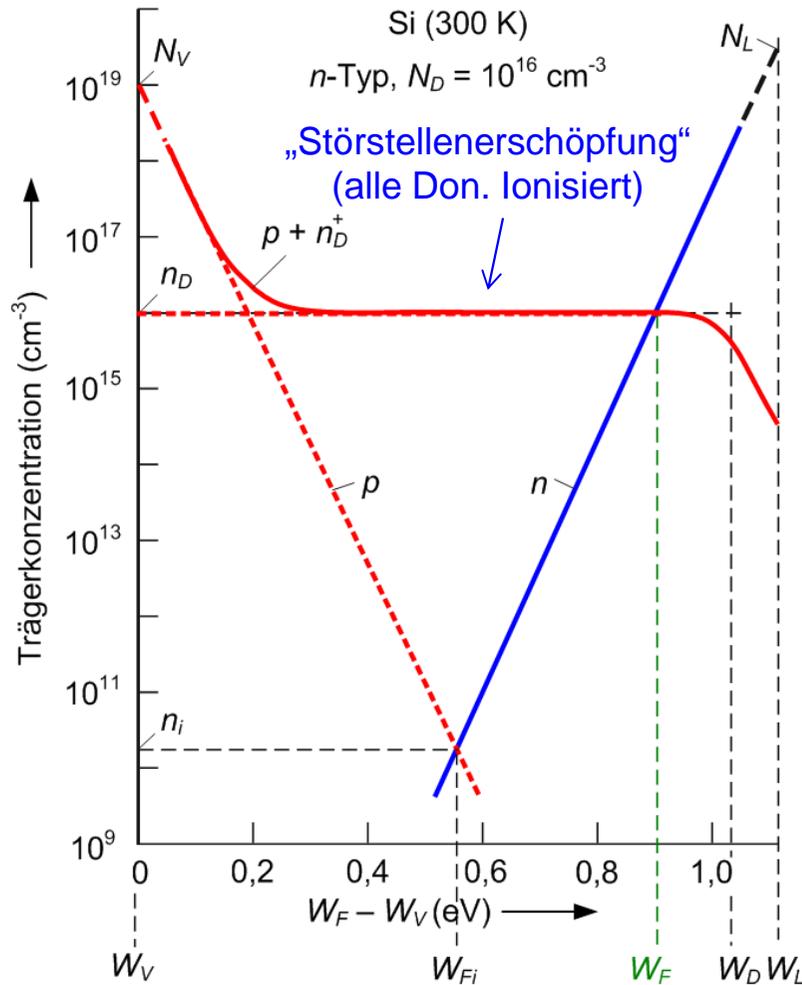
Implizite Bestimmungsgleichung für die Berechnung des Fermi-Niveaus aus der Bedingung der Ladungsneutralität:

$$n + n_A^- = p + n_D^+$$

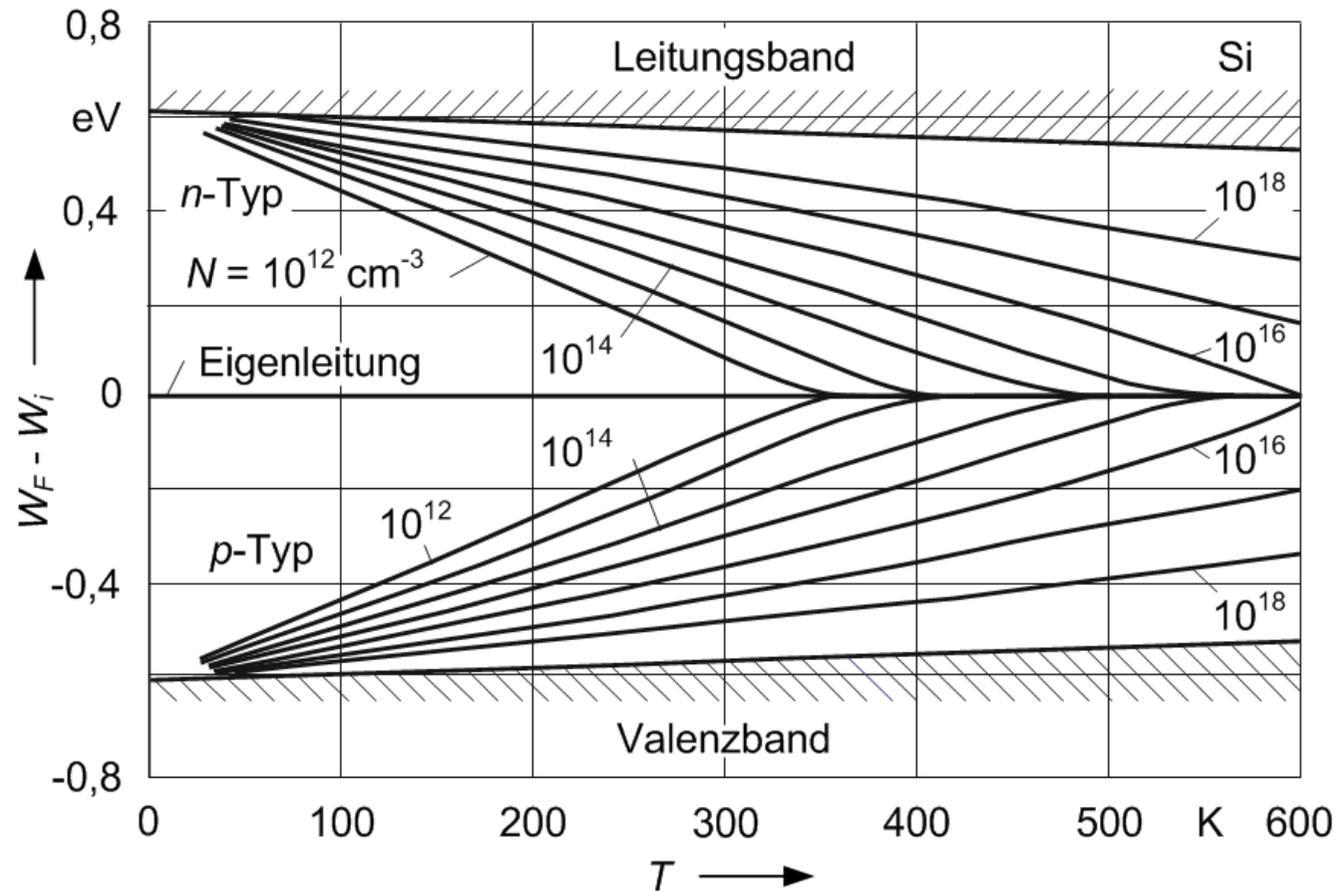
$$\begin{aligned} \Rightarrow & N_L \exp\left(-\frac{W_L - W_F}{kT}\right) + \frac{n_A}{1 + 2 \exp\left(\frac{W_A - W_F}{kT}\right)} \\ & = N_V \exp\left(-\frac{W_F - W_V}{kT}\right) + \frac{n_D}{1 + 2 \exp\left(\frac{W_F - W_D}{kT}\right)} \end{aligned}$$

Graphische Lösung für den n -Halbleiter

$$\frac{N_L \exp\left(-\frac{W_L - W_F}{kT}\right)}{n} = \underbrace{N_V \exp\left(-\frac{W_F - W_V}{kT}\right)}_p + \frac{n_D}{1 + 2 \exp\left(\frac{W_F - W_D}{kT}\right)}_{n_D^+}$$

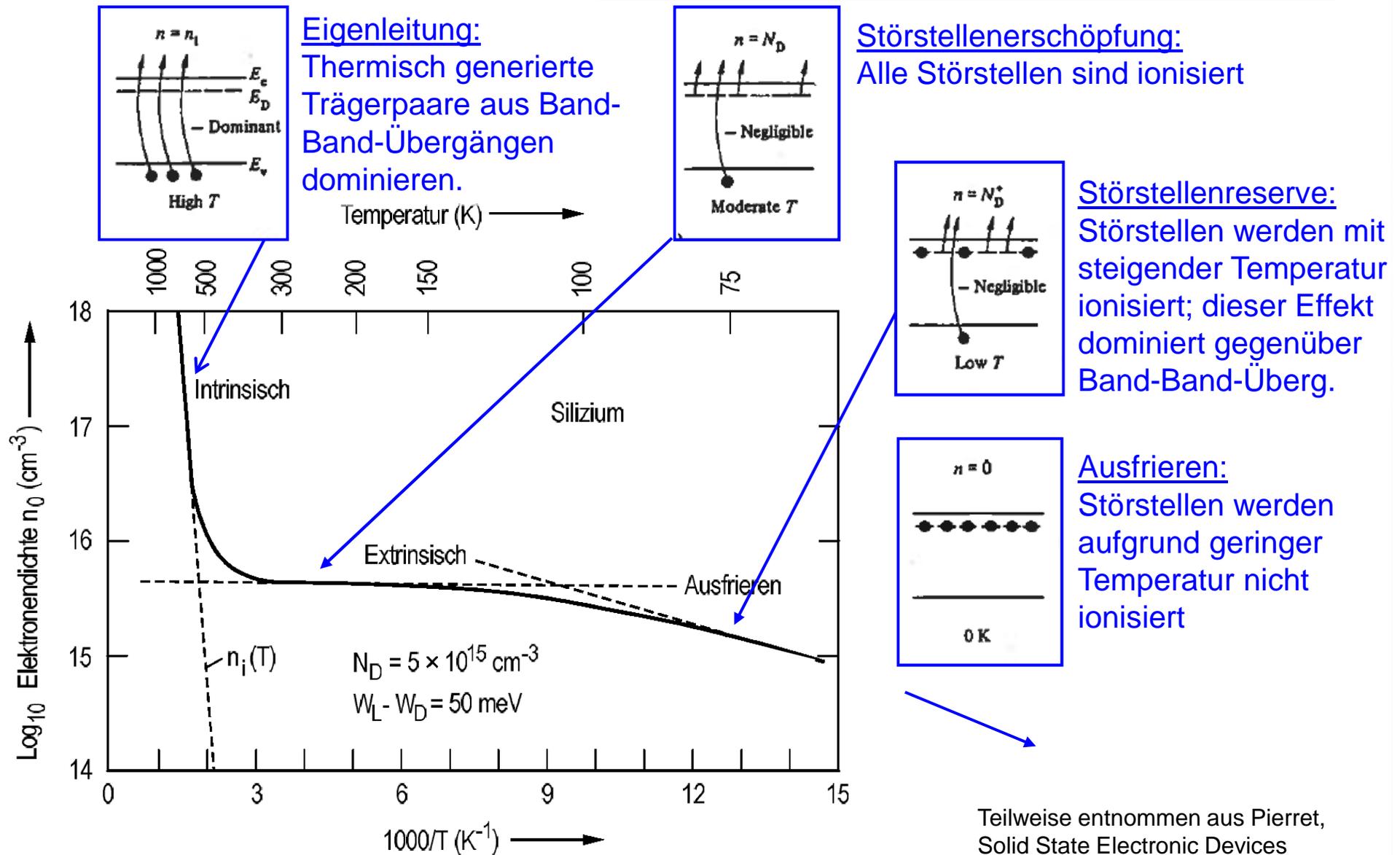


Lage des Fermi-Niveaus im dotierten Halbleiter



- Mit steigender **Dotierung** (flache Störstellen): Fermi-Niveau wird zur Bandkante gezogen
- Mit steigender **Temperatur**: Fermi-Niveau bewegt sich zur Mitte der Bandlücke (Eigenleitung)
- Für sehr hohe Temperaturen: Halbleiter wird „eigenleitend“; Fermi-Niveau nähert es sich dem Band mit der kleineren äquivalenten Zustandsdichte („Bandgewicht“) an (nicht eingezeichnet!)
- **Bandlücke** nimmt mit steigender Temperatur ab

Majoritätsträgerdichte im *n*-Halbleiter



Teilweise entnommen aus Pierret, Solid State Electronic Devices

- Störstellenerschöpfung: $n_D^+ = n_D$, $n_A^- = n_A$

⇒ Majoritätsträgerdichten sind unabhängig von der Temperatur:

$$\left. \begin{array}{l} n + n_A = p + n_D \\ np = n_i^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} n = \sqrt{\left(\frac{n_D - n_A}{2}\right)^2 + n_i^2} + \frac{n_D - n_A}{2}, \\ p = \sqrt{\left(\frac{n_D - n_A}{2}\right)^2 + n_i^2} - \frac{n_D - n_A}{2} \end{array}$$

- Starke Dotierung: $|n_D - n_A| \gg n_i$

n – Halbleiter:

$$\left. \begin{array}{l} n_n + n_A = n_D \\ n_n p_n = n_i^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} n_n = n_D - n_A \\ p_n = \frac{n_i^2}{n_D - n_A} \end{array}; \quad W_F = W_L - kT \ln \left(\frac{N_L}{n_D - n_A} \right)$$

p – Halbleiter:

$$\left. \begin{array}{l} n_A = n_D + p_p \\ n_p p_p = n_i^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} p_p = n_A - n_D \\ n_p = \frac{n_i^2}{n_A - n_D} \end{array}; \quad W_F = W_V + kT \ln \left(\frac{N_V}{n_A - n_D} \right)$$

Driftstrom:

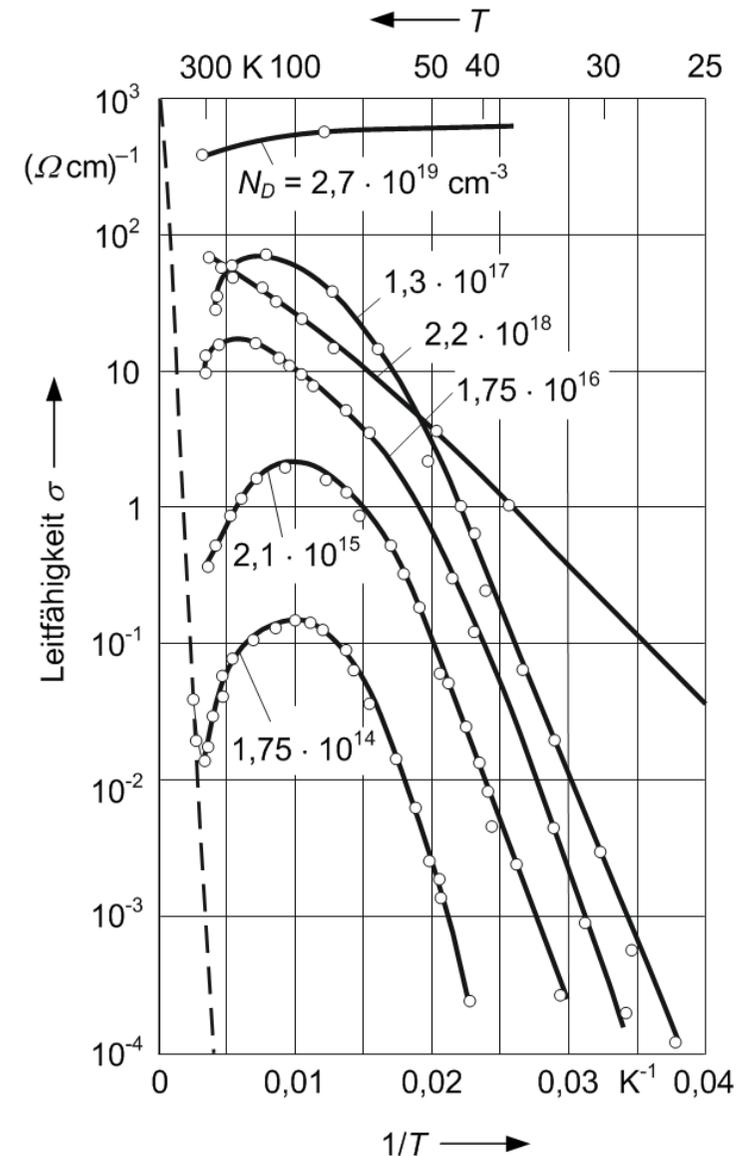
$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_F &= \mathbf{J}_{n,F} + \mathbf{J}_{p,F} \\
 &= -en\mathbf{v}_n + ep\mathbf{v}_p \\
 &= [en\mu_n + ep\mu_p] \mathbf{E} \\
 &= \sigma \mathbf{E}
 \end{aligned}$$

Leitfähigkeit: $\sigma = en\mu_n + ep\mu_p$

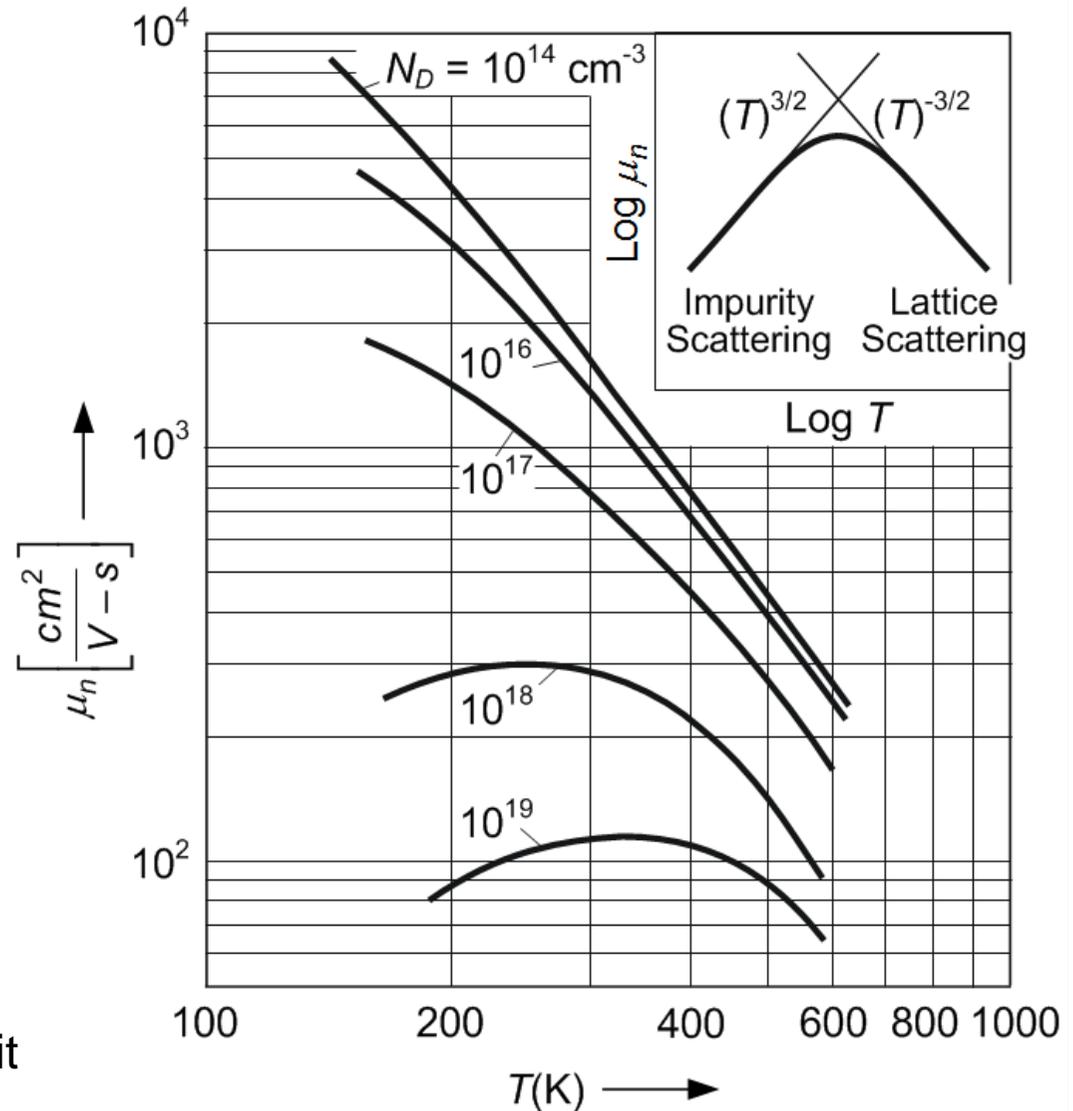
Beweglichkeit für Elektronen und Löcher:

$$\mu_n = \frac{e\tau_{LB}}{m_n} \quad \mu_p = \frac{e\tau_{VB}}{m_p}$$

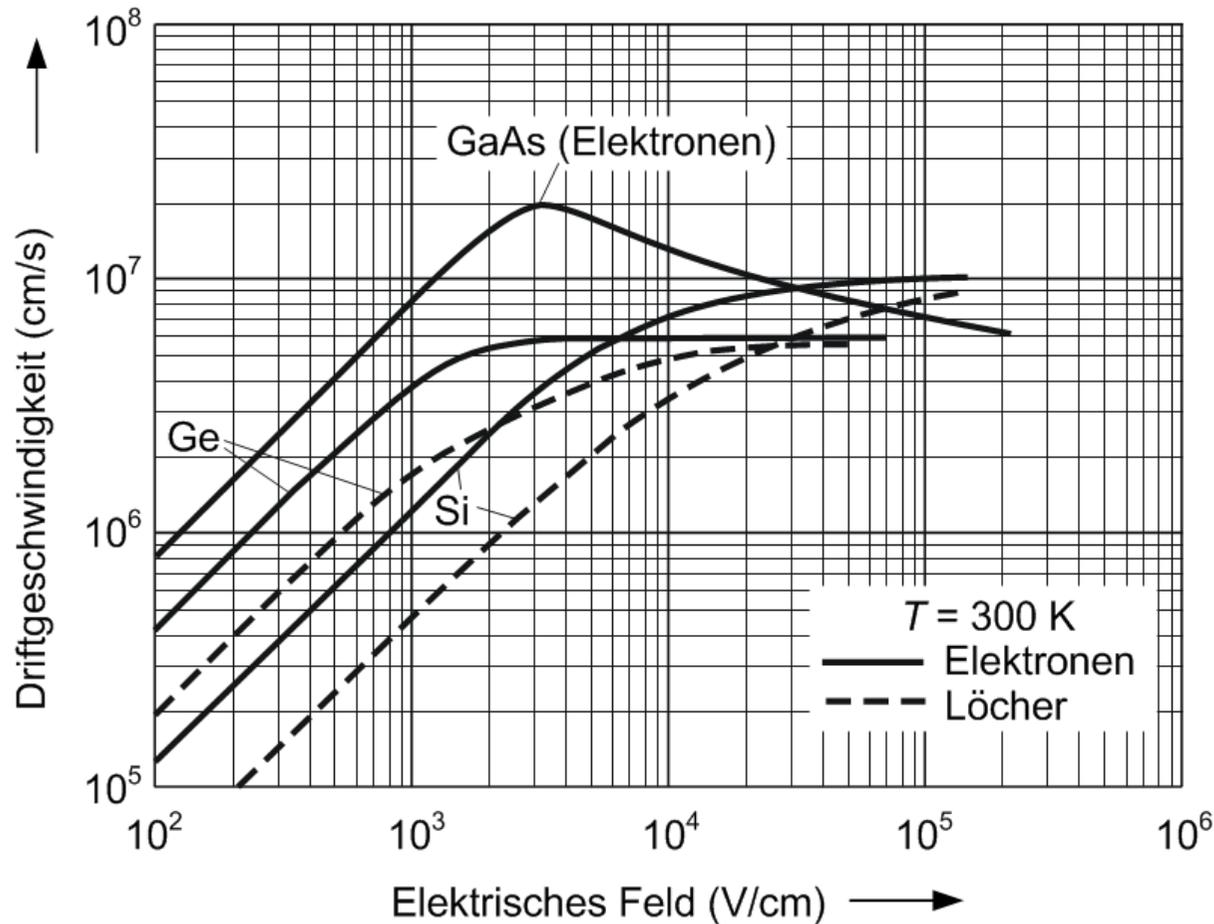
$\tau_{LB}, \tau_{VB} =$ **Intrabandimpulsrelaxationszeit** im LB bzw. CB, abhängig von Temperatur und Dotierung
 \neq **Energierelaxationszeiten** im LB bzw. VB



- **Hohe Dotierungen** verringern die Beweglichkeit aufgrund von Wechselwirkungen mit Dotanden („**Impurity Scattering**“)
- Die Wechselwirkung mit Dotanden („**Impurity Scattering**“) ist **selbst temperaturabhängig**; der entsprechende Wechselwirkungsquerschnitt nimmt mit der Bewegungsgeschwindigkeit der Elektronen (Temperatur) ab ($\mu \propto T^{3/2}$ bei tiefen Temperaturen)
- **Hohe Temperatur** verringert die Beweglichkeit durch Wechselwirkungen mit Gitterschwingungen („**Lattice Scattering**“); dieser Effekt nimmt mit der Temperatur zu ($\mu \propto T^{-3/2}$)



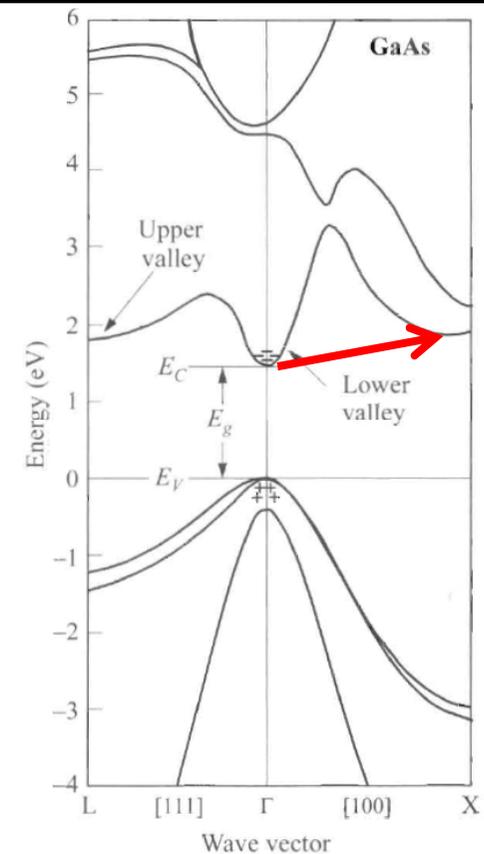
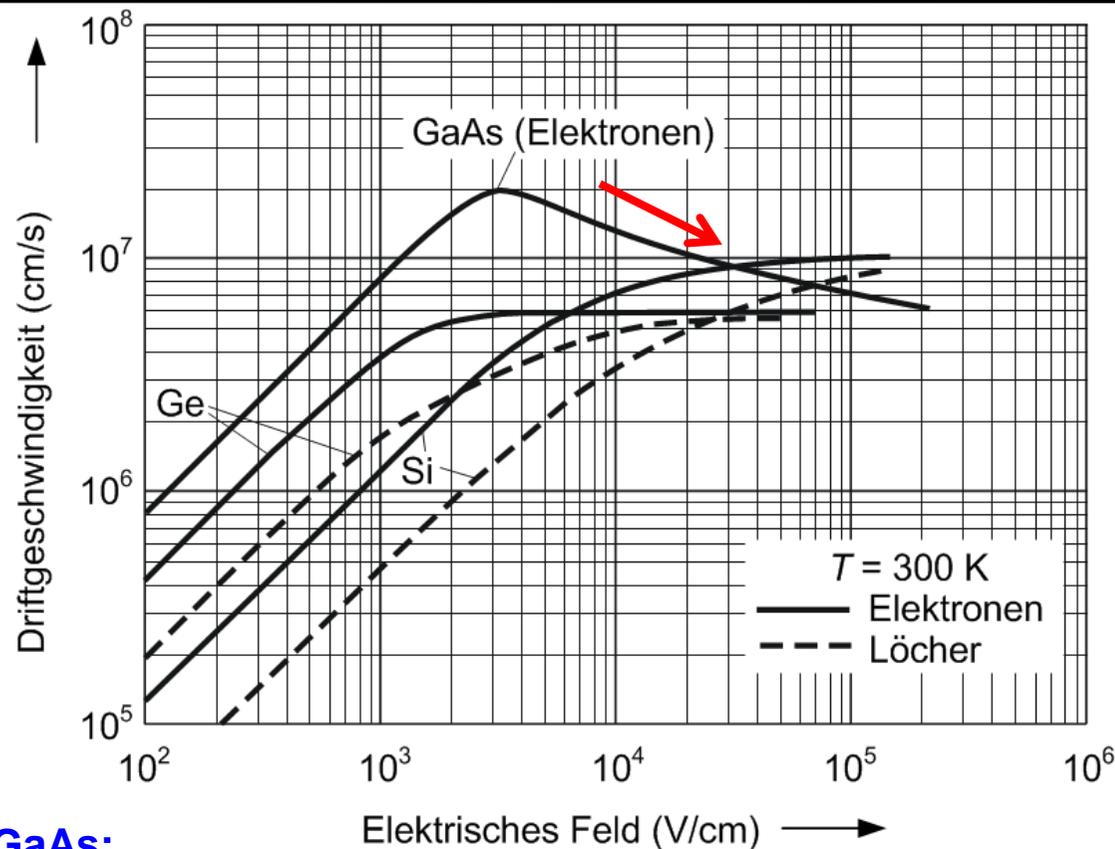
Driftgeschwindigkeiten bei starken elektrischen Feldern



- **Hohe Feldstärken:** Wechselwirkung mit energiereichen longitudinal-optischen (LO) Phononen
 ⇒ Driftgeschwindigkeiten nähern sich der Sättigungsdriftgeschwindigkeit v_s an:

$$v_{n,p} = \frac{v_s}{[1 + (E_0/E)^\gamma]^{1/\gamma}}$$

Driftgeschwindigkeiten bei starken elektrischen Feldern

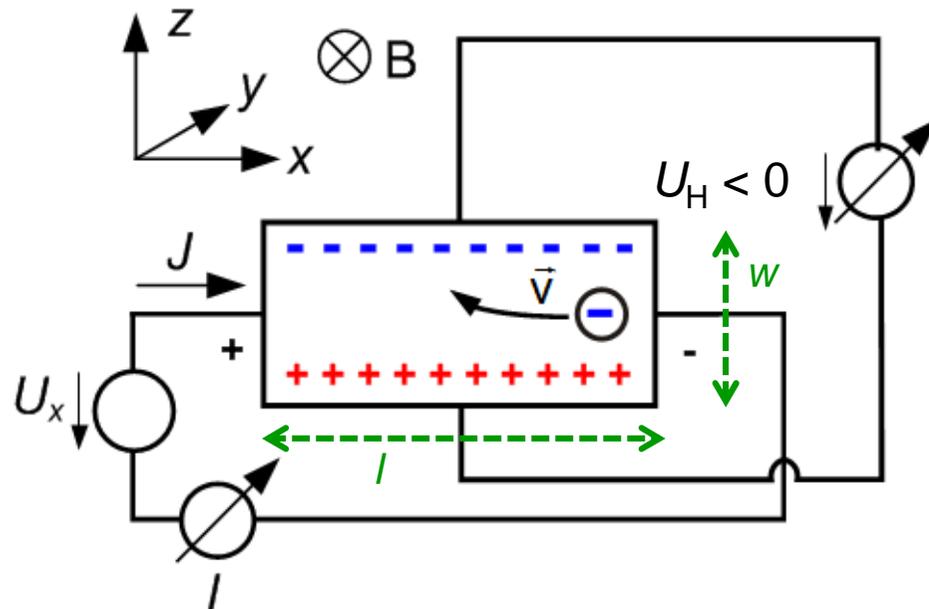


GaAs:

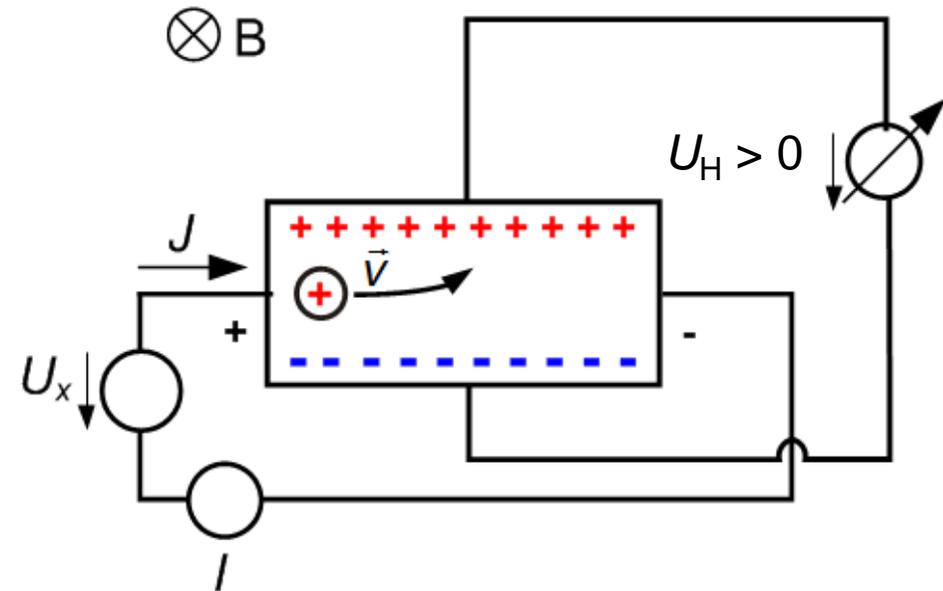
- Hohe Beweglichkeit, d.h. hohe Driftgeschwindigkeit
- ⇒ Vorteilhaft für Hochfrequenzbauteile: Kürzere Transitzeiten, höhere Schaltgeschwindigkeiten
- Negative differentielle Driftgeschwindigkeit durch Streuung von Elektronen in ein zweites Minimum des LB, das eine höhere effektive Masse aufweist.
- ⇒ Negativer differentieller Widerstand; kann für HF-Oszillatoren verwendet werden (Gunn-Diode)

$$m^* = \hbar^2 \left(\frac{\partial^2 W_n(k)}{\partial k^2} \Big|_{k=k_0} \right)^{-1}$$

n-Halbleiter



p-Halbleiter



Krafteinwirkung auf Elektronen bzw. Löcher:

$$\mathbf{F}_n = -e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_n \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{F}_p = e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_p \times \mathbf{B})$$

Driftbewegung und Stromdichten für Elektronen:

$$\mathbf{v}_n = \mu_n \frac{\mathbf{F}_n}{e} \quad \mathbf{J}_n = -en\mathbf{v}_n$$

Elektrisches Feld:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}_n}{en\mu_n} + \frac{\mathbf{J}_n}{en} \times \mathbf{B}$$

Im stationären Zustand:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_n &= J_x \mathbf{e}_x \\ \mathbf{B} &= B \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} U_x &= E_x l = \frac{J_n l}{en\mu_n} \\ U_H &= -E_z w = -\frac{J_n B w}{en} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \mu_n = -\frac{U_H}{U_x} \frac{l}{B w}$$

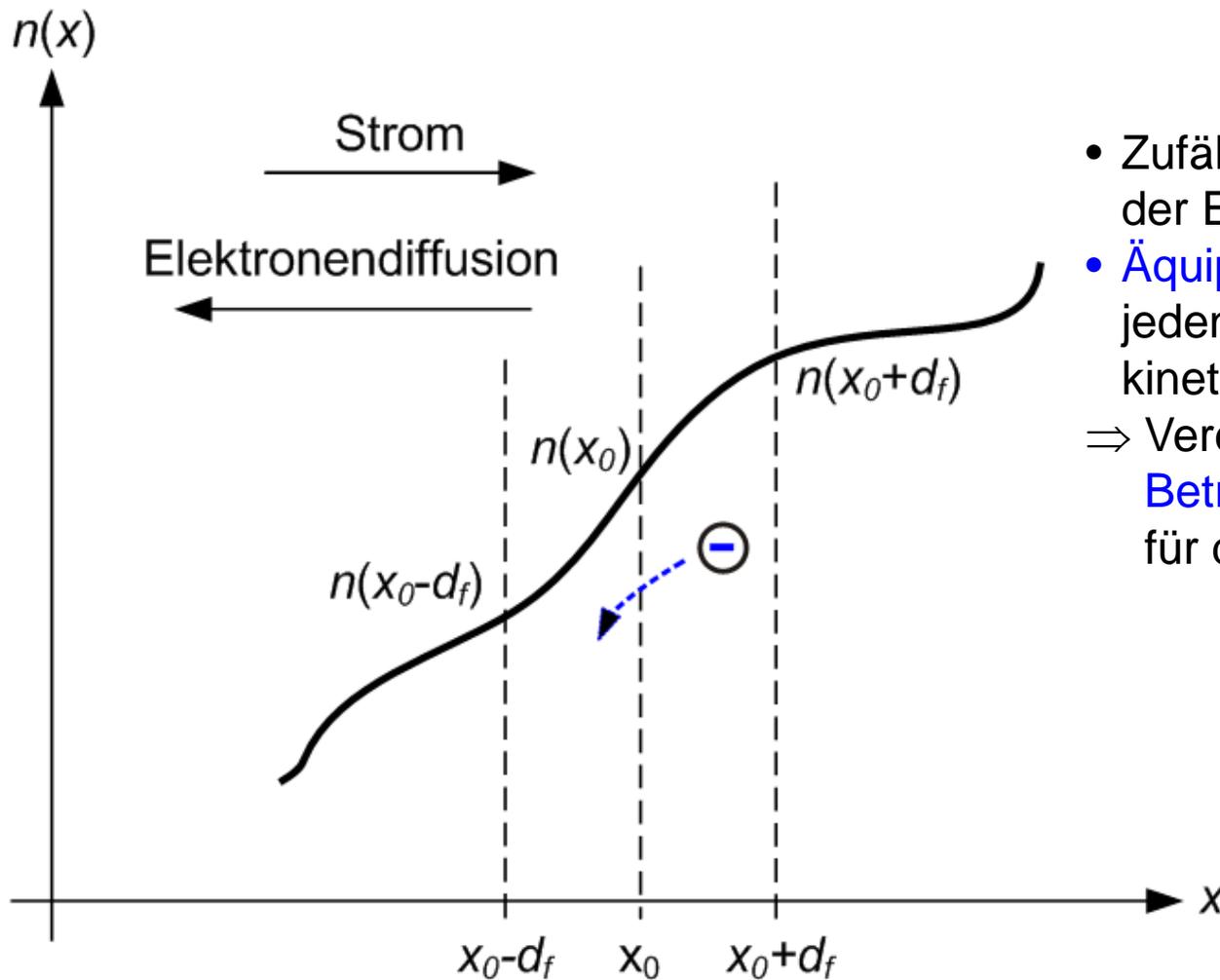
Analoge Ableitung für p-HL:

$$\begin{aligned} U_x &= E_x l = \frac{J_p l}{ep\mu_p} \\ U_H &= -E_z w = \frac{J_p B w}{ep} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \mu_p = \frac{U_H}{U_x} \frac{l}{B w}$$

- Das **Vorzeichen der Hall-Spannung** gibt den Halbleiter-Typ an.
- Messung der Hall-Spannung erlaubt die **getrennte Ermittlung der Ladungsträgerbeweglichkeit und der Ladungsträgerkonzentration**.
- Hall-Sensoren werden zur **Messung des magnetischen Feldes eingesetzt**.

Vorlesung 5

06.11.2015



- Zufällige thermische Bewegung der Elektronen
 - Äquipartitionstheorem: Auf jeden Freiheitsgrad entfällt die kinetische Energie $\frac{1}{2} kT$
- ⇒ Vereinfachte **eindimensionale Betrachtung entlang x** , wobei für die kinetische Energie gilt:

$$\frac{1}{2} m_n v_{th}^2 = \frac{1}{2} kT$$

$$\mu_n = \frac{e\tau_{LB}}{m_n}$$

Betrachte **Netto-Flussdichte** der Elektronen in positive x-Richtung:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\tau_{LB}} \frac{d_f}{dx} \left[n(x - d_f) - n(x + d_f) \right] \approx -D_n \frac{\partial n(x)}{\partial x}$$

wobei $D_n = \frac{kT}{m_n} \tau_{LB} = \frac{kT}{e} \mu_n$ **Diffusionskonstante**

„Einstein-Beziehung“ für Elektronen

Zugehöriger **Diffusionsstrom** der Elektronen in drei Dimensionen:

$$\mathbf{J}_{D,n} = eD_n \nabla n(\mathbf{r})$$

Analog: Diffusionsstrom der **Löcher**

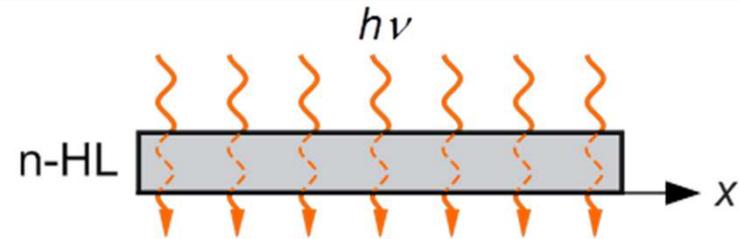
$$\mathbf{J}_{D,p} = -eD_p \nabla p(\mathbf{r})$$

$$D_p = \frac{kT}{m_p} \tau_{VB} = \frac{kT}{e} \mu_p$$

Diffusionskonstante und „Einstein-Beziehung“ für Löcher

„Einschuss“ oder Erzeugung von freien Ladungsträgern

Halbleiter im **Nichtgleichgewicht**: $pn > n_i^2$



Zwei wichtige Fälle:

- Halbleiter unter schwacher Injektion (Low-Level Injection, LLI):

Die zusätzlich generierten Überschussträgerdichten n' und p' sind klein gegenüber der Majoritätsträgerdichte im thermischen Gleichgewicht. Unter Annahme von Störstellenerschöpfung im dotierten Halbleiter gilt dann:

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{n-HL:} \quad n = n_{\text{th}} + n' \cong |n_D - n_A| \\
 \quad \quad p = p_{\text{th}} + p' \ll |n_D - n_A| \\
 \\
 \text{p-HL:} \quad n = n_{\text{th}} + n' \ll |n_D - n_A| \\
 \quad \quad p = p_{\text{th}} + p' \cong |n_D - n_A|
 \end{array} \right\} \Rightarrow n_i^2 < np \ll (n_D - n_A)^2$$

- Starke Injektion (High-Level Injection, HLI):

Überschussträgerdichten sind vergleichbar zu oder wesentlich größer als die Majoritätsträgerdichte,

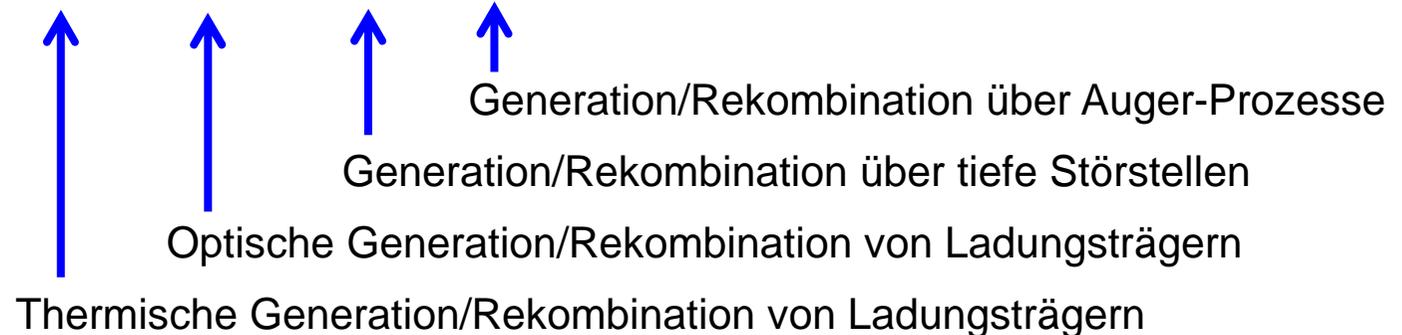
$$n, p > |n_D - n_A|$$

Die **Relaxation der Überschussträgerdichten** wird durch die Differenz zwischen der Generationsrate g und Rekombinationsrate r bestimmt:

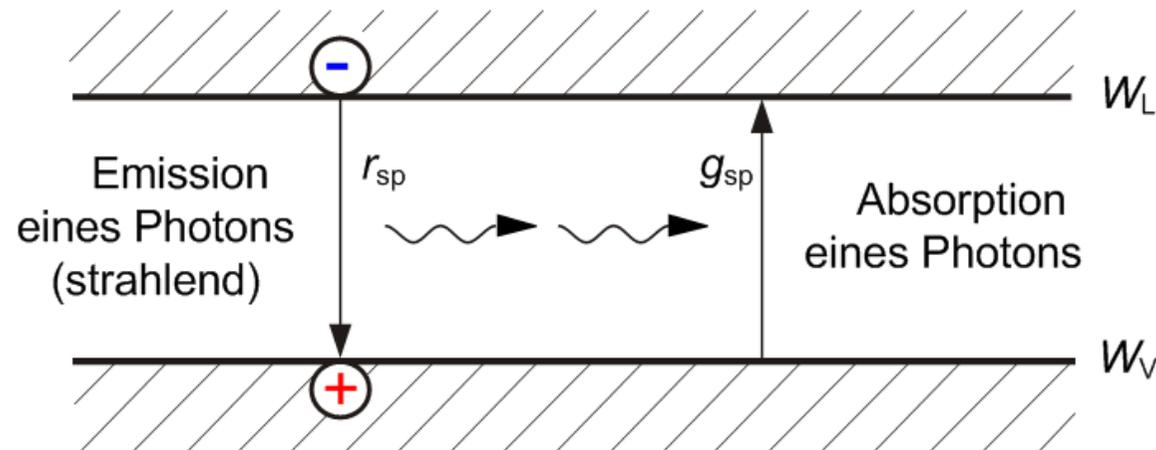
$$\frac{dn}{dt} = \frac{dp}{dt} = g - r$$

wobei $g = g_{\text{th}} + g_{\text{opt}} + g_{\text{t}} + g_{\text{Auger}} \dots$

$$r = r_{\text{th}} + r_{\text{opt}} + r_{\text{t}} + r_{\text{Auger}} \dots$$



- Zu jedem **Generationsprozess** muss es auch einen entsprechenden **Rekombinationsprozess** geben.
- Prinzip des **detaillierten Gleichgewichts**: Im thermischen Gleichgewicht sind die Generationsraten g für jeden Einzelprozess gleich der zugehörigen Rekombinationsrate r



Band-Band-Rekombination („spontane Rekombination“):

- **Direkte Rekombination eines Elektrons mit einem Loch** unter Aussendung eines Photons (und ggf. eines Phonons im Fall indirekter Halbleiter)
- **Rekombinationsrate** ist proportional zur Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Elektron und ein Loch begegnen, also proportional zum Produkt der beiden Dichten

$$r_{sp} = B_{sp}np$$

- Die **Generationsrate** g_{sp} ergibt sich aus der Balance von Generation und Rekombination im thermischen GGW:

$$g_{sp} = B_{sp}n_{th}p_{th} = B_{sp}n_i^2$$

- Bei Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht ergibt sich die **Netto-Generationsrate** zu:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{dp}{dt} = -B_{sp} \left(np - n_i^2 \right)$$

Vereinfachung im für den Fall schwacher Injektion:

$$\frac{dn'}{dt} = \frac{dp'}{dt} = \begin{cases} -\frac{p'}{\tau_{mjn}} & \text{im n-Halbleiter} \\ -\frac{n'}{\tau_{min}} & \text{im p-Halbleiter} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\tau_{min}} = \begin{cases} B_{sp} n_{th} & \text{im n-Halbleiter} \\ B_{sp} p_{th} & \text{im p-Halbleiter} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\tau_{min}} \approx B_{sp} (n_{th} + p_{th}) \quad \text{im i-Halbleiter}$$

- Im Falle schwacher Injektion kann die **Majoritätsträgerdichte als konstant angenommen** werden; nur die Minoritätsträgerdichte unterliegt einer Dynamik.
- Die **Minoritätsträgerlebensdauer τ_{min} hängt von der jeweiligen Majoritätsträgerdichte** ab.
- Typische Zahlenwerte:
 - Ge: 10^{-6} s bis 10^{-3} s
 - Si: 10^{-10} s bis 10^{-3} s
 - GaAs: 10^{-10} s bis 10^{-8} s.

Zusammenfassung: Halbleiter unter schwacher Injektion:

n-Typ

$$n_n \gg p_n$$

$$n_n \approx n_{n,th}$$

$$p_n = p_{n,th} + p'$$

$$\tau_{min}^{-1} \sim B n_n$$

i-Typ

$$p = n$$

$$n \approx n_{th} + n'$$

$$p \approx p_{th} + p'$$

$$\tau_{min}^{-1} = B [p_{th} + n_{th}]$$

p-Typ

$$p_p \gg n_p$$

$$n_p = n_{p,th} + n'$$

$$p_p \approx p_{p,th}$$

$$\tau_{min}^{-1} \sim B p_p$$

Band-Band-Übergänge im Falle starker Injektion

Differentialgleichung für das Abklingen der Trägerdichtestörung:

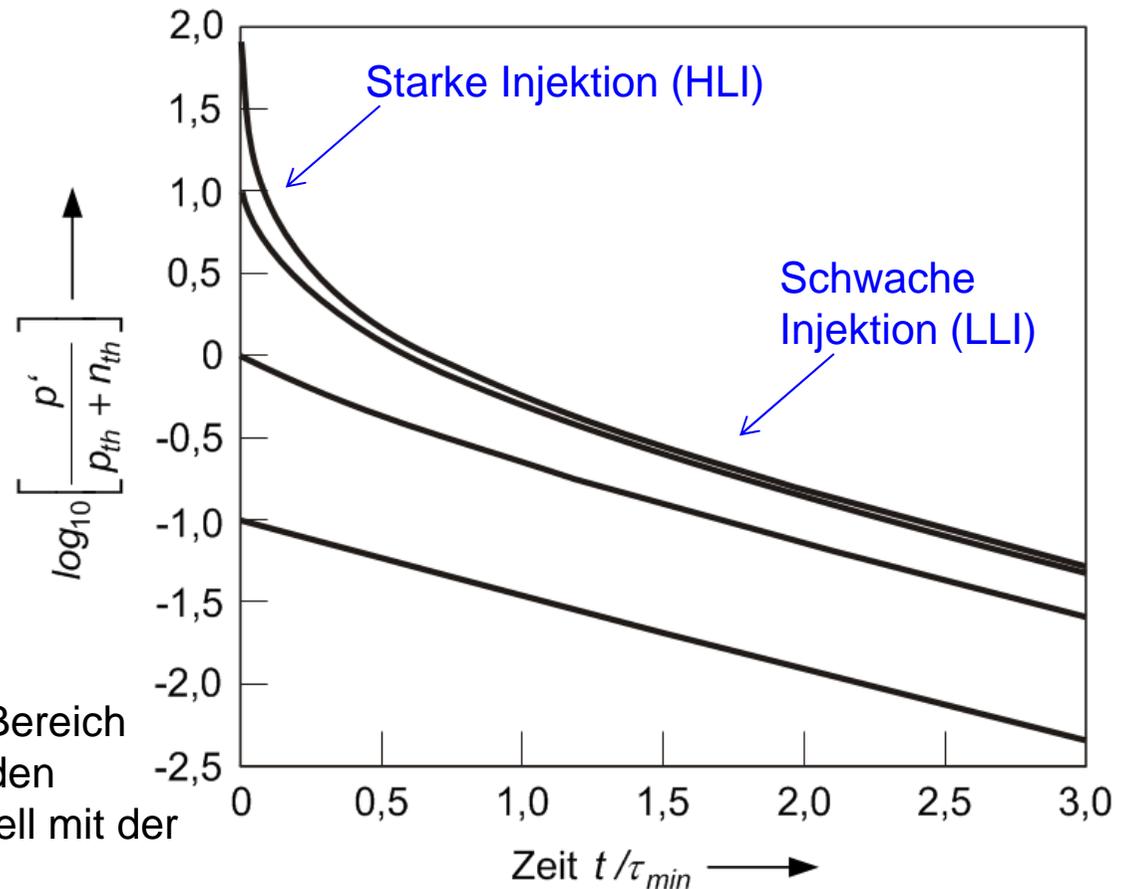
$$\frac{dn'}{dt} = \frac{dp'}{dt} = -\frac{1}{\tau_{\min}} \left(1 + \frac{n'}{n_{\text{th}} + p_{\text{th}}} \right) n'$$

Anfängliche Abnahme der Trägerdichtestörung (transienter Vorgang):

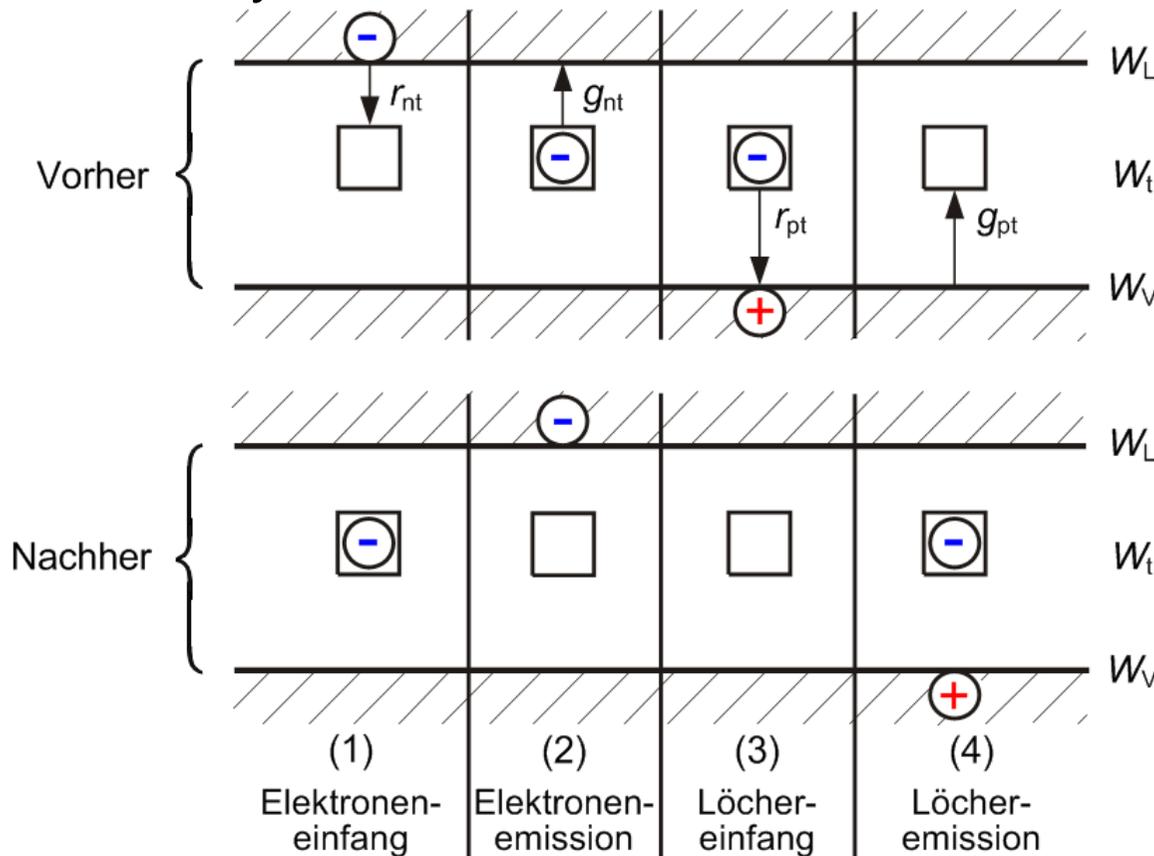
$$\frac{dn'}{dt} = \frac{dp'}{dt} = -\frac{1}{\tau_{\min}} \frac{n'^2}{n_{\text{th}} + p_{\text{th}}}$$

$$n'(t) = \frac{n'(0)}{1 + \left(\frac{n'(0)}{n_{\text{th}} + p_{\text{th}}} \frac{t}{\tau_{\min}} \right)}$$

- Bei starker Injektion zerfällt die anfänglich **Überschussträgerdichte** innerhalb von τ_{\min} auf die **Majoritätsträgerdichte** - unabhängig von ihrem Anfangswert!
- Danach befindet sich die Probe im Bereich schwacher Injektion; die verbleibenden Überschussdichte zerfällt exponentiell mit der Zeitkonstante τ_{\min} .



Rekombination über Störzentren / Shockley-Read-Hall-Rekombination



Ansätze für die Generations- und Rekombinationsraten:

$$g_{nt} = A_{gn} n_t w$$

$$g_{pt} = A_{gp} n_t (1 - w)$$

$$r_{nt} = A_{rn} n n_t (1 - w) \\ =: \frac{n (1 - w)}{\tau_n}$$

$$r_{pt} = A_{rp} p n_t w \\ =: \frac{p w}{\tau_p}$$

w = Wahrscheinlichkeit, mit der die Störstelle durch ein Elektron besetzt ist.

Weitere Analyse: Zunächst Betrachtung im Fall des **thermischen Gleichgewichtes**

- **Detailliertes Gleichgewicht** der Generations- und Rekombinationsrate, $g_{nt} = r_{nt}$; $g_{pt} = r_{pt}$
 - Verwendung der **Fermi-Verteilung** zur Bestimmung von w im thermischen GGW
- ⇒ Bestimmung von A_{gn} , A_{gp}

$$w_{th} = \frac{1}{1 + e^{(W_T - W_F)/kT}}$$

Rekombination über Störzentren / Shockley-Read-Hall-Rekombination

Betrachte **stationären Zustand unter externer Trägergeneration** g_{ext} (\neq thermisches Gleichgewicht!):

$$\frac{dn}{dt} = g_n - r_n = g_{\text{ext}} + g_{\text{nt}} - r_{\text{nt}} = 0$$

$$\frac{dp}{dt} = g_p - r_p = g_{\text{ext}} + g_{\text{pt}} - r_{\text{pt}} = 0$$

Netto-Generationsrate über Störstellen:

$$g_t - r_t = g_{\text{pt}} - r_{\text{pt}} = g_{\text{nt}} - r_{\text{nt}} = \frac{n_i^2 - np}{(n + n'_{\text{th}})\tau_p + (p + p'_{\text{th}})\tau_n}$$

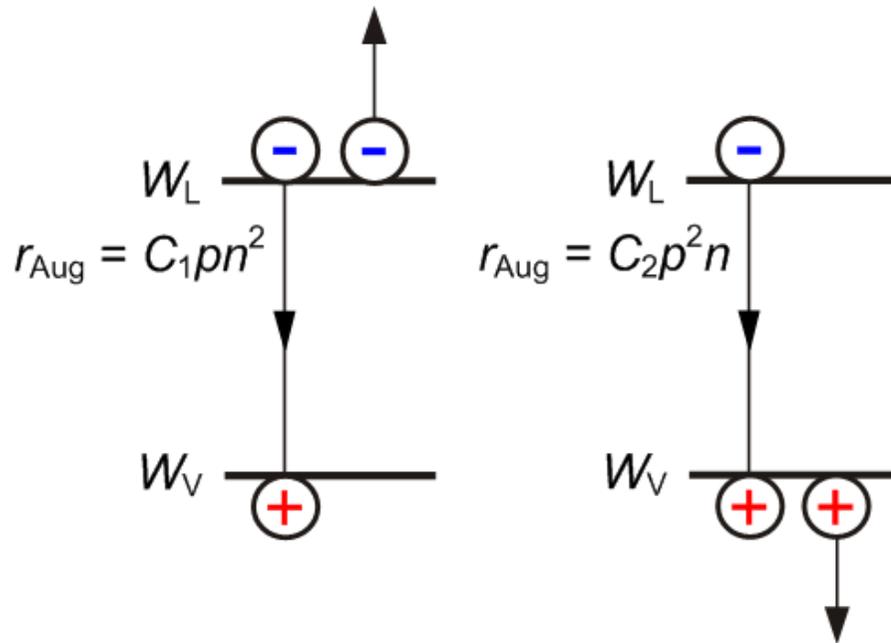
wobei $n'_{\text{th}} = n_{\text{th}} \exp\left(\frac{W_T - W_F}{kT}\right)$, $p'_{\text{th}} = p_{\text{th}} \exp\left(\frac{W_F - W_T}{kT}\right)$

Maximale Rekombinationsrate falls Störstelle in der Mitte der Bandlücke liegt:

$$W_T \approx \frac{1}{2} (W_L + W_V) \quad \Rightarrow \quad g_t - r_t = \frac{n_i^2 - np}{(n + n_i)\tau_p + (p + n_i)\tau_n}$$

Für schwache Injektion: Beschreibung mit Hilfe einer **Minoritätsträgerlebensdauer** τ_{min} , die für den n-HL (p-HL) mit der Zeitkonstante τ_p (τ_n) übereinstimmt

$$g_t - r_t = \begin{cases} -\frac{p'}{\tau_{\text{min}}}, & \tau_{\text{min}} = \tau_p & \text{für n-Typ} \\ -\frac{n}{\tau_{\text{min}}}, & \tau_{\text{min}} = \tau_n & \text{für p-Typ} \end{cases}$$



Rekombination unter **Energie-Abgabe** an ein Elektron im Leitungsband oder an ein Loch im Valenzband.

Rekombinationsrate:

$$r_{\text{Aug}} = C_1 p n^2 + C_2 n p^2$$

⇒ Auger-Rekombination wird relevant, wenn sowohl Elektronen- als auch Löcherdichten sehr groß werden. **Injizierte Ladungsträger sind dabei wichtiger als Dotierungen!**

„Ladungsträgerlebensdauer“:

- Betrachtung bei **konstanter externer Generationsrate** g_{ext} , die zu stationären **Elektronen- und Löcherdichten** n_0 bzw. p_0 führt
- Annahme: Hochinjektion, $n_{\text{th}}, p_{\text{th}} \ll n_0 \approx p_0$
- Betrachte **Relaxation** bei Störung des **stationären Zustandes**

$$\frac{d\Delta n}{dt} = \frac{d\Delta p}{dt} = -\frac{1}{\tau_{\text{eff}}} \Delta n \quad \text{wobei} \quad \frac{1}{\tau_{\text{eff}}} = 3(C_1 + C_2)n_0^2$$

effektive Lebensdauer

Vorlesung 6

09.11.2015

Vereinfachung im für den Fall schwacher Injektion:

$$\frac{dn'}{dt} = \frac{dp'}{dt} = \begin{cases} -\frac{p'}{\tau_{mjn}} & \text{im n-Halbleiter} \\ -\frac{n'}{\tau_{min}} & \text{im p-Halbleiter} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\tau_{min}} = \begin{cases} B_{sp} n_{th} & \text{im n-Halbleiter} \\ B_{sp} p_{th} & \text{im p-Halbleiter} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\tau_{min}} \approx B_{sp} (n_{th} + p_{th}) \quad \text{im i-Halbleiter}$$

- Im Falle schwacher Injektion kann die **Majoritätsträgerdichte als konstant angenommen** werden; nur die Minoritätsträgerdichte unterliegt einer Dynamik.
- Die **Minoritätsträgerlebensdauer τ_{min} hängt von der jeweiligen Majoritätsträgerdichte** ab.
- Typische Zahlenwerte:
 - Ge: 10^{-6} s bis 10^{-3} s
 - Si: 10^{-10} s bis 10^{-3} s
 - GaAs: 10^{-10} s bis 10^{-8} s.

Zusammenfassung: Halbleiter unter schwacher Injektion:

n-Typ

i-Typ

p-Typ

$$n_n \gg p_n$$

$$p = n$$

$$p_p \gg n_p$$

$$n_n \approx n_{n,th}$$

$$n \approx n_{th} + n'$$

$$n_p = n_{p,th} + n'$$

$$p_n = p_{n,th} + p'$$

$$p \approx p_{th} + p'$$

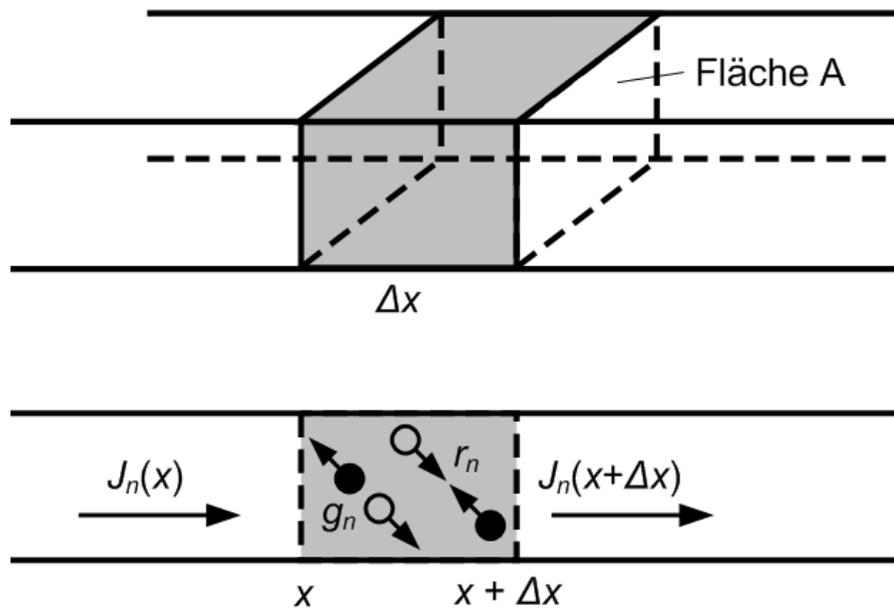
$$p_p \approx p_{p,th}$$

$$\tau_{min}^{-1} \sim B n_n$$

$$\tau_{min}^{-1} = B [p_{th} + n_{th}]$$

$$\tau_{min}^{-1} \sim B p_p$$

Die Kontinuitätsgleichung



Kontinuitätsgleichungen:

$$\text{In 1D: } \frac{\partial(ep)}{\partial t} + \frac{\partial J_p(x)}{\partial x} = e(g_p - r_p) .$$

$$\text{In 3D: } \frac{\partial(ep)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_p = e(g_p - r_p)$$

$$\frac{\partial(-en)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_n = -e(g_n - r_n)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = e(g_n - r_n) - e(g_p - r_p)$$

Vereinfachte Form der Kontinuitätsgleichung:

Voraussetzung: Es herrscht Gleichgewicht ($g_n = r_n$ und $g_p = r_p$) oder Träger werden nur in Paaren erzeugt oder vernichtet ($g_n - r_n = g_p - r_p$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0$$

Kontinuitätsgleichungen:

$$\frac{\partial(ep)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_p = e(g_p - r_p)$$
$$\frac{\partial(-en)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_n = -e(g_n - r_n)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = e(g_n - r_n) - e(g_p - r_p)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \text{im Gleichgewicht } (g_n = r_n, g_p = r_p) \text{ oder bei paarweiser Erzeugung / Vernichtung von Elektronen und Löchern } (g_n - r_n = g_p - r_p)$$

[Dielektrische Relaxation...](#)

[Zeitliches Abklingen von Trägerdichtestörungen...](#)

[Räumliches Abklingen von Trägerdichtestörungen...](#)

Ladungsträgertransport durch Drift und Diffusion:

$$\mathbf{J}_n = \mathbf{J}_{nF} + \mathbf{J}_{nD}, \quad \mathbf{J}_n = en\mu_n\mathbf{E} + eD_n\nabla n,$$

$$\mathbf{J}_p = \mathbf{J}_{pF} + \mathbf{J}_{pD}, \quad \mathbf{J}_p = ep\mu_p\mathbf{E} - eD_p\nabla p,$$

Poisson-Gleichung (in Abwesenheit von Magnetfeldern):

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} = -\frac{e}{\varepsilon}(p + n_D^+ - n - n_A^-)$$

Schwache Injektion: Majoritätsträgerdichte ändert sich kaum; Minoritätsträgerdichte ist wesentlich kleiner als die Majoritätsträgerdichte

⇒ Majoritätsträgerdichte kann als **unverändert** angenommen werden

Driftstrom der Minoritätsträger vernachlässigbar

Beschreibung von Rekombinationsvorgängen mit Hilfe der jeweiligen

Minoritätsträgerlebensdauer

n-Halbleiter	p-Halbleiter
$n_n \approx n_{n,th} \gg p_n$ $\mathbf{J}_n = en_n\mu_n\mathbf{E} + eD_n\nabla n_n,$	$p_p \approx p_{pth} \gg n_p$ $\mathbf{J}_n = eD_n\nabla n_p,$
$\mathbf{J}_p = -eD_p\nabla p_n.$	$\mathbf{J}_p = ep_p\mu_p\mathbf{E} - eD_p\nabla p_p,$
$\frac{\partial(p_n)}{\partial t} + \frac{1}{e}\nabla \cdot \mathbf{J}_p = -\frac{p'_n}{\tau_p} + g_{ext}$ $\frac{\partial(n_n)}{\partial t} - \frac{1}{e}\nabla \cdot \mathbf{J}_n = -\frac{p'_n}{\tau_p} + g_{ext}$	$\frac{\partial(p_p)}{\partial t} + \frac{1}{e}\nabla \cdot \mathbf{J}_p = -\frac{n'_p}{\tau_n} + g_{ext}$ $\frac{\partial(n_p)}{\partial t} - \frac{1}{e}\nabla \cdot \mathbf{J}_n = -\frac{n'_p}{\tau_n} + g_{ext}$

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} = -\frac{e}{\varepsilon}(p + n_D^+ - n - n_A^-)$$

Energieaustausch innerhalb eines Bandes (**Intraband-Energierelaxationszeit**, **typischerweise im fs-Bereich**) erfolgt sehr viel schneller als zwischen den Bändern (**Minoritätsträgerlebensdauer**, **ps bis ms**)

⇒ Bei einer Störung stellt sich sehr schnell wieder ein Gleichgewicht innerhalb der beiden Bänder ein, das durch individuelle Fermi-Verteilungen mit sog. **Quasi-Fermi-Niveaus** W_{Fn} und W_{Fp} beschrieben werden kann:

$$f_n(W) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{W - W_{Fn}}{kT}\right)}$$

$$f_p(W) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{W - W_{Fp}}{kT}\right)}$$

Ladungsträgerdichten bei Nichtentartung:

$$n(x) = N_L e^{-\frac{W_L(x) - W_{Fn}(x)}{kT}}$$

$$p(x) = N_V e^{-\frac{W_{Fp}(x) - W_V(x)}{kT}}$$

Bei ortsabhängigem Potenzial $\Phi(x)$:

$$n(x) = N_L e^{-\frac{W_L - e\varphi(x) - W_{Fn}(x)}{kT}}$$

$$p(x) = N_V e^{-\frac{W_{Fp}(x) - (W_V - e\varphi(x))}{kT}}$$

Vorteil des Konzepts der Quasi-Fermi-Niveaus: Ladungsträgerdichten n und p schwanken abhängig von Dotierung und Trägerinjektion um Dekaden. Die Quasi-Fermi-Niveaus ändern sich dagegen nur um wenige meV!

⇒ Einfachere numerische Behandlung!

Quasi-Fermi-Niveaus, Stromfluss, Ladungsträgerkonzentrationen und äquivalente Spannungen

- Elektronen und Löcherströme sind proportional zu den **Gradienten der Quasi-Fermi-Niveaus**; dabei wird nicht zwischen Diffusions- und Driftstrom unterschieden:

$$\mathbf{J}_n = -en\mu_n\nabla\Phi + eD_n\nabla n = n\mu_n\nabla W_{Fn}$$

$$\mathbf{J}_p = -ep\mu_p\nabla\Phi - eD_p\nabla p = p\mu_p\nabla W_{Fp}$$

- Der **Abstand zwischen den Quasi-Fermi-Niveaus** ist ein Maß für die Überschussdichten der Elektronen und Löcher; er kann durch eine **äquivalente Spannung U** beschrieben werden:

$$np = n_i^2 e^{\frac{W_{Fn} - W_{Fp}}{kT}} = n_i^2 e^{\frac{U}{U_T}} \quad U = \frac{W_{Fn} - W_{Fp}}{e}$$

- Je nach Injektionsdichte hängen die Überschusssträgerdichten unterschiedlich von der äquivalenten Spannung U ab:

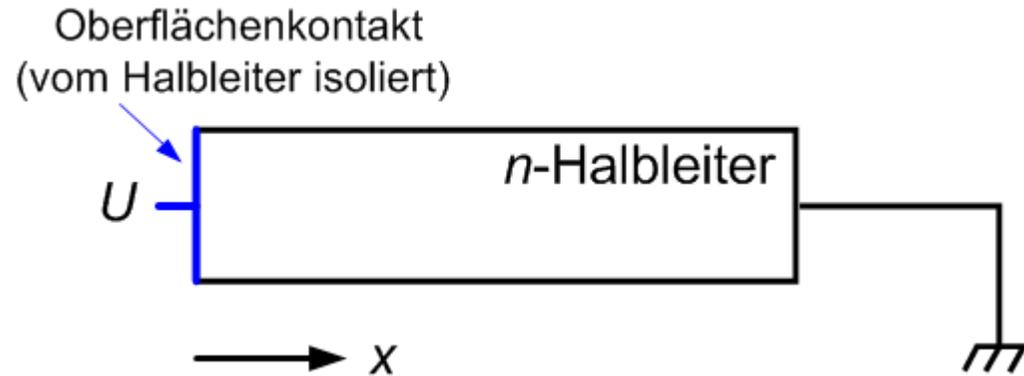
- **Schwache Injektion** (hier in einen n-HL bei Störstellenerschöpfung)

$$p' = \frac{n_i^2}{n_D} e^{\frac{U}{U_T}}$$

- Gleiches gilt auch bei **starker Injektion von Löchern** in einen n-Halbleiter
- Bei **sehr hoher Injektion** ($n, p \gg |n_D - n_A|$) von beiden Ladungsträgersorten gilt unabhängig vom Halbleitertyp:

$$p' \approx n' \approx n_i e^{\frac{U}{2U_T}}$$

Gedankenexperiment: n-Halbleiter, bei dem das Oberflächenpotential auf einem bestimmten Wert festgehalten wird.
 ⇒ Potentialverlauf im Halbleiter ?



Abschirmung des Oberflächen-potenzials durch **Rearrangieren der Majoritätsträger:**

$$\Phi(x) = \Phi(0) e^{-\frac{x}{L_D}}$$

wobei $L_{Dn} = \sqrt{\frac{\epsilon U_T}{en_D}}$

Debye-Länge im n-Halbleiter (bei Störstellenerschöpfung!)

$$L_{Di} = \sqrt{\frac{\epsilon U_T}{2en_i}}$$

Debye-Länge im **intrinsischen Halbleiter**

Beispiele für Debye-Längen:

- Silizium:**
- Intrinsisch ($n = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$): $L_D = 40 \text{ }\mu\text{m}$
 - Schwach dotiert ($n = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$): $L_D = 40 \text{ nm}$
 - Hoch dotiert (entartet, $n = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$): $L_D = 1 \text{ nm}$ (ca. zwei Gitterkonstanten!)

Metalle: Potentialstörungen werden praktisch innerhalb einer Gitterkonstante abgeschirmt

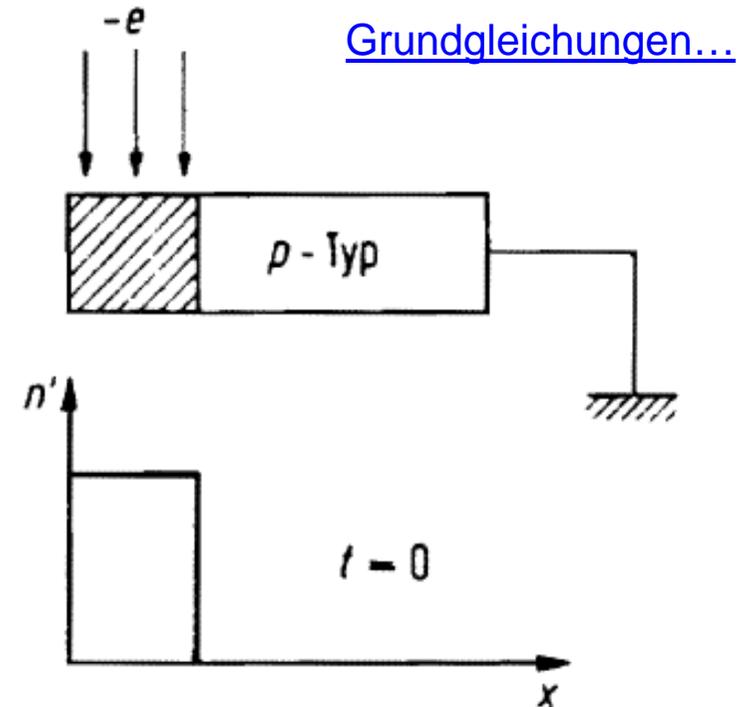
Zeitliche Dynamik der Abschirmung von Potentialstörungen, Dielektrische Relaxationszeit

Gedankenexperiment: Injektion von Elektronen bei $t = 0$ in einen Teilbereich eines p -Halbleiters
 \Rightarrow Zeitliche Entwicklung der Raumladungsverteilung im Halbleiter ?

Exponentielles Abklingen der Raumladungsdichte durch **Rearrangieren der Majoritätsträger:**

$$\rho(x, t) = \rho(x, 0) e^{-\frac{t}{\tau_R}}$$

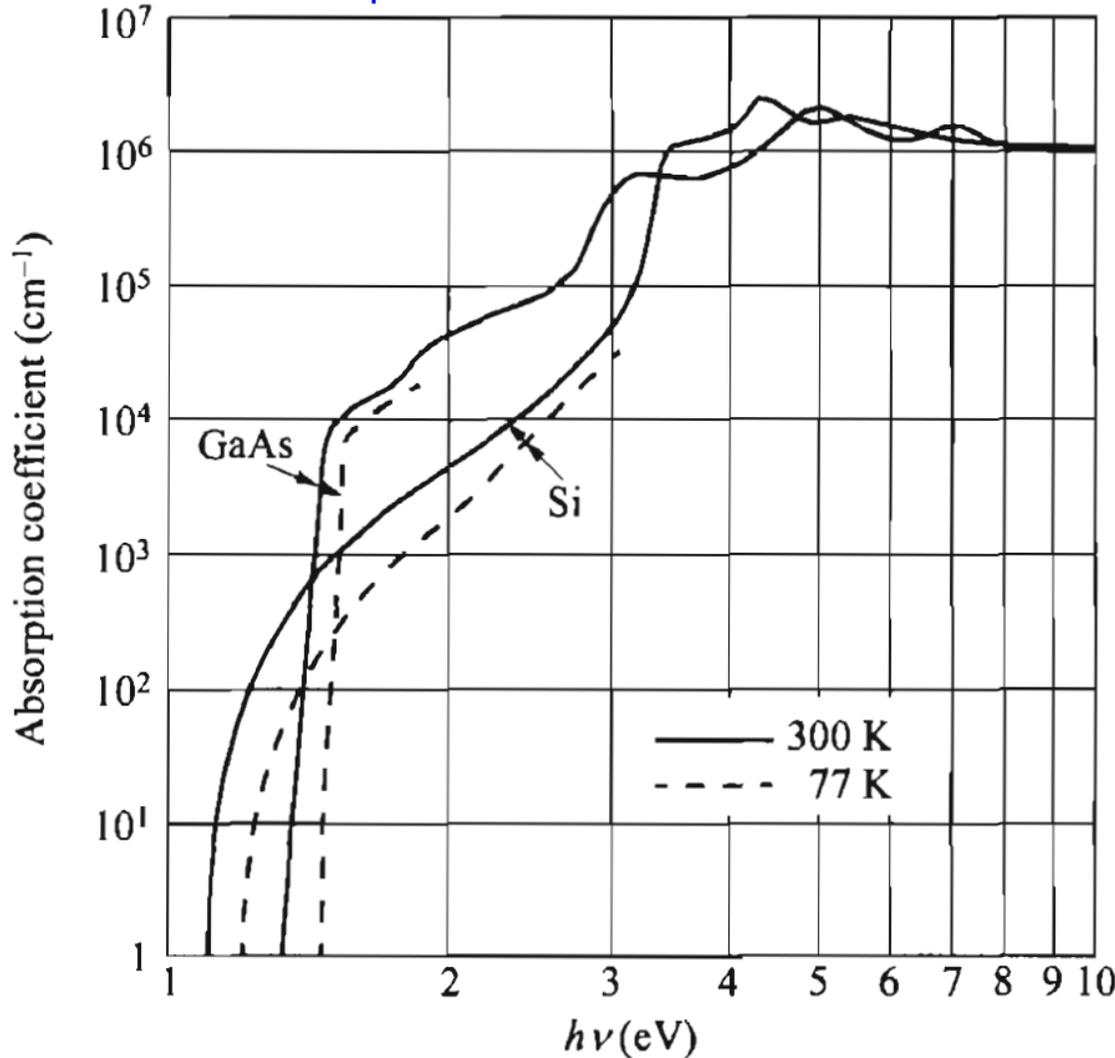
wobei $\tau_R = \frac{\varepsilon}{\sigma_p}$ **Dielektrische Relaxationszeit** im p -Halbleiter
(1 fs ... 100 ps)



- Raumladungsdichtestörungen werden innerhalb der **dielektrischen Relaxationszeit** durch Umlagern der Majoritätsträgerdichte kompensiert.
- Die resultierende neutrale **Überschussladungsträgerdichte** verschwindet dann auf einer Zeitskala der Minoritätsträgerlebensdauer.

Bild: Müller, Grundlagen der Halbleiter-Elektronik

Gemessene Absorptionskoeffizienten von Si und GaAs:



Generationsrate bei Bestrahlung entlang x:

$$g(x, t) = \frac{1}{A} \frac{\alpha}{hf} P_0(t) e^{-\alpha x}$$

Schwache Absorption:

Generationsrate annähernd konstant über den Halbleiter

$$\alpha L \ll 1$$

Starke Absorption:

Absorption nur an der Oberfläche

$$\alpha L \gg 1$$

L = Länge der HL-Probe entlang der Ausbreitungsrichtung des Lichtes

Quelle: Sze, Physics of Semiconductor Devices

Vorlesung 7

16.11.2015

Kontinuitätsgleichungen:

$$\frac{\partial(ep)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_p = e(g_p - r_p)$$
$$\frac{\partial(-en)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_n = -e(g_n - r_n)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = e(g_n - r_n) - e(g_p - r_p)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \text{im Gleichgewicht } (g_n = r_n, g_p = r_p) \text{ oder bei paarweiser Erzeugung / Vernichtung von Elektronen und Löchern } (g_n - r_n = g_p - r_p)$$

[Dielektrische Relaxation...](#)

[Zeitliches Abklingen von Trägerdichtestörungen...](#)

[Räumliches Abklingen von Trägerdichtestörungen...](#)

Ladungsträgertransport durch Drift und Diffusion:

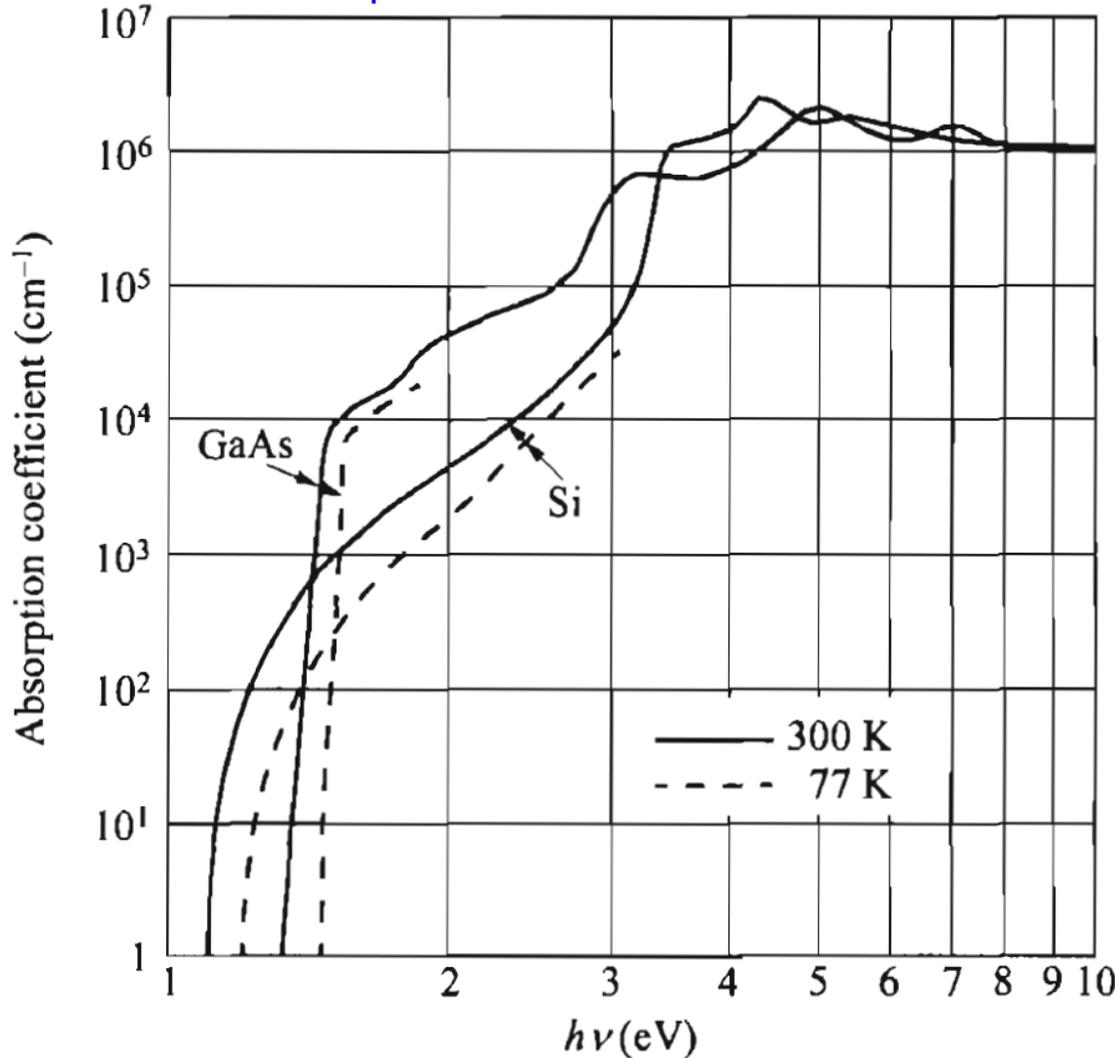
$$\mathbf{J}_n = \mathbf{J}_{nF} + \mathbf{J}_{nD}, \quad \mathbf{J}_n = en\mu_n\mathbf{E} + eD_n\nabla n,$$

$$\mathbf{J}_p = \mathbf{J}_{pF} + \mathbf{J}_{pD}, \quad \mathbf{J}_p = ep\mu_p\mathbf{E} - eD_p\nabla p,$$

Poisson-Gleichung (in Abwesenheit von Magnetfeldern):

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} = -\frac{e}{\varepsilon}(p + n_D^+ - n - n_A^-)$$

Gemessene Absorptionskoeffizienten von Si und GaAs:



Quelle: Sze, Physics of Semiconductor Devices

Generationsrate bei Bestrahlung entlang x:

$$g(x, t) = \frac{1}{A h f} \alpha P_0(t) e^{-\alpha x}$$

Schwache Absorption:

Generationsrate annähernd konstant über den Halbleiter

$$\alpha L \ll 1$$

Starke Absorption:

Absorption nur an der Oberfläche

$$\alpha L \gg 1$$

L = Länge der HL-Probe entlang der Ausbreitungsrichtung des Lichtes

Zeitliches Abklingen von Trägerdichtestörungen

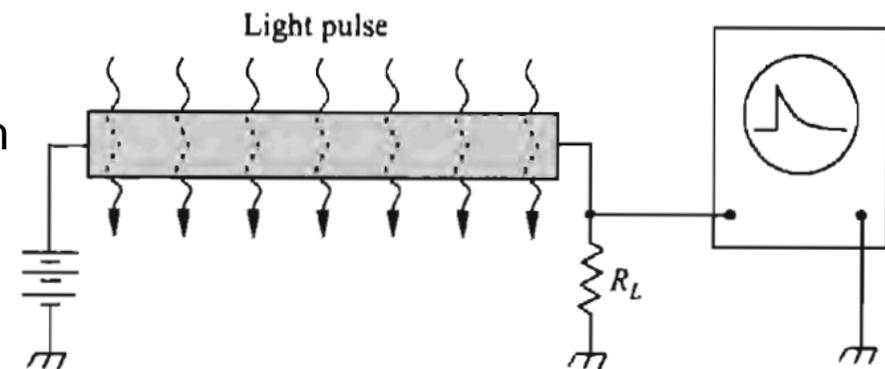
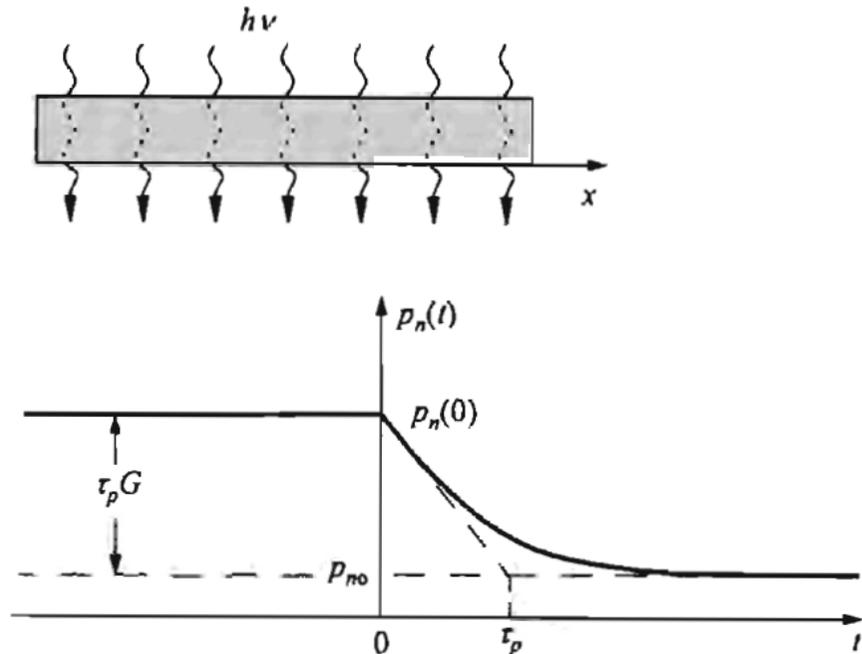
„Experiment:“

- Für $t < 0$: **Konstante Bestrahlung** eines schwach absorbierenden n-Halbleiters
 ⇒ **Generation** von Elektron-Loch-Paaren mit Rate g_{ext}
- Für $t > 0$: **Keine Bestrahlung**
 ⇒ **Rekombination** der Ladungsträger (Minoritätsträgerlebensdauer τ_p)

⇒ Zeitlicher Verlauf der **Überschuss-trägerdichte** ?

$$p'_n(t) = \begin{cases} \tau_p g_{\text{ext}} & \text{für } t < 0 \\ \tau_p g_{\text{ext}} e^{-\frac{t}{\tau_p}} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

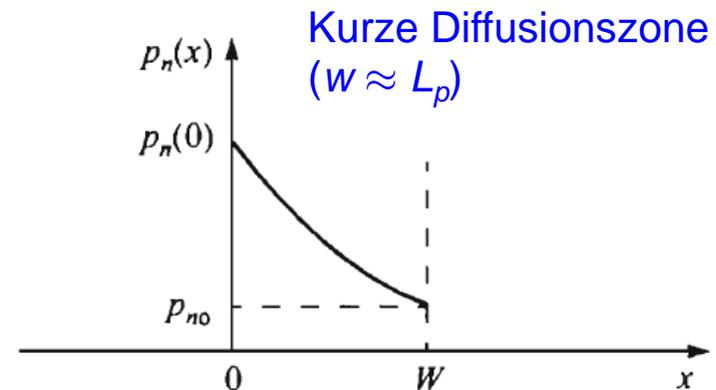
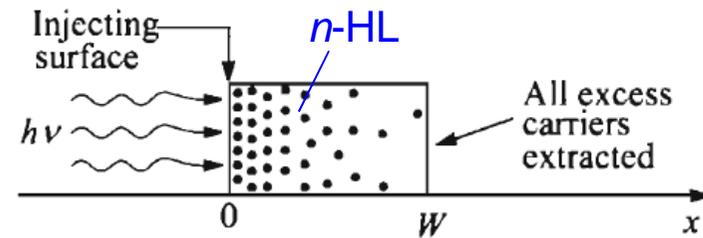
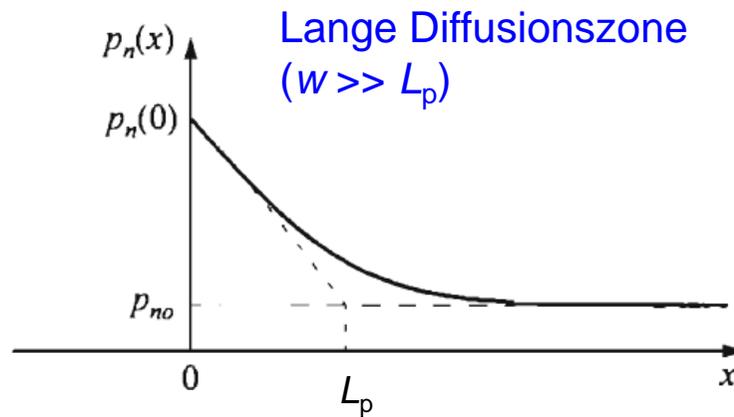
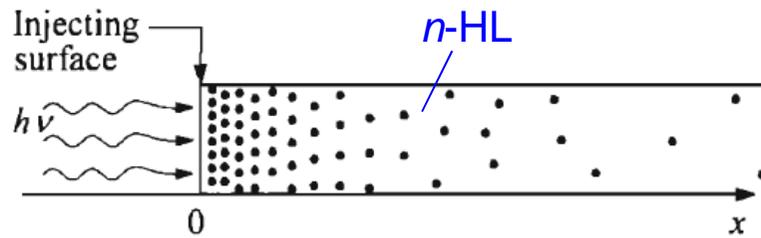
- Ermittlung der **Trägerlebensdauer** durch zeitaufgelöste Leitfähigkeitsmessung



Quelle: Sze, Physics of Semiconductor Devices

[Grundgleichungen...](#)

Räumliches Abklingen von Trägerdichtestörungen



Bilder: Sze, Physics of Semiconductor Devices

Kontinuierliche Bestrahlung eines direkten Halbleiters (starke Absorption!) von links

⇒ Generation von Elektron-Loch-Paaren bei $x = 0$; führt zur einer Überschuss-Trägerdichte $p_n(0)$

⇒ Verlauf der **Überschuss-Minoritätsträgerdichte** und der **Diffusionsströme** für $x > 0$?

Wichtig: Betrachte Minoritätsträgerüberschuss $p'_n(x)$; $n'_n(x)$ passt sich innerhalb einer dielektrischen Relaxationszeit an $p'_n(x)$ an!

$$p'_n(x) = p'_n(0) e^{-\frac{x}{L_p}}$$

$$p'_n(x) = p'_n(0) \frac{\sinh\left(\frac{w-x}{L_p}\right)}{\sinh\left(\frac{w}{L_p}\right)}$$

wobei $L_p = \sqrt{D_p \tau_p}$

Diffusionslänge der Minoritätsträger im n-HL

[Grundgleichungen...](#)

Abklingen von Trägerdichtestörungen in Raum und Zeit (Haynes-Shockley-Experiment)

Impulsförmige Bestrahlung bei $t = 0$
und $x = 0$

⇒ DGL für Minoritätsträgerdichte für
 $t > 0$ ohne externes Feld:

$$\frac{\partial p'_n}{\partial t} = D_p \frac{\partial^2 p'_n}{\partial x^2} - \frac{p'_n}{\tau_p}$$

Lösung für δ -förmige Anregung in Ort
und Zeit:

$$p'_n(x, t) \propto \frac{1}{\sqrt{4\pi D_p t}} e^{-\left(\frac{x^2}{4D_p t} + \frac{t}{\tau_p}\right)}$$

- Mit externem Feld: Drift der gesamten Ladungsträgerverteilung
- Abtasten der Löcherverteilung erlaubt Messung der Beweglichkeit und der Lebensdauer (Haynes-Shockley-Experiment)

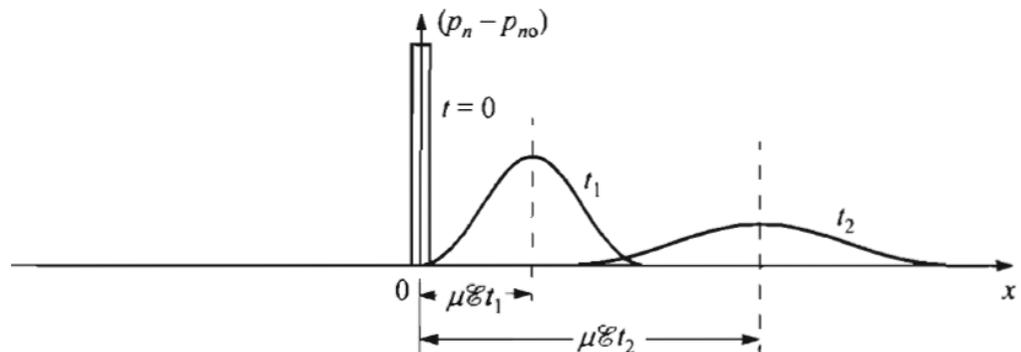
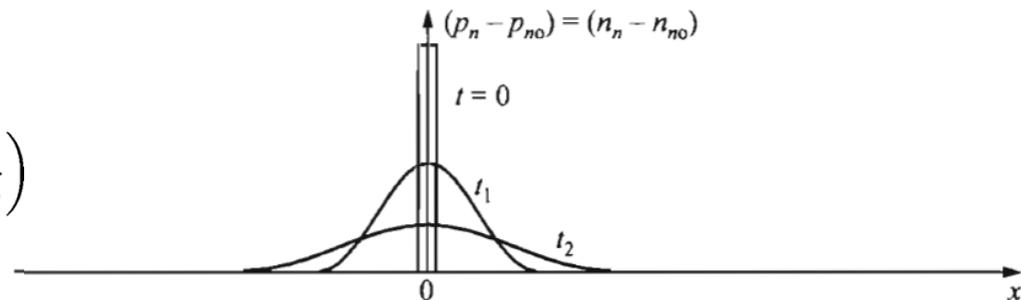
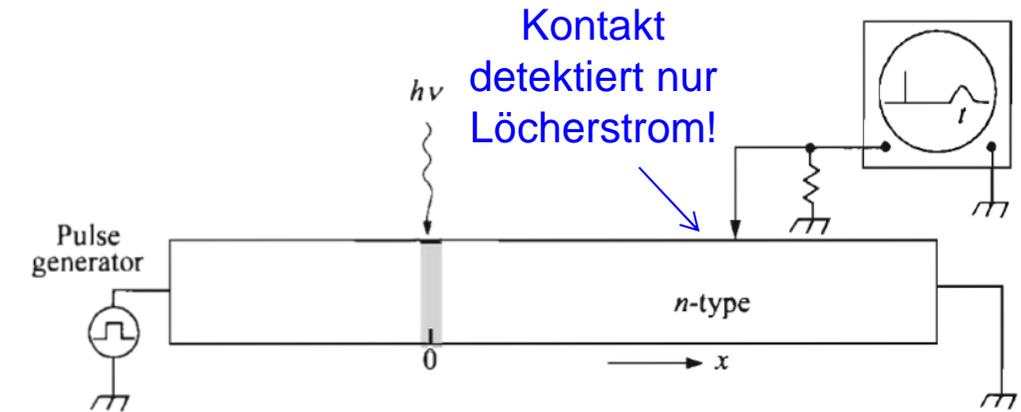


Bild: Sze, Physics of Semiconductor Devices

Injektion von Minoritätsträgern und Diffusionszone

Injektion von Elektronen in einen p-HL:

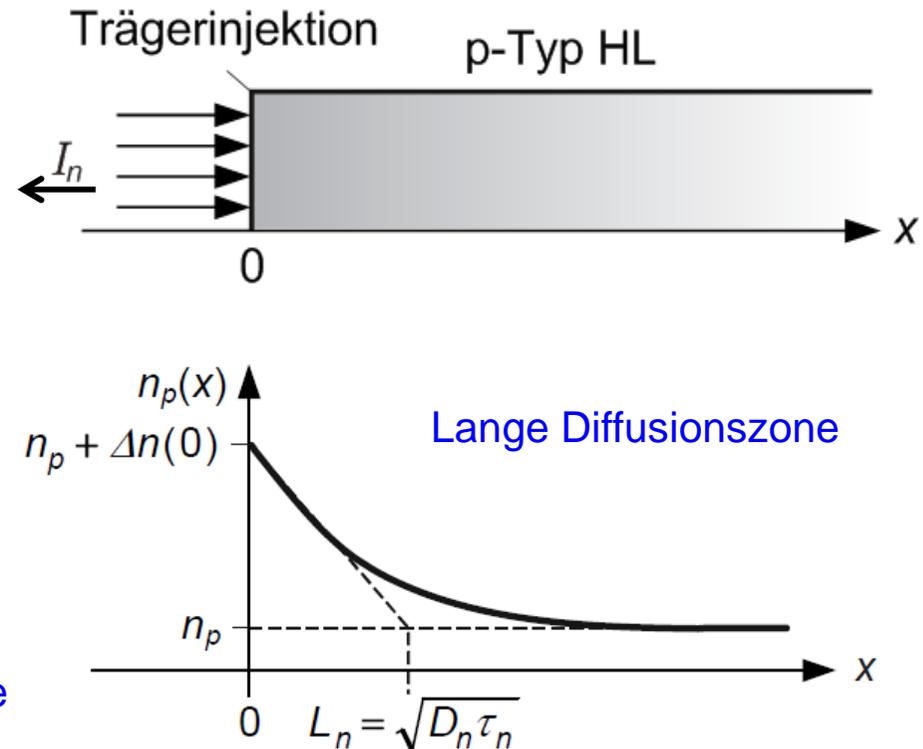
Raumladungsdichtestörung wird innerhalb der dielektrischen Relaxationszeit durch Rearrangieren der Majoritätsträger (Löcher) kompensiert

⇒ Ausbildung einer **Diffusionszone**:

$$n'_p(x) = n'_p(0)e^{-\frac{x}{L_n}} \quad \text{Lange Diffusionszone}$$

$$n'_p(x) = n'_p(0) \frac{\sinh\left(\frac{w-x}{L_n}\right)}{\sinh\left(\frac{w}{L_n}\right)} \quad \text{Kurze Diffusionszone}$$

wobei $L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$ **Diffusionslänge**



Diffusionsstrom der Minoritätsträger bei x = 0:

$$J_{D,n}(0) = -\frac{eD_n n'_p(0)}{L_n} \quad \text{Lange Diffusionszone}$$

$$J_{D,n}(0) = -\frac{eD_n n'_p(0)}{L_n} \coth\left(\frac{w}{L_n}\right) \quad \text{Kurze Diffusionszone}$$

→ p-n-Übergang

Quelle: Sze, Physics of Semiconductor Devices

Bandverlauf in der Diffusionszone im statischen Fall

- Das Quasi-Ferminiveau der Majoritätsträger verläuft **parallel zu den Bandkanten**

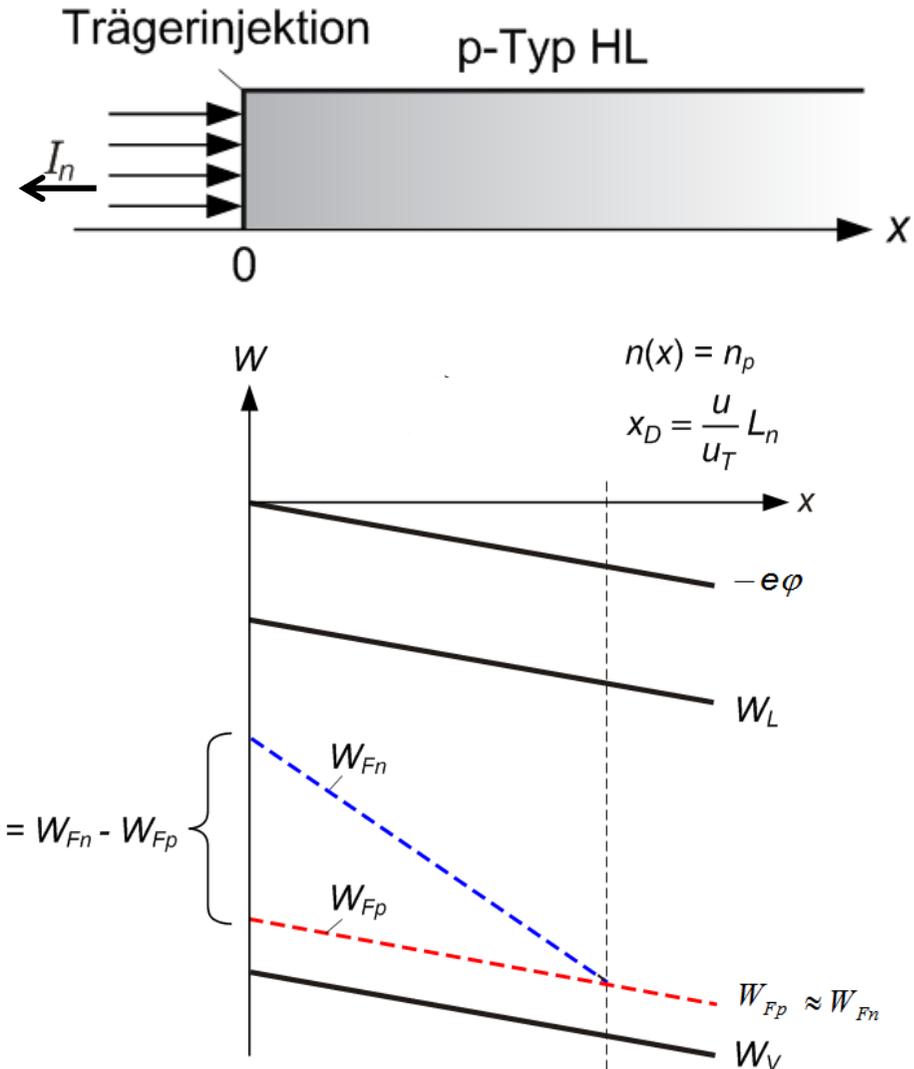
$$\begin{aligned} \text{grad } W_{Fp} &\approx \text{grad}(-e\varphi) \\ &= \text{grad } W_V \\ &= \text{grad } W_L \end{aligned}$$

- Das Quasi-Ferminiveau der Minoritätsträger weist einen näherungsweise **linearen Verlauf** auf

$$\text{grad } W_{Fn} \approx -\frac{eU_T}{L_n} \frac{n'(x)}{n'(x) + n_{p,th}}$$

- Die Minoritätsträgerdichte bei $x = 0$ ist verknüpft mit der **Separation der Quasi-Ferminiveaus**; diese kann durch eine äquivalente Spannung U ausgedrückt werden. Für schwache Injektion gilt:

$$n = n_{p,th} e^{U/U_T}$$



Quelle: Sze, Physics of Semiconductor Devices

Dynamisches Verhalten der Diffusionszone und Diffusionskapazität

Modulation der bei $x = 0$ injizierten Ladungsträger führt zu einem zeitabhängigen Ladungsträgerprofil:

$$n'_p(0, t) = \operatorname{Re} \left\{ n'_0(0) + n_1(0) e^{j\omega t} \right\}$$

$$n_1(0) \ll n'_0(0)$$

Kleinsignalnäherung

$$\Rightarrow n'_p(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ n'_0(x) + n_1(x) e^{j\omega t} \right\}$$

$$\text{wobei } n'_0(x) = n'_0(0) e^{-\frac{x}{L_n}}$$

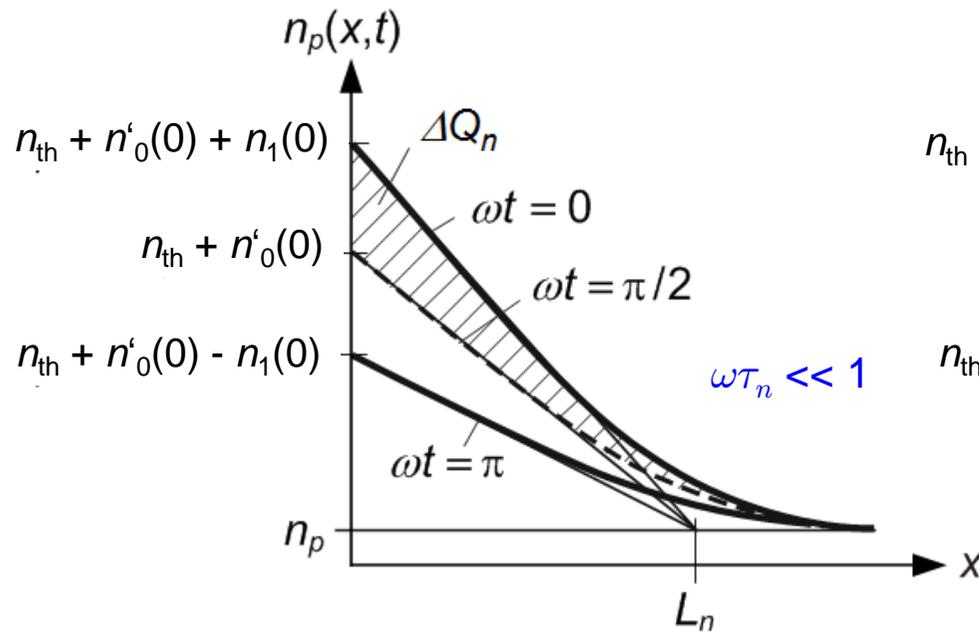
$$n_1(x) = n_1(0) e^{-\frac{\sqrt{1+j\omega\tau_n}x}{L_n}}$$

Zugehöriger Diffusionsstrom der Minoritätsträger bei $x = 0$:

$$J_n(0, t) = \operatorname{Re} \left\{ J_{n0}(0) + J_{n1}(0) e^{j\omega t} \right\}$$

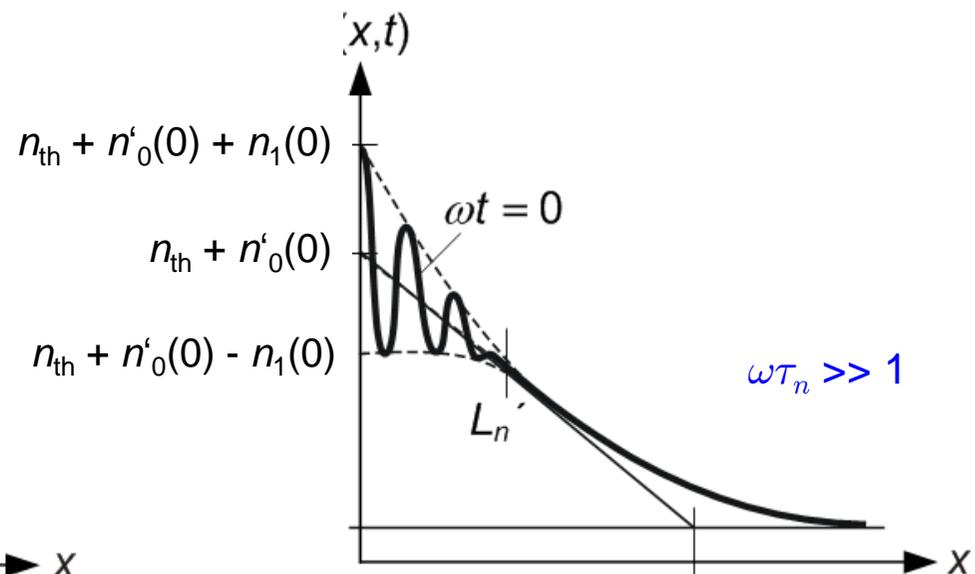
$$\text{wobei } J_{n0}(0) = -\frac{eD_n}{L_n} n'_0(0)$$

$$J_{n1}(0) = -\frac{eD_n}{L_n} \sqrt{1+j\omega\tau_n} n_1(0)$$



Langsame Modulation ($\omega \tau_n \ll 1$)

Gleich- und Wechselanteil der Trägerverteilung verhalten sich exakt gleich; das Ladungsträgerprofil folgt der Änderung der Trägerdichte am Rand



Schnelle Modulation ($\omega \tau_n > 1$)

- Tiefenabhängige Phasenrückdrehung, d.h. Modulation kommt in der Tiefe verzögert an
- Modulationsamplitude nimmt mit der Tiefe ab

$$n'_0(x) = n'_0(0) e^{-\frac{x}{L_n}}$$

$$n_1(x) = n_1(0) e^{-\frac{\sqrt{1+j\omega\tau_n}x}{L_n}}$$

- Äquivalente Spannung und Zusammenhang mit der Minoritätsträgerdichte bei $x = 0$:

$$U(t) = \text{Re} \left\{ U_0 + \underline{U}_1 e^{j\omega t} \right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} n'_0(0) &= n_{th} e^{\frac{U_0}{U_T}} \\ n_1(0) &= n_{th} \frac{U_1}{U_T} e^{\frac{U_0}{U_T}} \end{aligned}$$

- Betrachte Zusammenhang zwischen den Wechselanteilen der äquivalenten Spannung und des Diffusionsstroms $I_n = -A J_n(0)$ der Minoritätsträger bei $x = 0$:

$$J_n(0, t) = \text{Re} \left\{ J_{n0}(0) + J_{n1}(0) e^{j\omega t} \right\} \quad \text{wobei} \quad \begin{aligned} J_{n0}(0) &= -\frac{eD_n}{L_n} n'_0(0) \\ J_{n1}(0) &= -\frac{eD_n}{L_n} \sqrt{1 + j\omega\tau_n} n_1(0) \end{aligned}$$

⇒ Repräsentation der Admittanz $U_1 / (-A J_{n1}(0))$ als Parallelschaltung des Kleinsignalleitwertes G_0 und der Diffusionskapazität C_D :

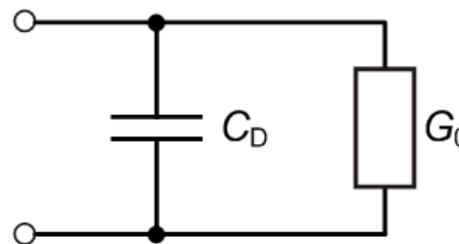
$$\underline{Y} = \frac{I_{n1}}{U_1} = G_0 + j\omega C_D$$

wobei $G_0 = \frac{I_{Sn}}{U_T} e^{\frac{U_0}{U_T}}$

$$C_D = \frac{1}{2} G_0 \tau_n$$

$$I_{Sn} = \frac{AeD_n n_{th}}{L_n}$$

Sättigungsstrom



Die Diffusionskapazität C_D beschreibt die Ladungsspeicherung in der Diffusionszone und spielt eine wichtige Rolle bei der Analyse des dynamischen Verhaltens von pn-Übergängen.

Vorlesung 8

23.11.2015

Bandverlauf in der Diffusionszone im statischen Fall

- Das Quasi-Ferminiveau der Majoritätsträger verläuft **parallel zu den Bandkanten**

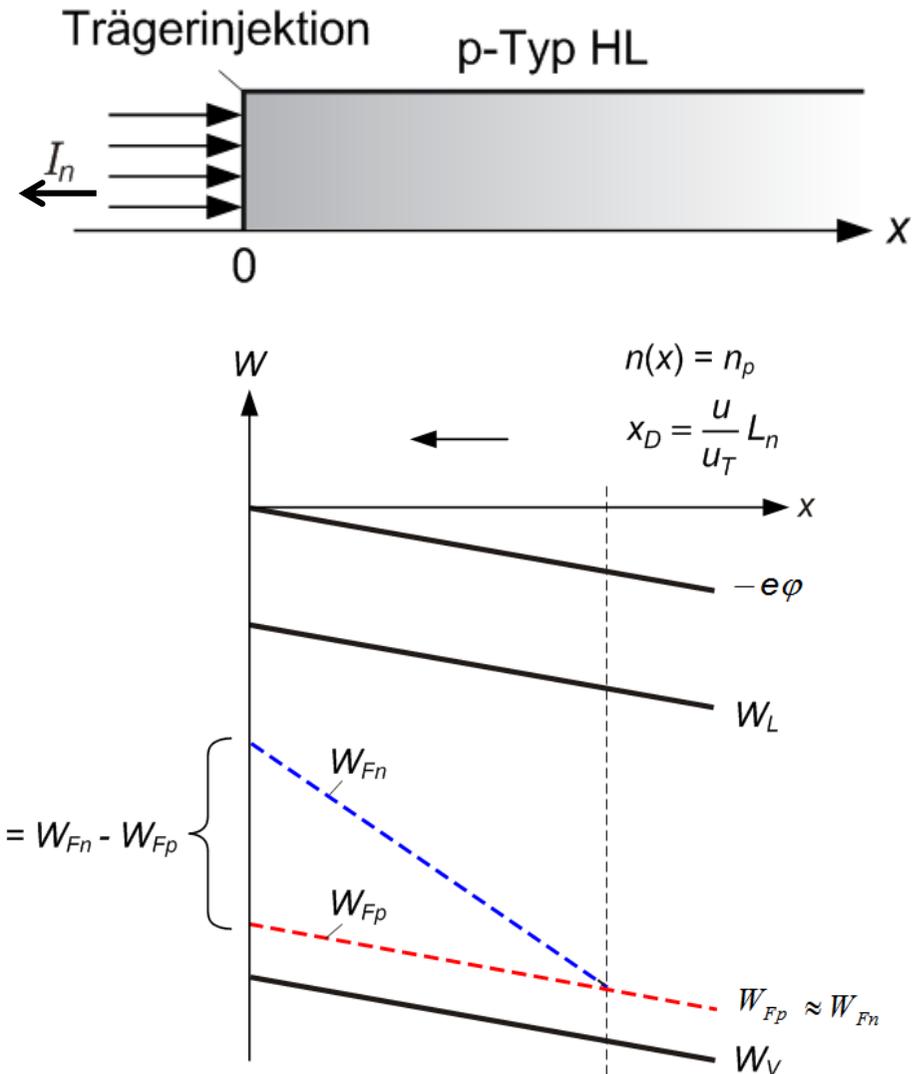
$$\begin{aligned} \text{grad } W_{Fp} &\approx \text{grad}(-e\varphi) \\ &= \text{grad } W_V \\ &= \text{grad } W_L \end{aligned}$$

- Das Quasi-Ferminiveau der Minoritätsträger weist einen näherungsweise **linearen Verlauf** auf

$$\text{grad } W_{Fn} \approx -\frac{eU_T}{L_n} \frac{n'(x)}{n'(x) + n_{p,th}}$$

- Die Minoritätsträgerdichte bei $x = 0$ ist verknüpft mit der **Separation der Quasi-Ferminiveaus**; diese kann durch eine äquivalente Spannung U ausgedrückt werden. Für schwache Injektion gilt:

$$n = n_{p,th} e^{U/U_T}.$$



Quelle: Sze, Physics of Semiconductor Devices

- Äquivalente Spannung und Zusammenhang mit der Minoritätsträgerdichte bei $x = 0$:

$$U(t) = \text{Re} \left\{ U_0 + \underline{U}_1 e^{j\omega t} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} n'_0(0) &= n_{th} e^{\frac{U_0}{U_T}} \\ n_1(0) &= n_{th} \frac{U_1}{U_T} e^{\frac{U_0}{U_T}} \end{aligned}$$

- Betrachte Zusammenhang zwischen den Wechselanteilen der äquivalenten Spannung und des Diffusionsstroms $I_n = -A J_n(0)$ der Minoritätsträger bei $x = 0$:

$$J_n(0, t) = \text{Re} \left\{ J_{n0}(0) + J_{n1}(0) e^{j\omega t} \right\} \quad \text{wobei} \quad \begin{aligned} J_{n0}(0) &= -\frac{eD_n}{L_n} n'_0(0) \\ J_{n1}(0) &= -\frac{eD_n}{L_n} \sqrt{1 + j\omega\tau_n} n_1(0) \end{aligned}$$

⇒ Repräsentation der Admittanz $U_1 / (-A J_{n1}(0))$ als Parallelschaltung des Kleinsignalleitwertes G_0 und der Diffusionskapazität C_D :

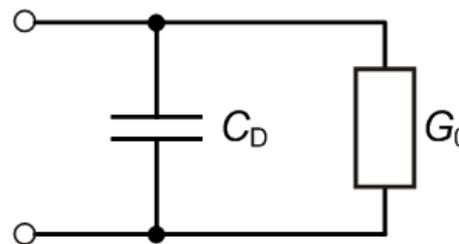
$$\underline{Y} = \frac{I_{n1}}{U_1} = G_0 + j\omega C_D$$

wobei $G_0 = \frac{I_{Sn}}{U_T} e^{\frac{U_0}{U_T}}$

$$C_D = \frac{1}{2} G_0 \tau_n$$

$$I_{Sn} = \frac{AeD_n n_{th}}{L_n}$$

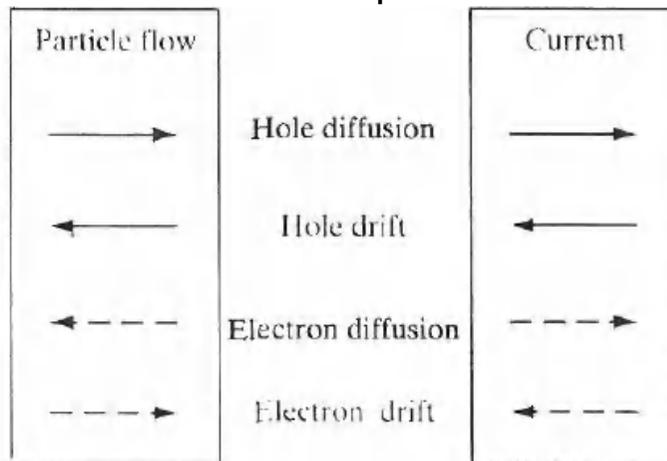
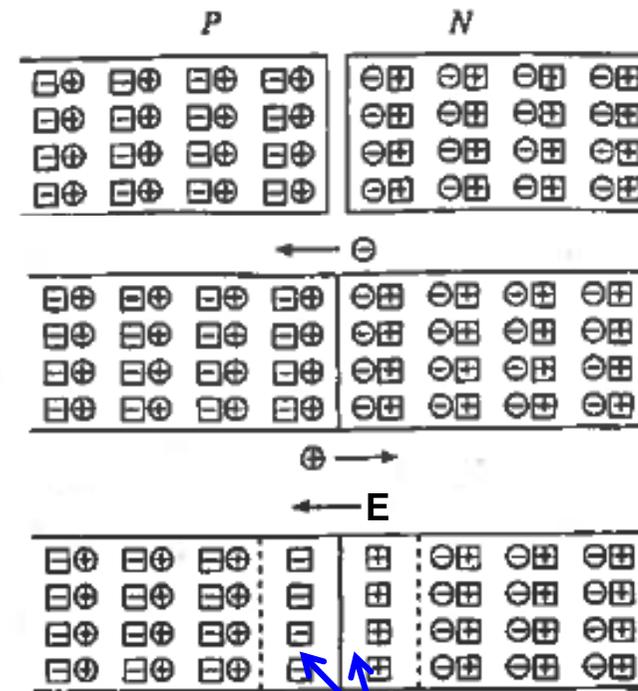
Sättigungsstrom



Die Diffusionskapazität C_D beschreibt die Ladungsspeicherung in der Diffusionszone und spielt eine wichtige Rolle bei der Analyse des dynamischen Verhaltens von pn-Übergängen.

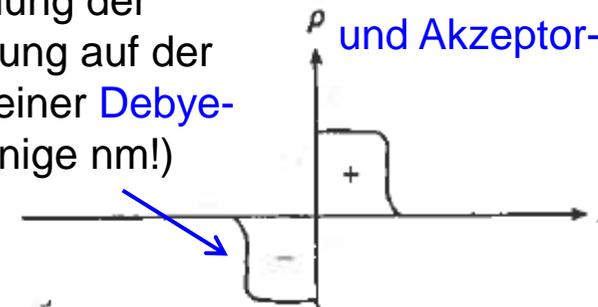
Der pn-Übergang im thermischen Gleichgewicht: Qualitative Betrachtung

- Isolierte p- und n-Halbleiter vor der Kontaktierung
- Elektronen und Löcher diffundieren über die Grenzfläche und rekombinieren
- **Neuer Gleichgewichtszustand:** Ausbildung einer **Raumladungszone**; dadurch entsteht ein Potentialgradient, dessen Feldströme gerade die Diffusionsströme kompensieren



Abschirmung der Potentialstörung auf der Längenskala einer **Debye-Länge** (wenige nm!)

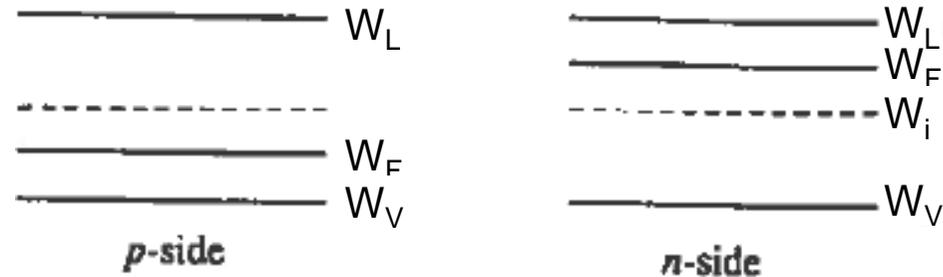
Geladene Donator- und Akzeptor-Rümpfe



Bilder: Pierret, Semiconductor device fundamentals; Streetman, Solid-state electronic devices

Der pn-Übergang im thermischen Gleichgewicht: Quantitative Analyse

- Isolierte p- und n-Halbleiter vor der Kontaktierung



- Diffusion von Elektronen und Löchern führt zu einem Angleichen der Ferminiveaus im therm. Gleichgewicht:

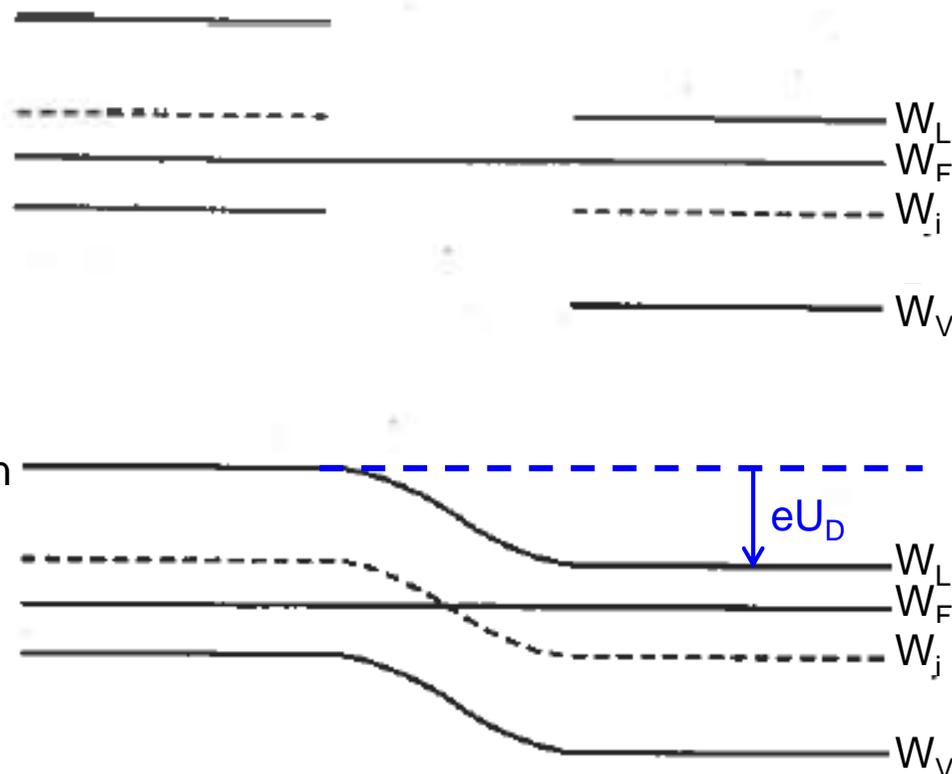
$$J_n = n\mu_n \nabla W_{F_n} = 0$$

$$J_p = p\mu_p \nabla W_{F_p} = 0$$

$$\Rightarrow W_{F_n}(x) = W_{F_p}(x) = W_F(x) \\ = \text{const}_x$$

- Die Potentialdifferenz zwischen den beiden ungestörten n- und p-Gebieten entspricht einer Diffusionsspannung („Built-in potential“) U_D :

$$U_D = U_T \ln \left(\frac{n_A n_D}{n_i^2} \right)$$



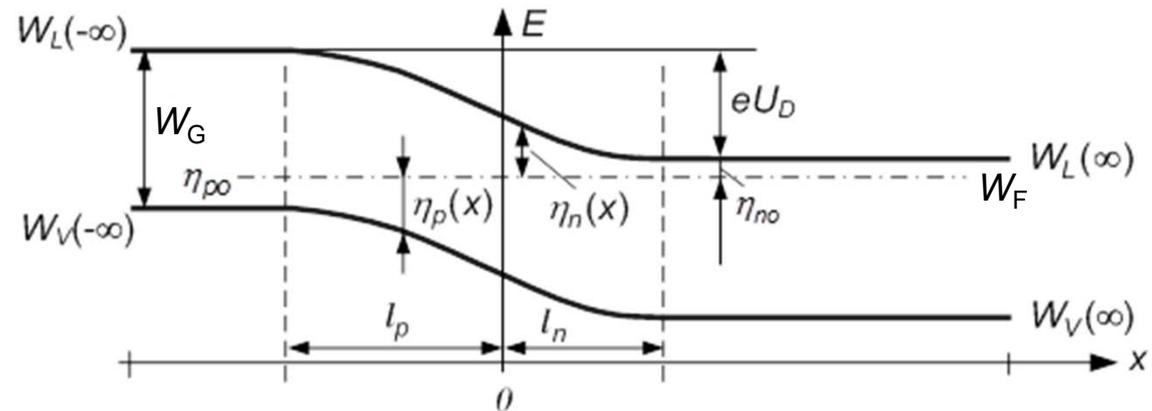
Bilder: Pierret, Semiconductor device fundamentals

Bemerkungen zur Diffusionsspannung

- Die Diffusionsspannung U_D hängt über $U_T = kT/e$ und n_i^2 von der Temperatur ab. Sie ist **unabhängig vom genauen Dotierungsverlauf** im Übergangsbereich.

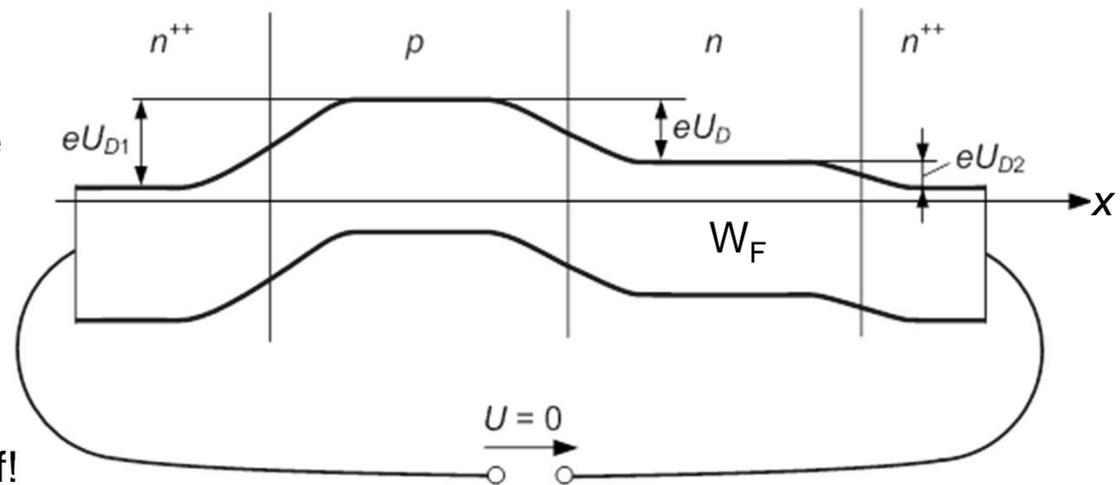
$$U_D = U_T \ln \left(\frac{n_A n_D}{n_i^2} \right)$$

- Mit wachsender Dotierstoffkonzentration **nähert sich eU_D der Bandlücke W_g an**



- Die Diffusionsspannung kann **nicht einfach durch Messung an den Klemmen bestimmt** werden, und sie kann auch **nicht zum Treiben eines Stromes in einem äußeren Stromkreis verwendet** werden.

Grund: In einem geschlossenen Stromkreis heben sich die Diffusionsspannungen gegenseitig auf!



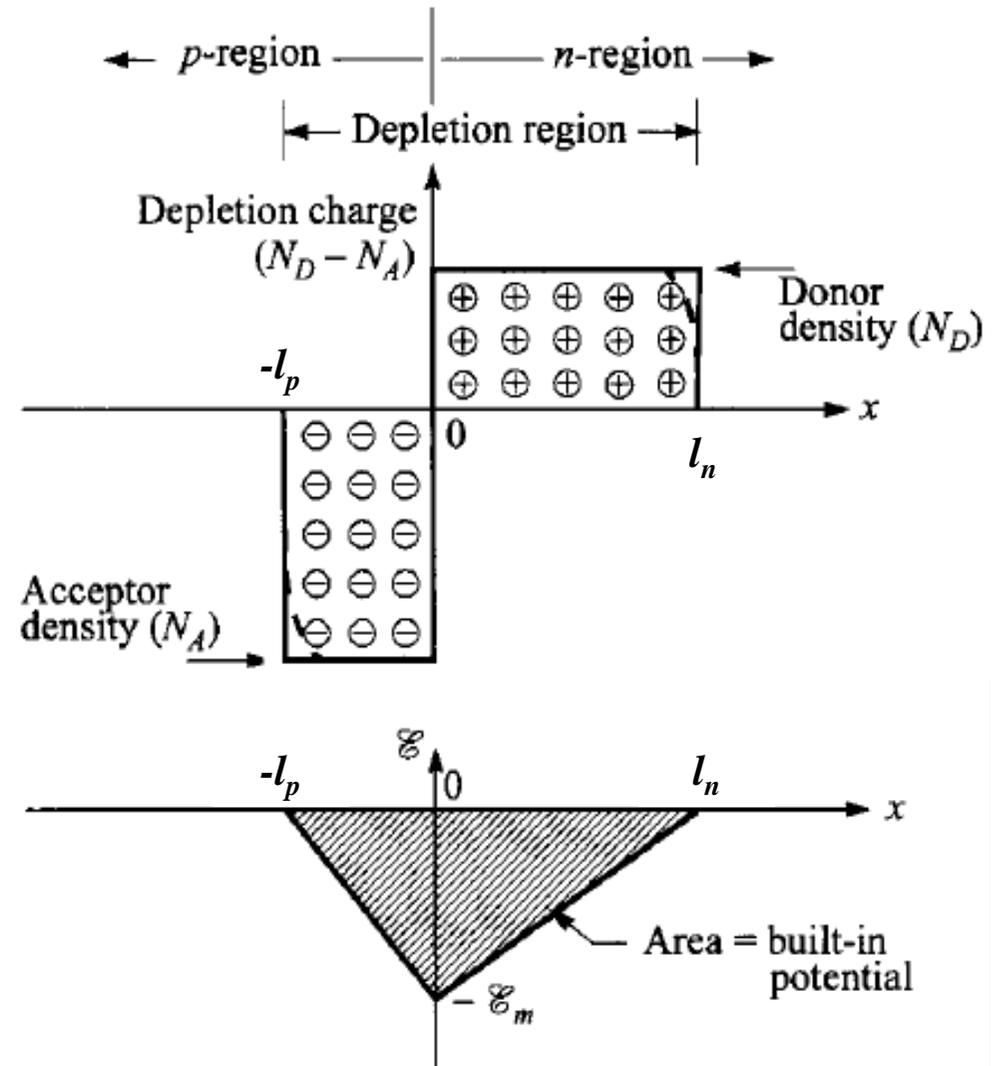
Ladungsträgerverteilung und Bandverlauf im pn-Übergang

Vereinfachende Annahmen:

- **Störstellenschöpfung** weit entfernt vom Übergang
- **Schottky-Näherung**: Keine beweglichen Ladungsträger in den Raumladungszonen (RLZ) („Verarmung“), d.h.,

$$n(x) = p(x) = 0 \quad \text{für} \quad -l_p < x < l_n$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -l_p \vee x > l_n \\ -en_A & \text{für } -l_p < x < 0 \\ en_D & \text{für } 0 < x < l_n \end{cases}$$



Bils: Sze, Physics of Semiconductor Devices

Ladungsträgerverteilung und Bandverlauf im pn-Übergang

Berechnung des **elektrischen Feldes** in der RLZ aus Maxwell-Gleichung $\nabla \cdot (\epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}) = \rho$

$$E_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -l_p \vee x > l_n \\ -\frac{en_A}{\epsilon_0 \epsilon_r} (x + l_p) & \text{für } -l_p < x < 0 \\ -\frac{en_A}{\epsilon_0 \epsilon_r} l_p + \frac{en_D}{\epsilon_0 \epsilon_r} x & \text{für } 0 < x < l_n \end{cases}$$

wobei $n_A l_p = n_D l_n$

Extremum der elektrischen Feldstärke bei $x = 0$:

$$E_m = -\frac{en_A}{\epsilon_0 \epsilon_r} l_p = -\frac{en_D}{\epsilon_0 \epsilon_r} l_n$$

Berechnung des **Potentialverlaufs** in der RLZ aus $\nabla \Phi = -\mathbf{E}$

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -l_p \\ \frac{en_A}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (x + l_p)^2 & \text{für } -l_p < x < 0 \\ U_D - \frac{en_D}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (x - l_n)^2 & \text{für } 0 < x < l_n \\ U_D & \text{für } x > l_n \end{cases}$$

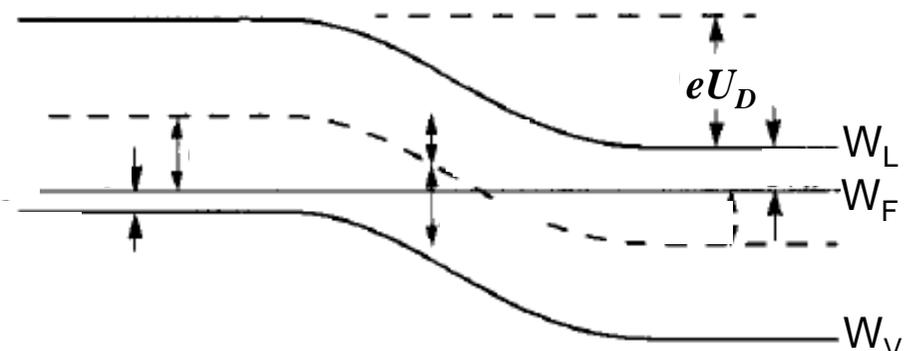
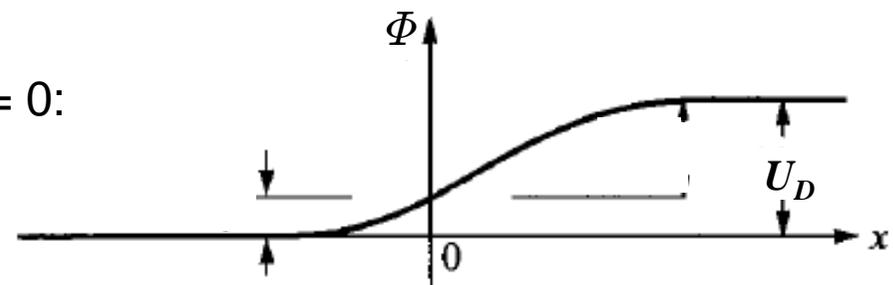
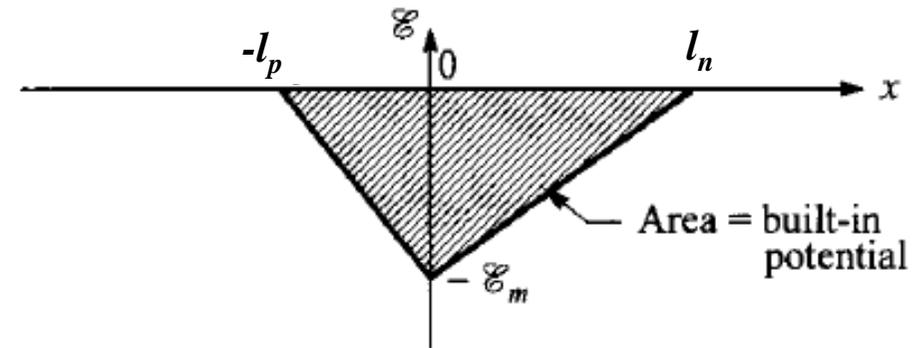


Bild: Sze, Physics of Semiconductor Devices

Längen der RLZ im n- und p-Bereich

Die Längen der RLZ im p- und n-Gebiet ergeben sich aus der **Stetigkeit des Potentials** bei $x = 0$:

$$l = l_p + l_n = \sqrt{\frac{2\epsilon_r\epsilon_0}{e} U_D \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_D} \right)}$$

$$l_p = l \frac{n_D}{n_A + n_D}$$

$$l_n = l \frac{n_A}{n_A + n_D}$$

$$E_m = - \sqrt{\frac{2e}{\epsilon_r\epsilon_0} \frac{U_D}{\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_D} \right)}}$$

Parameter von pn-Übergängen in Ge, Si und GaAs bei verschiedenen Dotierungen

$T = 300 \text{ K}$	Ge	Si	GaAs
ϵ_r	16	11,9	13,1
n_A/cm^{-3}	10^{15}	10^{15}	10^{15}
n_D/cm^{-3}	10^{15}	10^{15}	10^{15}
U_D/V	0,18	0,56	1,0
$l_p/\mu\text{m}$	0,4	0,6	0,85
$l_n/\mu\text{m}$	0,4	0,6	0,85
n_A/cm^{-3}	10^{15}	10^{15}	10^{15}
n_D/cm^{-3}	10^{18}	10^{18}	10^{18}
U_D/V	0,36	0,73	1,18
$l_p/\mu\text{m}$	0,8	1	1,3
$l_n/\mu\text{m}$	0,0008	0,001	0,0013
n_A/cm^{-3}	10^{18}	10^{18}	10^{18}
n_D/cm^{-3}	10^{18}	10^{18}	10^{18}
U_D/V	0,53	0,9	1,35
$l_p/\mu\text{m}$	0,02	0,02	0,03
$l_n/\mu\text{m}$	0,02	0,02	0,03

Anmerkung: Die Berechnung der Trägerverteilung in der RLZ steht auf den ersten Blick im Widerspruch zur Schottky-Näherung, da dort angenommen wurde, dass in der RLZ keine freie Ladungsträger vorliegen. Diese Annahme stellt aber nur eine Näherungslösung dar und ist daher nicht selbstkonsistent. Unter Verwendung des aus der Schottky-Näherung gewonnenen Potentials lässt sich deshalb eine nichtverschwindende Ladungsträgerdichte in der RLZ abschätzen, die jedoch sehr klein sein sollte (um Größenordnungen kleiner als die Dotierungsdichte!). Damit lässt sich die Gültigkeit der Schottky-Näherung überprüfen!

$$n(x) = N_L e^{-\frac{W_L(x) - W_F}{kT}}, \quad p(x) = N_V e^{-\frac{W_F - W_V(x)}{kT}}$$

⇒ Verlauf der **Löcherdichte in der RLZ des p-Halbleiters** nahe bei $x = -l_p$:

$$p_p(x) = n_A e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x + l_p}{L_{Dp}} \right)^2} \quad \text{wobei} \quad L_{Dp} = \sqrt{\frac{\epsilon U_T}{e n_A}} \quad \text{Debye-Länge im } p\text{-Halbleiter}$$

Verlauf der **Elektronendichte in der RLZ des p-Halbleiters** nahe bei $x = l_n$:

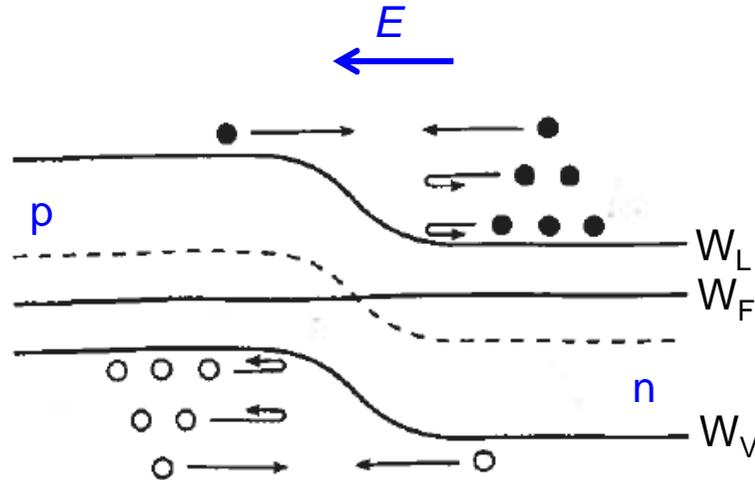
$$n_n(x) = n_D e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - l_n}{L_{Dn}} \right)^2} \quad \text{wobei} \quad L_{Dn} = \sqrt{\frac{\epsilon U_T}{e n_D}} \quad \text{Debye-Länge im } n\text{-Halbleiter}$$

⇒ „Gauß-förmiger“ Abfall der Ladungsträgerdichte an der Kante der RLZ über eine Strecke, die durch die **Debye-Länge** gegeben ist und typischerweise nur wenige nm beträgt

⇒ **Annahme einer vollständig verarmten RLZ (Schottky Näherung) gerechtfertigt!**

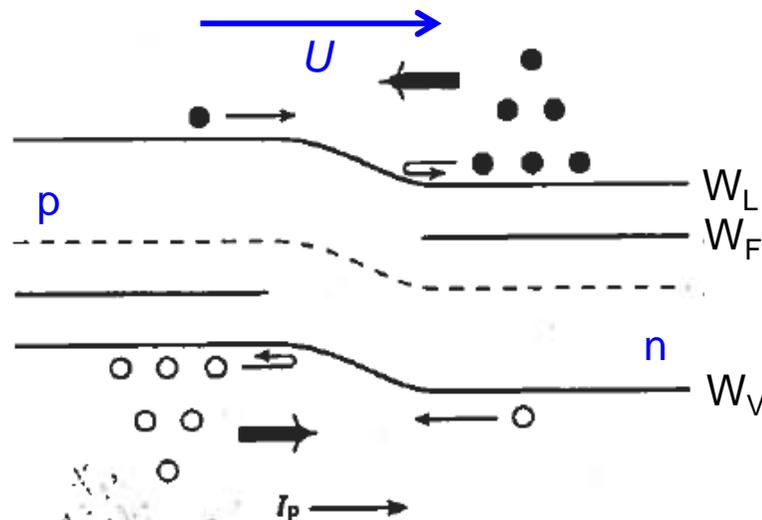
Der pn-Übergang im Nichtgleichgewicht: Qualitative Beschreibung

Thermisches Gleichgewicht ($U = 0$):



Diffusions- und Driftströme
kompensieren sich
gegenseitig

Spannung in Durchlassrichtung ($U > 0$; „Vorwärts“)

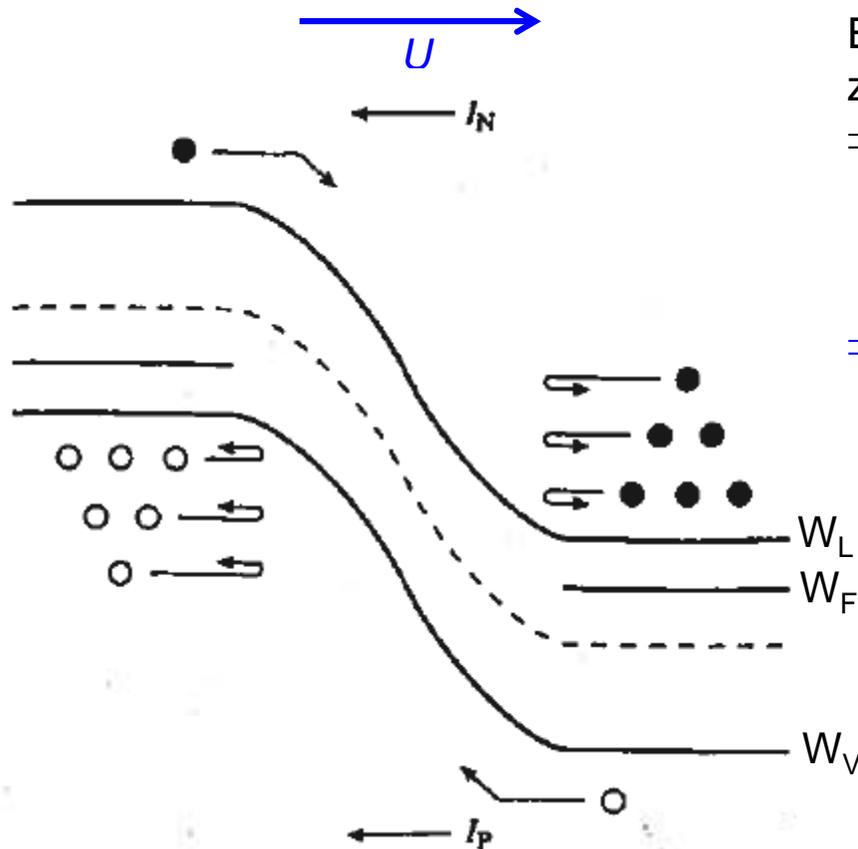


Externe Spannung $U > 0$ **verkleinert die Potentialstufe** zwischen p- und n-Seite
 \Rightarrow Mehr Elektronen (Löcher) aus dem n-Halbleiter (p-Halbleiter) gelangen in den p-Halbleiter (n-Halbleiter)
 \Rightarrow **Diffusionsströme überwiegen**
 \Rightarrow **Starker Stromfluss in Vorwärtsrichtung**

Bilder: Pierret, Semiconductor Device Fundamentals

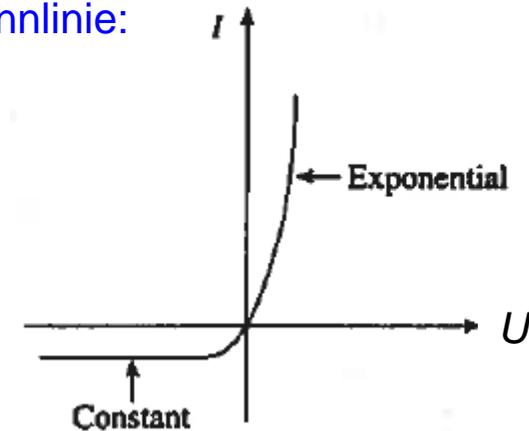
Der pn-Übergang im Nichtgleichgewicht: Qualitative Beschreibung

Spannung in Sperrrichtung ($U < 0$; „Rückwärts“)



- Externe Spannung $U < 0$ erhöht die Potentialstufe zwischen p- und n-Seite
- ⇒ Verringerung der Diffusionsströme; es bleiben die verhältnismäßig kleinen Feldströme der Minoritätsträger ins jeweils anders dotierte Gebiet
- ⇒ **Schwacher Stromfluss in Rückwärtsrichtung**

Kennlinie:



Bilder: Pierret, Semiconductor Device Fundamentals

Der pn-Übergang im Nichtgleichgewicht: Quantitative Analyse

Breite der **Raumladungszone** wird durch die Gesamtspannung ($U_D - U$) bestimmt
 \Rightarrow Ersetzen von U_D durch $(U_D - U)$ in den Formeln für die Breite der RLZ im Gleichgewichtsfall

$$l = \sqrt{\frac{2\epsilon_r\epsilon_0}{e} (U_D - U) \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_D} \right)}$$

$$E_m = - \sqrt{\frac{2e}{\epsilon_r\epsilon_0} \frac{U_D - U}{\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_D} \right)}}$$

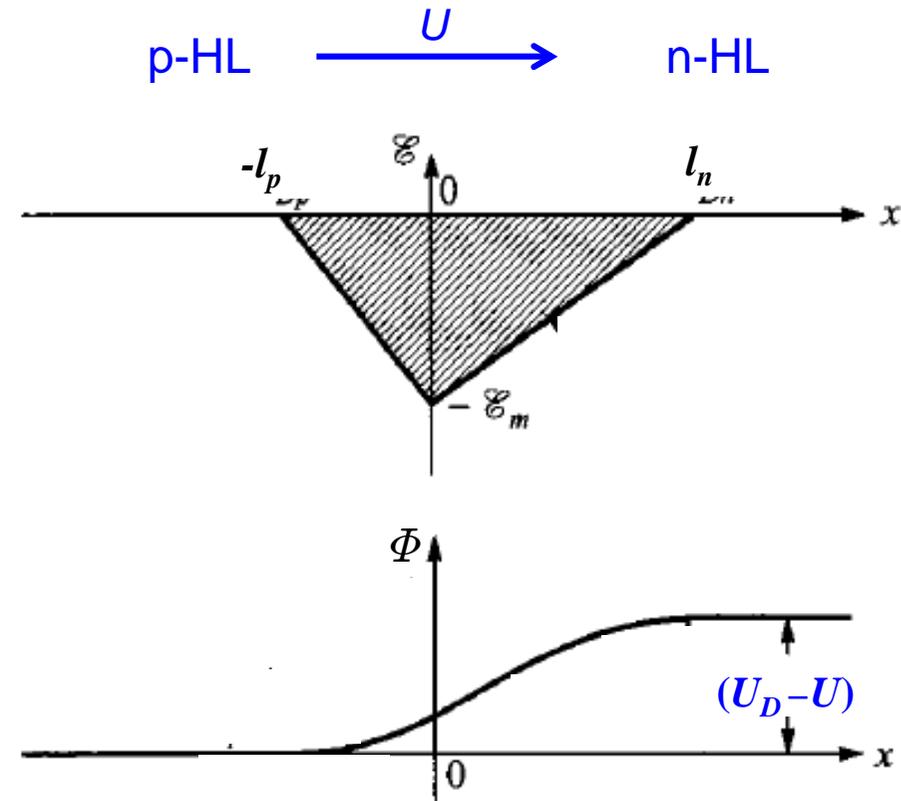


Bild: Sze, Physics of Semiconductor Devices

Der pn-Übergang im Nichtgleichgewicht: Quantitative Analyse für den Fall der Vorwärtsspannung

Ergebnis der qualitativen Analyse:

Zusätzliche Elektronen gelangen in den p-Bereich, Löcher in den n-Bereich

⇒ Kein thermisches Gleichgewicht; Beschreibung durch Quasi-Ferminiveaus mit Separation eU .

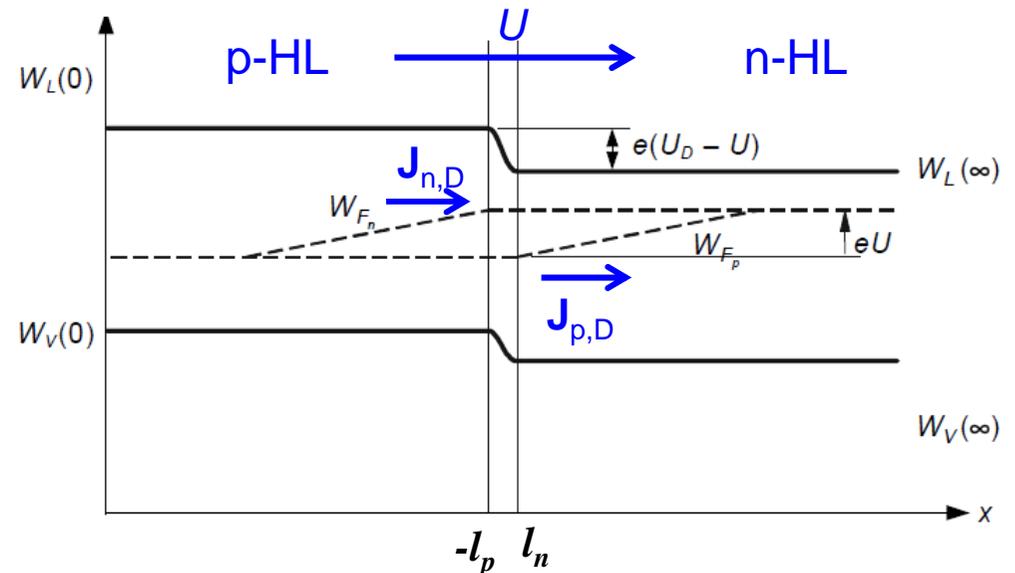
Vereinfachende Annahmen für die quantitative Analyse:

- Kein Spannungsabfall in den Bahngebieten
- Die Quasi-Ferminiveaus der Elektronen (W_{Fn}) und Löcher (W_{Fp}) ändern sich in der (sehr dünnen) RLZ nicht wesentlich:

$$n_p(-l_p) = n_{p0} e^{\frac{U}{U_T}}$$

$$p_n(l_n) = p_{n0} e^{\frac{U}{U_T}}$$

⇒ Die Minoritätsträgerdichten am Rande der Raumladungszonen sind um einen Faktor $\exp(U/U_T)$ höher als im thermischen Gleichgewicht.



- Es liegt **schwache Injektion** vor
- **Ladungsträgerrekombination und -generation in der Raumladungszone ist vernachlässigbar**; die Gesamtstromdichte kann also berechnet werden aus

$$\mathbf{J} \approx \mathbf{J}_n(-l_p) + \mathbf{J}_p(l_n)$$

Der pn-Übergang im Nichtgleichgewicht: Quantitative Analyse

Gesamter Strom durch die Diode:
Annahme: Lange Diffusionszonen

$$I = I_S (e^{U/U_T} - 1)$$

$$I_S = I_{Sn} + I_{Sp}$$

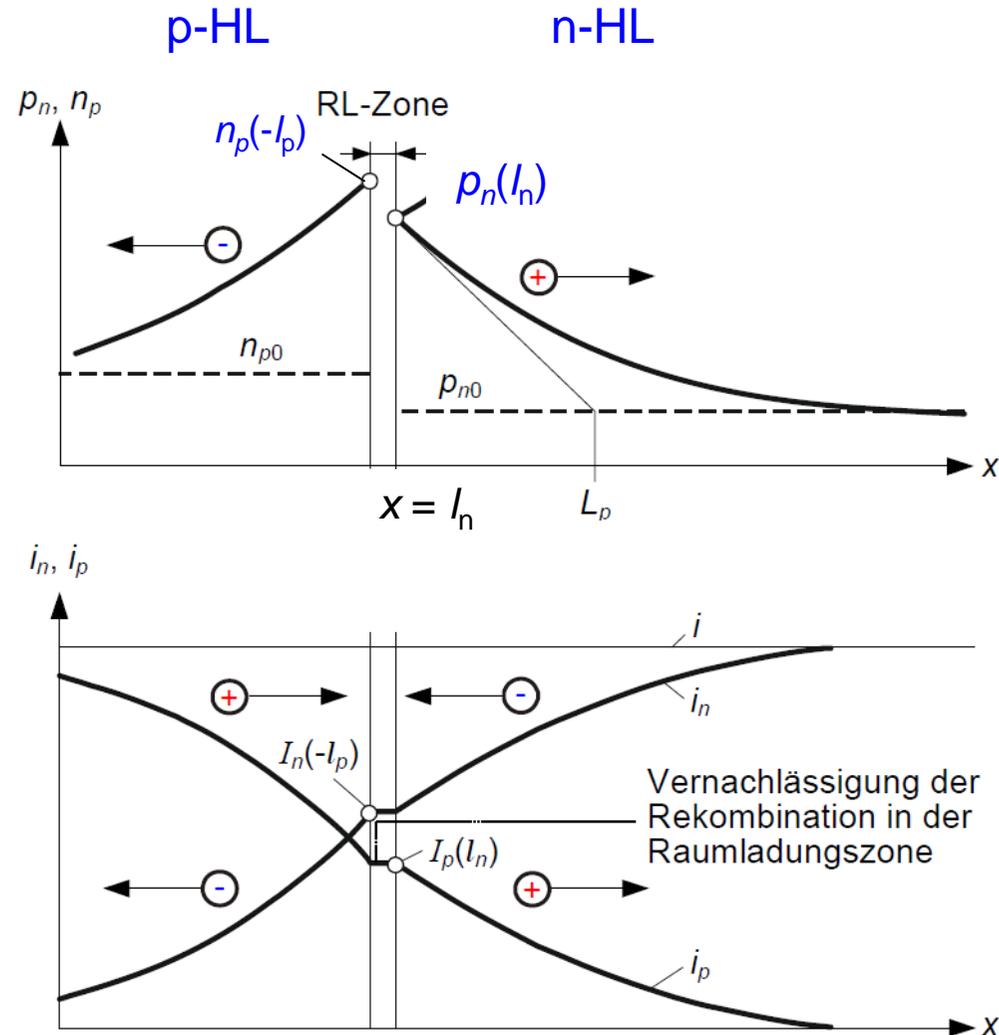
$$I_{Sp} = Ae \frac{D_p p_{n0}}{L_p} = Ae \frac{D_p n_i^2}{L_p n_D}$$

$$I_{Sn} = Ae \frac{D_n n_{p0}}{L_n} = Ae \frac{D_n n_i^2}{L_n n_A}$$

$$I_S = Aen_i^2 \left(\frac{D_n}{L_n n_A} + \frac{D_p}{L_p n_D} \right)$$

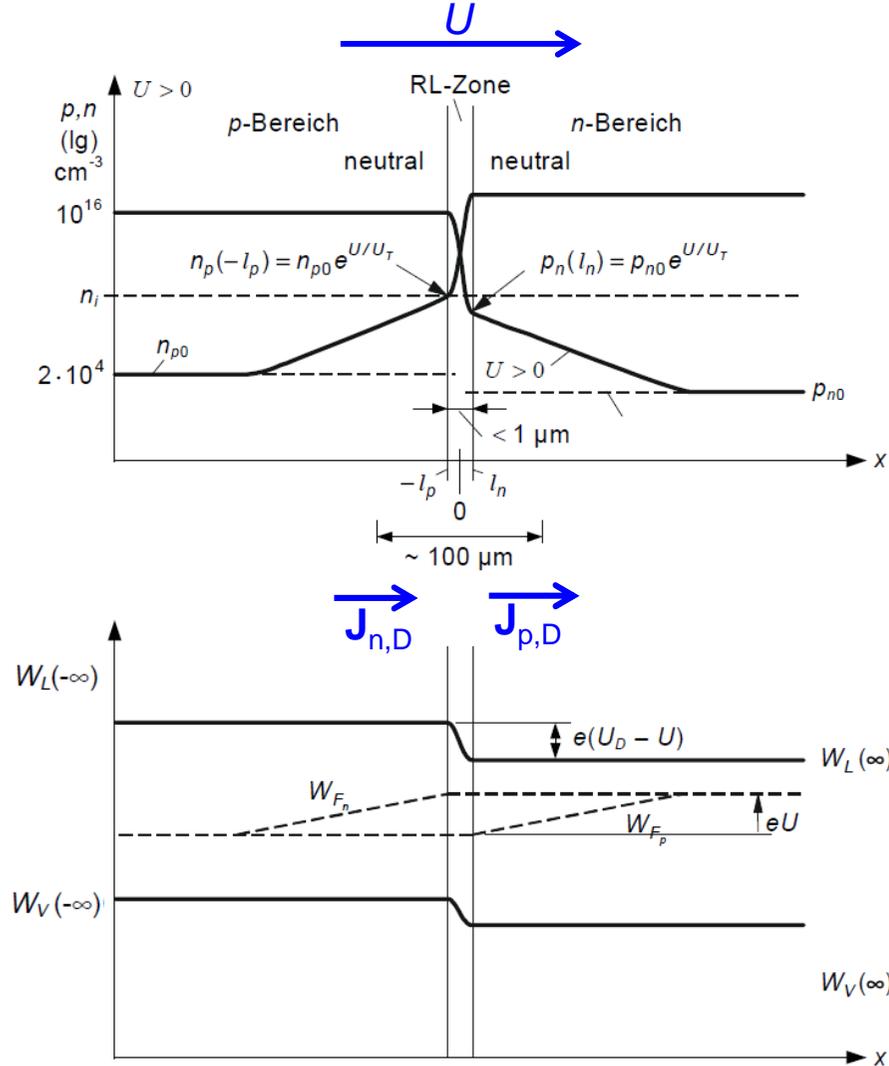
Dieselbe Beziehung gilt auch für
Spannung in Sperrrichtung!

→ Diffusionsstromdichten...

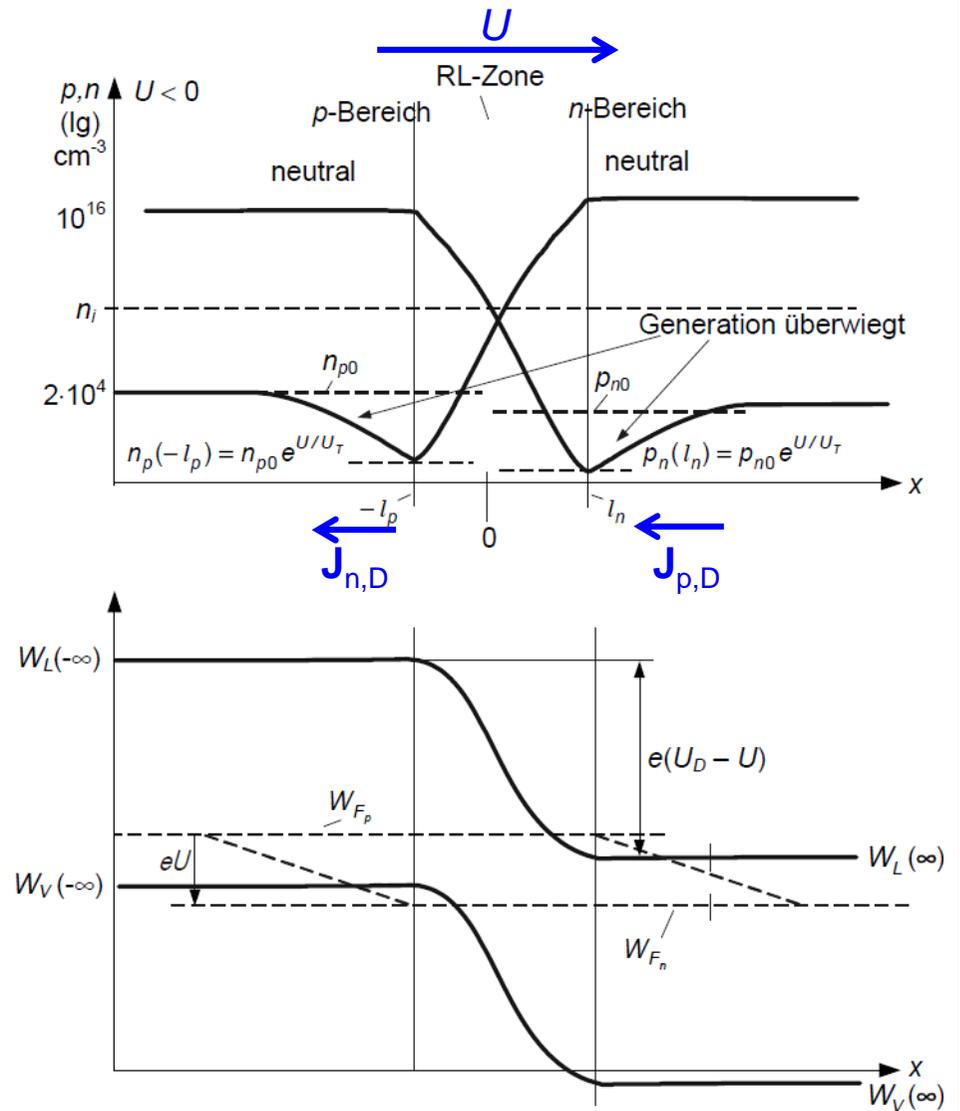


Der pn-Übergang bei Vorwärts- und Rückwärtsspannung

Spannung in Durchlassrichtung ($U > 0$)



Spannung in Sperrichtung ($U < 0$)



Vorlesung 9

30.11.2015

Der pn-Übergang im Nichtgleichgewicht: Quantitative Analyse für den Fall der Vorwärtsspannung

Ergebnis der qualitativen Analyse:

Zusätzliche Elektronen gelangen in den p-Bereich, Löcher in den n-Bereich

⇒ Kein thermisches Gleichgewicht; Beschreibung durch Quasi-Ferminiveaus mit Separation eU .

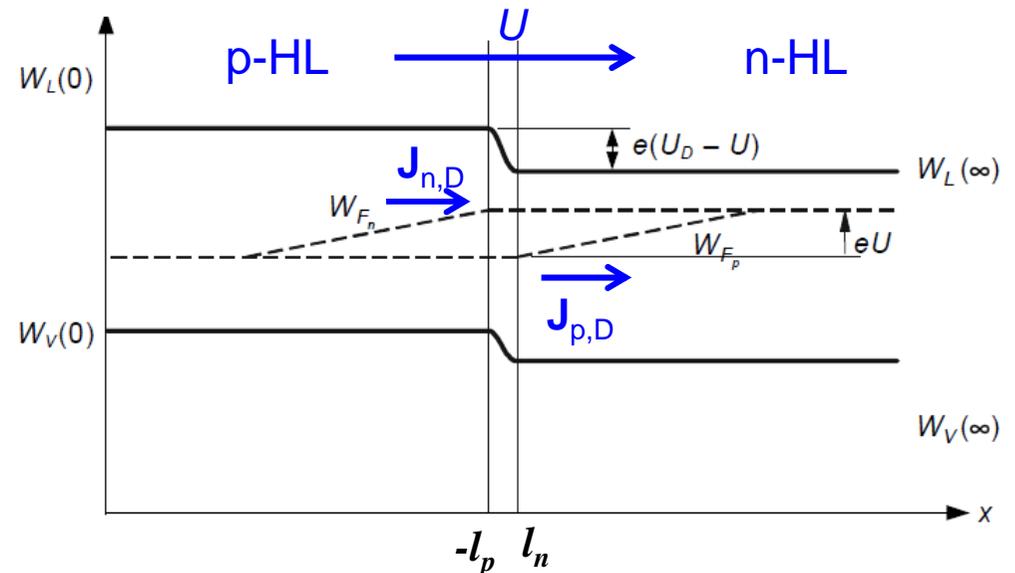
Vereinfachende Annahmen für die quantitative Analyse:

- Kein Spannungsabfall in den Bahngebieten
- Die Quasi-Ferminiveaus der Elektronen (W_{Fn}) und Löcher (W_{Fp}) ändern sich in der (sehr dünnen) RLZ nicht wesentlich:

$$n_p(-l_p) = n_{p0} e^{\frac{U}{U_T}}$$

$$p_n(l_n) = p_{n0} e^{\frac{U}{U_T}}$$

⇒ Die Minoritätsträgerdichten am Rande der Raumladungszonen sind um einen Faktor $\exp(U/U_T)$ höher als im thermischen Gleichgewicht.



- Es liegt **schwache Injektion** vor
- **Ladungsträgerrekombination und -generation in der Raumladungszone ist vernachlässigbar**; die Gesamtstromdichte kann also berechnet werden aus

$$\mathbf{J} \approx \mathbf{J}_n(-l_p) + \mathbf{J}_p(l_n)$$

Der pn-Übergang im Nichtgleichgewicht: Quantitative Analyse

Gesamter Strom durch die Diode:
Annahme: Lange Diffusionszonen

$$I = I_S (e^{U/U_T} - 1)$$

$$I_S = I_{Sn} + I_{Sp}$$

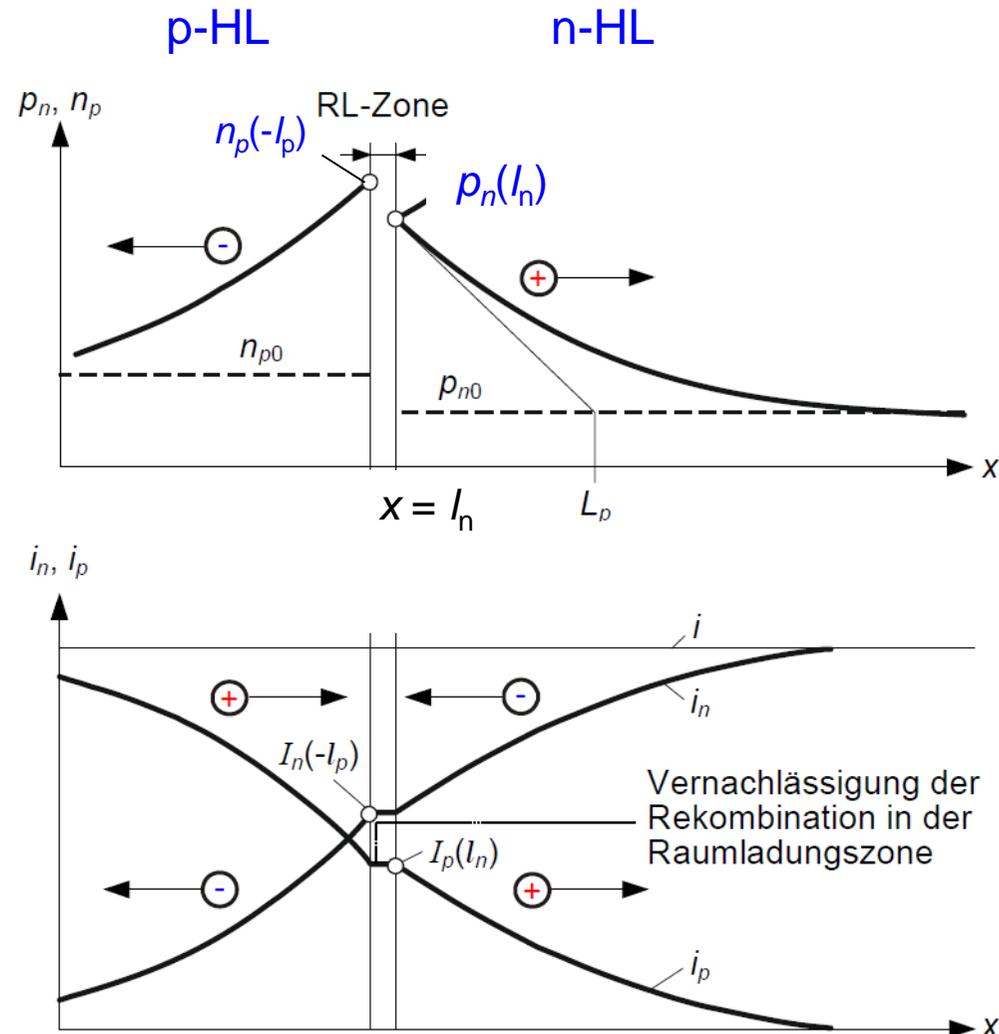
$$I_{Sp} = Ae \frac{D_p p_{n0}}{L_p} = Ae \frac{D_p n_i^2}{L_p n_D}$$

$$I_{Sn} = Ae \frac{D_n n_{p0}}{L_n} = Ae \frac{D_n n_i^2}{L_n n_A}$$

$$I_S = Aen_i^2 \left(\frac{D_n}{L_n n_A} + \frac{D_p}{L_p n_D} \right)$$

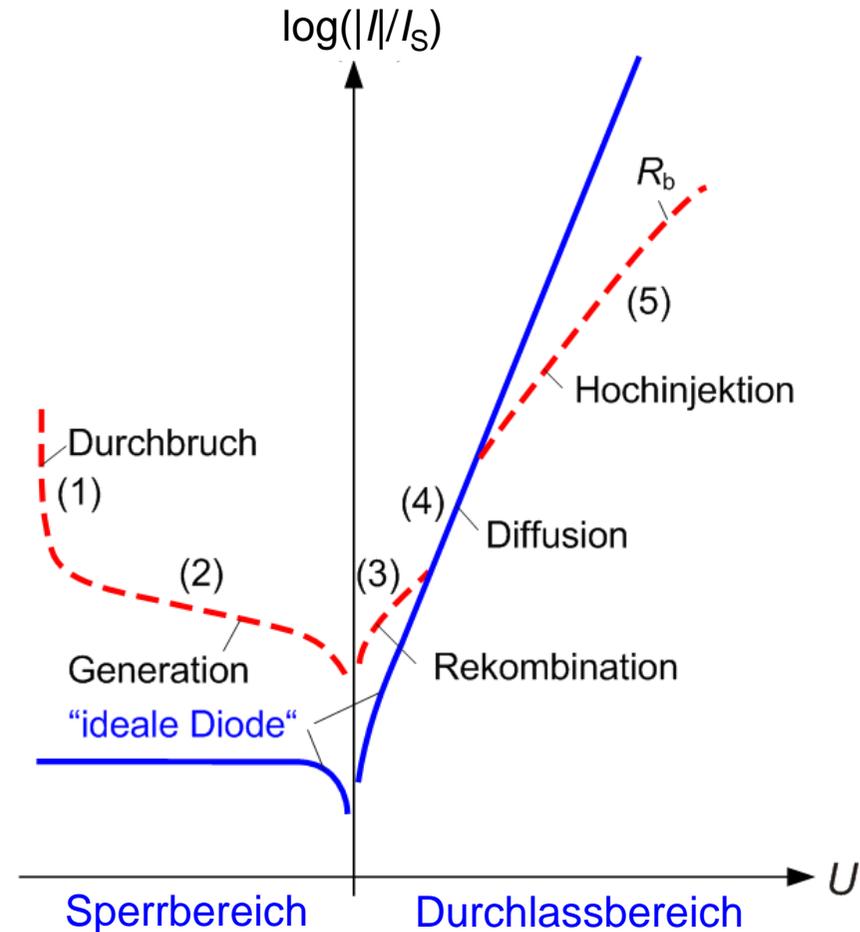
Diese Beziehung gilt sowohl für
Spannungen in Sperrrichtung als auch
für Spannungen in Durchlassrichtung!

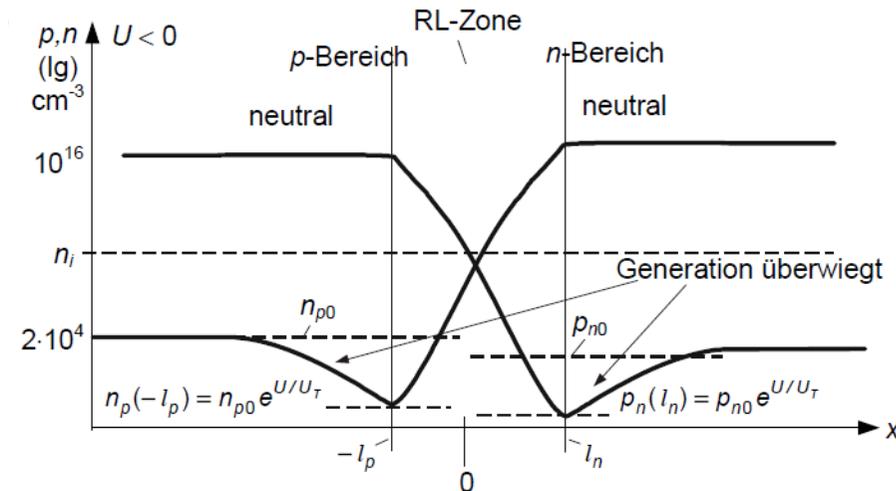
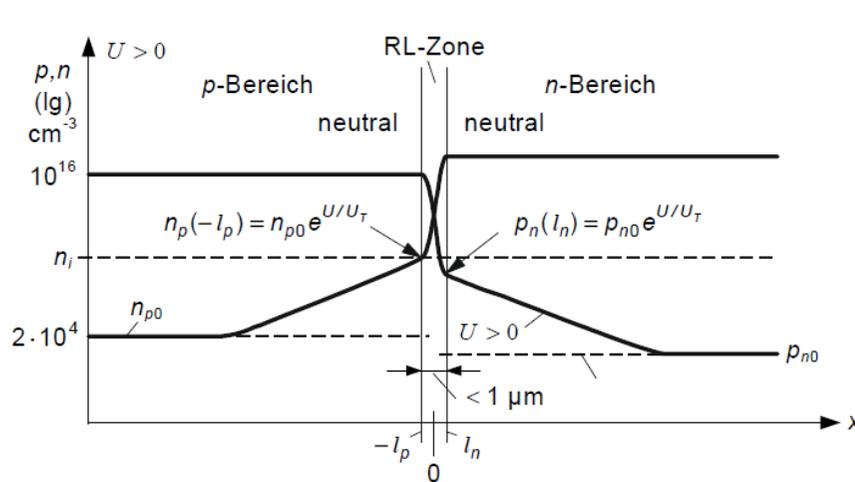
→ Diffusionsstromdichten...



Das bisher besprochene ideale Modell, auch Shockley-Modell genannt, gilt in recht guter Näherung für Germanium-Dioden. Bei Si- und noch stärker bei GaAs- Dioden ergeben sich jedoch **Abweichungen der realen gegenüber der idealen Kennlinie**:

- (1) **Durchbruch** bei großen Sperrspannungen
 - Thermischer Durchbruch
 - Tunnel-Effekt (Zener-Effekt)
 - Lawinendurchbruch
- (2) **Realer Sperrstrom** ist spannungsabhängig und wesentlich größer als vom Shockley-Modell vorhergesagt
 - Leckströme am Rand des pn-Überganges
 - Trägergeneration in der RLZ
- (3) Realer Durchlassstrom ist **bei kleinen Spannungen größer als im Shockley-Modell** und stimmt nur im mittleren Bereich (4) mit der Theorie überein
 - Rekombination in der RLZ
- (5) Realer Durchlassstrom ist **bei großen Spannungen kleiner als im Shockley-Modell**
 - Hochinjektion (HLI) in den Diffusionszonen
 - Spannungsabfall in den Bahngebieten





Spannung in Durchlassrichtung:

- Erhöhte Trägerdichte in der RLZ: $n_p > n_i^2$
- ⇒ Rekombinationsüberschuss; die dadurch vernichteten Ladungsträger müssen zusätzlich nachgeliefert werden
- ⇒ Zusätzlicher Rekombinationsstrom in Durchlassrichtung

Spannung in Sperrrichtung:

- Verringerte Trägerdichte in der RLZ: $n_p < n_i^2$
- ⇒ Generationsüberschuss; die dadurch erzeugten Ladungsträger werden aus der RLZ abgezogen
- ⇒ Zusätzlicher Generationsstrom in Sperrrichtung

Annahmen:

- Dotierungsdichten sind im n- und im p-Teil etwa gleich groß sind: $n_A = n_D = n_{\text{dot}}$; $l_n = l_p = l$
- Diffusionslängen für Elektronen und Löcher sind etwa gleich: $L_n = L_p = L_0$

⇒ Generations-/ Rekombinationsstrom lässt sich schreiben als:

$$I_{GR} = \begin{cases} -k_{GR} I_S & \text{für } \frac{U}{U_T} \ll -1 \\ k_{GR} I_S \left(e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right) & \text{für } \frac{U}{U_T} > 1 \end{cases}$$

wobei $k_{GR} = \frac{n_{\text{dot}} l}{4 n_i L_0}$, $l = \sqrt{\frac{2 \epsilon_r \epsilon_0}{e} (U_D - U) \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_D} \right)}$

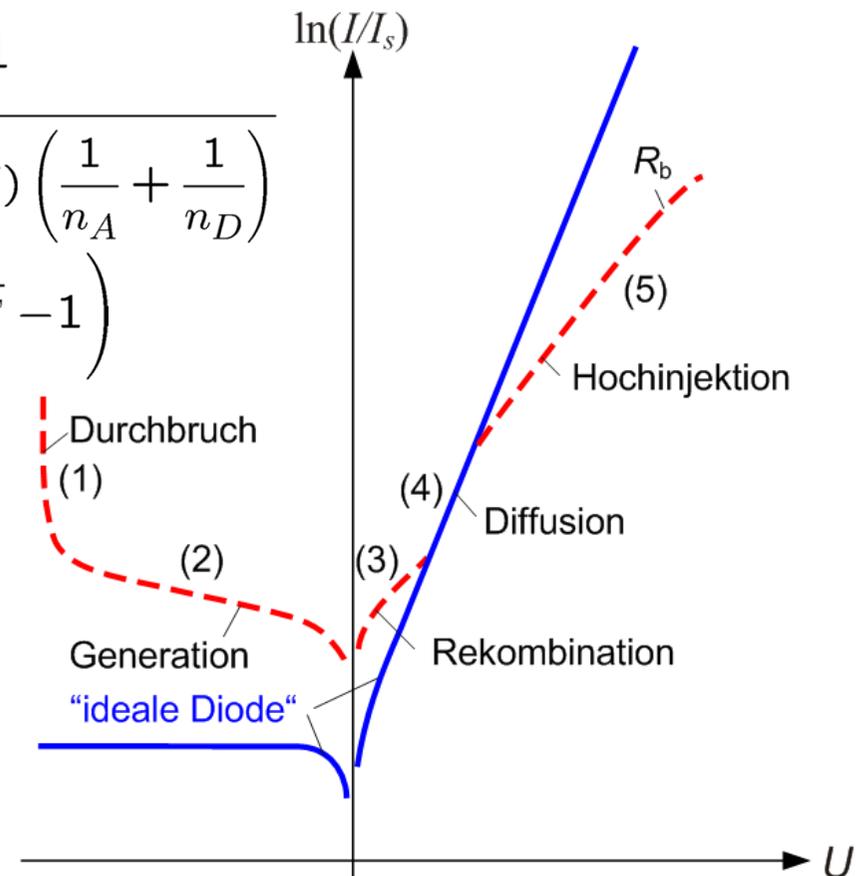
Vergleich mit der idealen Diode: $I = I_S \left(e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right)$

- Sperrstrom um den Faktor k_{GR} erhöht
- Keine Sättigung in Sperrrichtung

$$I_{GR} \propto \sqrt{U_D - U}$$

- In Durchlassrichtung wird der Gesamtstrom zunächst durch den Rekombinationsanteil I_{GR} dominiert. I_{GR} wird bei einer bestimmten Spannung U gerade so groß wie der ideale Diodenstrom:

$$\frac{U}{U_T} = 2 \ln k_{GR}$$



In der Praxis wird oft eine **empirische Darstellung** der realen Diodenkennlinie verwendet, die sowohl Diffusions- als auch Rekombinationsströme berücksichtigt:

$$I = I_0 \left(e^{\frac{U}{mU_T}} - 1 \right) \quad m = 1 \dots 2$$

Emissionskoeffizient („Ideality Factor“)

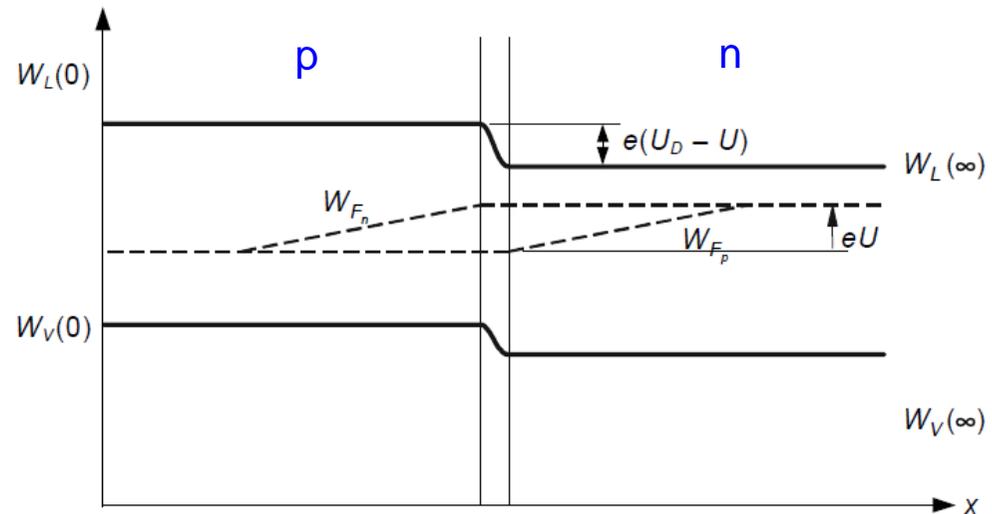
wobei $I_0 = k_{GR} I_S; m \approx 2$ für dominierende Generations- und Rekombinationsströme

$I_0 = I_S; m \approx 1$ für dominierende Diffusionsströme

Trägerdichte am Rand der RLZ für große Spannungen in Vorwärtsrichtung:

$$np = n_i^2 e^{\frac{U}{U_T}}$$

$$n \approx p \approx n_i e^{\frac{U}{2U_T}}$$



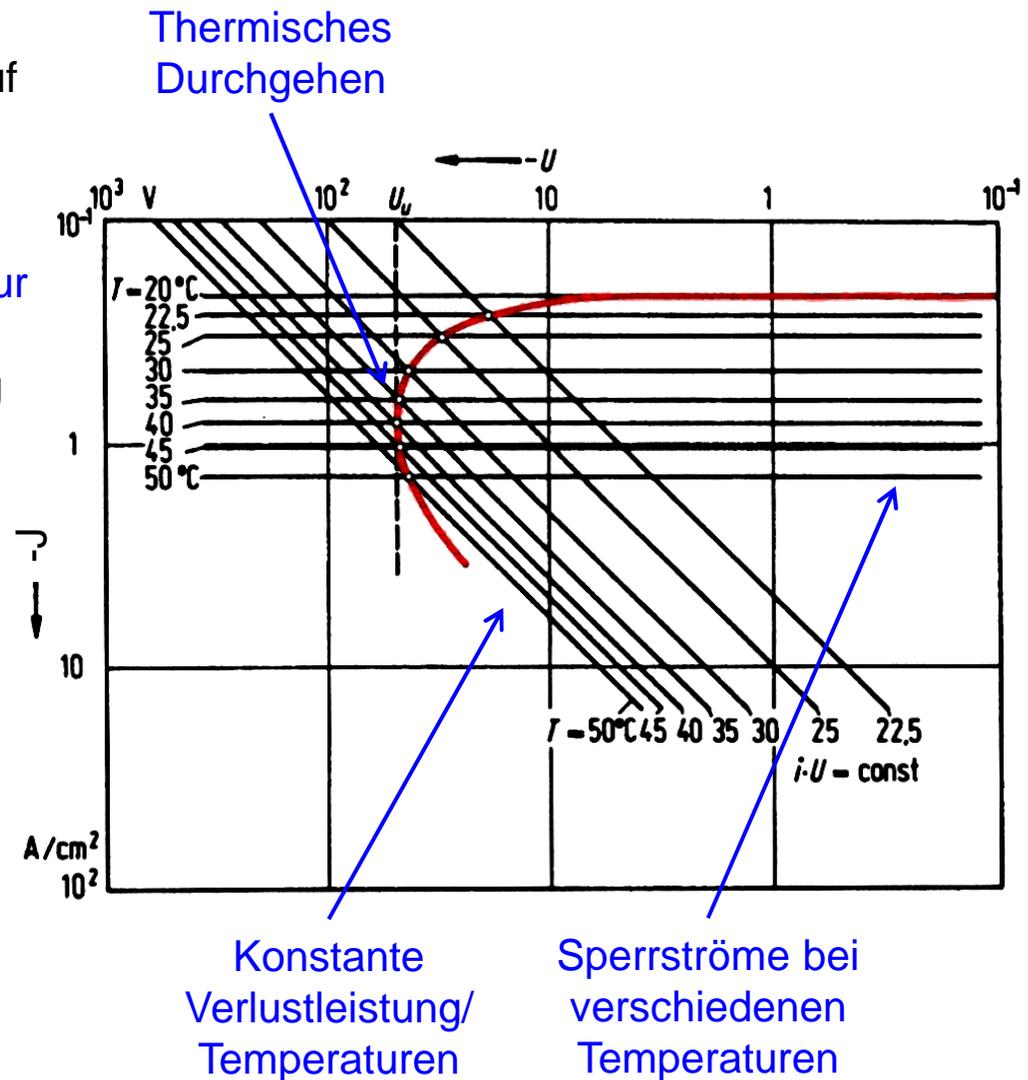
- ⇒ Die **Minoritätsträgerdichte am Rand der RLZ** wächst nur noch mit $\exp(U/(2U_T))$
- ⇒ Damit verlangsamt sich auch die Zunahme des Diffusionsstromes.
- ⇒ Der Diodenstrom wird für große Vorwärtsspannungen angenähert durch

$$I = I_0 e^{\frac{U}{mU_T}} \quad m = 1 \dots 2 \quad \text{Emissionskoeffizient („Ideality Factor“)}$$

- ⇒ Ähnliche Näherung wie im Falle dominierender Generations- und Rekombinationsströme!

Thermischer Durchbruch in pn-Übergängen

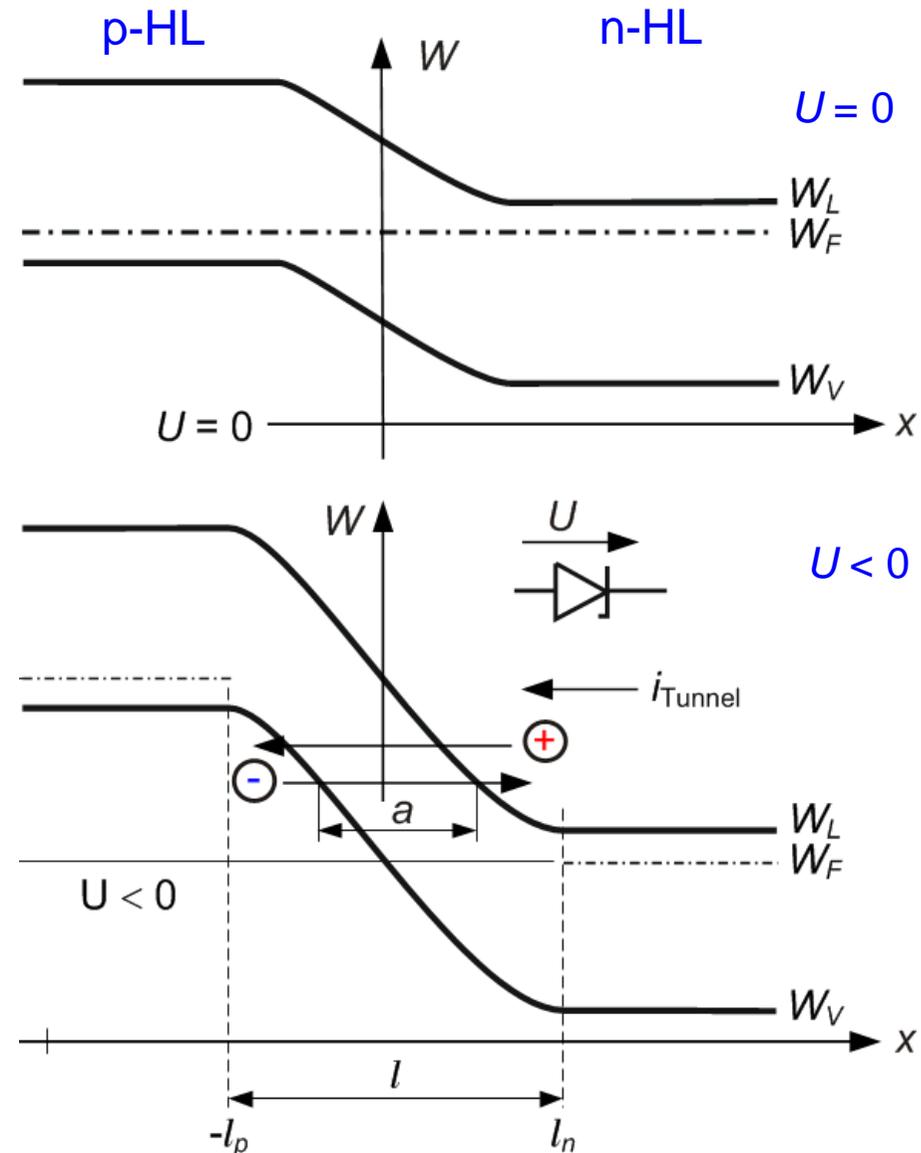
- Verlustleistung in der Diode: $P=UI$
 - ⇒ Führt zu Erwärmung pn-Überganges auf eine Temperatur T , die vom Widerstand zur Wärmesenke abhängt.
- Gleichzeitig: Dioden-Sperrstrom und Verlustleistung nehmen mit der Temperatur zu.
 - ⇒ Ab Erreichen einer gewissen Spannung U_U (Umkehrspannung, engl. „Turnover Voltage“) erhöht sich der Strom bei gleicher oder gar abnehmender Spannung (Thermisches Durchgehen, „Thermal Runaway“)
 - ⇒ Irreversible Zerstörung der Diode (Thermischer Durchbruch), wenn der Strom nicht durch die äußere Beschaltung begrenzt wird.



Besonders anfällig: Halbleiter mit kleiner Bandlücke, z.B. Ge

Tunnel-Effekt

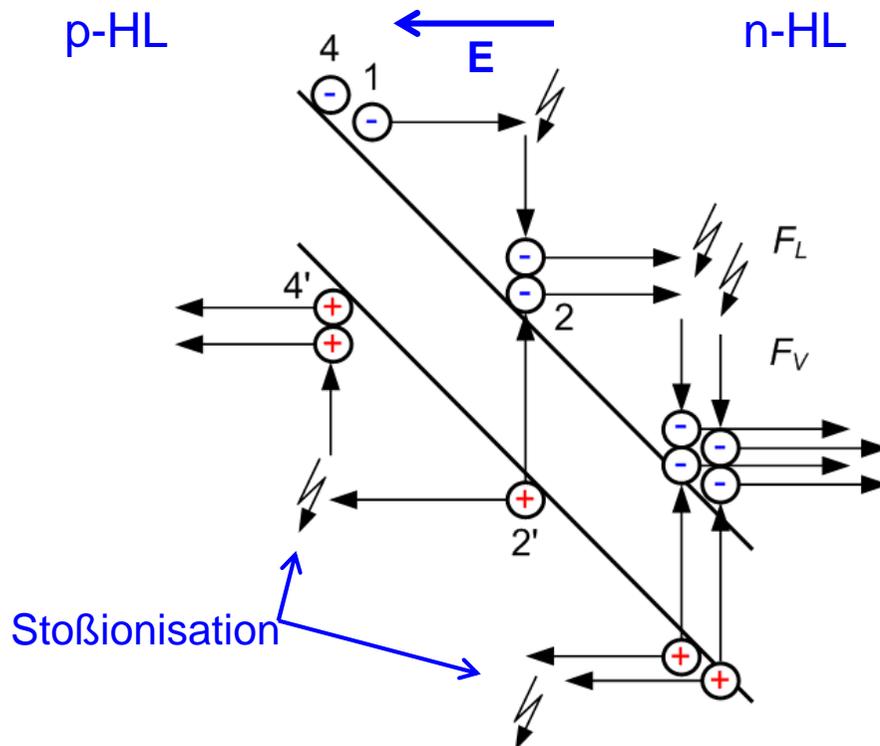
- Bei starker Sperrspannung:
Elektronen im VB des p -Halbleiter (Löcher im LB des n -Halbleiters) auf gleicher energetischer Höhe wie das LB im n -Halbleiter (das VB im p -Halbleiter)
⇒ Ladungsträger können durch die Bandlücke („Potentialbarriere der Breite a “) in die jeweils freien Zustände tunneln.
- Tunnelwahrscheinlichkeit nimmt mit abnehmender Barrierenbreite (a) exponentiell zu.
⇒ Strom wächst stark mit der Sperrspannung
⇒ Tunneldurchbruch; reversibel typischerweise für $|eU| < 4W_G$
- Erforderliche Feldstärken in Si typischerweise ca. $100 \text{ V}/\mu\text{m}$
⇒ Kurze RLZ / hohe Dotierung
- Bandlücke wird mit zunehmender Temperatur kleiner
⇒ Durchbruchspannung nimmt mit zunehmender Temperatur ab



Lawineneffekt:

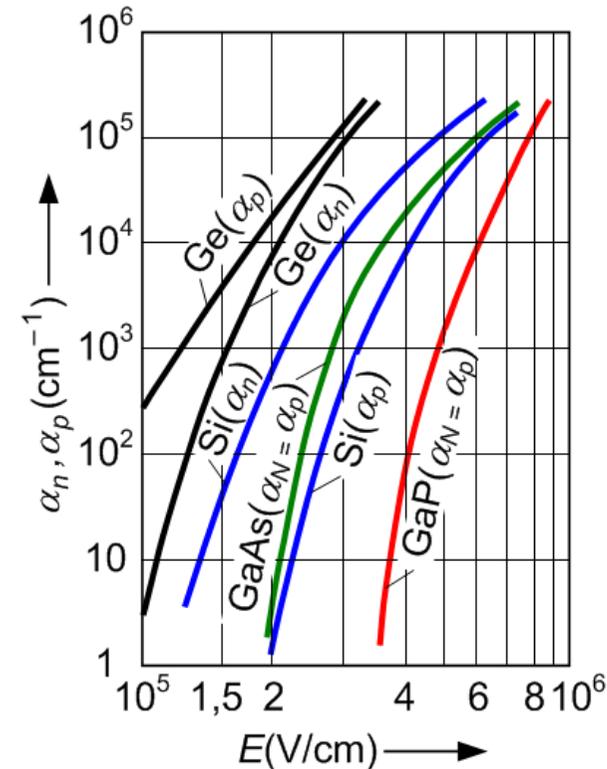
- Ladungsträger in einem HL nehmen bei hoher Feldstärke E zwischen zwei Stößen (über eine mittlere freie Weglänge) so viel Energie auf, dass damit ein Elektron-Loch-Paar erzeugt werden kann (**Stoßionisation**)

⇒ Lawinenartiges Anwachsen der freien Ladungsträger:



Ionisierungskoeffizienten α_n und α_p :

- Ein primäres Elektron (Loch) erzeugt auf der Laufstrecke dx im Mittel $\alpha_n dx$ ($\alpha_p dx$) Trägerpaare.
- Die **Ionisierungskoeffizienten** α_n und α_p nehmen mit der Feldstärke zu und nähern sich bei hohen Feldstärken einander an.



Silizium bei 50 V/ μm : Nur Elektronen ionisieren

$$\alpha_n \approx 10 \mu\text{m}^{-1}, \alpha_p \approx 3 \mu\text{m}^{-1}$$

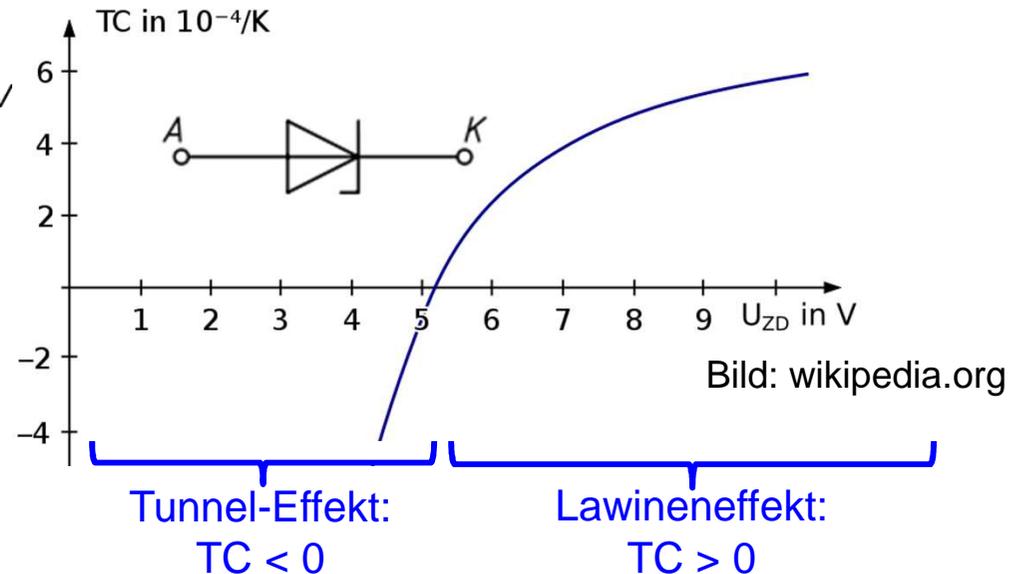
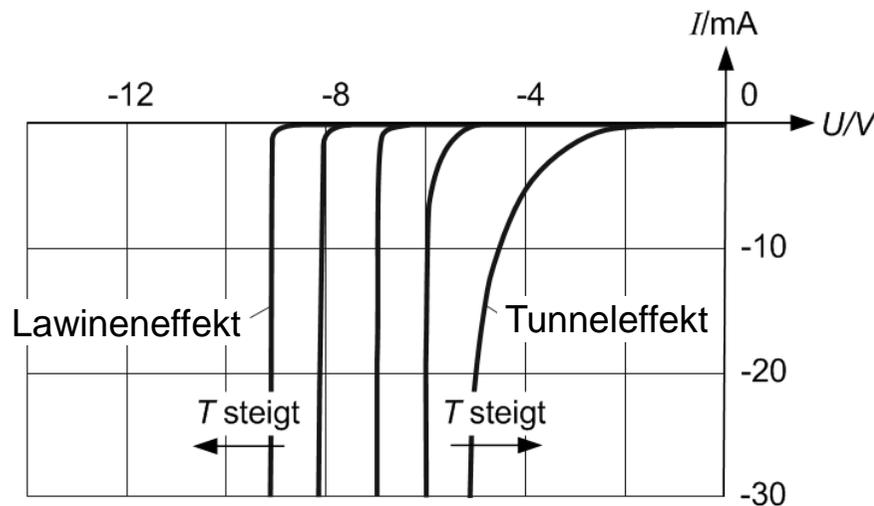
Vergleich mit Tunneleffekt (relevant ab ca. 50 V/ μm in Si):

- Einfluss des Lawineneffektes hängt vom Produkt aus Ionisierungskoeffizient α_n und Sperrschichtdicke ab.
- Bei kurzen RLZ dominiert der Tunneleffekt ($\alpha_{n,p}l \ll 1$), bei langen RLZ ($\alpha_{n,p}l \gg 1$) der Lawineneffekt.
- Schwach dotierte Dioden mit breiter Sperrschicht und Sperrspannungen $|eU| \geq 6 W_G$ zeigen typischerweise Lawinendurchbrüche.

Temperaturabhängigkeit:

Steigende Temperatur führt zu einem Absinken der freien Weglänge (Beweglichkeit) und damit zu einer Abnahme der Ionisierungskoeffizienten

⇒ Beim Lawinendurchbruch nimmt die Durchbruchsspannung mit der Temperatur zu!



- **Z-Dioden:** Dioden mit **genau spezifizierter Durchbruchspannung**, die für den **Dauerbetrieb im Durchbruchbereich** ausgelegt sind (Einsatz zur **Spannungsstabilisierung**)
- Beruhen auf einer Kombination von **Zener-Effekt** („Zener-Diode“, kleine Durchbruchspannungen / kurze RLZ) und **Lawinen-Effekt** (große Durchbruchspannungen / lange RLZ)
- **Durchbruchspannung** (Z-Spannung): $U_Z = 3 \dots 300 \text{ V}$
- Die Z-Spannung hängt stark von der Temperatur ab: $TC = \left. \frac{dU_Z}{dT} \right|_{T=300 \text{ K}, I_D=\text{const.}}$ **Temperaturkoeffizient**
- Oft ausgelegt als besonders dotierte Si-Diode mit geringer Sperrschichtdicke; dann ergibt sich bei $U_Z \approx 5 \text{ V}$ eine Mischung aus Tunnel- und Lawinendurchbruch mit einer nahezu temperaturunabhängigen Durchbruchspannung

Kleinsignalnäherung:

$$u(t) = U_0 + u_1(t) \quad \text{wobei} \quad |u_1(t)| \ll |U_0|$$

$$i(t) = I_0 + i_1(t) \quad \text{wobei} \quad |i_1(t)| \ll |I_0|$$

Quasistationäre Näherung:

Modulation sehr viel langsamer als die Minoritätsträgerrekombination im Halbleiter

⇒ Überschüssige Ladungen können problemlos im pn-Übergang rekombinieren und externe Ströme infolge von Ladungsspeichereffekten können vernachlässigt werden.

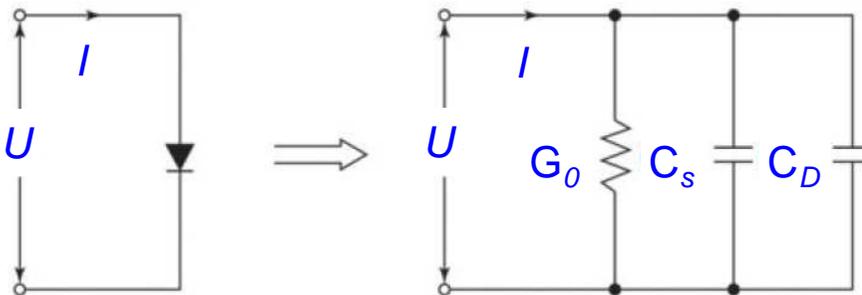
$$I_0 = I_s \left(e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right),$$

$$i_1(t) = G_0 u_1(t) \quad \text{wobei} \quad G_0 = \left. \frac{dI}{dU} \right|_{U=U_0} = \frac{I_0 + I_s}{U_T} \quad \text{Kleinsignalleitwert}$$

$$\frac{G_0}{\Omega} \approx \frac{I/\text{mA}}{26}$$

Instationärer Fall:

- Schnelle Modulation; erfordert Berücksichtigung von Strömen, die durch Ladungsspeichereffekte im pn-Übergang hervorgerufen werden



Modellierung der Ladungsspeichereffekte durch Kapazitäten im Kleinsignal-ESB:

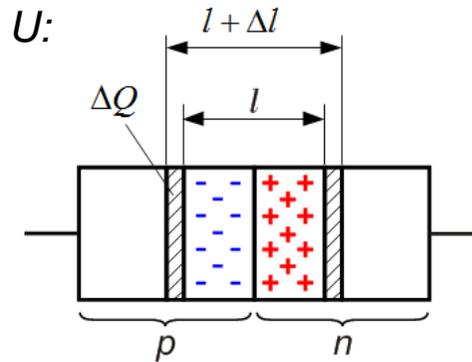
- Sperrschichtkapazität C_s : Ladungsspeicherung in der Raumladungszone
- Diffusionskapazität C_D : Ladungsspeicherung in den Diffusionszonen

Sperrschichtkapazität

Änderung der Breite der RLZ bei Änderung der angelegten Spannung U :

$$l = l_p + l_n = \sqrt{\frac{2\epsilon_r\epsilon_0}{e} (U_D - U) \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_D} \right)}$$

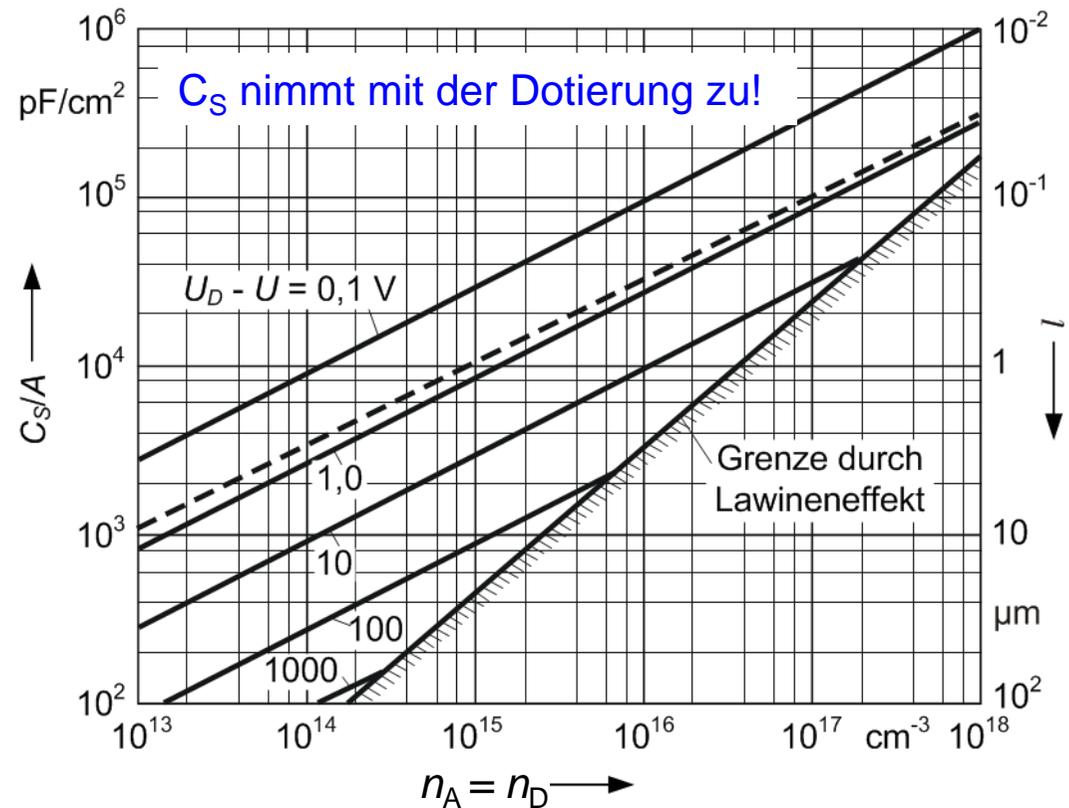
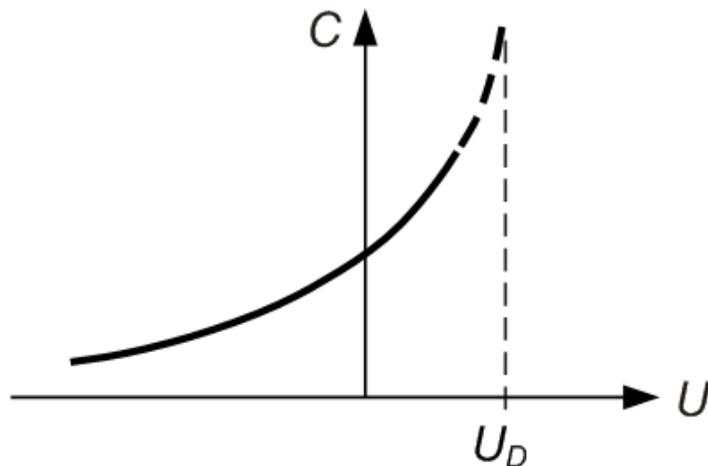
$$l_p = l \frac{n_D}{n_A + n_D}; \quad l_n = l \frac{n_A}{n_A + n_D}$$



⇒ Zu- und Abfluss von Ladungsträgern:

$$C_S = \frac{dQ}{dU} = \epsilon_r\epsilon_0 \frac{A}{l}$$

(„Plattenkondensator“)



Erinnerung: Kleinsignalanalyse der Injektion von Minoritätsträgern in einen p-HL:

$$U(t) = \text{Re} \{ U_0 + \underline{U}_1 e^{j\omega t} \}$$

$$I(t) = \text{Re} \{ I_0 + \underline{I}_1 e^{j\omega t} \}$$

$$\Rightarrow \underline{Y} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} = G_0 + j\omega C_D$$

wobei $\omega\tau_n \ll 1$ Näherung für kleine Frequenzen

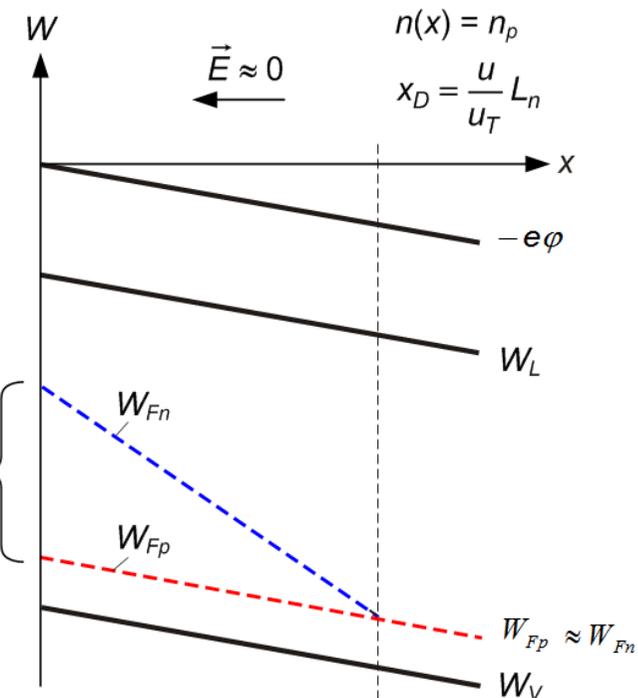
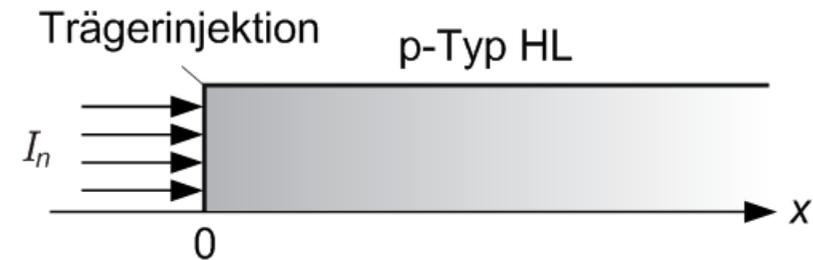
$$G_0 = \frac{I_{Sn}}{U_T} e^{\frac{U_0}{U_T}} \quad \text{Diffusionsleitwert}$$

$$C_D = \frac{1}{2} G_0 \tau_n \quad \text{Diffusionskapazität}$$

$$I_{Sn} = \frac{AeD_n n_{p0}}{L_n} \quad \text{Sättigungsstrom}$$

Hier: Diffusionszone im n- und im p-Halbleiter

$$\Rightarrow C_D = \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_n I_{Sn}}{U_T} + \frac{\tau_p I_{Sp}}{U_T} \right) e^{\frac{U_0}{U_T}}$$



Vorlesung 10

04.12.2015

Kleinsignalnäherung:

$$u(t) = U_0 + u_1(t) \quad \text{wobei} \quad |u_1(t)| \ll |U_0|$$

$$i(t) = I_0 + i_1(t) \quad \text{wobei} \quad |i_1(t)| \ll |I_0|$$

Quasistationäre Näherung:

Modulation sehr viel langsamer als die Minoritätsträgerrekombination im Halbleiter

⇒ Überschüssige Ladungen können problemlos im pn-Übergang rekombinieren und externe Ströme infolge von Ladungsspeichereffekten können vernachlässigt werden.

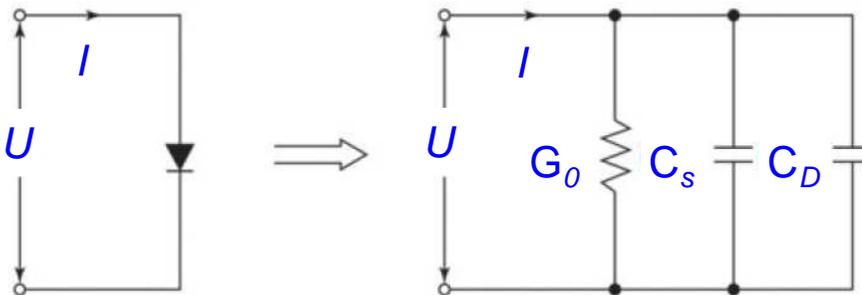
$$I_0 = I_s \left(e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right),$$

$$i_1(t) = G_0 u_1(t) \quad \text{wobei} \quad G_0 = \left. \frac{dI}{dU} \right|_{U=U_0} = \frac{I_0 + I_s}{U_T} \quad \text{Kleinsignalleitwert}$$

$$\frac{G_0}{\Omega} \approx \frac{I/\text{mA}}{26}$$

Instationärer Fall:

- Schnelle Modulation; erfordert Berücksichtigung von Strömen, die durch Ladungsspeichereffekte im pn-Übergang hervorgerufen werden



Modellierung der Ladungsspeichereffekte durch Kapazitäten im Kleinsignal-ESB:

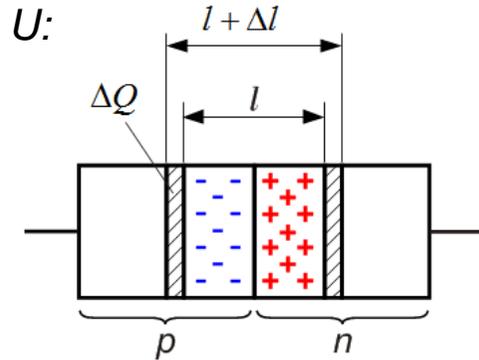
- Sperrschichtkapazität C_s : Ladungsspeicherung in der Raumladungszone (Sperrschicht)
- Diffusionskapazität C_D : Ladungsspeicherung in den Diffusionszonen

Sperrschichtkapazität

Änderung der Breite der RLZ bei Änderung der angelegten Spannung U :

$$l = l_p + l_n = \sqrt{\frac{2\epsilon_r\epsilon_0}{e} (U_D - U) \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_D} \right)}$$

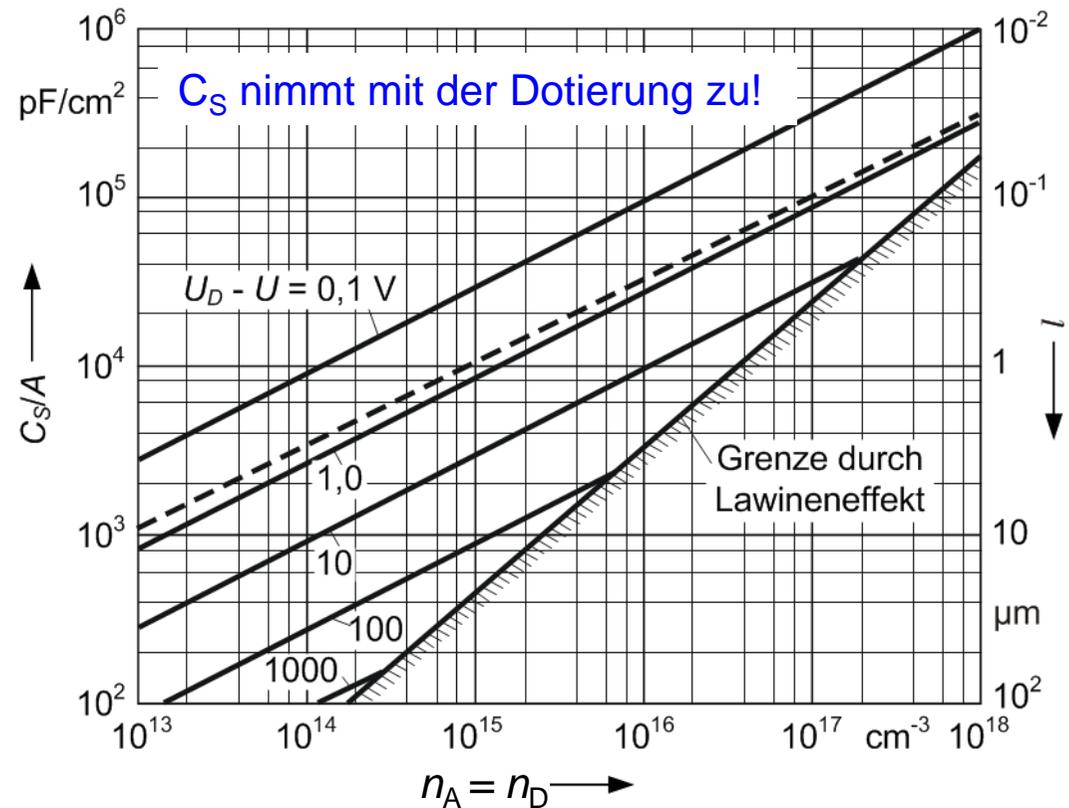
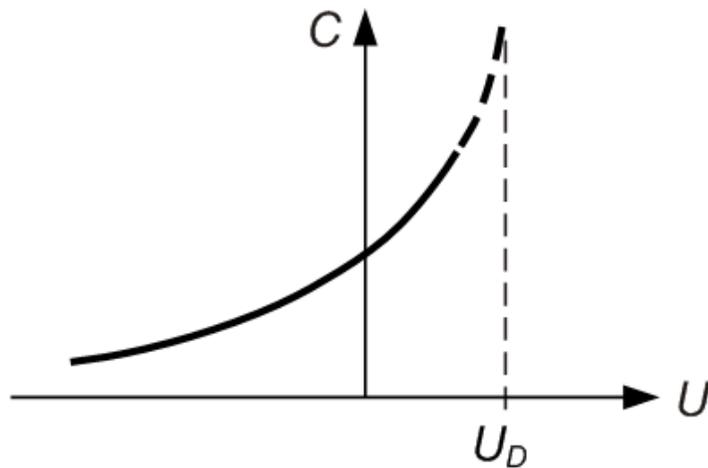
$$l_p = l \frac{n_D}{n_A + n_D}; \quad l_n = l \frac{n_A}{n_A + n_D}$$



⇒ Zu- und Abfluss von Ladungsträgern:

$$C_S = \frac{dQ}{dU} = \epsilon_r\epsilon_0 \frac{A}{l}$$

(„Plattenkondensator“)



Erinnerung: Kleinsignalanalyse der Injektion von Minoritätsträgern in einen p-HL:

$$U(t) = \text{Re} \{ U_0 + \underline{U}_1 e^{j\omega t} \}$$

$$I(t) = \text{Re} \{ I_0 + \underline{I}_1 e^{j\omega t} \}$$

$$\Rightarrow \underline{Y} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} = G_0 + j\omega C_D$$

wobei $\omega\tau_n \ll 1$ Näherung für kleine Frequenzen

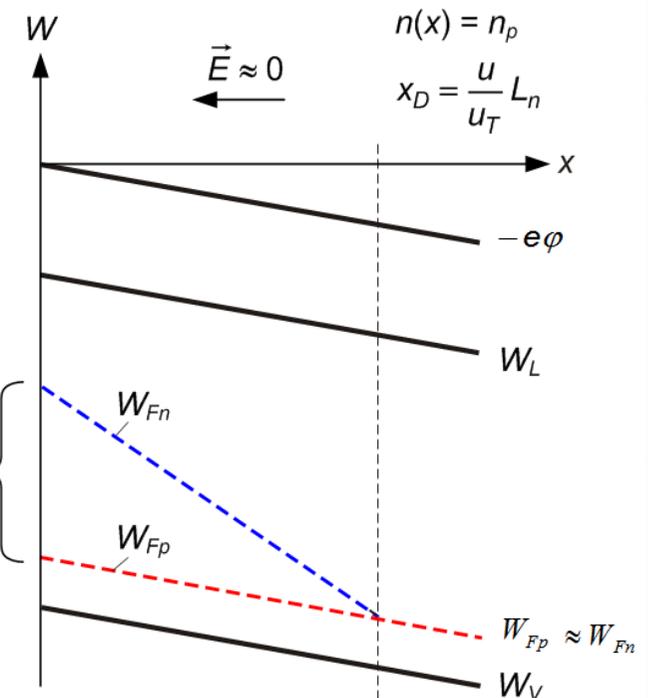
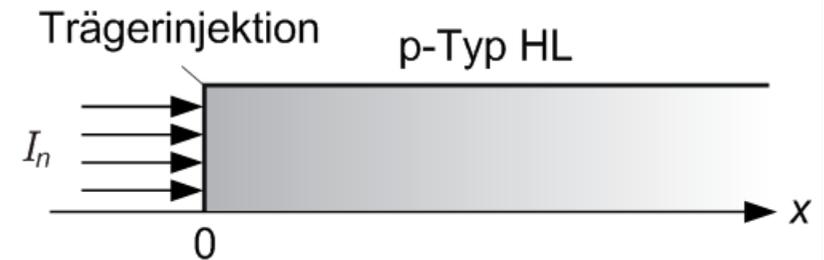
$$G_0 = \frac{I_{Sn}}{U_T} e^{\frac{U_0}{U_T}} \quad \text{Diffusionsleitwert}$$

$$C_D = \frac{1}{2} G_0 \tau_n \quad \text{Diffusionskapazität}$$

$$I_{Sn} = \frac{AeD_n n_{p0}}{L_n} \quad \text{Sättigungsstrom}$$

Hier: Diffusionszone im n- und im p-Halbleiter

$$\Rightarrow C_D = \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_n I_{Sn}}{U_T} + \frac{\tau_p I_{Sp}}{U_T} \right) e^{\frac{U_0}{U_T}}$$



Großsignalverhalten und Umschaltvorgänge

- In vielen Anwendungen: Schneller **Wechsel zwischen Fluss- und Sperrpolung** eines pn-Überganges
- ⇒ Entscheidend: Dynamik und Zeitkonstanten des Umschaltvorganges
- Besonders kritisch: Umschalten von Fluss- zu Sperrpolung („**Turn-off transient**“) aufgrund von Minoritätsträgern, die in den Diffusionszonen gespeichert sind.

Hier: (Qualitative) Analyse des Großsignalverhaltens beim Ein- und Umschalten.

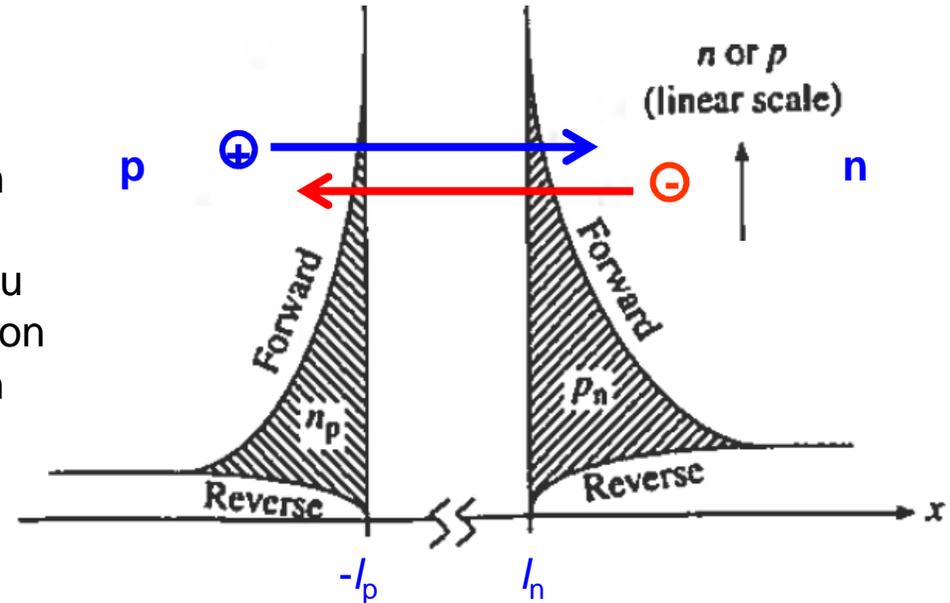
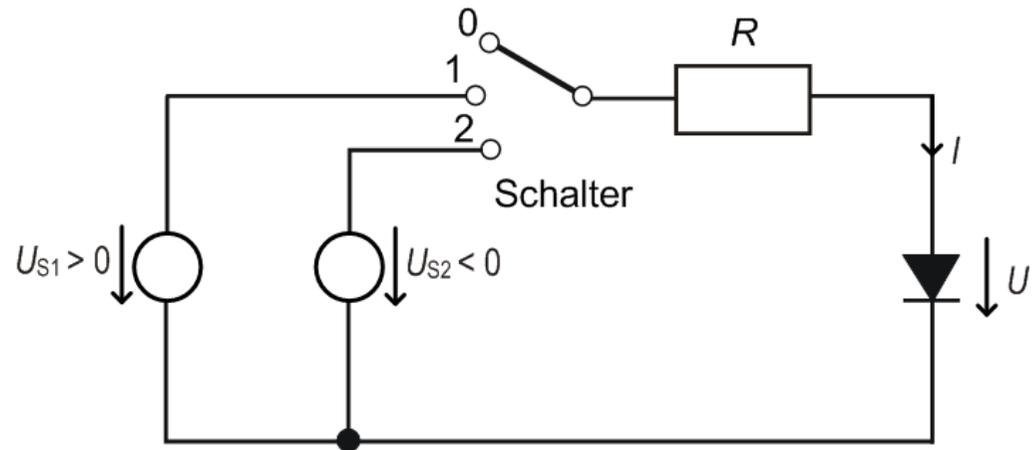


Bild: Pierret, Semiconductor Device Fundamentals

- 0 → 1: Einschalten
- 1 → 0: Ausschalten
- 1 → 2: Umschalten

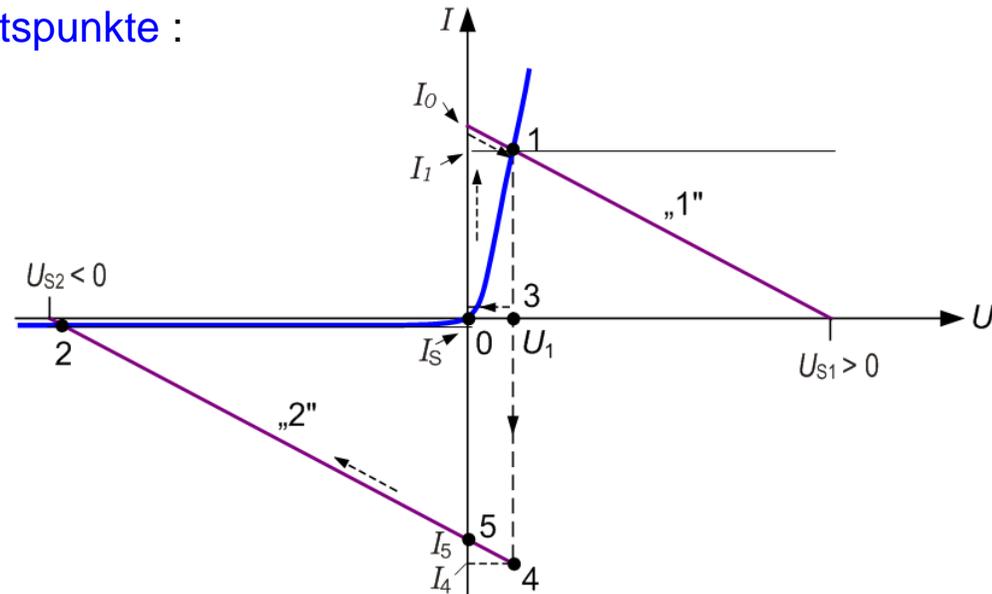
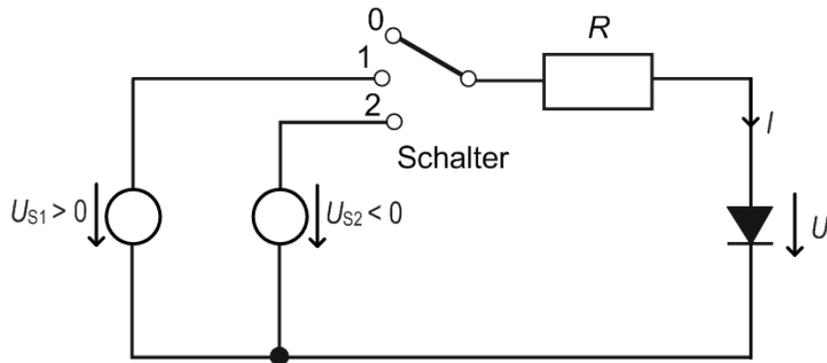
Ermittlung der **stationären Arbeitspunkte**:

$$\frac{U_{s1,2} - U}{R} = I_S \left(e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right)$$



Graphische Ermittlung der stationären Arbeitspunkte :

$$\frac{U_{s1,2} - U}{R} = I_S \left(e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right)$$

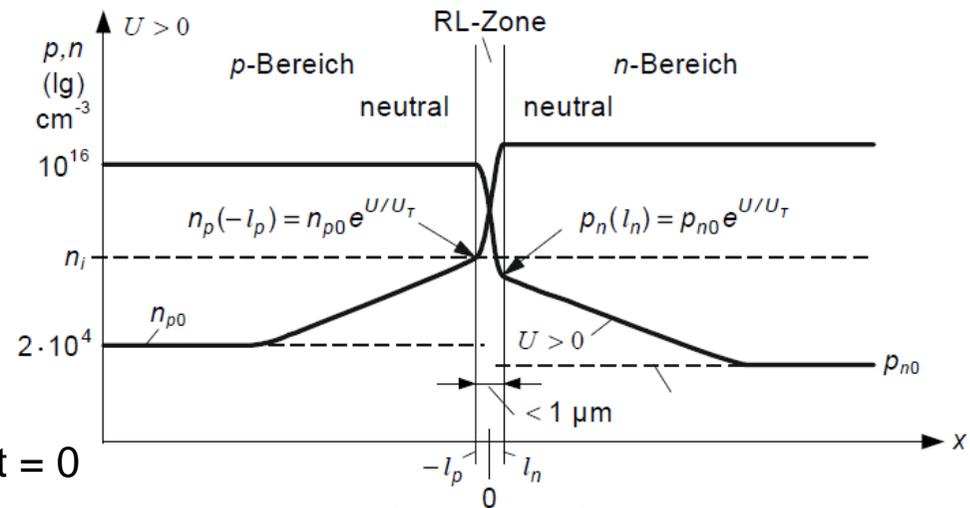


Einschaltvorgang (0 → 1):

- Dominanter Effekt bei Vorwärtsspannung: Ladungsspeicherung in den Diffusionszonen
- Spannung am pn-Übergang ist direkt mit der Ladungsträgerkonzentration in der DZ verknüpft:

$$u(t) = U_T \ln \left(\frac{p_n(l_n, t)}{p_{n0}} \right)$$

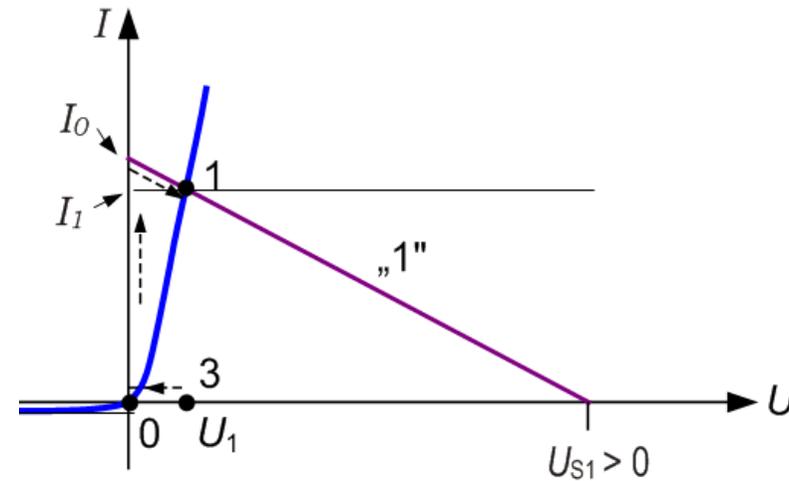
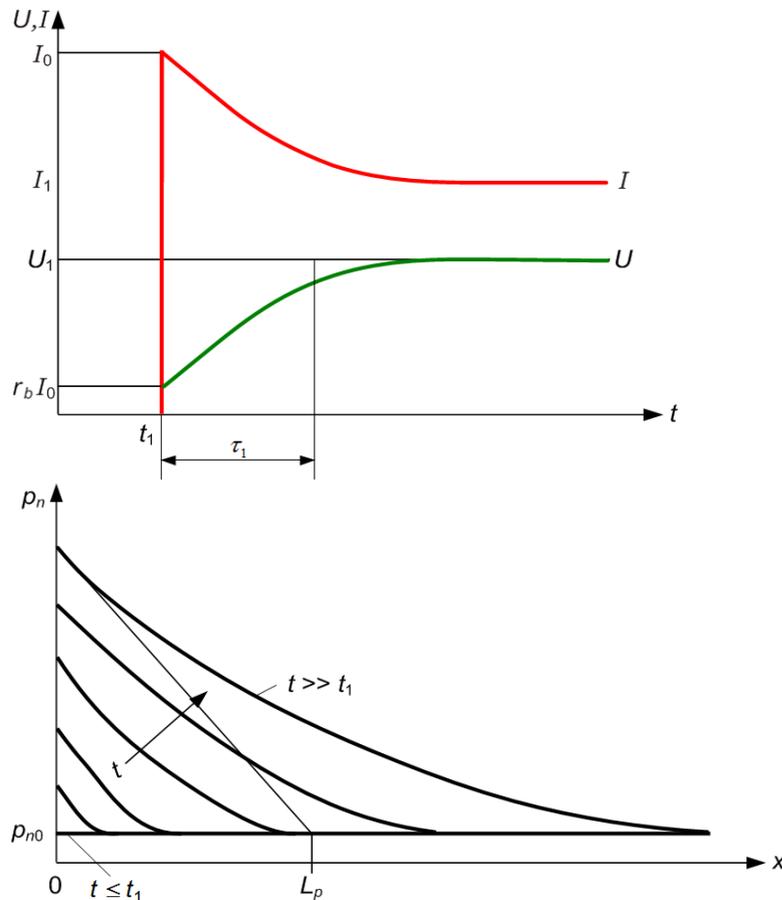
⇒ Kein Spannungsabfall am pn-Übergang bei $t = 0$
 Aufbau einer Diffusionszone für $t > 0$



Einschaltvorgang

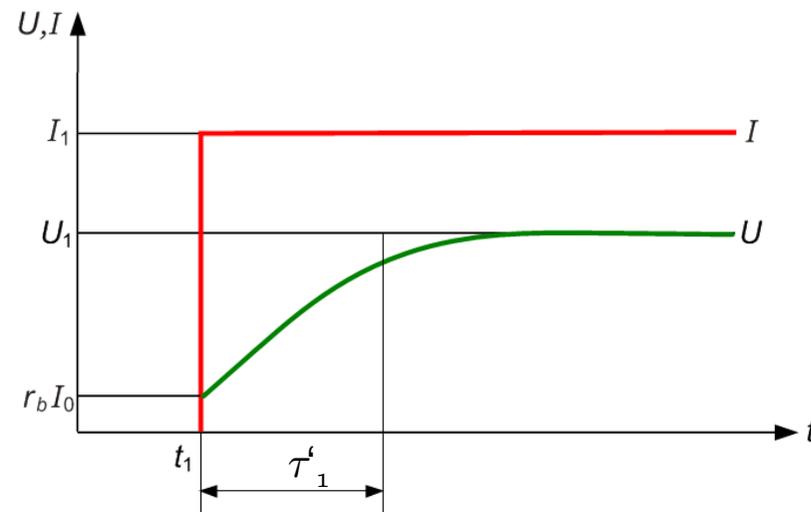
Spannungsansteuerung: Einschalten einer Vorwärtspannung bei $t = t_1$

⇒ **Überschwingen des Stromes** am Anfang (kein Spannungsabfall am pn-Übergang); dann allmählicher Aufbau der DZ



Alternativ: Ansteuerung mit einer Stromquelle

⇒ Konstanter Stromfluss; Spannung an der Diode nähert sich asymptotisch an ihren Grenzwert an.



Aus- und Umschaltvorgang

Ausschalten 1 → 0 bei $t = t_2$:

- Öffnen des Schalters $\Rightarrow I = 0 \Rightarrow$
- Minoritätsträger in der Diffusionszone verschwinden innerhalb der Minoritätsträgerlebensdauer τ_n bzw. τ_p .

Umschalten von Durchlass in Sperrbetrieb (1 → 2)

bei $t = t_3$: Umkehr / Abfall des Stromes in zwei Phasen

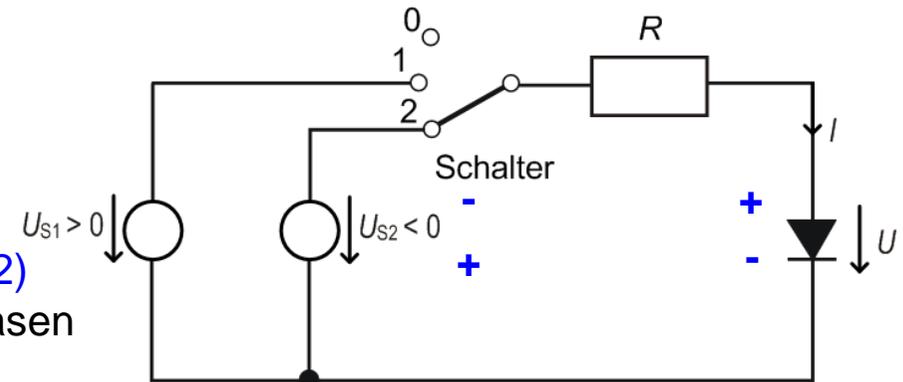
1. Konstanter Strom in Rückwärtsrichtung

($t_3 < t < t_C = t_3 + \tau_r$):

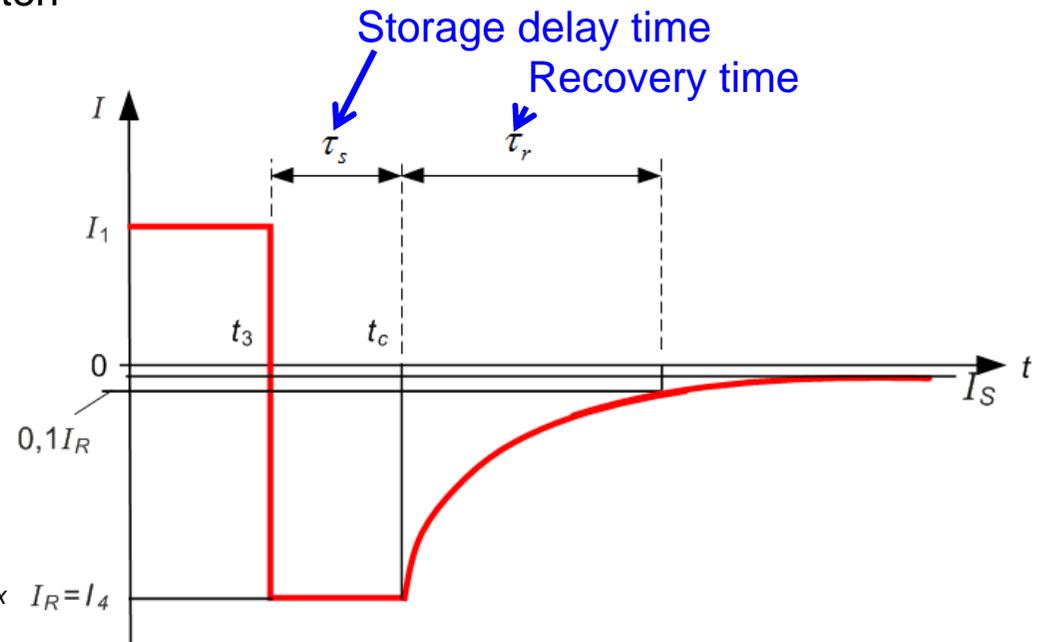
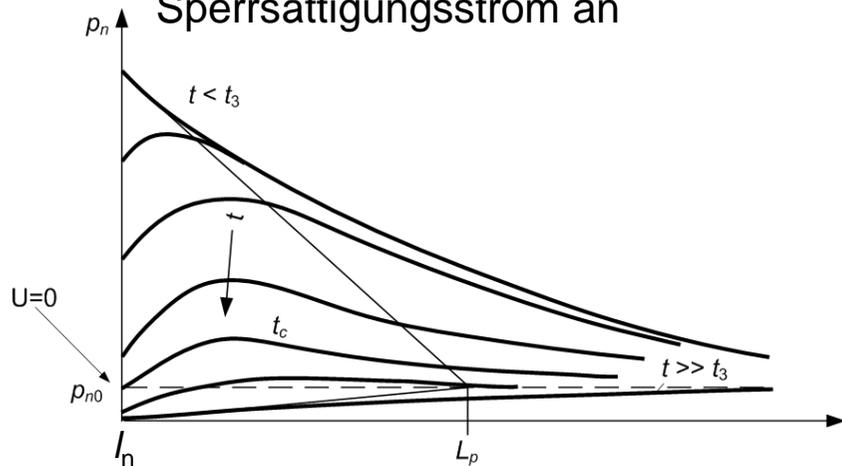
Abbau der Raumladungen in den Diffusionszonen durch einen näherungsweise konstanten Stromfluss in Rückwärtsrichtung

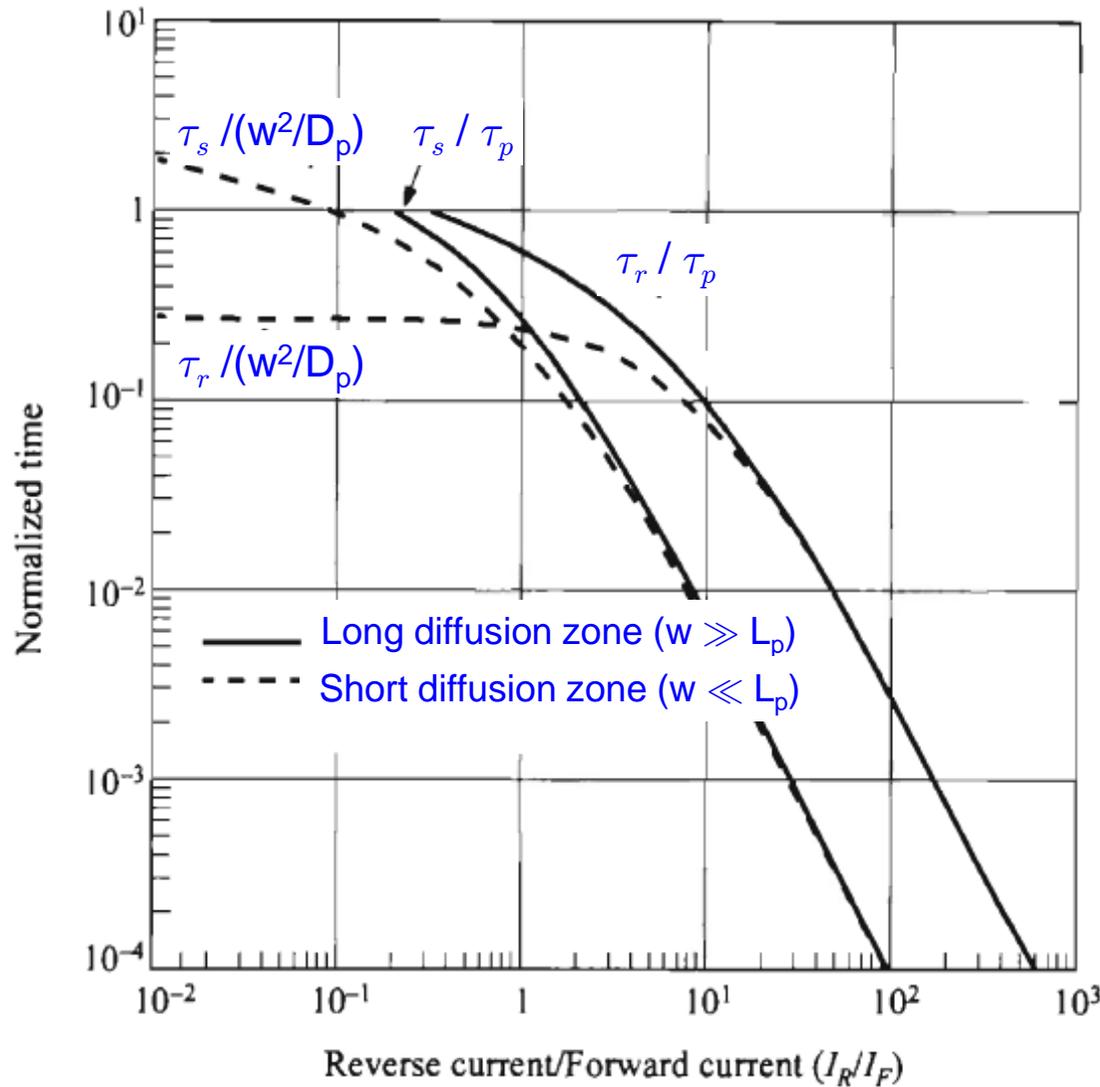
2. Stromabfall ($t_C < t < t_C + \tau_r$):

Diode sperrt; Strom nähert sich dem Sperrsättigungsstrom an



$$u(t) = U_T \ln \left(\frac{p_n(l_n, t)}{p_{n0}} \right)$$





Numerische Berechnung der Zeitkonstanten τ_r und τ_s

p⁺-n-Übergang: $n_A \gg n_D$
 \Rightarrow Löcher-Diffusionsstrom dominiert den Gesamtstrom durch die Diode

- Zeitkonstanten nehmen mit wachsendem Rückwärtsstrom stark ab (schnellerer Abzug der verbleibenden Minoritätsträger)
- Die Zeitkonstanten sind für kurze Diffusionszonen kleiner als für lange Diffusionszonen (bei gleicher Spannung kleinere Ladungsspeicherung in den Diffusionszonen; außerdem Abbau von Minoritätsträgern durch Rekombination an den Rändern)

Bild: Sze, Physics of Semiconductor Devices

Kapitel 7: Spezielle pn-Dioden

Varaktor-Dioden („Kapazitätsdioden“)

- Varactor = Variable Reactance
 ⇒ Änderungen der kapazitiven Eigenschaften mit der DC-Vorspannung
- Spannungs-Kapazitäts-Charakteristik lässt sich über das Dotierprofil einstellen

Die spannungsabhängige Sperrschicht-Kapazität C_S ergibt sich (auch für beliebige Dotierprofile) aus der Formel für den Plattenkondensator:

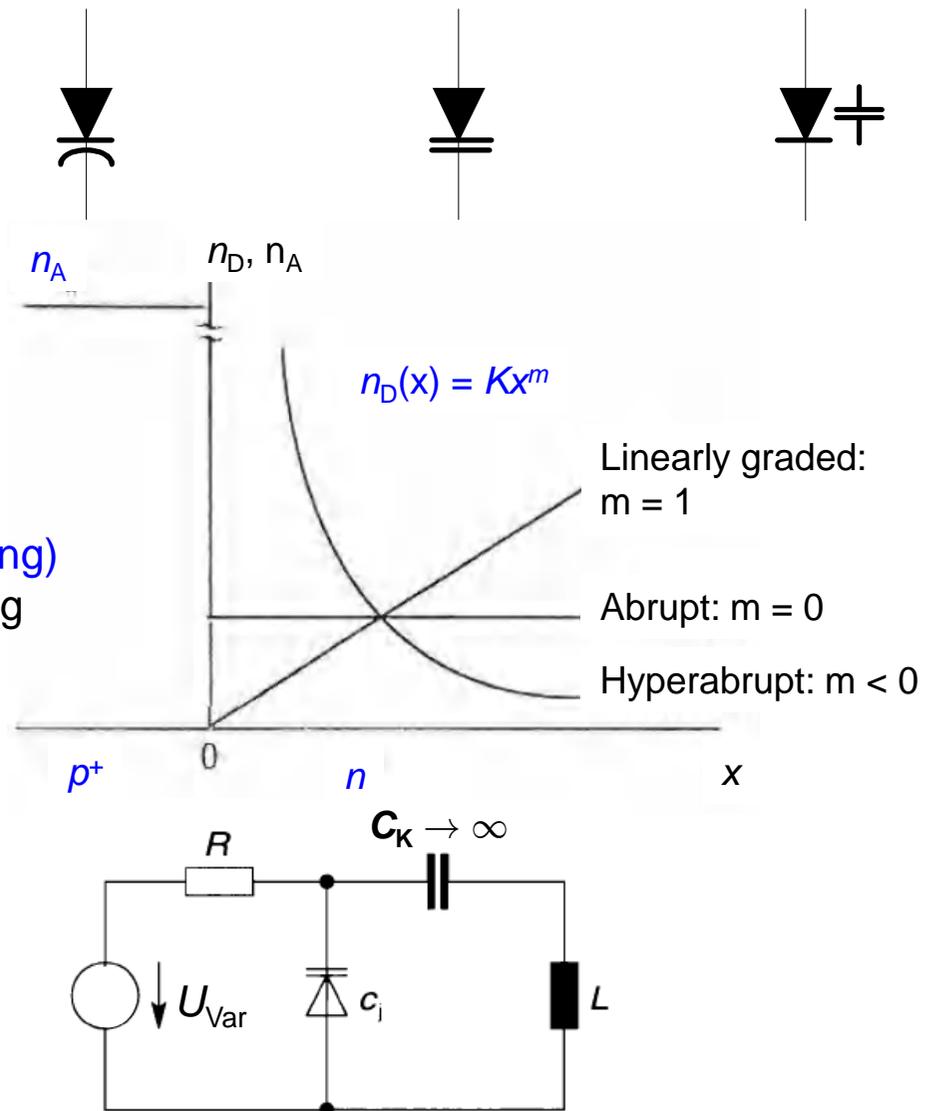
$$C_S = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{l(U)}$$

Für eine einseitig-abrupte Dotierung (p⁺n-Übergang) mit $n_D(x) = Kx^m$ ergibt sich unter Vernachlässigung des Potentialabfalls im p⁺-Gebiet:

$$l(U) \approx l_n(U) = \left(\frac{\epsilon_0 \epsilon_r (m + 2)}{eK} (U_D - U) \right)^{\frac{1}{m+2}}$$

Für $m = -3/2$ (hyperabrupte Dotierung) lässt sich damit die Resonanzfrequenz eines LC-Schwingkreises proportional zur angelegten Spannung verändern:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \propto (U_D - U)$$



Bilder: Reisch, Halbleiter-Bauelemente / Streetman, Solid-State Electronic Devices

Leistungsgleichrichter: p^+ - s - n^+ - und p^+ - n - n^+ -Strukturen

Anforderungen an Dioden in Leistungsgleichrichtern:

- Hohe Durchbruchfestigkeit \Rightarrow Schwache Dotierung, lange Raumladungszone!
- Kleiner Sperrstrom \Rightarrow Starke Dotierung!
- Geringer Spannungsabfall in den Bahngebieten \Rightarrow Starke Dotierung!

Konventioneller p - n -Übergang:

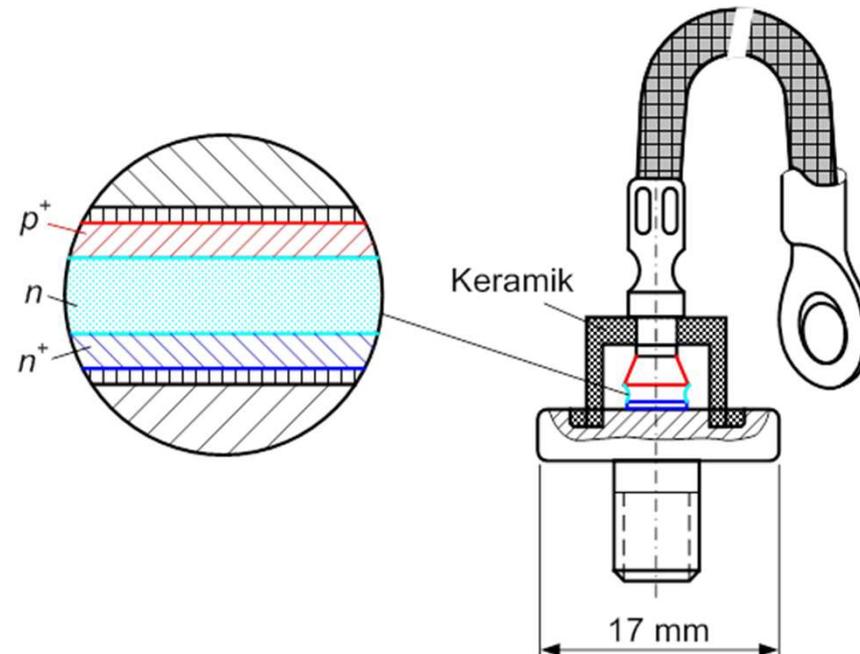
$$I_S = Aen_i^2 \left(\frac{D_n}{L_n n_A} + \frac{D_p}{L_p n_D} \right), \quad l = \sqrt{\frac{2\epsilon_r \epsilon_0}{e} (U_D - U) \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_D} \right)}, \quad E_m = - \sqrt{\frac{2e}{\epsilon_r \epsilon_0} \frac{U_D - U}{\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_D} \right)}}$$

Lösung der widersprüchlichen Anforderungen durch Einführen einer undotierten oder schwach dotierten Schicht zwischen hochdotierten p^+ - und n^+ -Gebieten

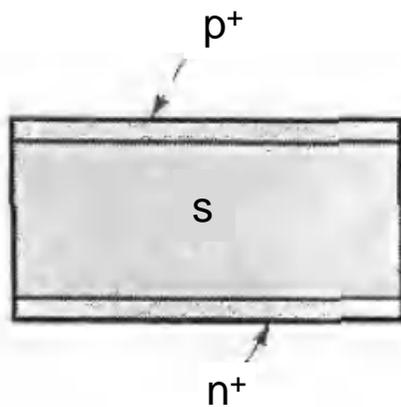
$\Rightarrow p^+$ - s - n^+ - bzw. p^+ - n - n^+ -Strukturen



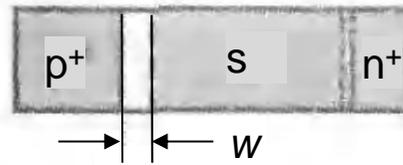
schwache Dotierung / „soft“ doping level



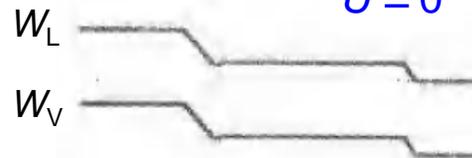
Wirkungsweise der $p-i-n$ bzw. p^+-s-n^+ -Strukturen



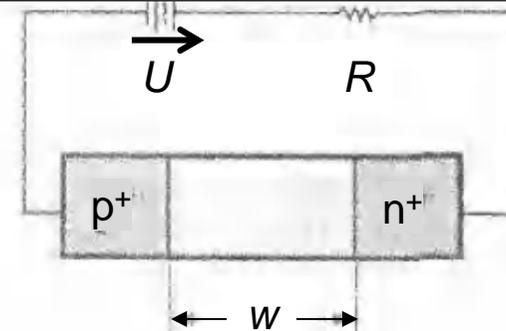
Bilder nach Streetman, Solid-State Electronic Devices



$U = 0$

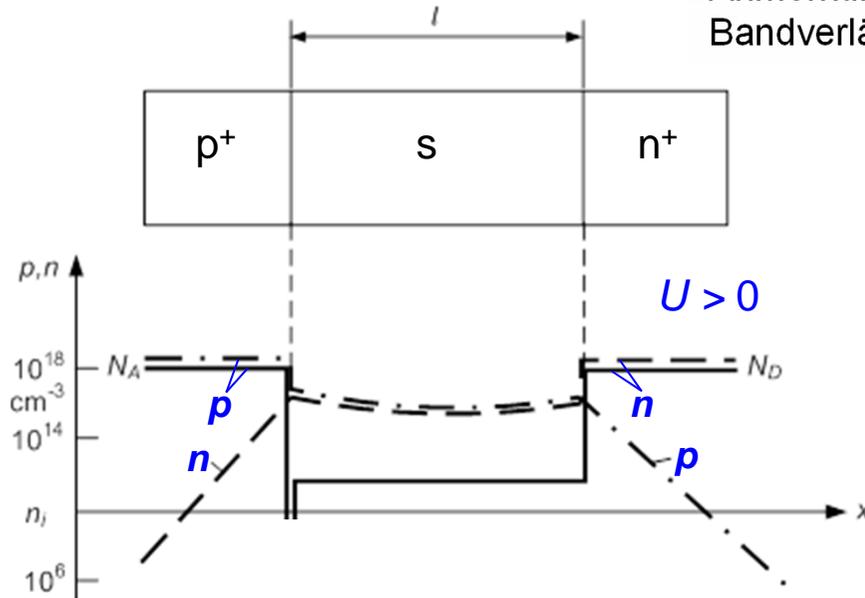
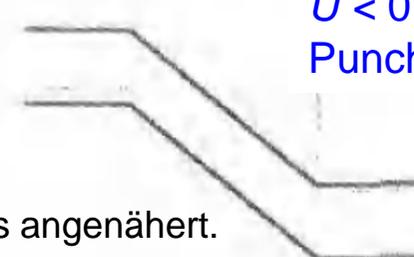


Anmerkung: Undotiertes s-Gebiet;
Bandverläufe durch scharfe Knicks angenähert.



$U < 0$

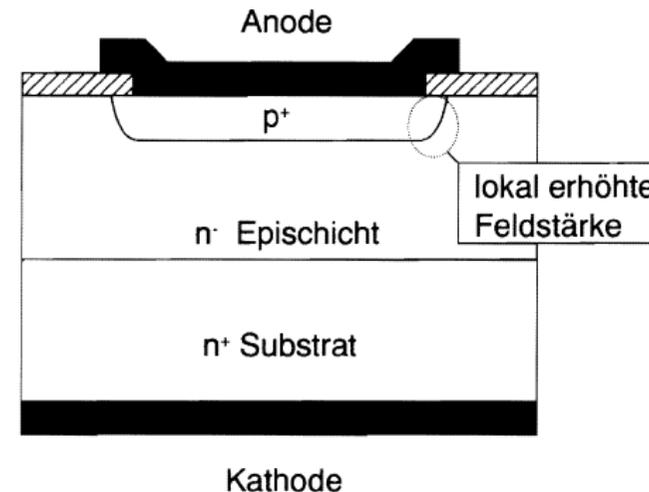
Punch-Through



- **Sperrspannung:** Schwach dotiertes Gebiet wird hochohmig; gleichzeitig kleine Minoritätsträgerdichten am Rand der RLZ
 ⇒ **Kleine Sperrströme**
- **Hohe Sperrspannungen:** Schwach dotierte Zone komplett ausgeräumt („Punch-Through“)
 ⇒ Sperrspannung fällt über breite Schicht ab
 ⇒ Geringe Feldstärke, hohe **Durchbruchfestigkeit (> 1000 V)**
- **Flusspolung:** Ladungsträger werden aus n^+ und p^+ -Gebieten in schwach dotiertes Gebiet injiziert
 ⇒ **Hohe Leitfähigkeit, Dauerströme > 500 A**

Vermeidung von Durchbrüchen am Rand

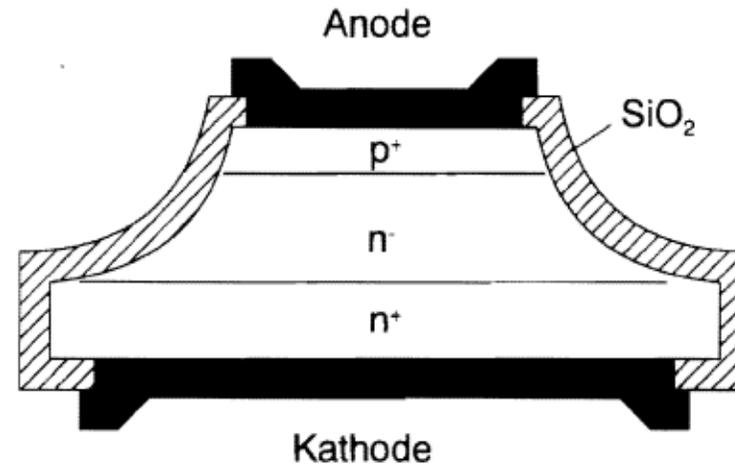
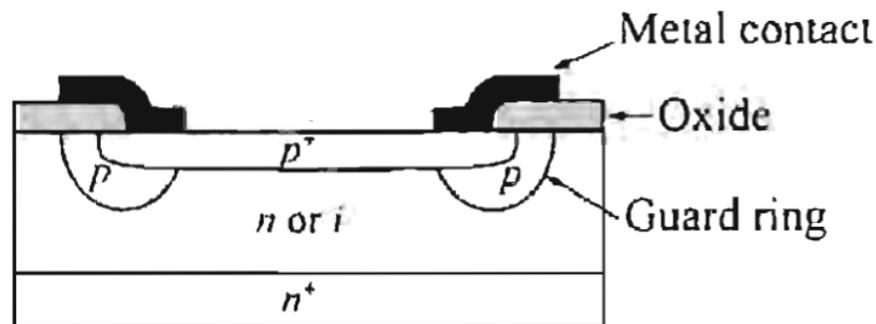
Problem bei praktischen Bauteilen: Krümmung des p-n-Überganges am Rand führt zu inhomogenen elektrischen Feldern und lokalen überhöhten Feldstärken
 ⇒ „Randdurchbruch“



Lösungen:

- **Guard-Band:** Ringförmiges p-Gebiet, das den p-n-Übergang umschließt
 ⇒ Verringerung der Feldstärke am Rand

- **Mesa-Struktur mit abgeschrägten Seiten und Oxid-Passivierung**
 ⇒ Geringe Feldstärken und geringere Zahl an Rekombinationszentren im Randbereich



Bilder: Reisch, Halbleiter-Bauelemente / Sze, Physics of Semiconductor Devices

- Vorteil von $p-i-n$ -Dioden bei hohen Frequenzen: **Geringe Sperrschichtkapazität**; diese ist praktisch unabhängig von der Vorspannung.
 - ⇒ Verwendung für **HF-Anwendungen**, beispielsweise als schnelle Schalter. Die Schaltzeit liegt in der Größenordnung der Ladungsträger-Laufzeit τ durch die i -Zone.
- Betrieb mit Vorspannung in Vorwärtsrichtung bei **sehr hohen Frequenzen**:
 - Träger in der i -Zone werden während einer Periode nicht vollständig ausgeräumt
 - $p-i-n$ -Diode verhält sich wie ein ohmscher Widerstand, dessen Wert durch den Gleichstrom in Vorwärtsrichtung definiert ist (ohne Herleitung):

$$G_0 = \frac{I_0 \tau (\mu_n + \mu_p)}{w^2}$$

⇒ Verwendung in **einstellbaren HF-Dämpfungsgliedern!**

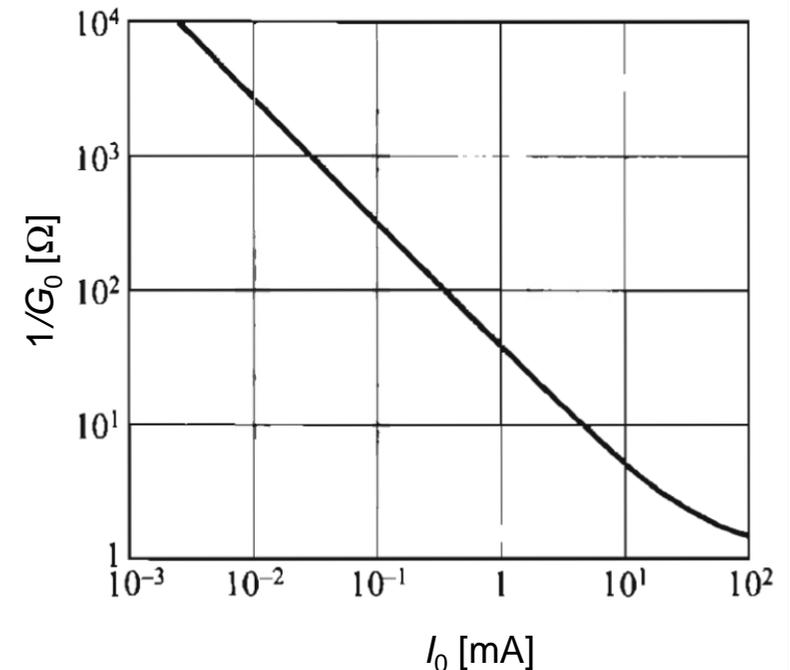
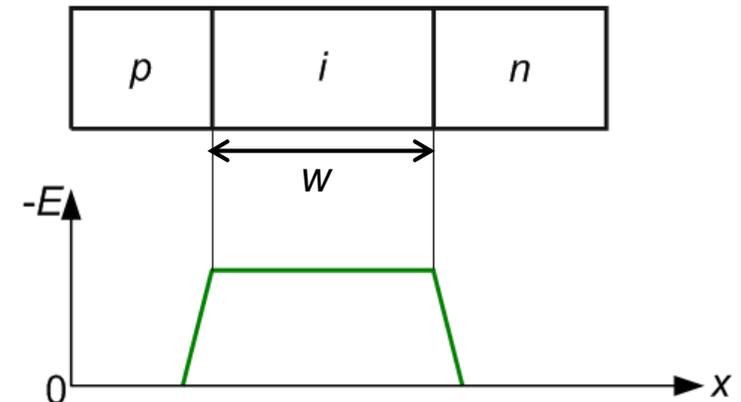


Bild: Sze, Physics of Semiconductor Devices

Funktionsprinzip:

- Photonen werden in der RLZ eines *p-i-n*-Überganges absorbiert und erzeugen ein Elektron-Loch-Paar.
- Das interne elektrische Feld trennt die Ladungsträger und führt damit zu einem (negativen) Strom im Außenkreis.
- Vorteil der *p-i-n*-Struktur: Ausgedehnte RLZ, in der Photonen mit hoher Wahrscheinlichkeit absorbiert werden.

Quantitative Analyse:

Verlauf der optischen Leistung im Halbleiter:

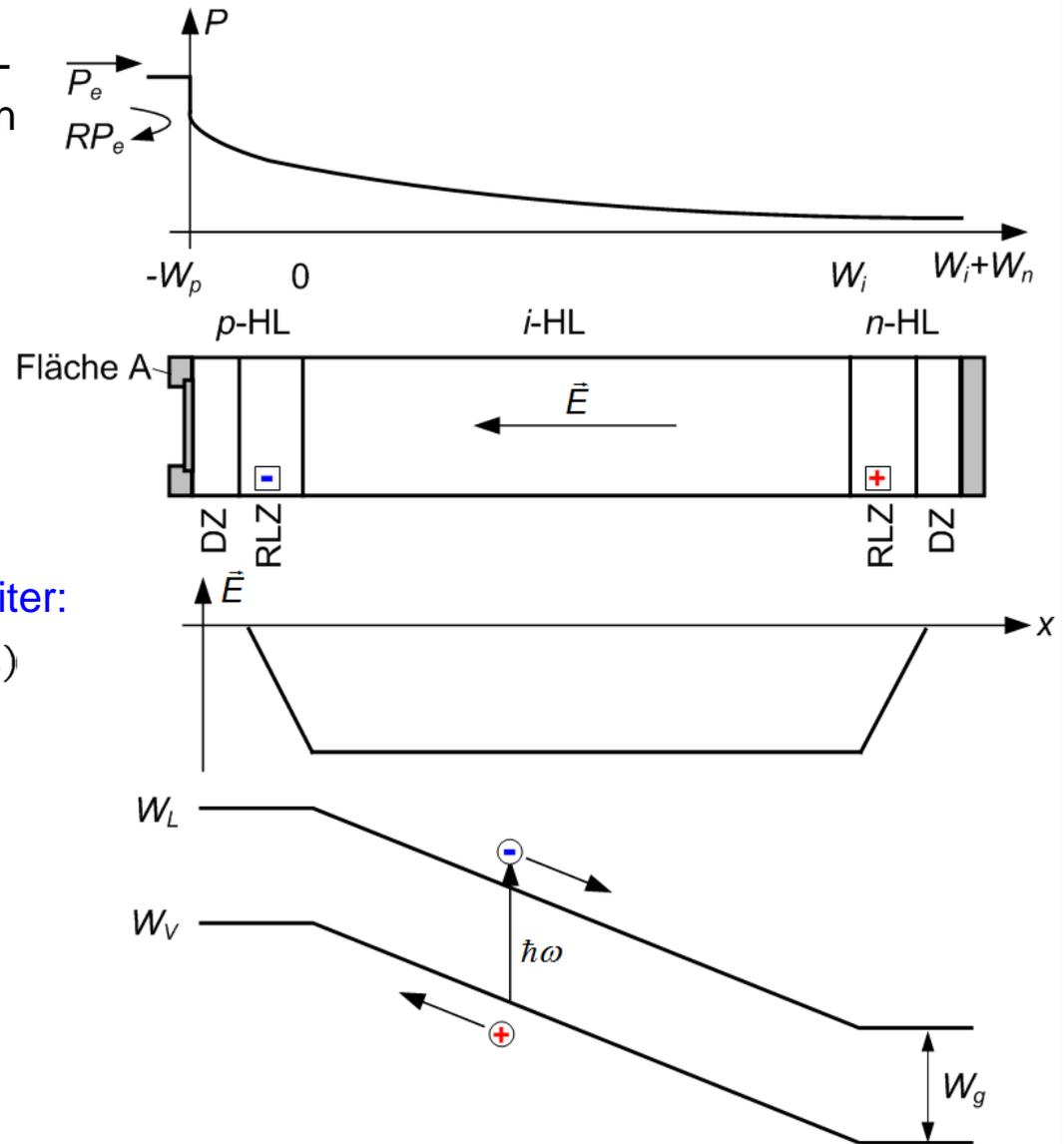
$$P(x, t) = P_e(t) (1 - R) e^{-\alpha(x+w_p)}$$

Zugehörige Generationsrate:

$$g(x, t) = \frac{1}{A} \frac{\alpha}{\hbar\omega} P(x, t)$$

Weitere Vereinfachungen:

- Stationärer Zustand ($\partial/\partial t = 0$)
- Eindimensionale Rechnung
- Vernachlässigung der Rekombination



Photostrom im Außenkreis:

$$\begin{aligned} I_P &= A J_n(w_i) \\ &= -\frac{e}{\hbar\omega} P_e (1 - R) e^{-\alpha w_p} (1 - e^{-\alpha w_i}) \\ &= -\mathcal{R} P_e \end{aligned}$$

Anmerkung: Stromfluss in Sperrrichtung, daher $I < 0$

wobei
$$\mathcal{R} = \frac{e}{\hbar\omega} (1 - R) e^{-\alpha w_p} (1 - e^{-\alpha w_i}) = \frac{e}{\hbar\omega} \eta$$

Empfindlichkeit (engl. Responsivity)

$$\eta = \frac{|I_P|/e}{P_e/\hbar\omega} = (1 - R) e^{-\alpha w_p} (1 - e^{-\alpha w_i})$$

Quantenwirkungsgrad (Anzahl der Elektronen im Außenkreis pro eingestrahlttem Photon)

Vorlesung 11

14.12.2015

Funktionsprinzip:

- Photonen werden in der RLZ eines *p-i-n*-Überganges absorbiert und erzeugen ein Elektron-Loch-Paar.
- Das interne elektrische Feld trennt die Ladungsträger und führt damit zu einem (negativen) Strom im Außenkreis.
- Vorteil der *p-i-n*-Struktur: Ausgedehnte RLZ, in der Photonen mit hoher Wahrscheinlichkeit absorbiert werden.

Quantitative Analyse:

Verlauf der optischen Leistung im Halbleiter:

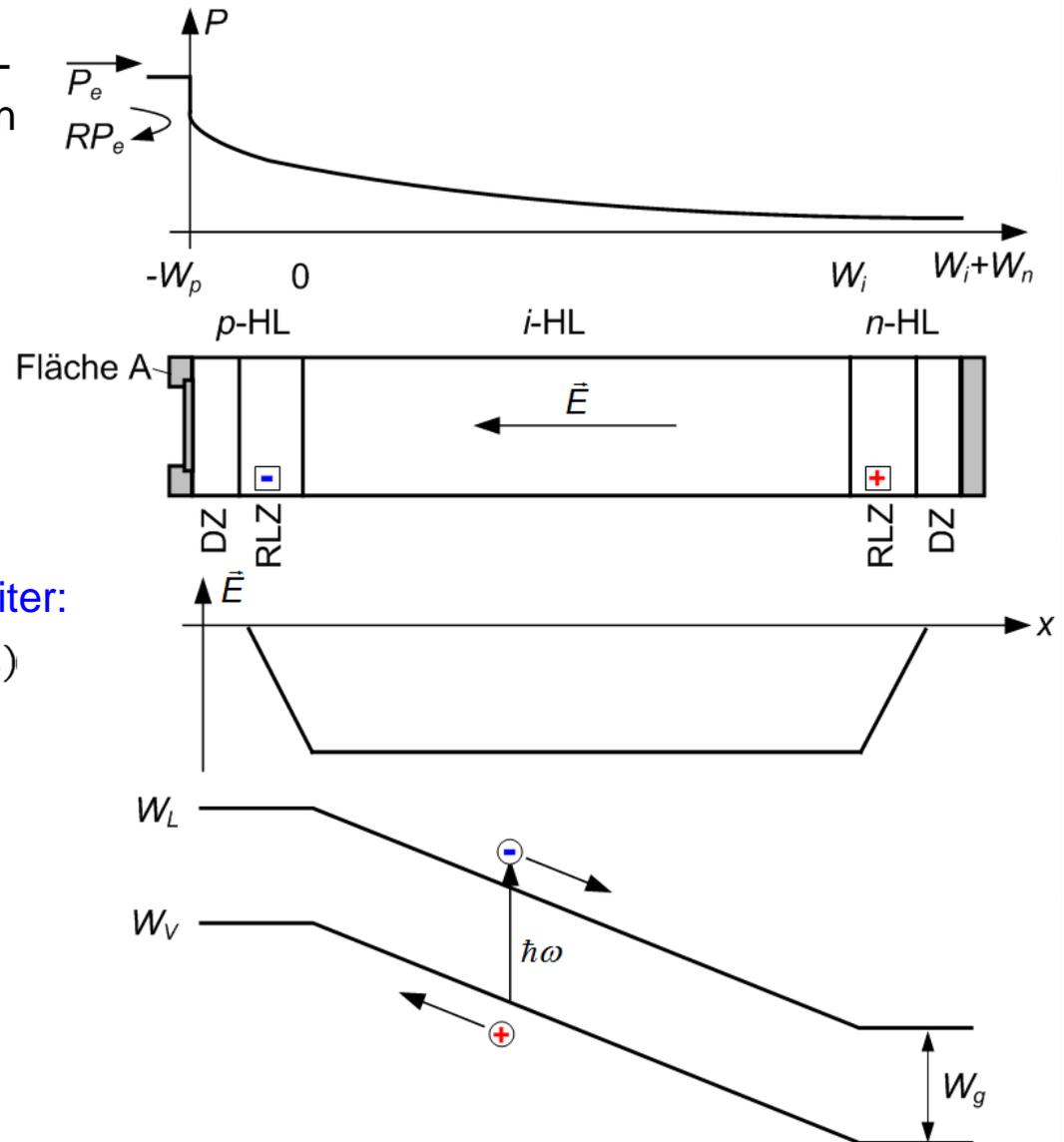
$$P(x, t) = P_e(t) (1 - R) e^{-\alpha(x+w_p)}$$

Zugehörige Generationsrate:

$$g(x, t) = \frac{1}{A} \frac{\alpha}{\hbar\omega} P(x, t)$$

Weitere Vereinfachungen:

- Stationärer Zustand ($\partial/\partial t = 0$)
- Eindimensionale Rechnung
- Vernachlässigung der Rekombination



Photostrom im Außenkreis:

$$\begin{aligned} I_{P'} &= A J_n(w_i) \\ &= -\frac{e}{\hbar\omega} P_e (1 - R) e^{-\alpha w_p} (1 - e^{-\alpha w_i}) \\ &= -\mathcal{R} P_e \end{aligned}$$

Anmerkung: Stromfluss in Sperrrichtung, daher $I < 0$

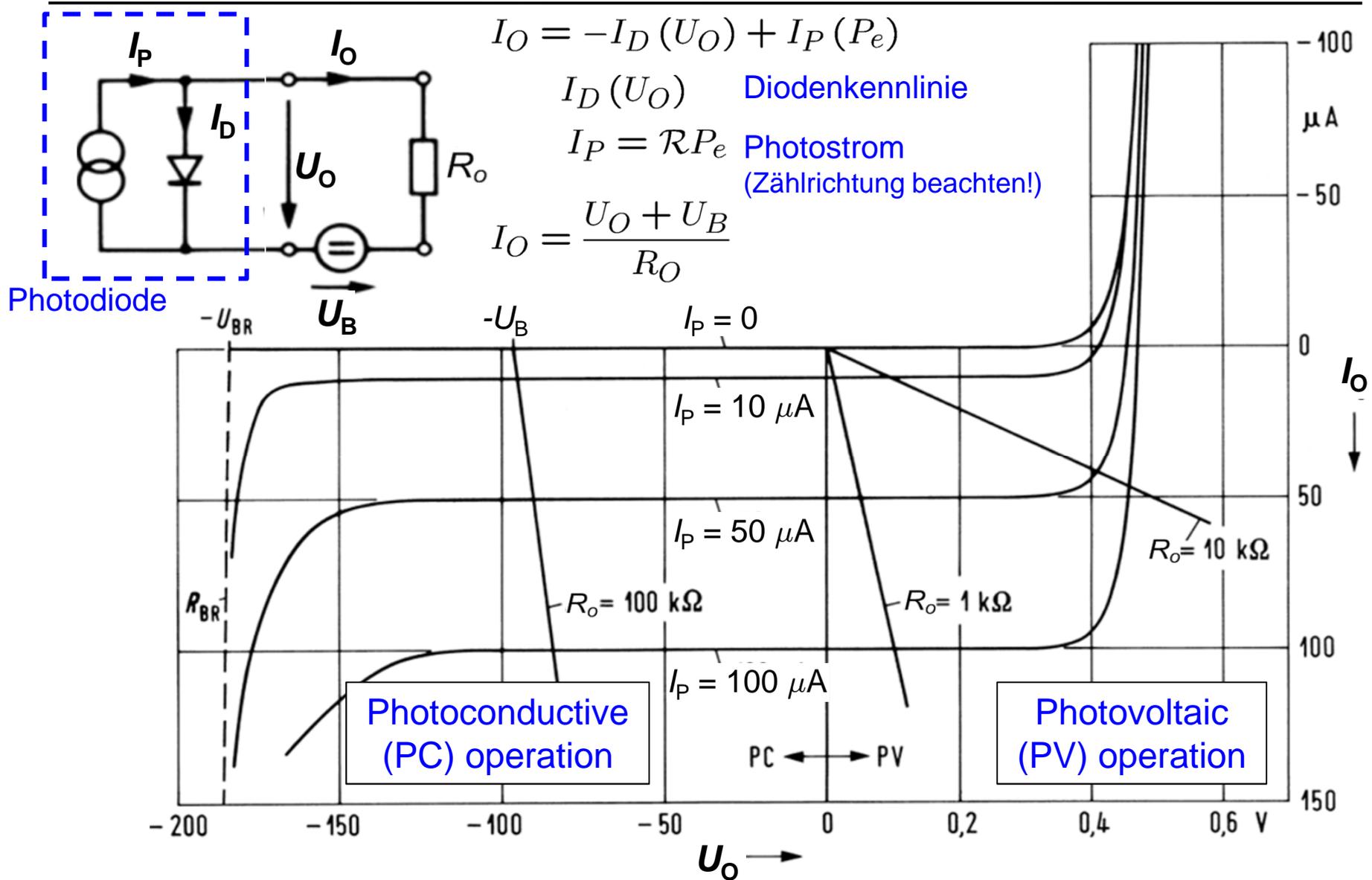
wobei $\mathcal{R} = \frac{e}{\hbar\omega} (1 - R) e^{-\alpha w_p} (1 - e^{-\alpha w_i}) = \frac{e}{\hbar\omega} \eta$

Empfindlichkeit (engl. Responsivity)

$$\eta = \frac{|I_P|/e}{P_e/\hbar\omega} = (1 - R) e^{-\alpha w_p} (1 - e^{-\alpha w_i})$$

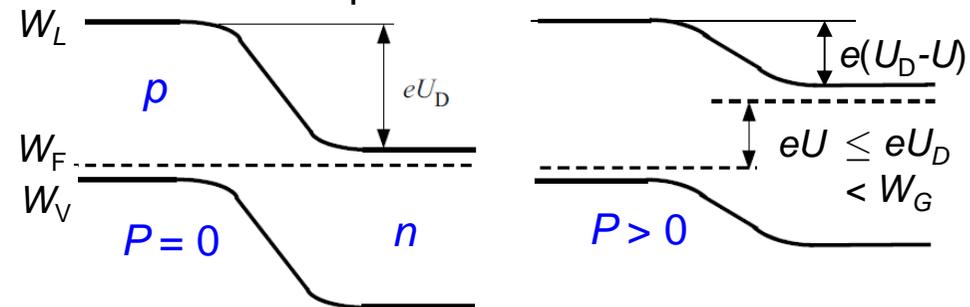
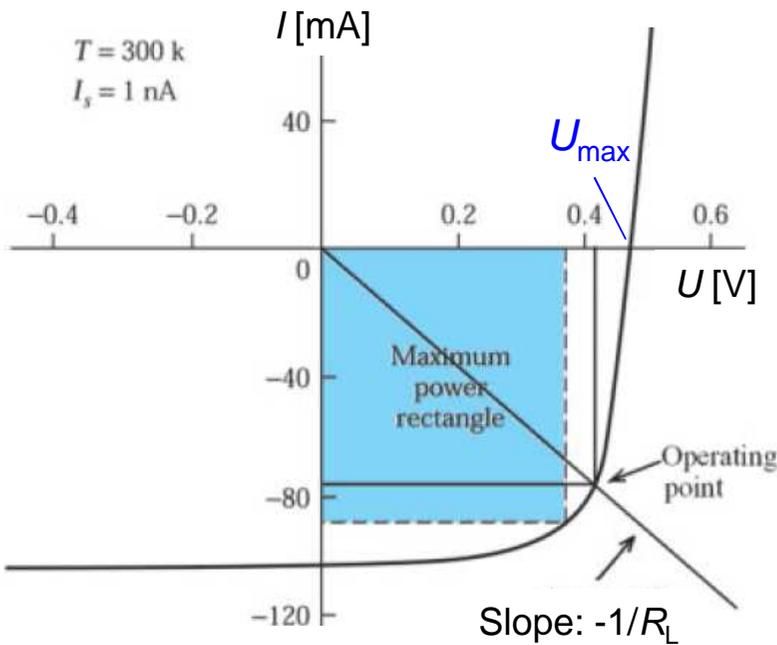
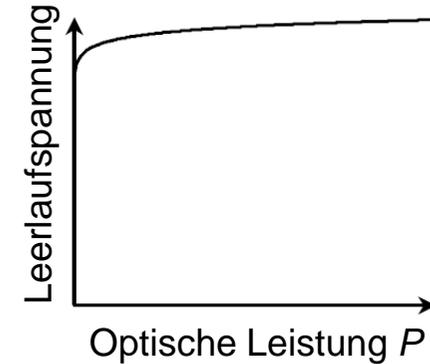
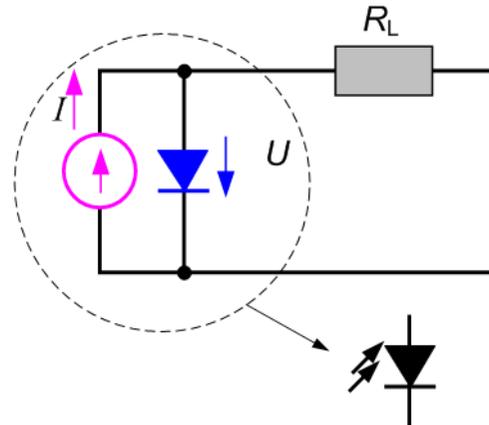
Quantenwirkungsgrad (Anzahl der Elektronen im Außenkreis pro eingestrahlttem Photon)

Kennlinienfeld der $p-i-n$ -Photodiode



Solarzelle: Elektrisches Verhalten

Prinzip: Bestrahlung eines p-n-Überganges mit angeschlossenem Lastwiderstand R_L
 \Rightarrow Maximal erreichbare Leerlaufspannung $eU_{\max} \approx eU_D \approx W_G$



Maximierung der Ausgangsleistung (Produkt aus Strom und Spannung) durch Wahl eines geeigneten Lastwiderstandes R_L

Bildquelle: Sze, Semiconductor Devices – Physics and Technology / Thuselt, Physik der Halbleiterbauelemente

Solarzelle: Bandlücke und theoretischer Wirkungsgrad

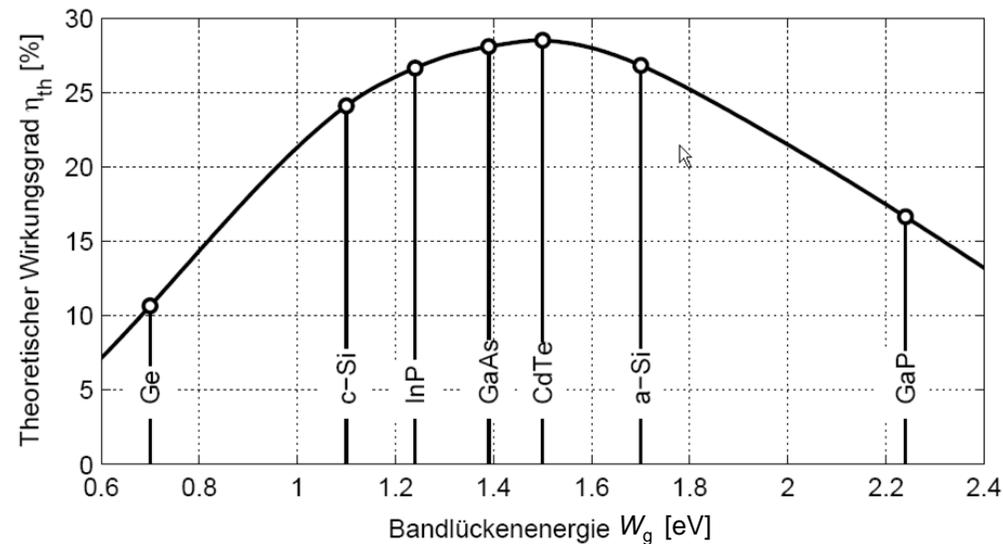
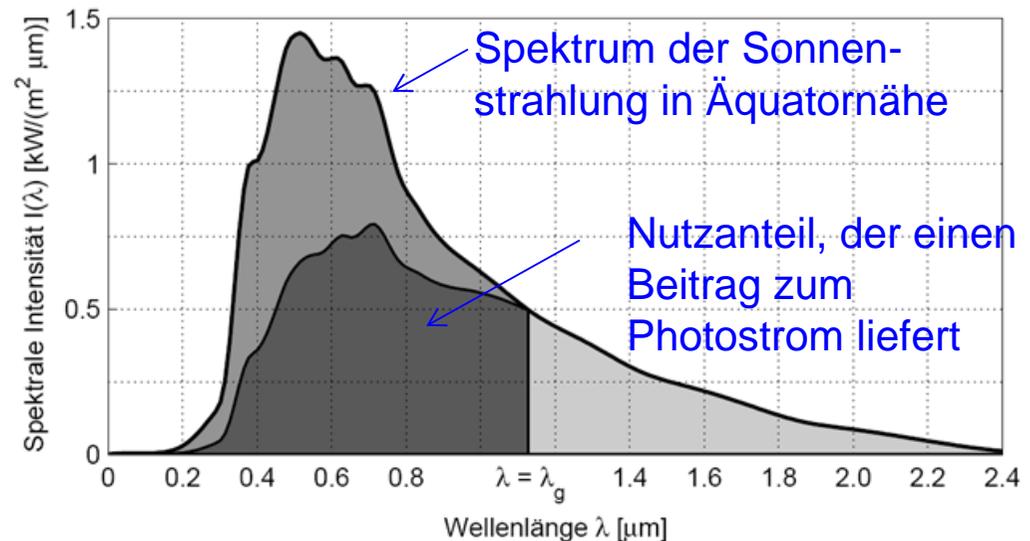
Zielkonflikt bei der Wahl der Bandlücke:

- Große Bandlücke: Große Leerlaufspannung, aber Absorption eines kleinen Anteils des Sonnenspektrums
- Kleine Bandlücke: Absorption eines großen Anteils des Sonnenspektrums, aber geringe Ausgangsspannung

⇒ **Theoretisch erreichbarer Wirkungsgrad begrenzt**; Maximum wird für eine optimale Bandlücke von ca. 1.5 eV (830nm) erreicht

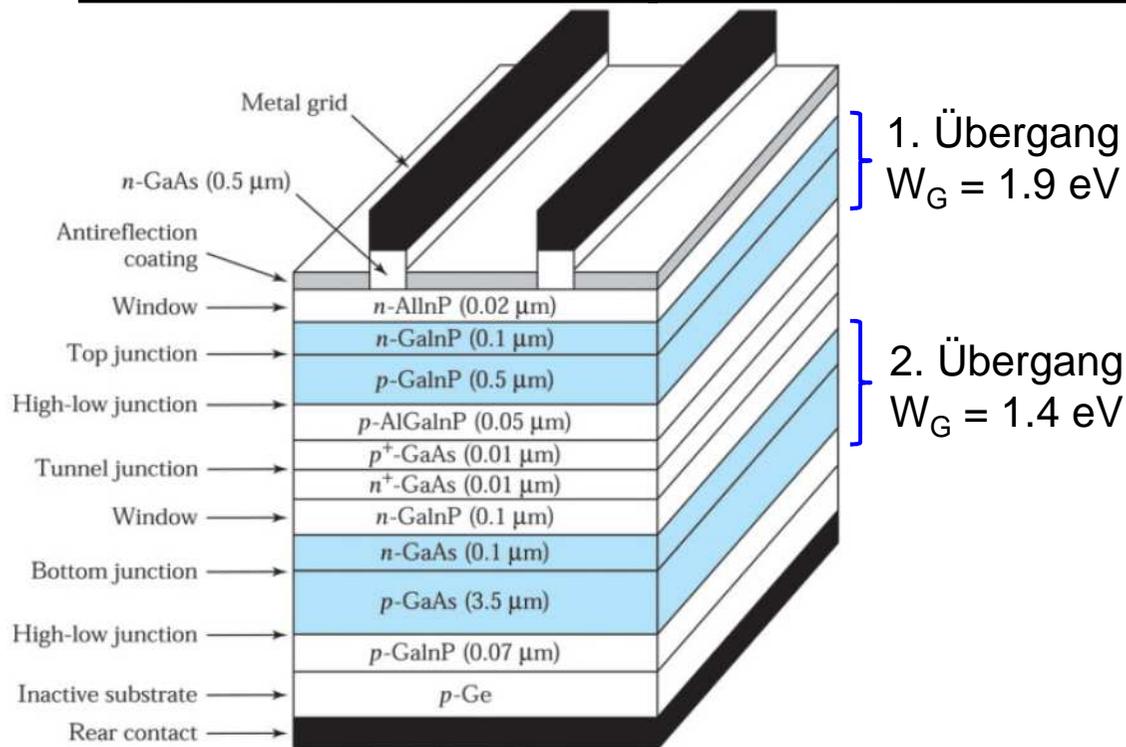
Realer Wirkungsgrad wird zusätzlich begrenzt durch:

- **Rekombinationsverluste**: Elektron-Loch-Paare rekombinieren in der RLZ
- **Reflexionsverluste**: Ein Teil des Lichtes wird an der Oberfläche reflektiert
- **Ohmsche Verluste** im Halbleitermaterial und in den Zuleitungen



Bildquelle: Sze, Semiconductor Devices - Physics and Technology; Jon Riatsch, Diss ETH, No. 14130

Tandemzelle und Wirkungsgrade in verschiedenen Materialsystemen



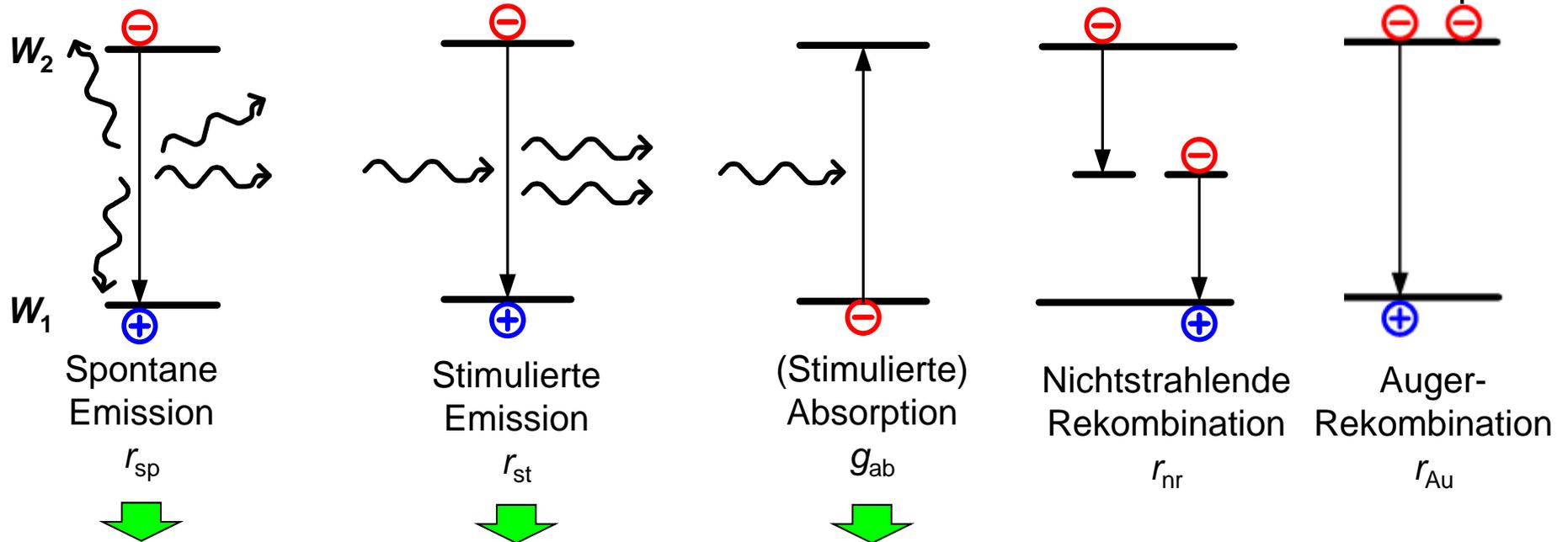
Tandem-Solarzelle: Verbindung von zwei $p-n$ -Übergängen mit verschiedenen Bandlücken
 ⇒ Effizientere Nutzung des Sonnenspektrums; ermöglicht Wirkungsgrade > 40 %

Nachteil: Teure und aufwendige Prozessierung
 ⇒ Anwendung in Kombination mit Konzentrator-Systemen



Material Technologie	Kommerzielle Zellen		Laborzellen
	Typischer Wirkungsgrad [%]	Maximaler Wirkungsgrad [%]	Maximaler Wirkungsgrad [%]
Monokristallines Silizium	12 - 15	22.7	24.4
Multikristallines Silizium	11 - 14	15.3	19.8
Amorphes Silizium Einzelzelle	6 - 7	10.2	12.7
Cadmium-Tellurid	7 - 9	9.2	16
Kupfer-Indium-Diselenid (CIS)	8 - 12	14	20.0
Farbstoffzelle (Graetzel)	-----	-----	11
Mikromorphe Zelle (a-Si/ μ c-Si Tandem)	-----	-----	11.6
Amorphe Trippel Zelle (a-Si/a-SiGe/a-SiGe)	7 - 9	13	15.2

Praktisch erzielbare Wirkungsgrade verschiedener Solarzellen-Technologien



- Leuchtdioden (Light-emitting diodes, LED)

- Laserdioden (LD)
- Optische Halbleiterverstärker (Semiconductor Optical Amplifier, SOA)
- Superlumineszenzdioden (SLD)

- Photodioden (PD)
- Solarzellen

Übergangsraten:

$$r_{sp} \propto n(W_2) p(W_1)$$

$$r_{st} \propto N_p n(W_2) p(W_1)$$

$$g_{ab} \propto N_p p(W_2) n(W_1)$$

N_p = Zahl der Photonen, die mit dem Elektron-Loch-Paar interagieren können.

Zeitliche Entwicklung der Zahl der Photonen, die mit dem Halbleiter in Wechselwirkung stehen:

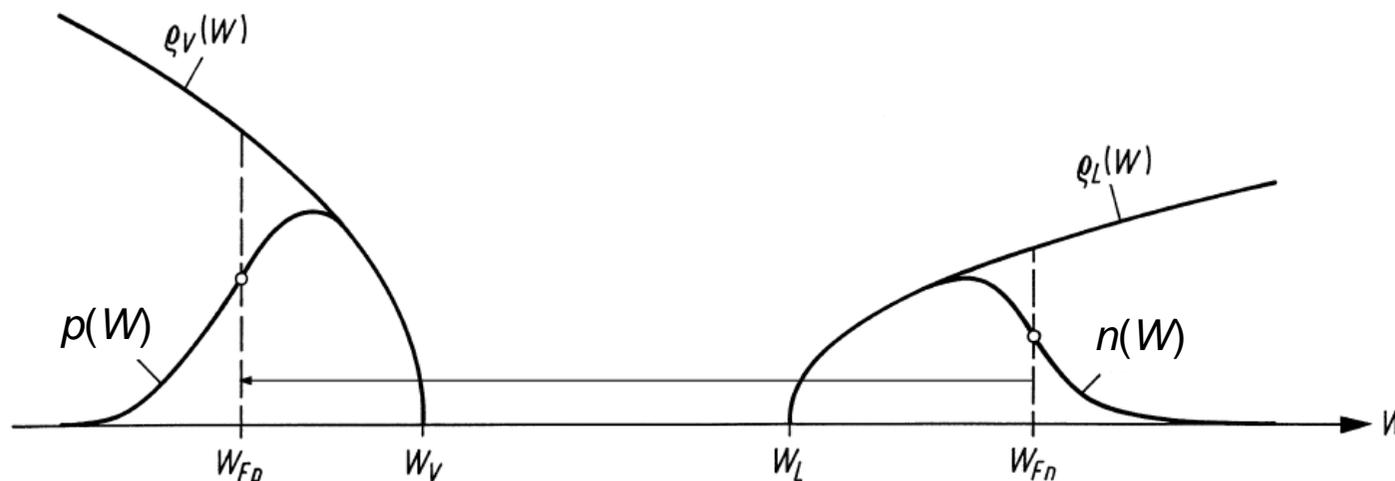
$$\frac{dN_p}{dt} \approx V (r_{st} - r_{ab}) \propto N_p (n(W_2) p(W_1) - p(W_2) n(W_1))$$

Netto-Verstärkung:

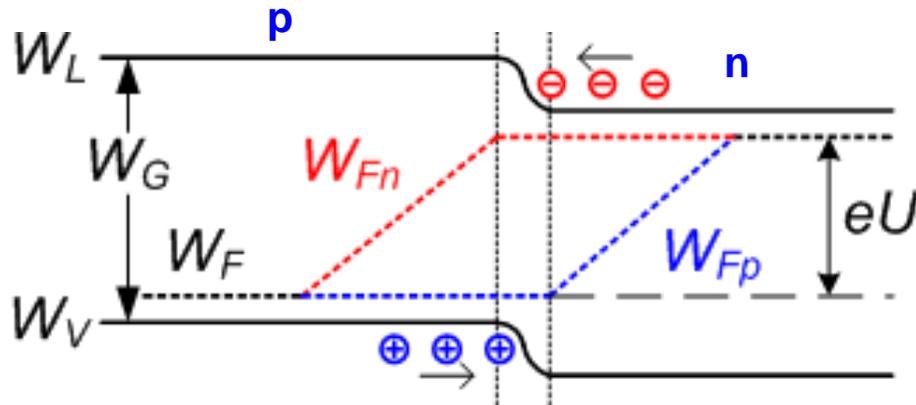
$$n(W_2) p(W_1) > p(W_2) n(W_1)$$

$$W_G = W_L - W_V < \hbar\omega = W_2 - W_1 < W_{Fn} - W_{Fp}$$

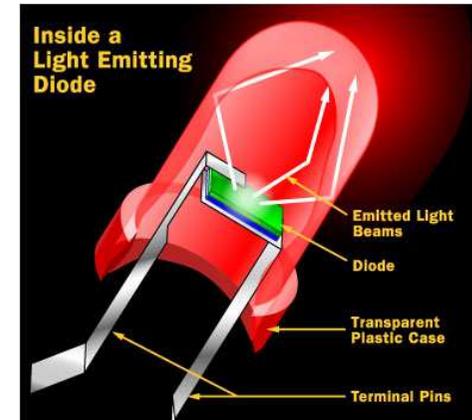
- Die Separation der Quasi-Fermi-Niveaus muss größer sein als der Bandabstand („Besetzungsinversion“)
- Mindestens ein Quasi-Fermi-Niveau muss im entsprechenden Band liegen.



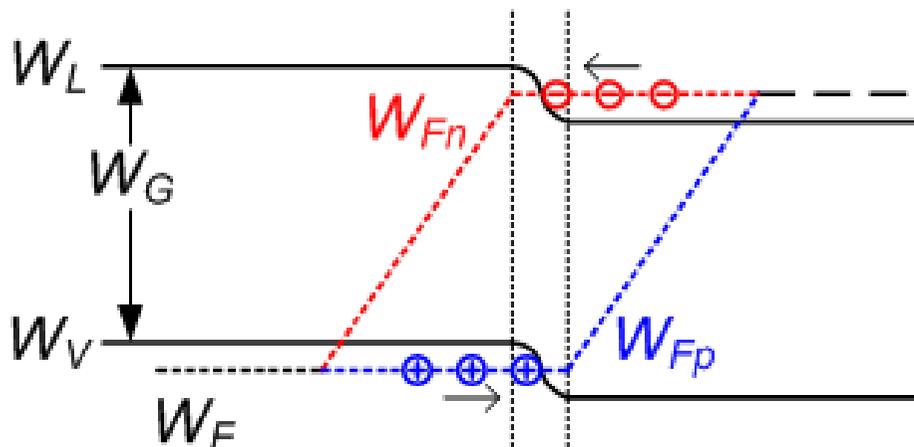
Spontane Emission: Einfache Aufspaltung der Quasi-Fermi-Niveaus genügt



- Nutzung in einfachen Leuchtdioden (LED) mit vergleichsweise geringem Wirkungsgrad



Optischer Gewinn / Überschuss an stimulierter Emission: $W_{Fn} - W_{Fp} > W_g$



- Erfordert entartete Dotierung des Halbleiters auf mindestens einer Seite
 ⇒ Starke **Auger-Rekombination**
- Rekombination von Elektron-Loch-Paaren findet innerhalb **eines breiten Bereiches** statt, der durch die Diffusionslängen bestimmt wird. **Nur ein kleiner Teil trägt zur Lichtemission bei!**
- **Absorption von Licht** außerhalb des invertierten Bereichs der Diffusionszonen
 ⇒ **Keine technisch nutzbaren Laseremission auf Basis von Homoübergängen**

Homoübergang: p- und n-Gebiet besteht aus demselben Halbleitermaterial.

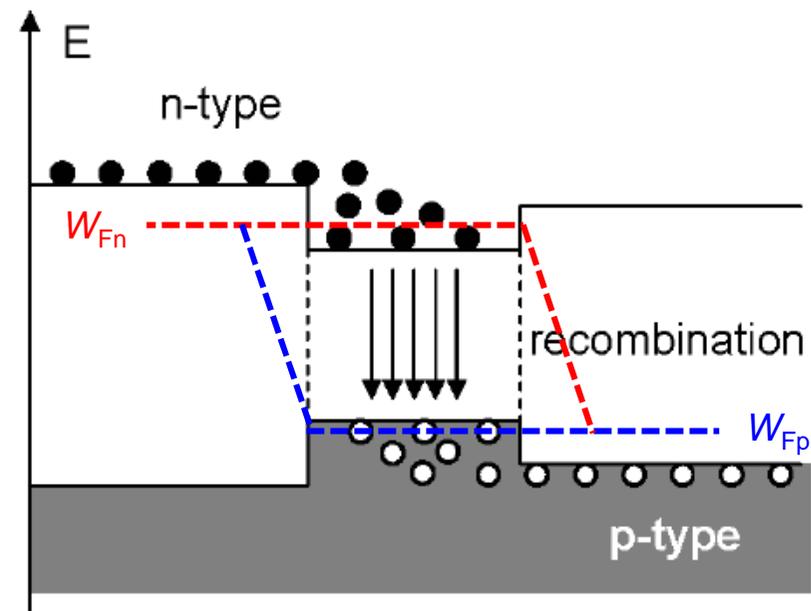
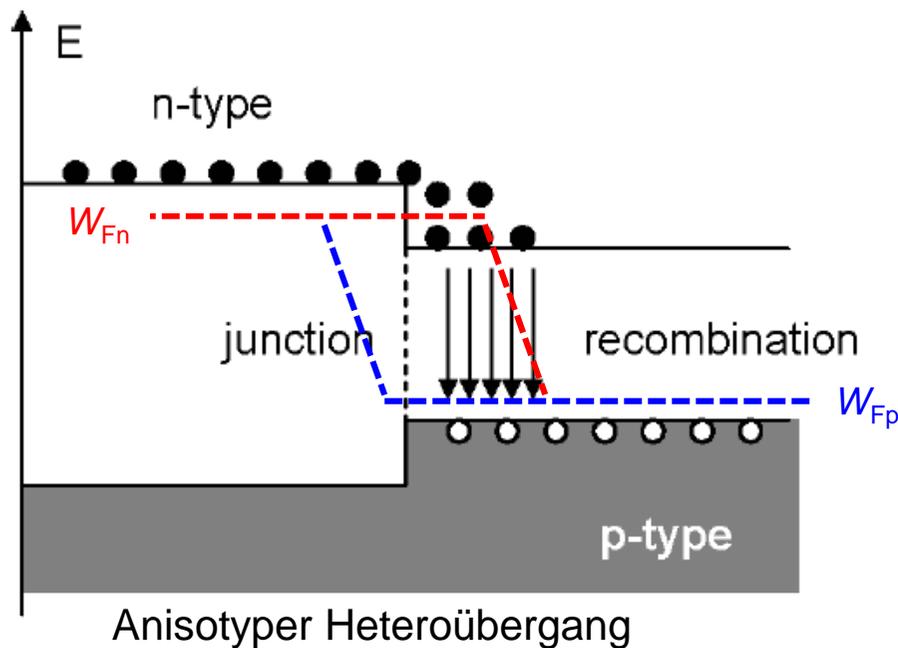
Heterostrukturen und Doppelheterostrukturen

Heteroübergang / Heterostruktur: Besteht aus zwei Halbleitern mit verschiedenen Zusammensetzungen / Bandlücken

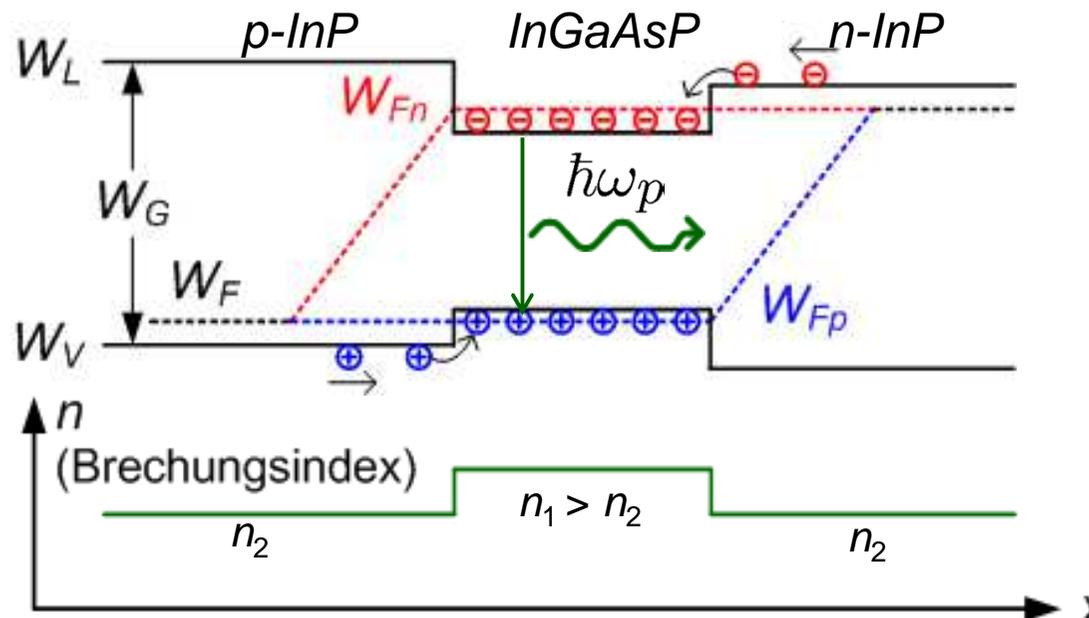
- Isotyper Heteroübergang: Gleichartige Dotierung auf beiden Seiten
- Anisotyper Heteroübergang: Verschiedenartige Dotierungen auf beiden Seiten

Doppelheterostruktur: Schicht mit geringer Bandlücke zwischen zwei Schichten mit großer Bandlücke

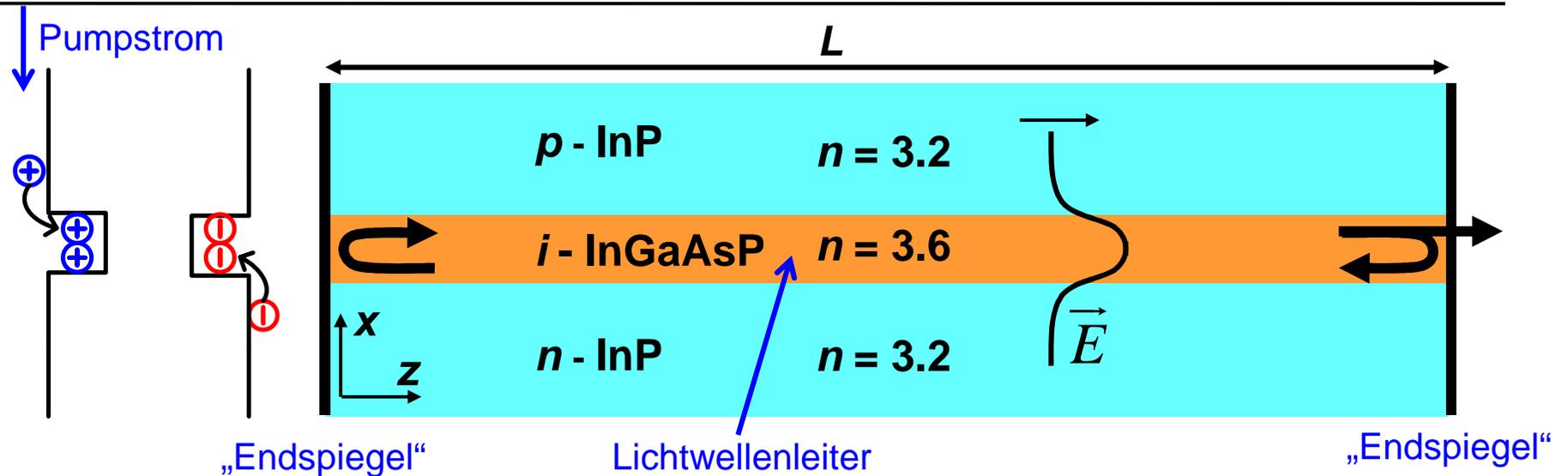
- Konzentration von Elektronen und Löchern auf denselben Raumbereich
 - Inversion im Bereich kleiner Bandlücke ohne Entartung der Bahngebiete möglich
- ⇒ Erlaubt den Bau von effizienten Laserdioden und Halbleiterverstärkern!



Doppelheterostruktur und Besetzungsinversion



- Besetzungsinversion auch ohne entartete Dotierung möglich: Elektronen und Löcher sammeln sich im sehr kleinen InGaAsP-Quantentrog ("Quantum Well")
 - ⇒ Kleine Pumpströme erzeugen große Trägerdichten, Besetzungsinversion und optische Verstärkung
- Keine Re-Absorption von Licht in den nicht-invertierten Gebieten ($W_G > \hbar\omega$)
- InGaAsP-Schicht mit kleiner Bandlücke weist gleichzeitig einen erhöhten Brechungsindex auf
 - ⇒ Wirkt als optischer Wellenleiter, der Photonen im invertierten Raumbereich konzentriert.
 - ⇒ Effektive Verstärkung von Licht durch stimulierte Emission (LASER = light amplification by stimulated emission of radiation)

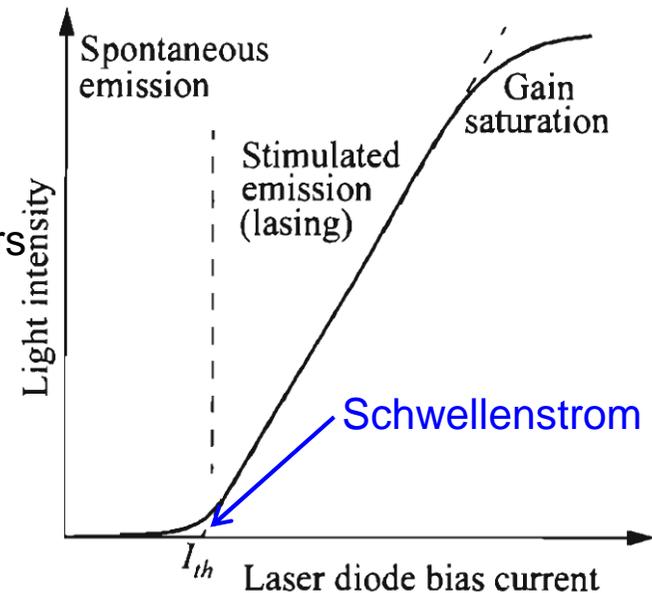


Optischer Resonator:

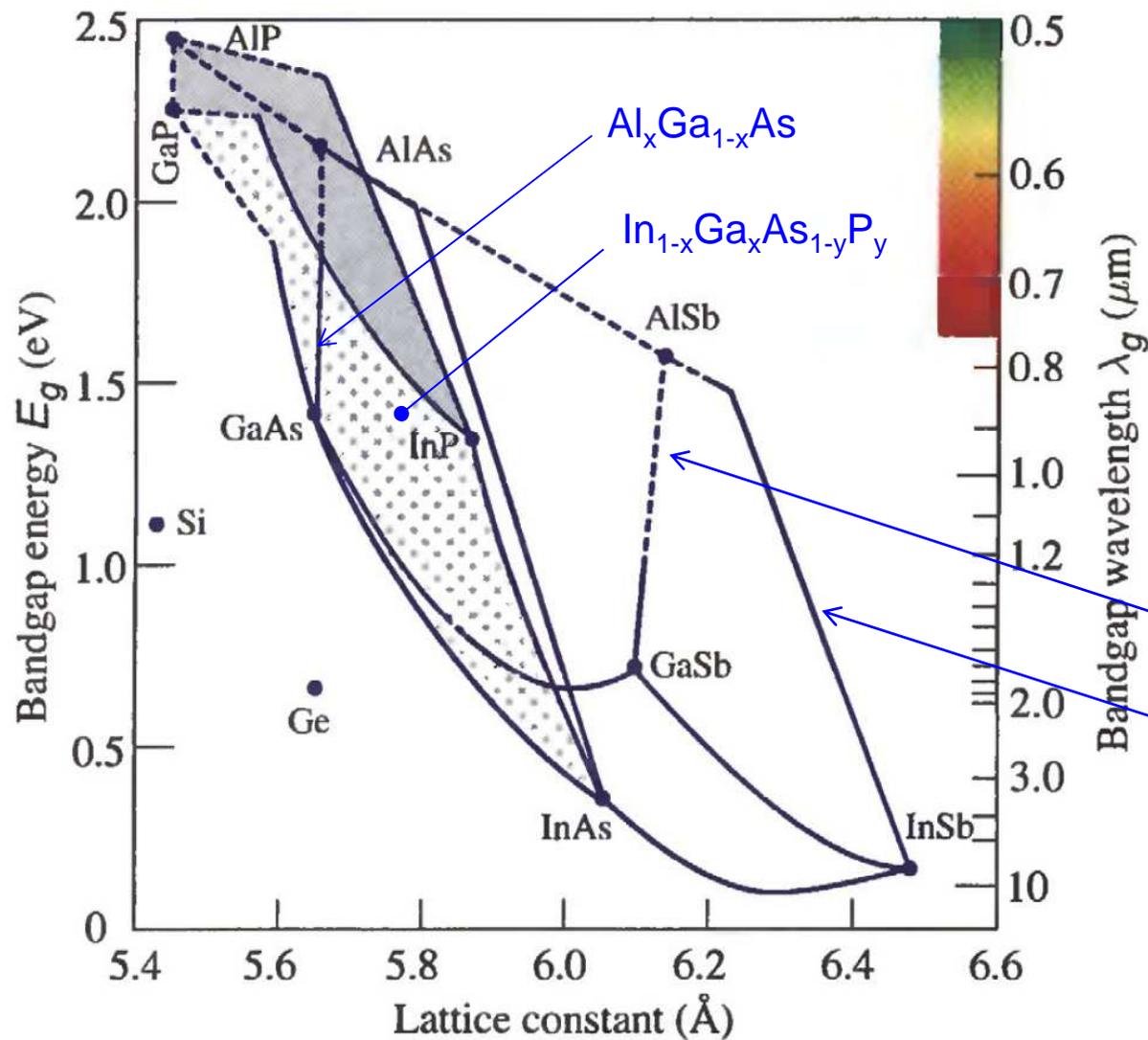
- Laterale Lichtführung (x,y) durch Wellenleitung entlang der InGaAsP-Schicht
- Longitudinale Rückkopplung durch „Endspiegel“ bzw. reflektierende Halbleiterfacette am Ende des Wellenleiters

Strom-Leistungskennlinie: Schwellenstrom I_{th} kompensiert optische Verluste des Resonators; für $I > I_{th}$ dominiert die stimulierte Emission im Resonator; $P \sim (I - I_{th})$

Entscheidend: Hohe Qualität der Halbleiterschichten zur Vermeidung von nichtstrahlender Rekombination
 ⇒ Anpassung der Gitterkonstanten



Ternäre und quaternäre Halbleiter

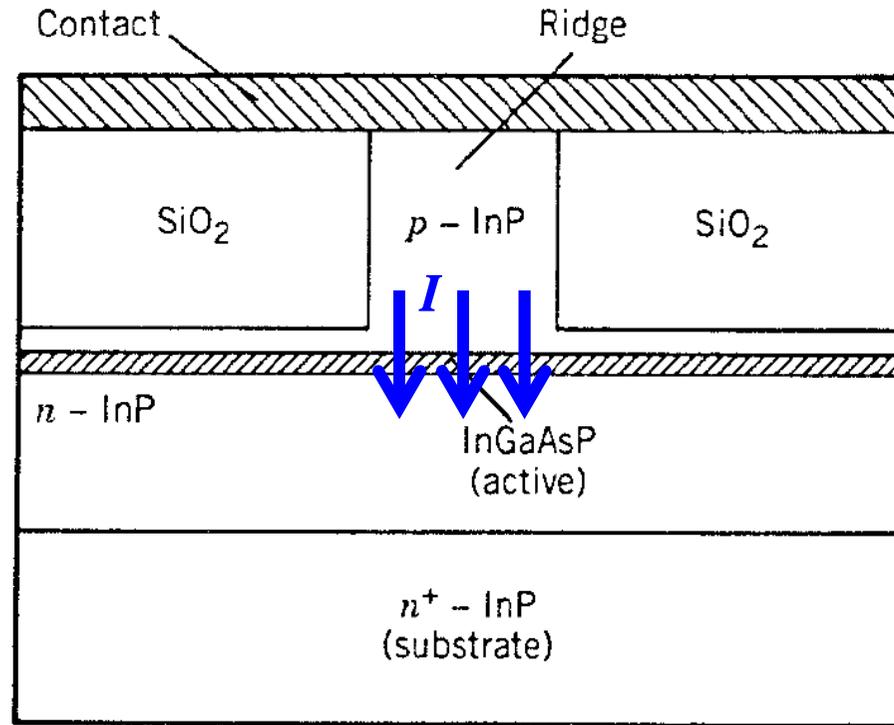


- Ternäre Verbindungen liegen auf der Linie, die die zugehörigen binären Halbleiter verbindet.
- Quaternäre Verbindungen liegen innerhalb eines flächenhaften Gebietes, dessen Ecken durch die entsprechenden binären Halbleiter definiert werden. Sie erlauben es, Bandlücke und Gitterkonstante unabhängig voneinander einzustellen.

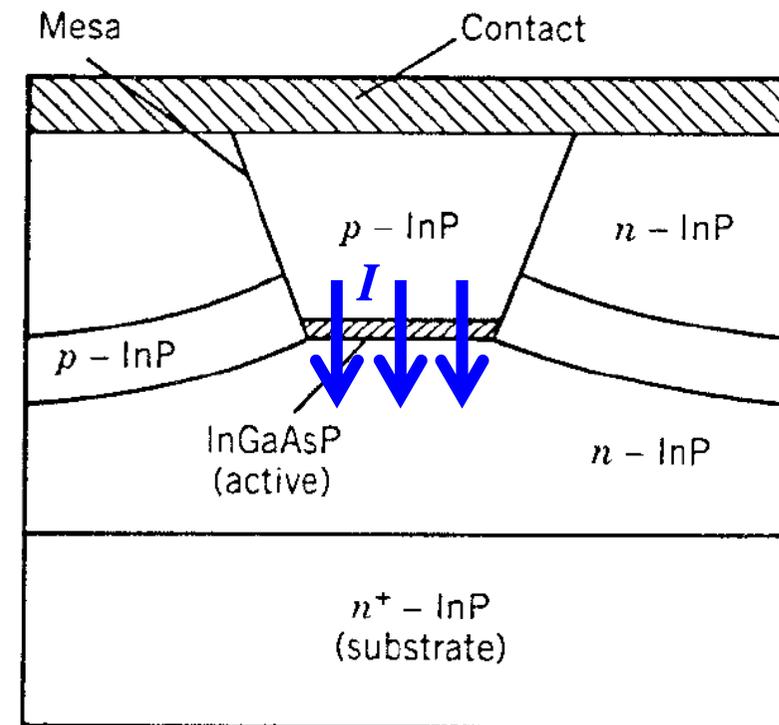
Gestrichelte Linien:
Indirekte Bandlücke

Durchgezogene Linien:
Direkte Bandlücke

Bildquelle: Saleh/Teich,
Fundamentals of Photonics



Aktiver InGaAsP/InP-Rippenwellenleiter



Vergrabene (Doppel-)Heterostruktur („Buried heterostructure“)

Bildquelle: Agrawal; Fiber-Optic Communication Systems

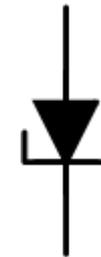
Tunnelodiode

Sehr hoch dotierter p^{++} - n^{++} -Übergang (auf beiden Seiten entartet)

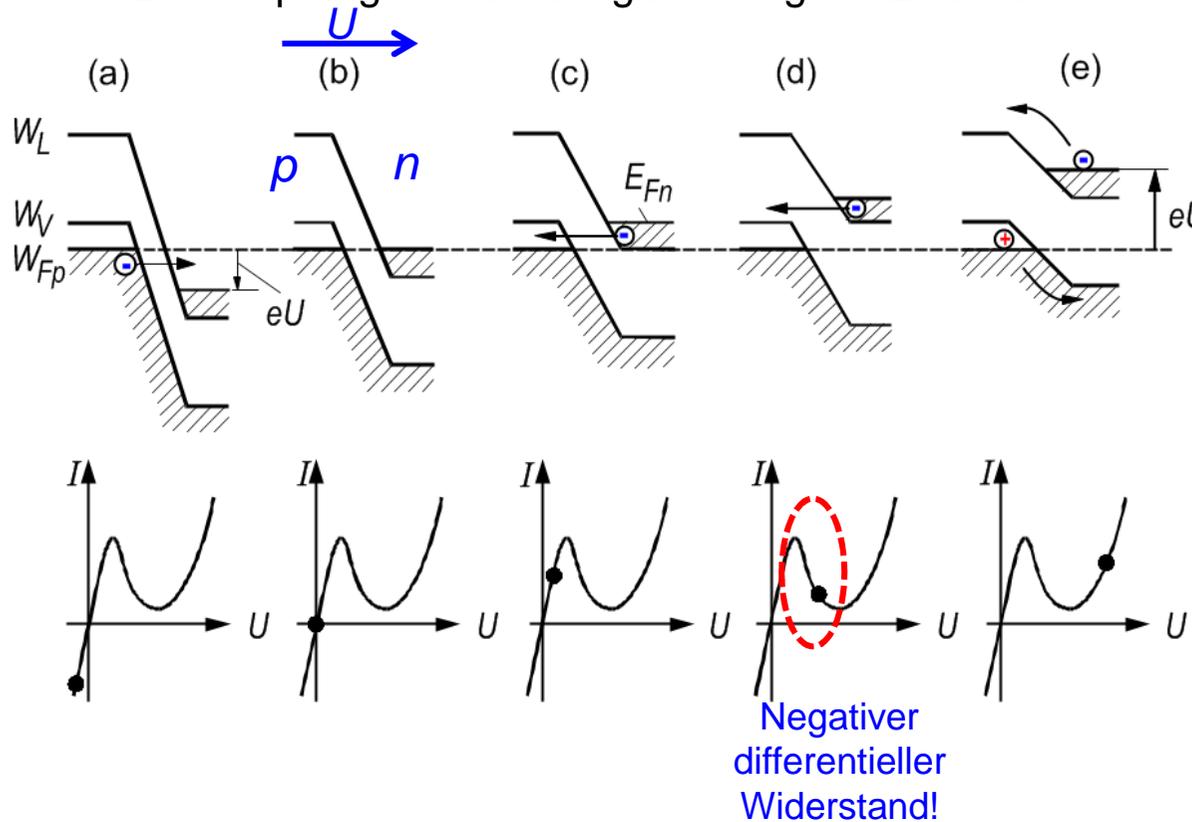
⇒ Sehr kurze RLZ

⇒ Tunnelprozesse „in Vorwärtsrichtung“ bei „mittleren“ Vorwärtsspannungen

⇒ Negativer differentieller Widerstand; kann zur Entdämpfung von Schwingkreisen genutzt werden



- (a) Sperrspannung; Tunnelstrom in Rückwärtsrichtung
- (b) Keine externe Spannung; kein Stromfluss im Außenkreis
- (c) Tunnelstrom in Vorwärtsrichtung für „kleine“ Durchlassspannungen U , bei denen die LB-Elektronen im n -Bereich auf gleicher energetischer Höhe liegen wie die Löcher im VB des n -Bereiches.
- (d) Tunnelstrom geht zurück, da auf der p -Seite keine freien Plätze für tunnelnde Elektronen verfügbar sind.
⇒ **Negativer differentieller Widerstand!**
- (e) Vorwärtsstrom wie bei „normaler Diodenkennlinie“

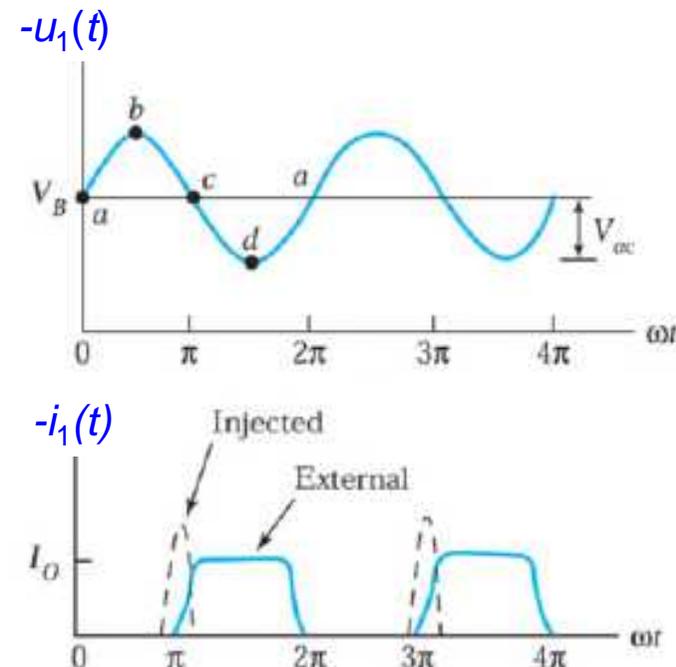
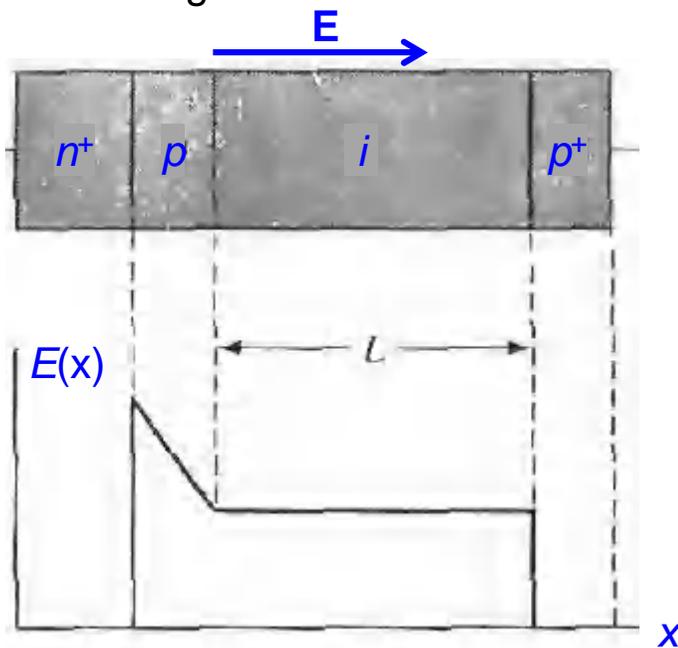


Lawinen-Laufzeit-Diode (LLD) bzw. IMPATT-Diode

IMPATT-Diode = Impact Ionization Avalanche Transit Time Diode

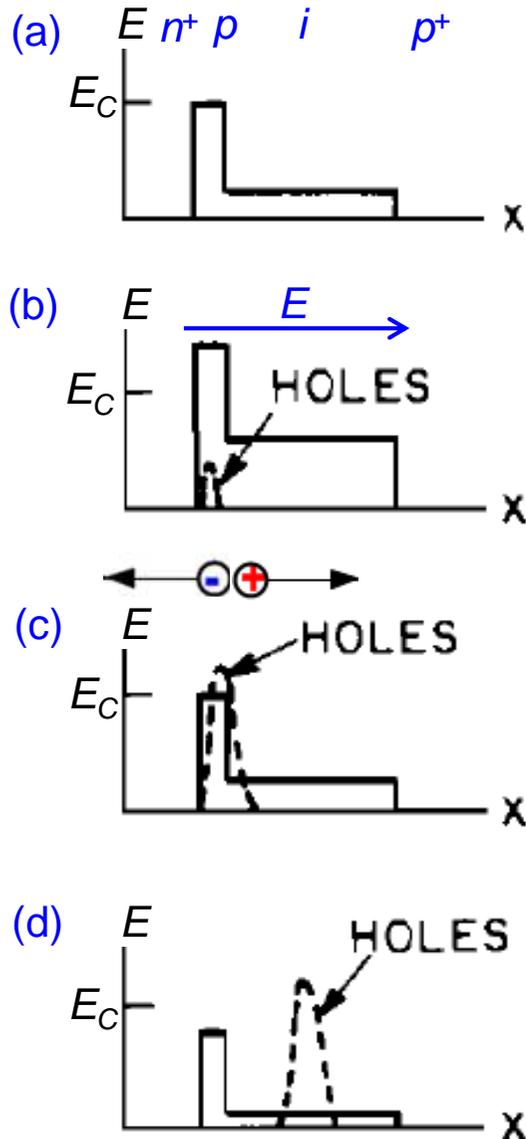
Prinzip:

- n^+ - p - i - n^+ -Struktur wird in Sperrichtung vorgespannt.
- Einer negativen Vorspannung U_0 wird eine Wechselspannung $u_1(t)$ überlagert, die in den negativen Halbwellen zu einem Lawinendurchbruch führt.
- Der Lawinenstrom ist gegenüber der Spannung zeitlich verzögert.
- Strom und Spannung können gegenphasig sein, d.h. die komplexe Impedanz des Bauteils weist einen negativen Realteil auf („negativer ohmscher Widerstand“) und kann zur Realisierung eines Mikrowellenoszillators verwendet werden.

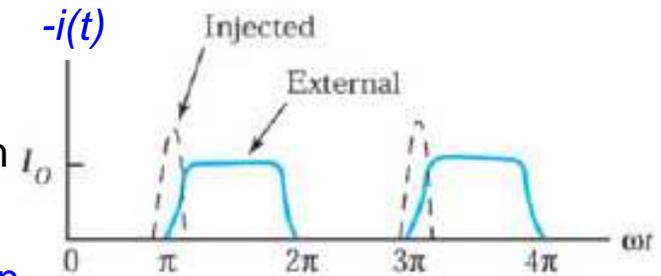
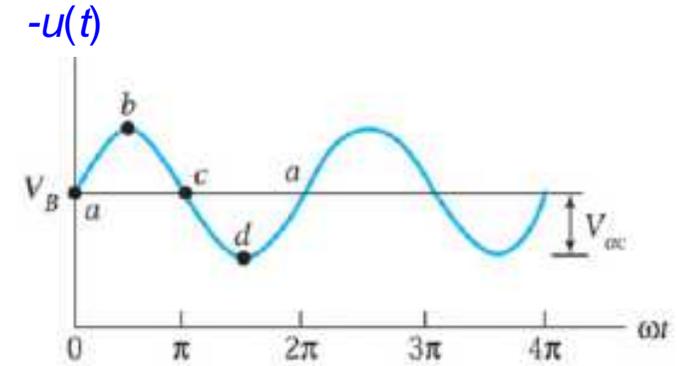


Bildquellen: Sze, Semiconductor Devices – Physics and Technology / Streetman, Solid-State Electronic Devices

Lawinen-Laufzeit-Diode (LLD) bzw. IMPATT-Diode



- Lawinenmultiplikation setzt bei $t = 0$, also zu Beginn der negativen Halbwelle der externen Spannung $u(t)$ ein ($E > E_C$)
- Die Elektronen werden in die n^+ -Zone abgezogen und tragen nicht weiter zum Strom bei
- Die Zahl der **driftenden Löcher** nimmt während der negativen Halbwelle von $u(t)$ kontinuierlich zu.
- Die **maximale Zahl an driftenden Löchern** wird am Ende der negativen Halbwelle von $u(t)$ erreicht (Ende der Lawinenmultiplikation!)
- Der **Stromfluss** hält so lange an, bis die Löcher den rechten Rand der i -Zone erreicht haben.

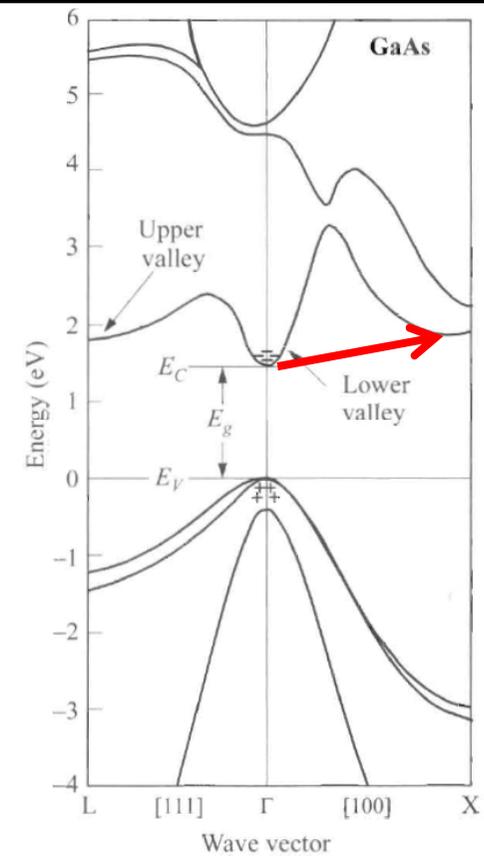
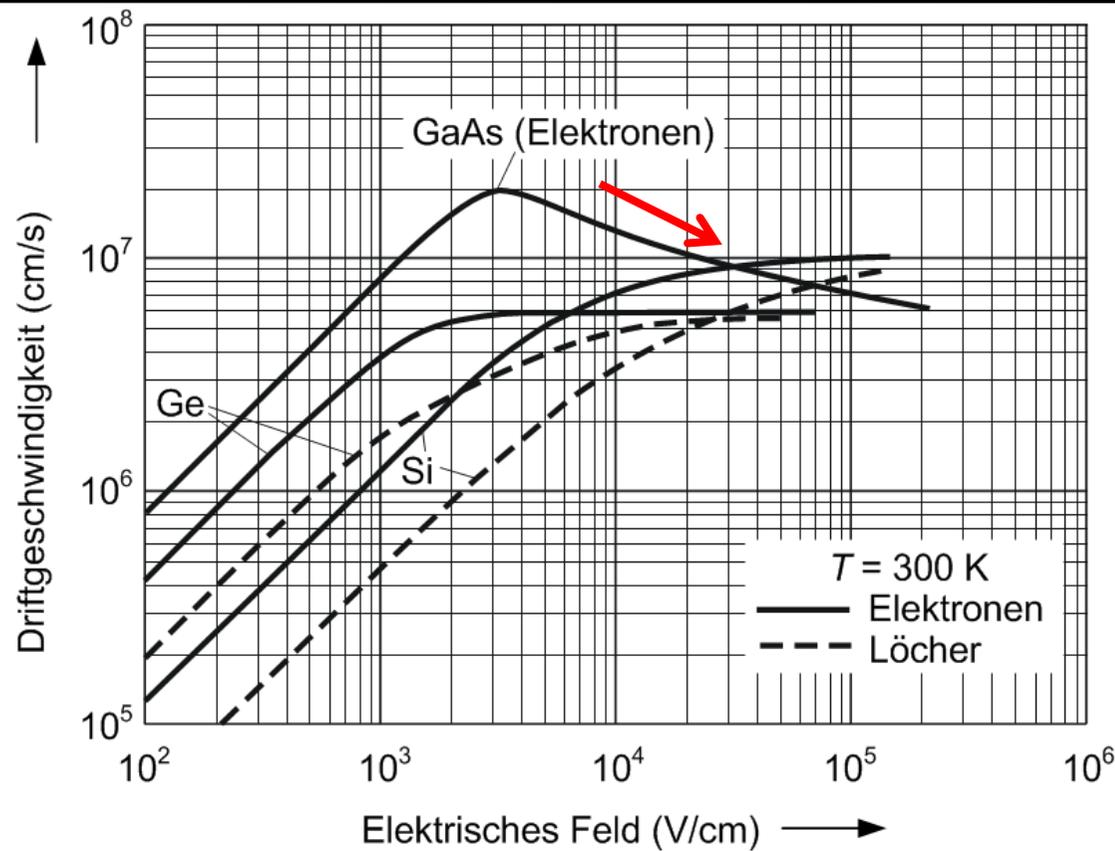


- Bei geeigneter Dimensionierung sind Strom und Spannung gegenphasig. \Rightarrow **Negativer Widerstand!**

Bildquellen: Sze, Semiconductor Devices – Physics and Technology / Streetman, Solid-State Electronic Devices

Vorlesung 12

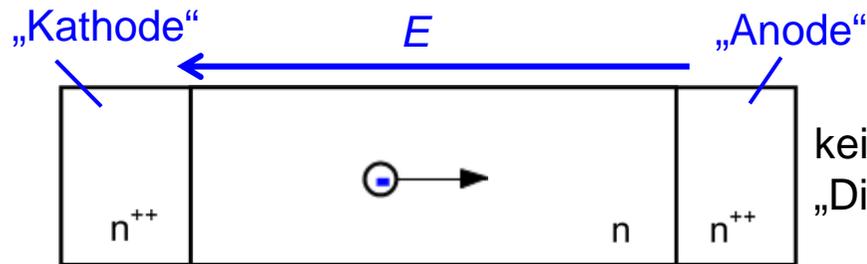
11.01.2016



Erinnerung: Negative differentielle Driftgeschwindigkeit von Elektronen in GaAs durch Streuung von Elektronen in ein zweites Minimum des LB, das eine höhere effektive Masse aufweist.

$$m^* = \hbar^2 \left(\frac{\partial^2 W_n(k)}{\partial k^2} \Big|_{k=k_0} \right)^{-1}$$

„Gunn-Diode“ bzw. „Transferred-Electron Device“ (TED)

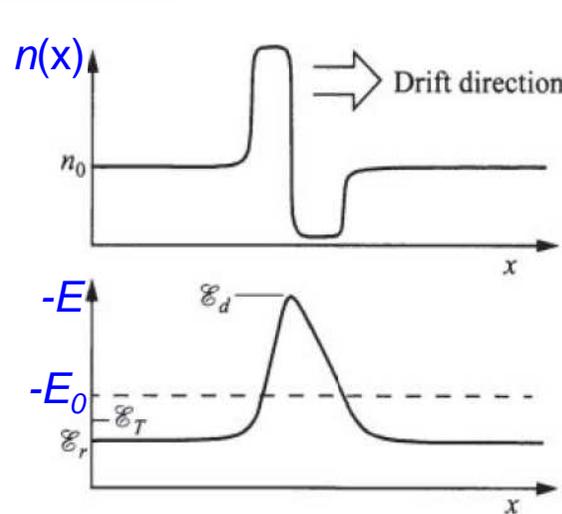
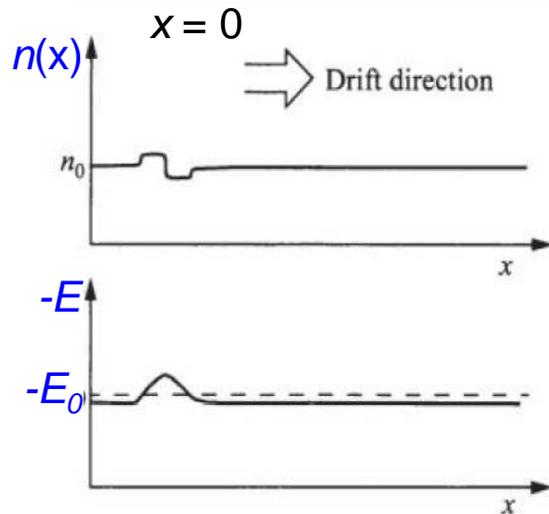


keine „Diode“!

Betrachte lokale „Dipol-ähnliche“ Störung der Elektronendichte

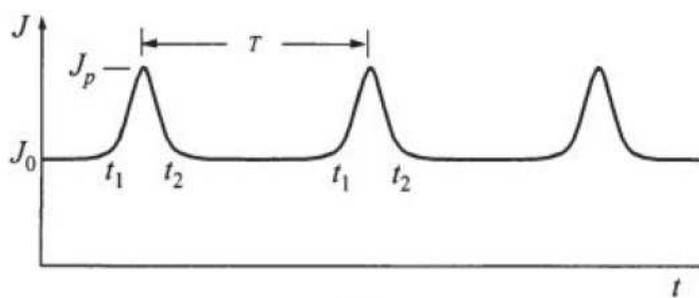
⇒ Lokale Erhöhung der elektrischen Feldes innerhalb der Störung!

⇒ Lokale Verringerung der Driftgeschwindigkeit!



⇒ Störung wird verstärkt, da nachfolgende Elektronen „auflaufen“; restliches Feld nimmt ab!

⇒ Stationärer Zustand, wenn Feld außerhalb der Dipol-Störung („Mature Domain“) so weit abgesunken ist, dass alle Träger mit derselben Geschwindigkeit propagieren



• Beim Verlassen des Driftbereiches an der Anode ändert sich die Feldstärke schlagartig; dies führt zur Bildung einer neuen Störung an der Kathode, die während der Propagation wieder anwächst.

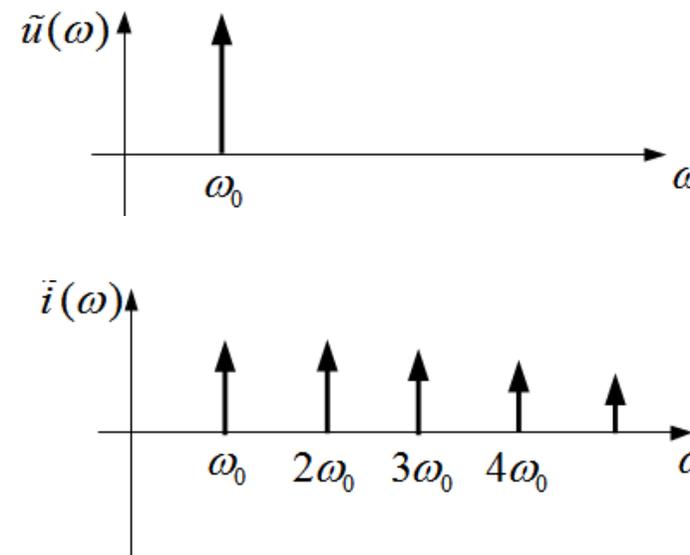
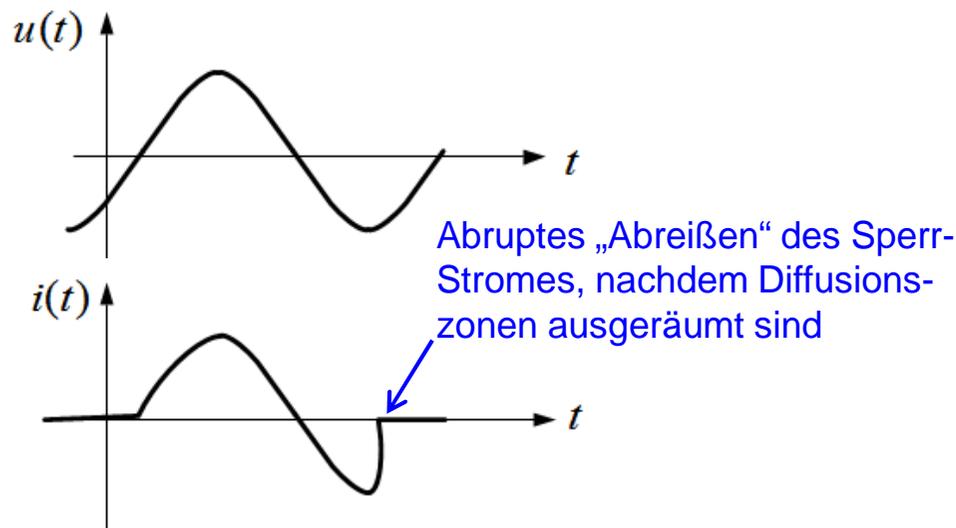
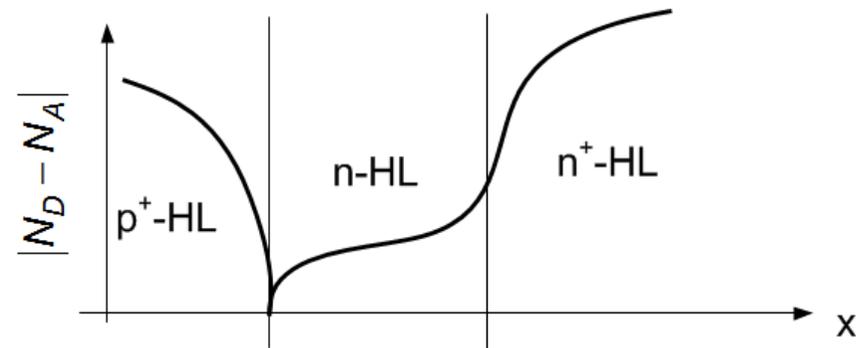
⇒ **Periodische Folge von Strom-Impulsen**; die Periodendauer T entspricht der Transitzeit der Elektronen.

⇒ Verwendung als **Mikrowellenquelle** (z.B. im Automobilradar)

Step-Recovery-Diode (SRD) bzw. Speicher-Varaktor

Frequenzvervielfachung durch Ausnutzung des Ausschaltverhaltens des pn-Überganges:

- Ansteuern die Diode mit einer sinusförmigen Wechselspannung führt zu **periodischem Umschalten zwischen Sperr- und Flussbetrieb**
 - Negative Halbwelle: Abbau der Ladungen aus der Diffusionszone führt zunächst zu einem Stromfluss in Sperrrichtung, der dann aber sehr schnell auf Null absinkt.
- ⇒ **Hoher Anteil an Oberwellen** im Leistungsspektrum des Stromes!
- ⇒ Verwendung zu Frequenzvervielfachung!
- Dotierung ähnlich wie bei der p-i-n-Diode, um die Sperrschichtkapazität gering zu halten!



Kapitel 8: Bipolar-Transistoren

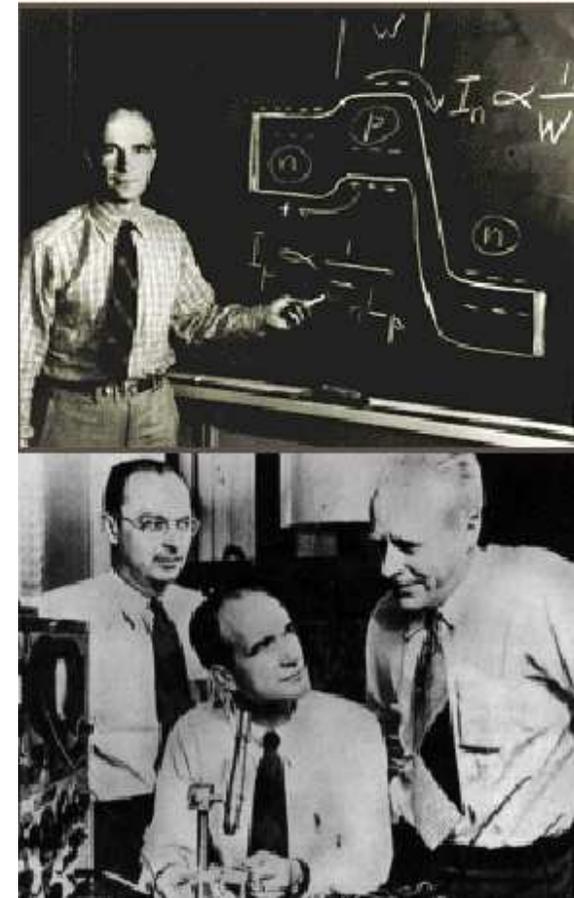
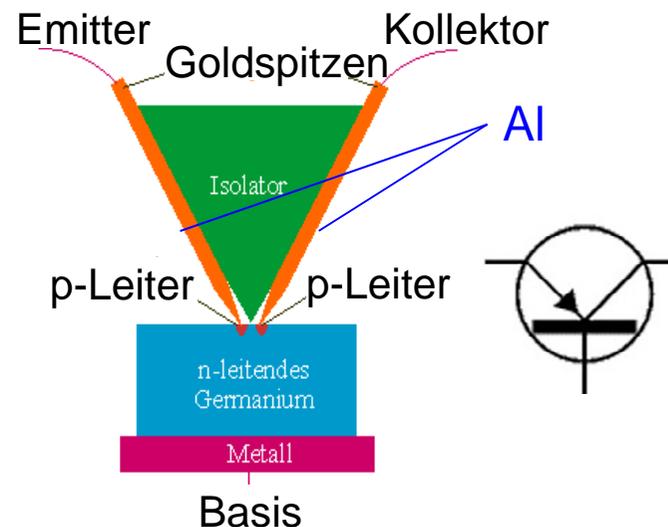
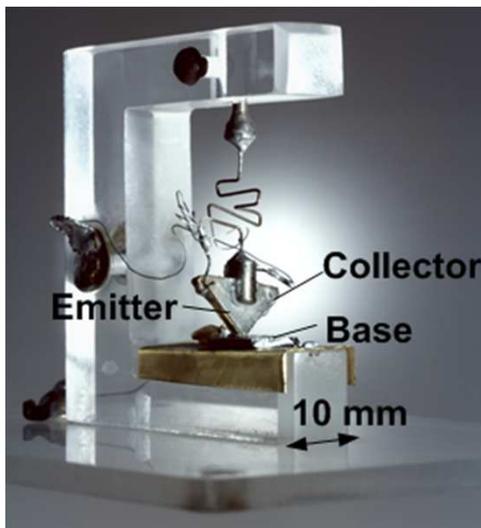
Historisches zum Transistor („Transfer Resistor“)

1928: Erstes Patent über „feldgesteuerte Halbleiter“ (Feldeffekt-Transistor) von **Julius Edgar Lilienfeld**; technische Realisierung eines funktionsfähigen Bauteils scheitert aber noch am Reinheitsgrad der verfügbaren Halbleitermaterialien

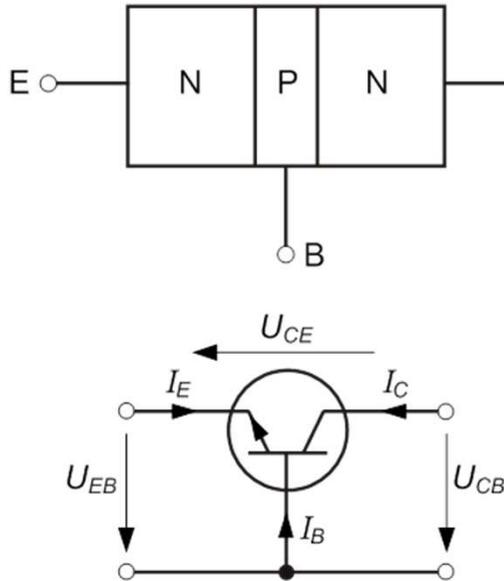
1948: Patent für den Transistor-Effekt und Transistor-Verstärker von **John Bardeen, Walter H. Brattain und William B. Shockley** (Bell Telephone Laboratories, New York); 1956 erhalten sie gemeinsam den Nobelpreis für Physik

Erstes funktionsfähiges Bauteil: Spitzen-„Transistor“ (1947)

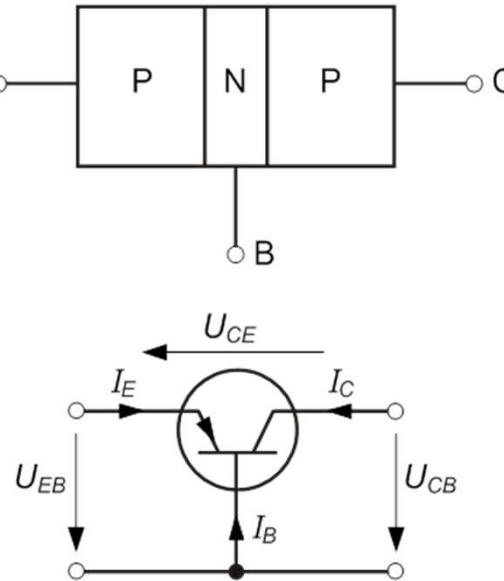
- Schaltbild des Transistors ist vom Spitzentransistor abgeleitet



npn-Transistor



pnp-Transistor



Es gilt: $I_E + I_B + I_C = 0$

$U_{EB} - U_{CB} + U_{CE} = 0$

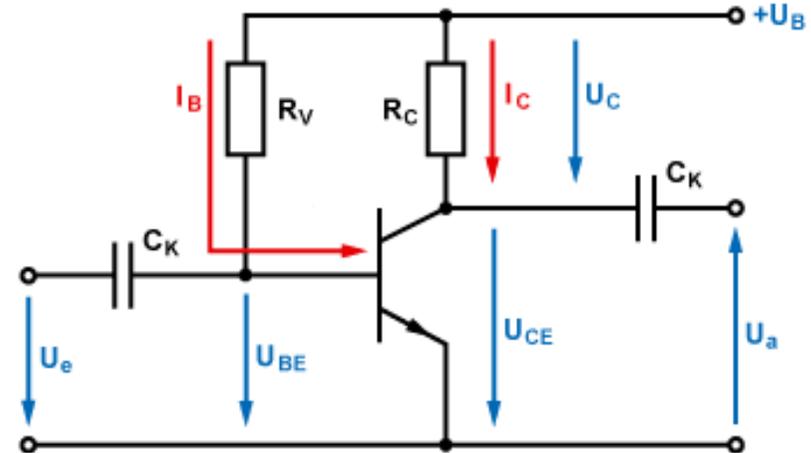
Spannungen und Ströme im Normalbetrieb:

	U_{EB}	U_{CB}	U_{CE}	I_E	I_C	I_B
NPN	-	+	+	-	+	+
PNP	+	-	-	+	-	-

Verstärkungseffekt:

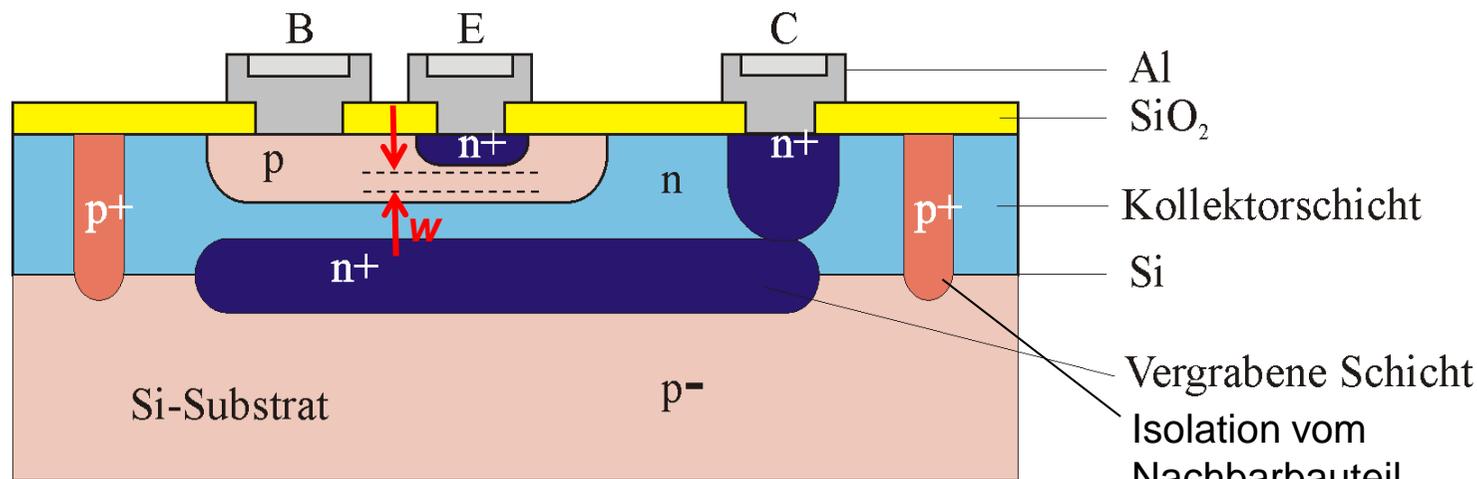
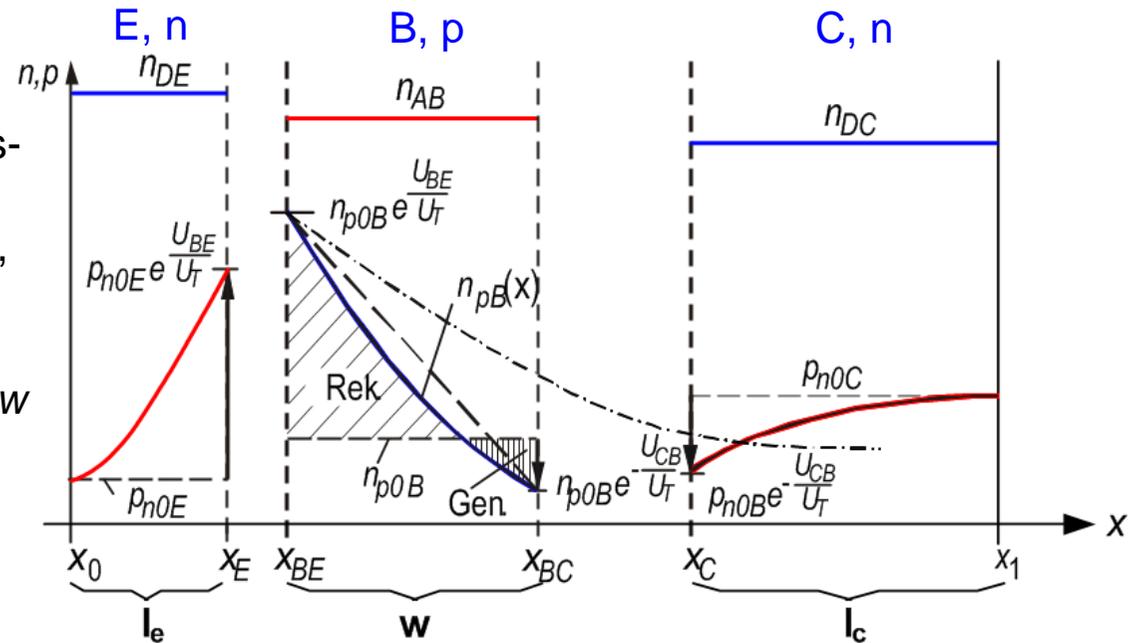
- Kleiner Steuerstrom an der Emitter-Basis-Diode führt zu großem Kollektor-Strom
 $|I_B| \ll |I_E| \approx |I_C|$
- Spannungsabfall über der Kollektor-Basis-Diode viel größer als über der Emitter-Basis-Diode
 $|U_{EB}| \ll |U_{CE}| \approx |U_{CB}|$

Beispiel: Emitterschaltung



Bipolar-Transistoren: Funktionsprinzip

Entscheidend für die Funktionsweise des Transistors: Im Normalbetrieb müssen die Diffusionszonen des Basis-Emitter- und des Basis-Kollektor-Überganges in Wechselwirkung treten, d.h. Diffusionslänge der Minoritätsträger in der Basis muss größer sein als die Basisweite ($L_{nB} \gg w$ im Fall eines npn-Transistors)



Minoritätsträgerverteilung in der Basis

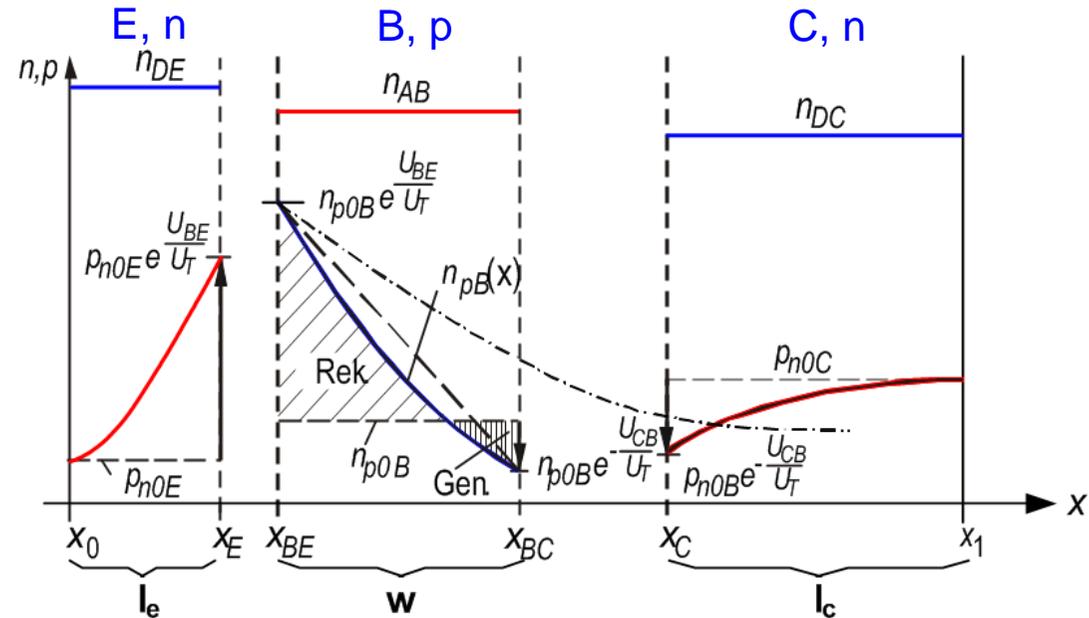
Differentialgleichung für den Verlauf der Elektronendichte in der Basis:

$$\frac{d^2 n_{pB}}{dx^2} = \frac{1}{L_{nB}^2} [n_{pB}(x) - n_{poB}]$$

Randbedingungen:

$$n_{pB}(x_{BE}) = n_{poB} e^{U_{BE}/U_T}$$

$$n_{pB}(x_{BC}) = n_{poB} e^{-U_{CB}/U_T}$$



Lösung:

$$n_{pB}(x) - n_{poB} = \frac{n_{poB}}{\sinh\left(\frac{x_{BC} - x_{BE}}{L_{nB}}\right)} \times \left[\left(e^{-U_{EB}/U_T} - 1 \right) \sinh\left(\frac{x_{BC} - x}{L_{nB}}\right) + \left(e^{-U_{CB}/U_T} - 1 \right) \sinh\left(\frac{x - x_{BE}}{L_{nB}}\right) \right]$$

Minoritätsträgerströme in der Basis

Minoritätsträger-Diffusionsstrom in der Basis:

$$I_{n_{pB}}(x) = I_{TS} \left[- \left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) \cosh \left(\frac{x_{BC} - x}{L_{nB}} \right) + \left(e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right) \cosh \left(\frac{x - x_{BE}}{L_{nB}} \right) \right]$$

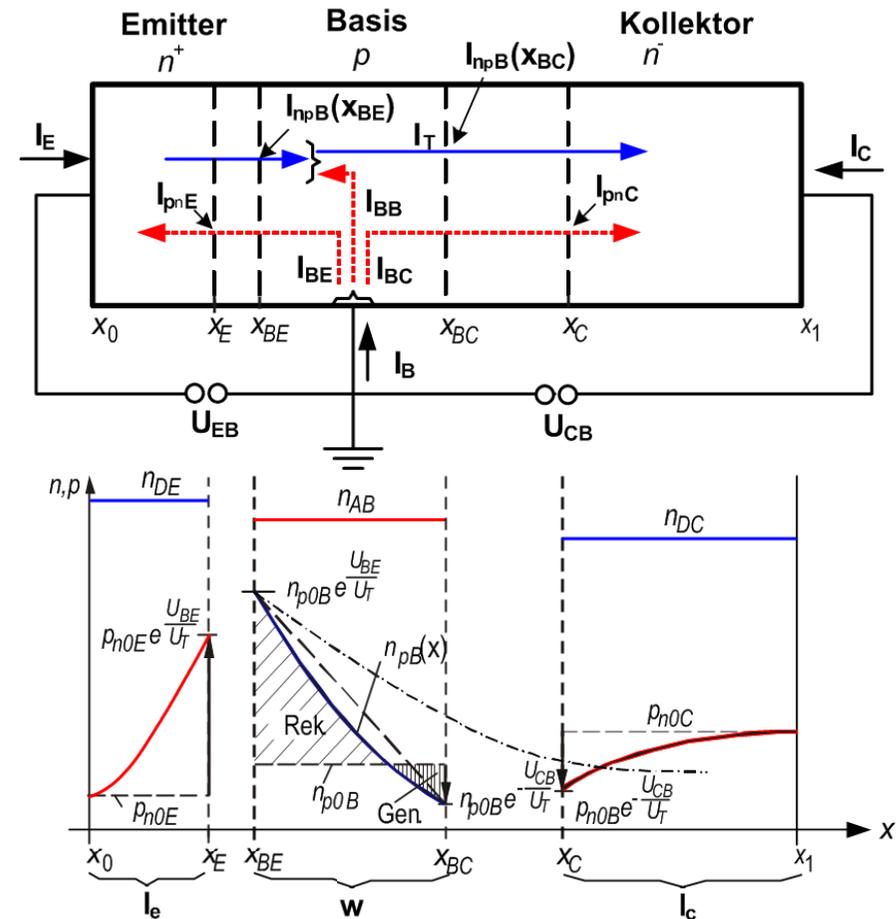
wobei $I_{TS} = \frac{AeD_{nB}n_{p0B}}{L_{nB} \sinh \left(\frac{w}{L_{nB}} \right)}$ **Transfer-sättigungsstrom**
 $\approx Ae \frac{D_{nB}n_{p0B}}{w}$

Transferstrom:

$$I_T = I_{n_{pB}}(x_{BC}) \approx I_{TS} \left[- \left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) + \left(e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right) \right]$$

Rekombinationsstrom in der Basis:

$$\begin{aligned} I_{BB} &= -I_{n_{pB}}(x_{BE}) + I_{n_{pB}}(x_{BC}) \\ &= I_{TS} \left[\left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) + \left(e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right) \right] \times \left[\cosh \left(\frac{w}{L_{nB}} \right) - 1 \right] \\ &\approx I_{TS} \frac{1}{2} \left(\frac{w}{L_{nB}} \right)^2 \left[\left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) + \left(e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right) \right] \approx -I_T \frac{1}{2} \left(\frac{w}{L_{nB}} \right)^2 \end{aligned}$$



Vorwärtsstromverstärkung, Emitterwirkungsgrad und Basistransportfaktor

Minoritätsträgerströme im Emitter und Kollektor

Minoritätsträger-Diffusionsstrom im kurzen Emitter ($l_E \ll L_{pE}$):

$$I_{BE} = -I_{p_{nE}}(x_E) = I_{BES} \left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right)$$

wobei
$$I_{BES} = \frac{AeD_p E p_{n0E}}{L_{pE} \tanh\left(\frac{l_E}{L_{pE}}\right)}$$

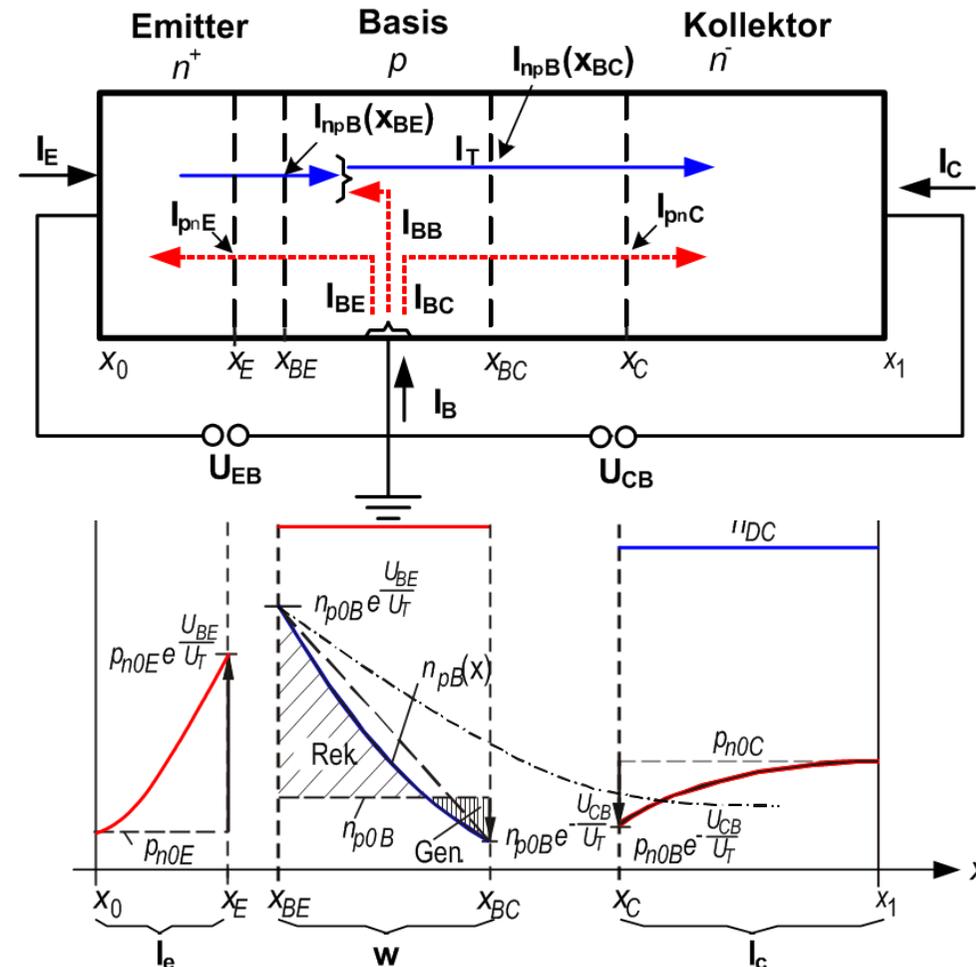
Basis-Emitter-Sättigungsstrom

Minoritätsträger-Diffusionsstrom im Kollektor:

$$I_{BC} = I_{p_{nC}}(x_C) = I_{BCS} \left(e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right)$$

wobei
$$I_{BCS} = \frac{AeD_p C p_{n0C}}{L_{pC}}$$

Basis-Kollektor-Sättigungsstrom



Emitter-, Basis- und Kollektorströme

Emitterstrom:

$$I_E = I_T - I_{BB} - I_{BE}$$

$$= -I_{EE} \left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) + I_{TS} \left(e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right) - I_{BB}$$

wobei $I_{EE} = I_{TS} + I_{BES}$

Kollektorstrom:

$$I_C = -I_T - I_{BC}$$

$$= I_{TS} \left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) - I_{CC} \left(e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right)$$

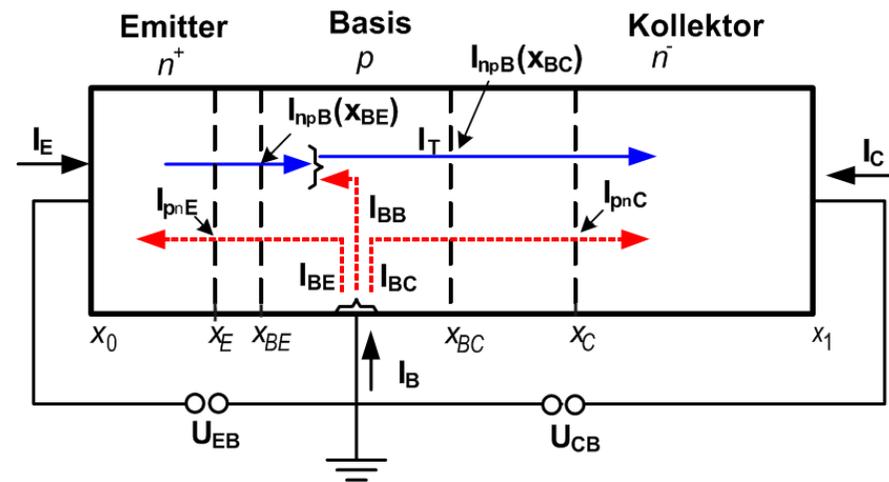
wobei $I_{CC} = I_{TS} + I_{BCS}$

Basisstrom:

$$I_B = I_{BE} + I_{BC} + I_{BB}$$

$$= I_{BES} \left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) + I_{BCS} \left(e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right)$$

$$+ I_{TS} \frac{1}{2} \left(\frac{w}{L_{nB}} \right)^2 \left[\left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) + \left(e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right) \right].$$



[Kleinsignal-Analyse](#)

Annahme: Rekombinationsstrom in der Basis vernachlässigbar, $I_{BB} \ll I_T$

⇒ Ebers-Moll-Gleichungen:

$$I_E = -I_{EE} \left(e^{-U_{EB}/U_T} - 1 \right) + I_{TS} \left(e^{-U_{CB}/U_T} - 1 \right)$$

$$I_C = I_{TS} \left(e^{-U_{EB}/U_T} - 1 \right) - I_{CC} \left(e^{-U_{CB}/U_T} - 1 \right)$$

Schreibweise in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} I_E \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{EE} & I_{TS} \\ I_{TS} & -I_{CC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(e^{-\frac{U_{EB}}{U_T}} - 1 \right) \\ \left(e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & A_I \\ A_N & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_F \\ I_R \end{pmatrix}$$

wobei: $I_F = I_{EE} \left(e^{-\frac{U_{EB}}{U_T}} - 1 \right)$

Vorwärtsstrom

$$I_R = I_{CC} \left(e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right)$$

Rückwärtsstrom

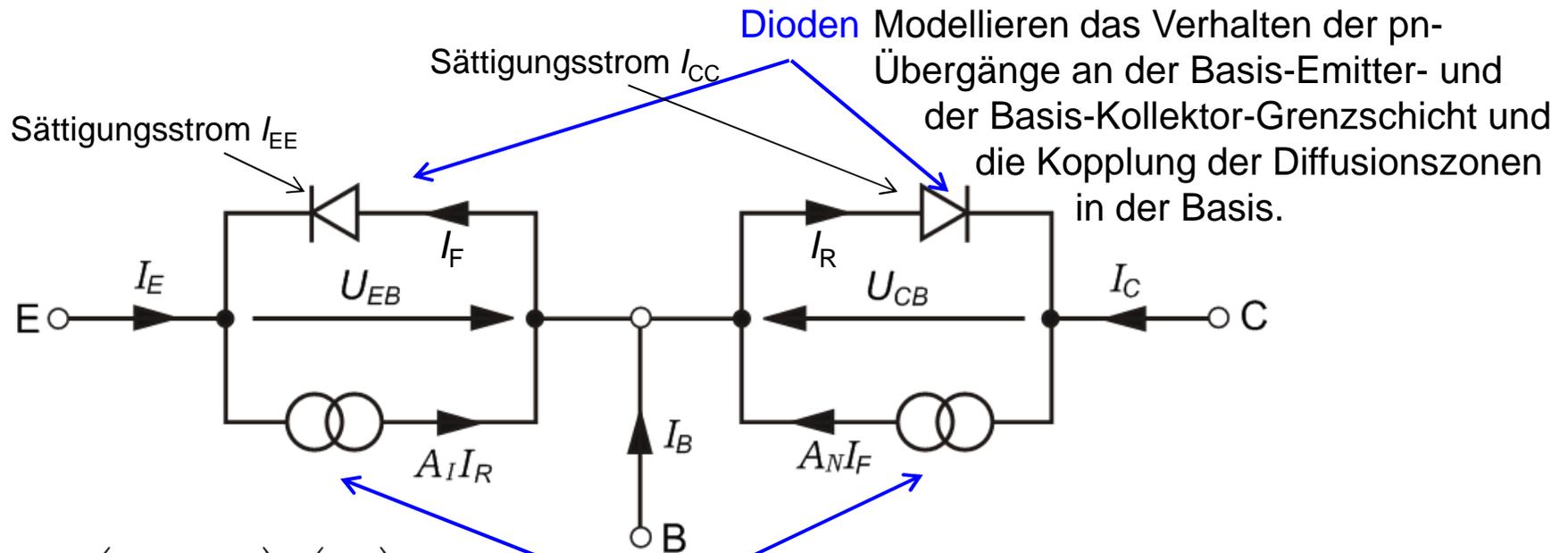
$$A_N = \frac{I_{TS}}{I_{EE}} = \frac{I_{TS}}{I_{TS} + I_{BES}} \lesssim 1$$

Vorwärtsstromverstärkung
(Stromverstärkung im Normalbetrieb)

$$A_I = \frac{I_{TS}}{I_{CC}} = \frac{I_{TS}}{I_{TS} + I_{BCS}} \lesssim 1$$

Rückwärtsstromverstärkung
(Stromverstärkung im Inversen Betrieb)

Ebers-Moll-Modell und zugehöriges Ersatzschaltbild



$$\begin{pmatrix} I_E \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & A_I \\ A_N & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_F \\ I_R \end{pmatrix}$$

$$I_F = I_{EE} \left(e^{-\frac{U_{EB}}{U_T}} - 1 \right)$$

$$I_{EE} = I_{TS} + I_{BES}$$

$$I_R = I_{CC} \left(e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right)$$

$$I_{CC} = I_{TS} + I_{BCS}$$

Dioden Modellieren das Verhalten der pn-Übergänge an der Basis-Emitter- und der Basis-Kollektor-Grenzschicht und die Kopplung der Diffusionszonen in der Basis.

Gesteuerte Stromquellen: Modellieren den durch die überlappende Diffusionszonen hervorgerufenen Stromtransfer durch die Basis.

Anwendung in **Simulationsprogrammen (z.B. SPICE)**, beispielsweise zur Berechnung des Arbeitspunktes von Transistoren

Betriebszustände des Bipolar-Transistors

Räumlicher Verlauf der Minoritätsträgerdichten (npn-Transistor):

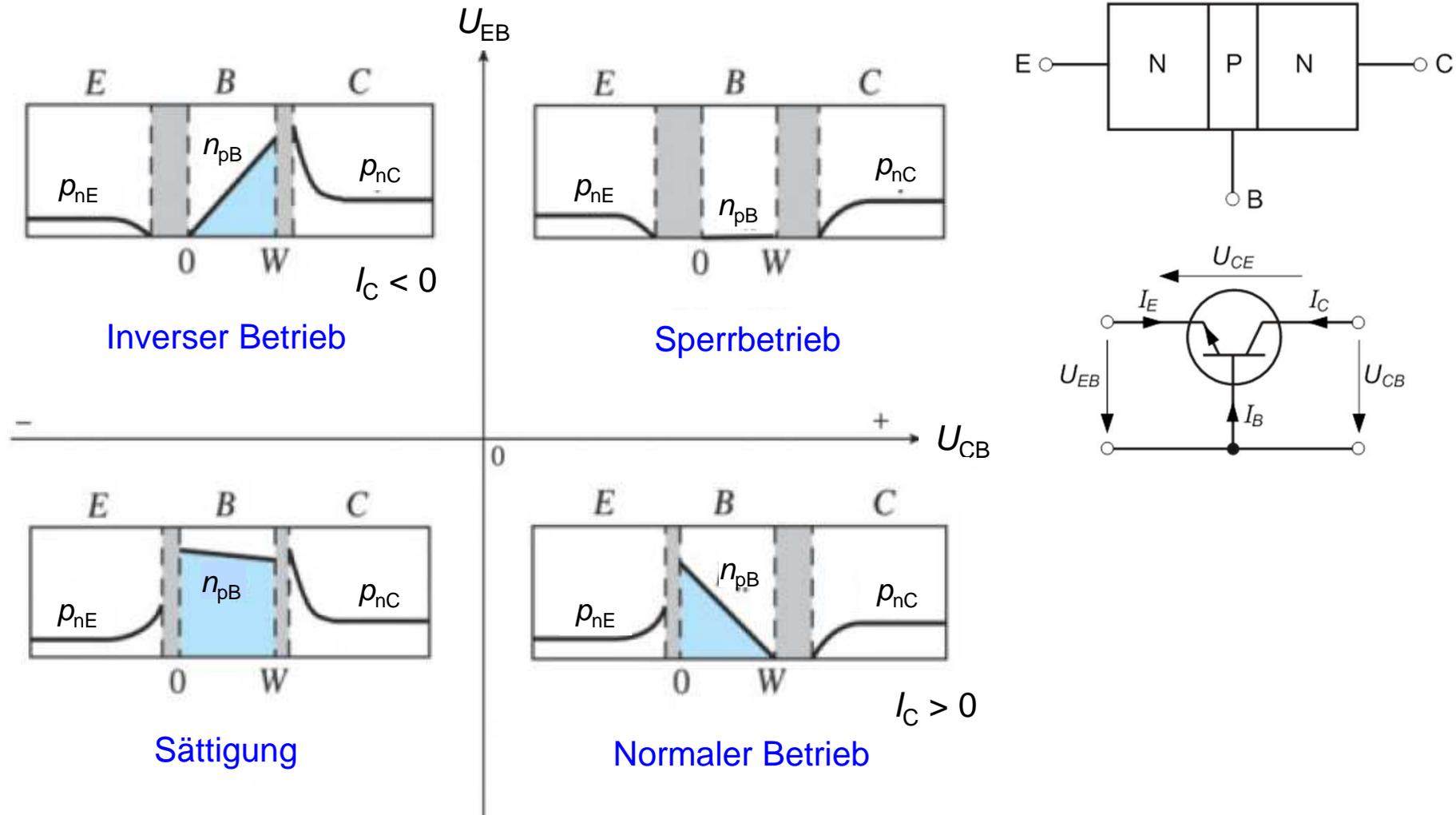
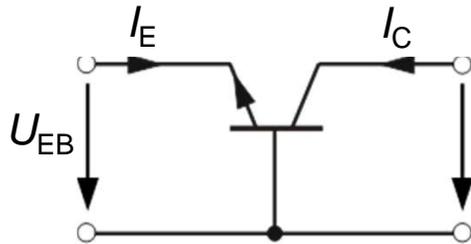


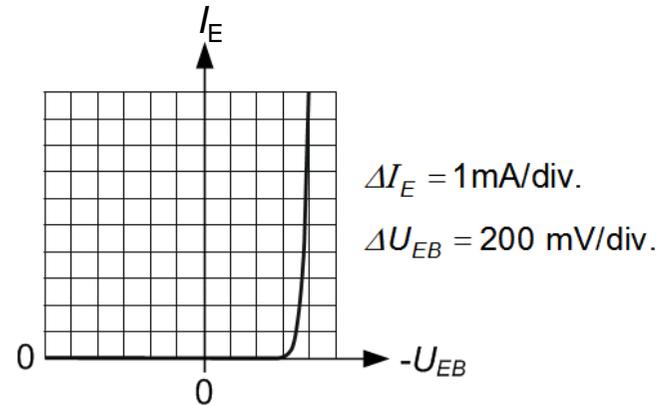
Bild nach Sze, Semiconductor Devices – Physics and Technology

Kennlinienfeld in Basisschaltung



Eingangskennlinienfeld:

$$I_E \approx -I_{EE} e^{-\frac{U_{EB}}{U_T}} + I_{BES}$$

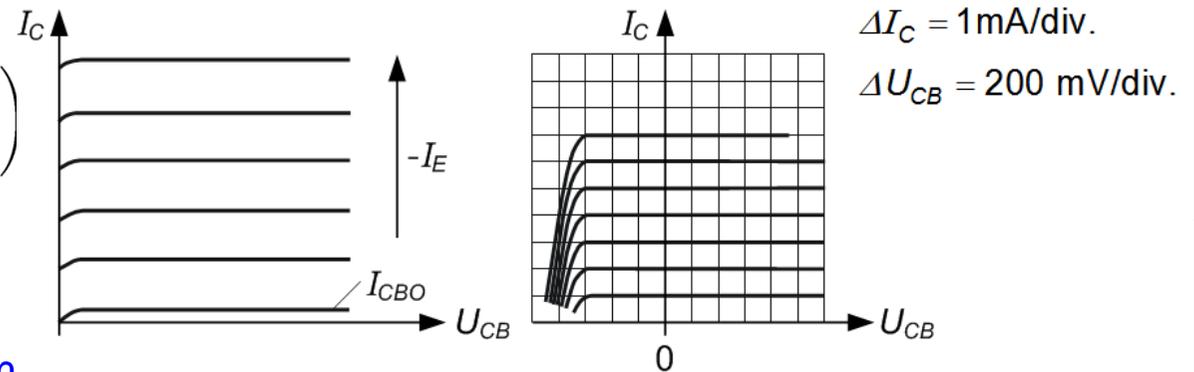


Ausgangskennlinienfeld:

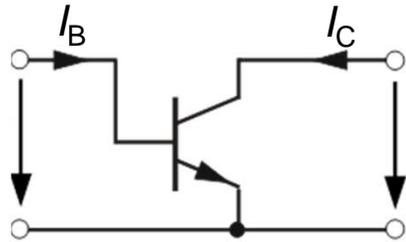
$$I_C = -A_N I_E + I_{CB0} \left(1 - e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} \right)$$

wobei $I_{CB0} = \left(\frac{1}{A_I} - A_N \right) I_{TS}$

Leerlaufreststrom



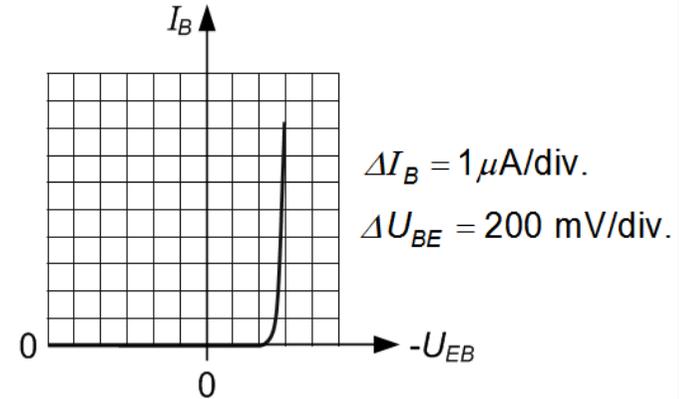
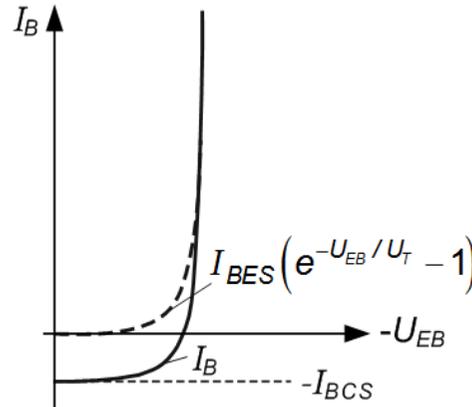
Kennlinienfeld in Emitterschaltung



Eingangskennlinienfeld:

$$I_B = -(I_E + I_C)$$

$$= I_{BES} \left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) - I_{BCS}$$



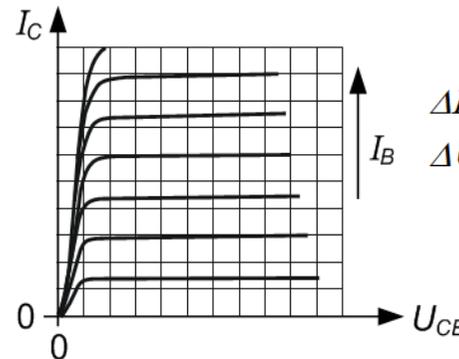
Ausgangskennlinienfeld:

$$I_C = B_N I_B - I_{CE0} \left(e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right)$$

wobei $I_{CE0} = (B_N + 1) I_{CB0}$

$$B_N = \frac{A_N}{1 - A_N}$$

Stromverstärkung der
Emitter-Schaltung



$\Delta I_C = 1 \text{ mA/div.}$
 $\Delta U_{CE} = 200 \text{ mV/div.}$

Minoritätsträgerströme in der Basis

Minoritätsträger-Diffusionsstrom in der Basis:

$$I_{n_{pB}}(x) = I_{TS} \left[- \left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) \cosh \left(\frac{x_{BC} - x}{L_{nB}} \right) + \left(e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right) \cosh \left(\frac{x - x_{BE}}{L_{nB}} \right) \right]$$

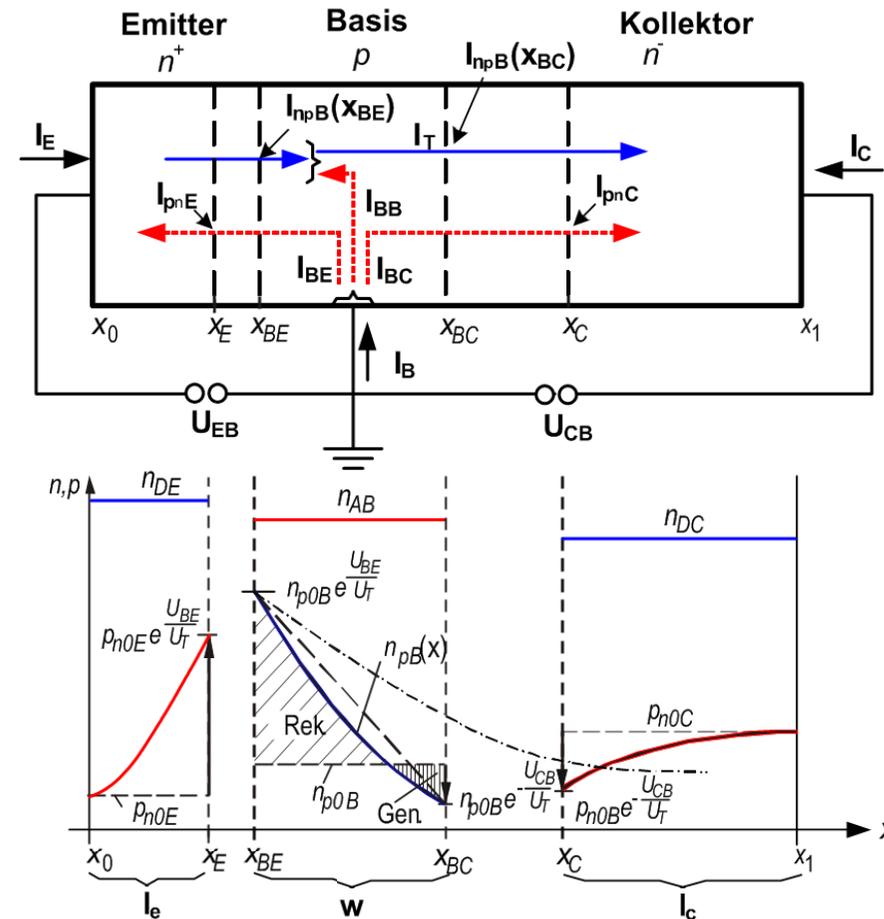
wobei $I_{TS} = \frac{AeD_{nB}n_{p0B}}{L_{nB} \sinh \left(\frac{w}{L_{nB}} \right)}$ **Transfer-sättigungsstrom**
 $\approx Ae \frac{D_{nB}n_{p0B}}{w}$

Transferstrom:

$$I_T = I_{n_{pB}}(x_{BC}) \approx I_{TS} \left[- \left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) + \left(e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right) \right]$$

Rekombinationsstrom in der Basis:

$$\begin{aligned} I_{BB} &= -I_{n_{pB}}(x_{BE}) + I_{n_{pB}}(x_{BC}) \\ &= I_{TS} \left[\left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) + \left(e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right) \right] \times \left[\cosh \left(\frac{w}{L_{nB}} \right) - 1 \right] \\ &\approx I_{TS} \frac{1}{2} \left(\frac{w}{L_{nB}} \right)^2 \left[\left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) + \left(e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right) \right] \approx -I_T \frac{1}{2} \left(\frac{w}{L_{nB}} \right)^2 \end{aligned}$$



Vorwärtsstromverstärkung, Emitterwirkungsgrad und Basistransportfaktor

Minoritätsträgerströme im Emitter und Kollektor

Minoritätsträger-Diffusionsstrom im kurzen Emitter ($I_E \ll L_{pE}$):

$$I_{BE} = -I_{p_{nE}}(x_E) = I_{BES} \left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right)$$

wobei
$$I_{BES} = \frac{AeD_p E p_{n0E}}{L_{pE} \tanh\left(\frac{l_E}{L_{pE}}\right)}$$

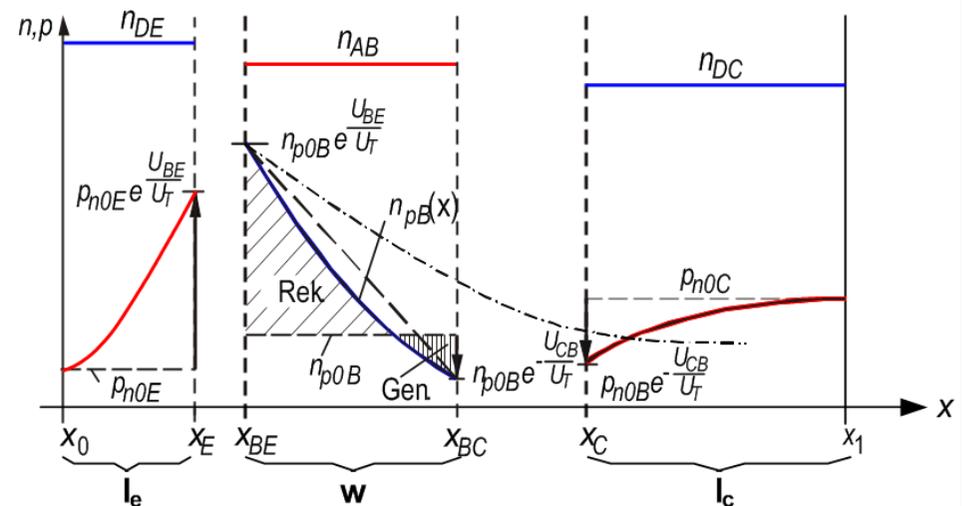
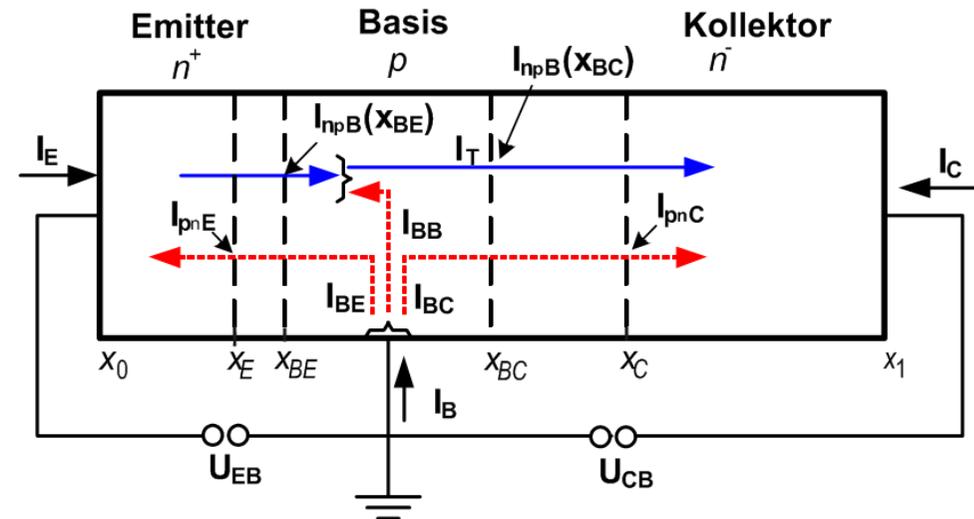
Basis-Emitter-Sättigungsstrom

Minoritätsträger-Diffusionsstrom im Kollektor:

$$I_{BC} = I_{p_{nC}}(x_C) = I_{BCS} \left(e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right)$$

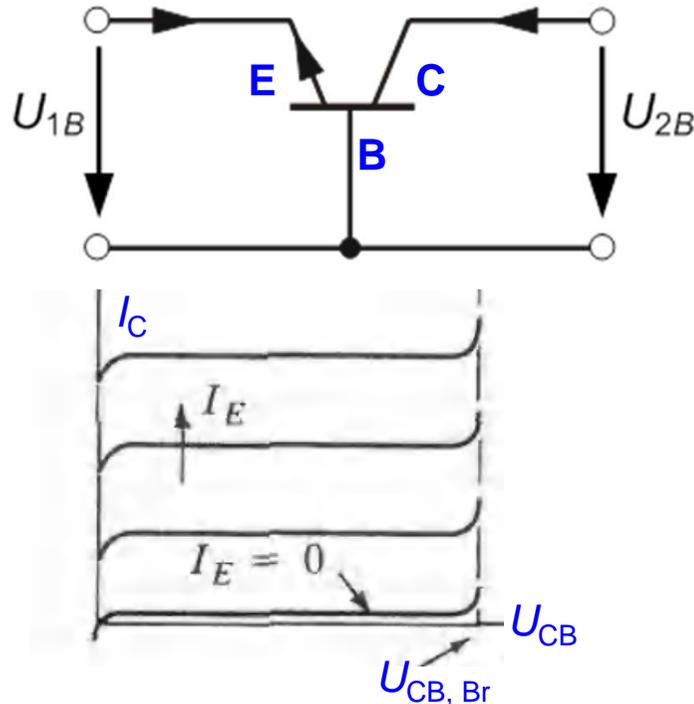
wobei
$$I_{BCS} = \frac{AeD_p C p_{n0C}}{L_{pC}}$$

Basis-Kollektor-Sättigungsstrom



Durchbruchverhalten

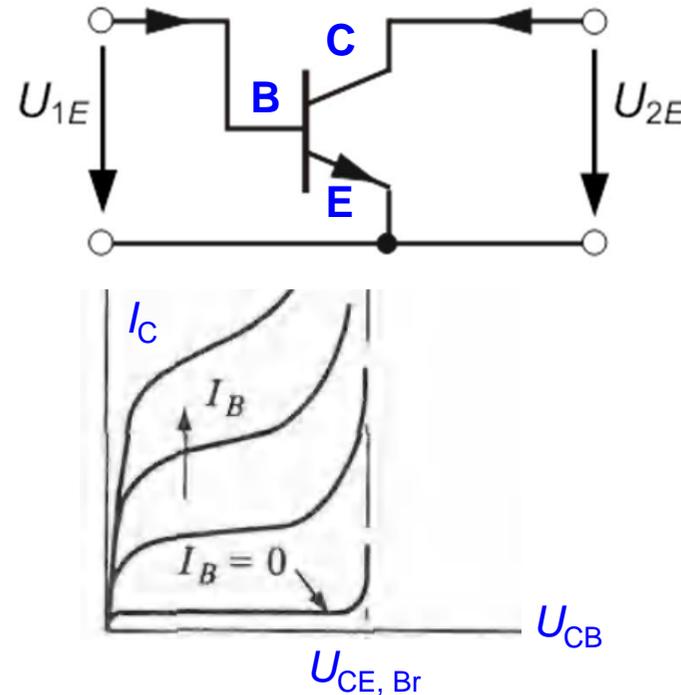
Basisschaltung (npn):



- Ausgangsspannung U_2 fällt vollständig über der Kollektor-Basis-Diode ab
- Durchbruch erfolgt, wenn Durchbruchspannung $U_{CB,Br}$ der Kollektor-Basis-Diode erreicht wird
- In der Regel: **Lawinendurchbruch**, lange RLZ im schwach dotierten Kollektor

Bilder: Streetman, Solid-State Electronic Devices

Emitterschaltung (npn):

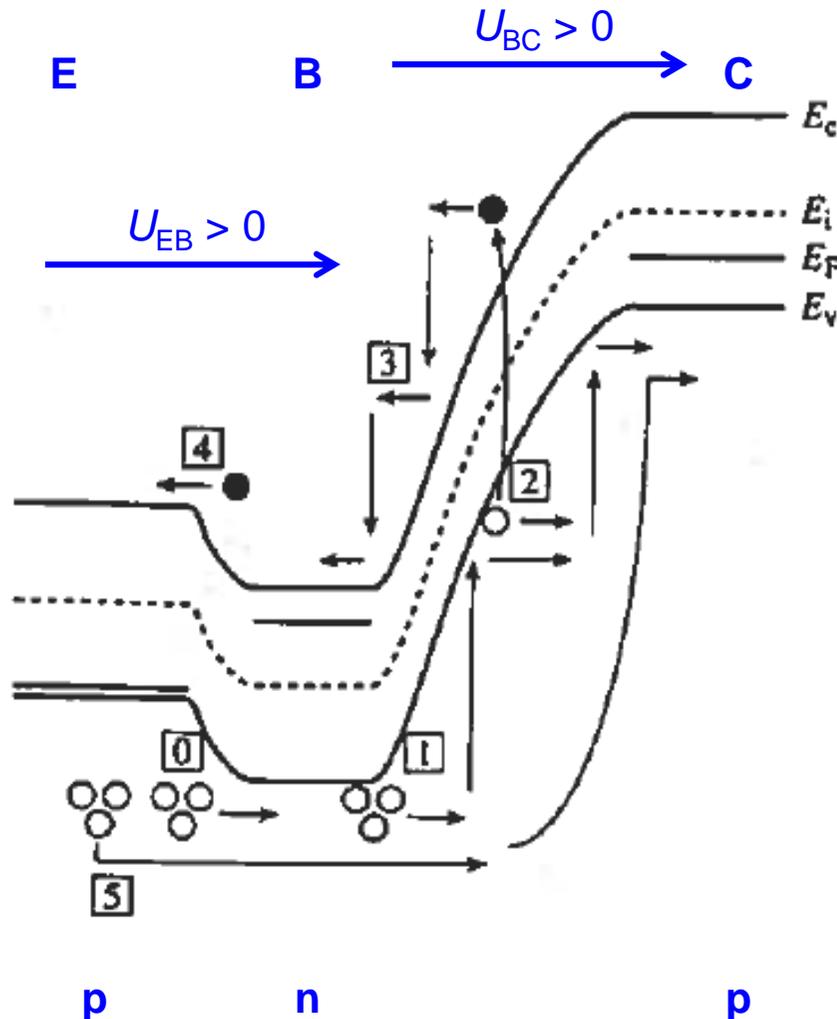


- Ausgangsspannung $U_2 = U_{CE} = U_{CB} + U_{BE} \gtrsim U_{CB}$, da $U_{BE} \approx 0.6 \text{ V} \ll U_{CE}$
- **Aber:** $U_{CE,Br} < U_{CB,Br}$, d.h. die Durchbruchspannung in Emitterschaltung ist wesentlich kleiner als in Basisschaltung
- Grund: **Positive Rückkopplung** bei einsetzender Lawinenmultiplikation durch Raumladungen in der Basis

Durchbruchverhalten in Emitterschaltung

Erklärung der positiven Rückkopplung beim Lawinendurchbruch:

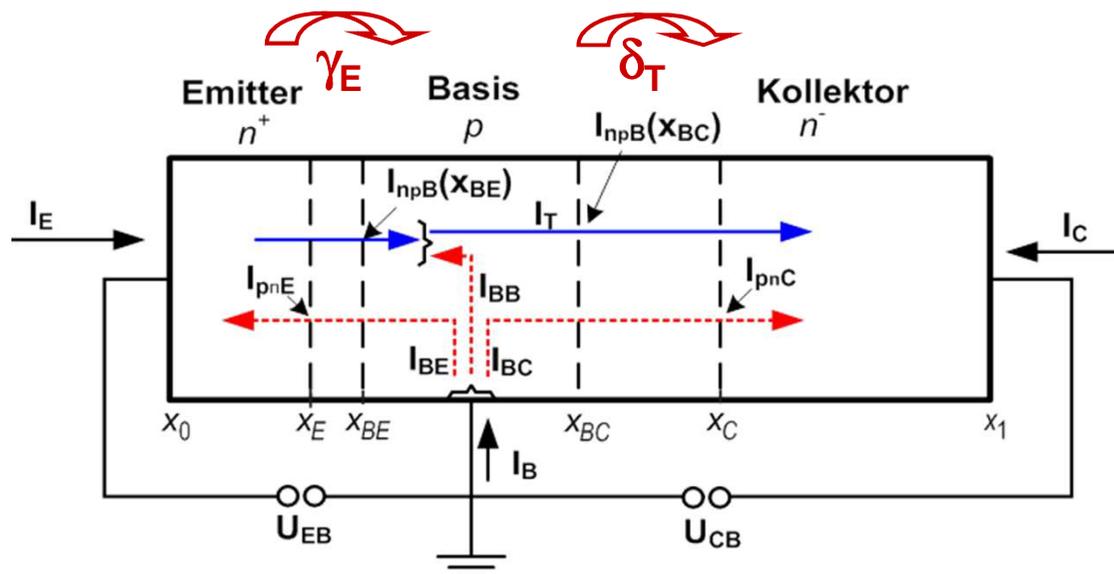
Hier: pnp-Transistor !



0. **Starke Löcherinjektion** (Vorwärtsstrom des E - B -Überganges!) aus dem Emitter in die Basis ...
1. ... und von dort weiter in den Kollektor.
2. **Lawinenmultiplikation durch einzelne Löcher**, lange bevor die Lawinen-Durchbruchspannung des B - C -Überganges erreicht wird.
3. Erzeugte Elektronen fließen zurück in die Basis und können dort nur eingeschränkt über den Basisanschluss abfließen, da der Basisstrom durch die äußere Schaltung eingepreßt wird (Arbeitspunkt des Transistors). Dies führt zu **einer Absenkung des Potentials** der Basis („negative Aufladung“).
4. Die Absenkung des Potentials an der Basis hat eine **Vergrößerung der Vorwärtsspannung U_{EB} und des Basisstromes I_B** zur Folge. Dadurch steigt sowohl der in den Emitter injizierte Elektronenstrom ...
5. ... als auch der in die Basis injizierte Löcherstrom, der den beschriebenen Effekt weiter verstärkt

Bild: Pierret, Semiconductor Device Fundamentals

Vorwärtsstromverstärkung, Emitterwirkungsgrad und Basistransportfaktor



Annahme: Kurze Diffusionszone im Emitter, d.h. Emitterlänge l_{nE} ist wesentlich kleiner als die Diffusionslänge der Löcher im Emitter, $l_{nE} \ll L_{pE}$

Designziel: Maximale Vorwärtsstromverstärkung in Normalbetrieb, $A_N \approx 1$

$$\begin{aligned}
 A_N &= -\frac{I_C}{I_E} \Big|_{\text{Normalbetrieb}} \\
 &= \frac{-I_T}{-I_T + I_{BE} + I_{BB}} \\
 &= \gamma_E \times \delta_T
 \end{aligned}$$

wobei
$$\gamma_E = \frac{-I_T + I_{BB}}{-I_T + I_{BE} + I_{BB}} = \frac{1}{1 + \frac{I_{BE}}{-I_T + I_{BB}}} \approx \frac{1}{1 + \frac{\mu_{pE} n_{AB} L_{nB}}{\mu_{nB} n_{DE} l_E} \tanh\left(\frac{w}{L_{nB}}\right)}$$

Anteil des Emitterstroms, der als Minoritätsträgerstrom in die Basis injiziert wird

Gesamter Emitterstrom

Emitterwirkungsgrad:

$$\delta_T \approx \frac{-I_T}{-I_T + I_{BB}} = \frac{1}{1 + \frac{I_{BB}}{-I_T}} \approx \frac{1}{\cosh\left(\frac{w}{L_{nB}}\right)}$$

Strominjektion von der Basis in den Kollektor

Basistransportfaktor:

Gesamter Minoritätsträgerstrom, der in die Basis injiziert wird

Minoritätsträgerströme in der Basis

Rückwärtsstromverstärkung und Dotierungsprofil

Analoge Herleitung: Rückwärtsstromverstärkung:

$$A_I = -\frac{I_C}{I_E} \Big|_{\text{inv. Betrieb}} = \frac{-I_T}{-I_T + I_{BC} + I_{BB}} = \gamma_C \times \delta_T$$

wobei
$$\gamma_C \approx \frac{1}{1 + \frac{\mu_{pC} n_{AB} L_{nB}}{\mu_{nB} n_{DC} L_{pC}} \tanh\left(\frac{w}{L_{nB}}\right)}$$

Kollektorwirkungsgrad

Design von Basisweite und Dotierungsprofil:

Ziele:
$$\gamma_E = \frac{1}{1 + \frac{\mu_{pE} n_{AB} L_{nB}}{\mu_{nB} n_{DE} l_E} \tanh\left(\frac{w}{L_{nB}}\right)} \rightarrow 1$$

$$\delta_T = \frac{1}{\cosh\left(\frac{w}{L_{nB}}\right)} \rightarrow 1$$

- $w/L_{nB} \ll 1$: Typische Diffusionslängen in dotierten Materialien sind von der Größenordnung von 1 μm ; Basisweite $w < 100\text{nm}$ sind technisch möglich
- $n_{AB} \ll n_{DE}$: Emitter muss wesentlich stärker dotiert werden als die Basis; heute üblich: $n_{DE} > 10^{20} \text{cm}^{-3}$; $n_{AB} \approx 10^{17} \text{cm}^{-3}$

$$\gamma_C = \frac{1}{1 + \frac{\mu_{pC} n_{AB} L_{nB}}{\mu_{nB} n_{DC} L_{pC}} \tanh\left(\frac{w}{L_{nB}}\right)} \quad \text{so klein wie möglich!}$$

- $n_{AB} \gg n_{DC}$: Kollektor muss möglichst schwach dotiert werden; üblich: $n_{DC} \approx 10^{16} \text{cm}^{-3}$

$\frac{w}{L_{nB}}$	0,05	0,1
$\cosh\left(\frac{w}{L_{nB}}\right)$	1,001	1,005
$\tanh\left(\frac{w}{L_{nB}}\right)$	0,0499	0,0996
δ_T	0,998	0,995
γ_E	0,9999	0,9999
A_N	0,9987	0,9949
B_N	768	196
γ_C	0,666	0,500
A_I	0,666	0,498

Für viele Anwendungen von Transistoren interessiert nur das Verhalten bei kleinen Strom- und Spannungsänderungen ΔI bzw. ΔU

Quasistationäre Näherung im Niederfrequenz-Fall:

- Die Änderung der Ströme und Spannungen sind langsam im Vergleich zu den Trägerlebensdauern im Transistor, so dass Ladungsspeichereffekte vernachlässigt werden können.

⇒ Linearisierung der stationären Kennlinien um den Arbeitspunkt

$$\alpha = -\frac{\Delta I_C}{\Delta I_E} \quad \text{Stromverstärkung in Basisschaltung}$$

$$\beta = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} \quad \text{Stromverstärkung in Emitterschaltung}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \gg 1$$

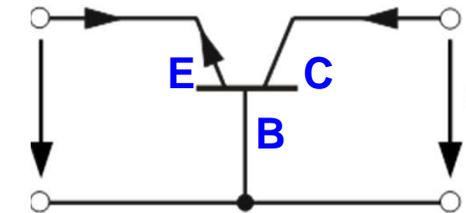
Weitere Analyse:

- Einfluss der Ausgangsspannung U_{CB} auf den Kollektorstrom I_C wird vernachlässigt

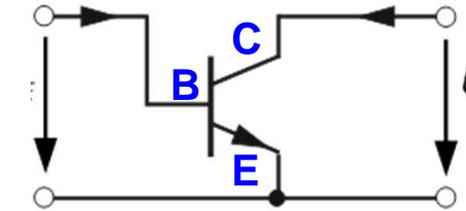
⇒ Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Basis-Emitter-Spannung und Kollektor-Strom durch die Steilheit g_m (engl. Transconductance):

$$\Delta I_C = g_m \Delta U_{BE} \quad \text{wobei} \quad g_m = \frac{\Delta I_C}{\Delta U_{BE}} \approx -\frac{\Delta I_T}{\Delta U_{BE}} = \frac{I_T}{U_T} \approx \frac{|I_C|}{U_T} \approx \left| \frac{I_C}{\text{mA}} \right| \cdot 0,04 \text{ S}$$

Basisschaltung (npn):



Emitterschaltung (npn):



Emitter-, Basis- und Kollektorströme

Berechnung der Stromverstärkung:

$$\beta_0 = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B}$$

Annahmen:

- $U_{CB} \ll -U_T$
- Kurze Diffusionszone im Emitter und in der Basis,

$$w \ll L_{npb}, \quad l_E \ll L_{pnE}$$

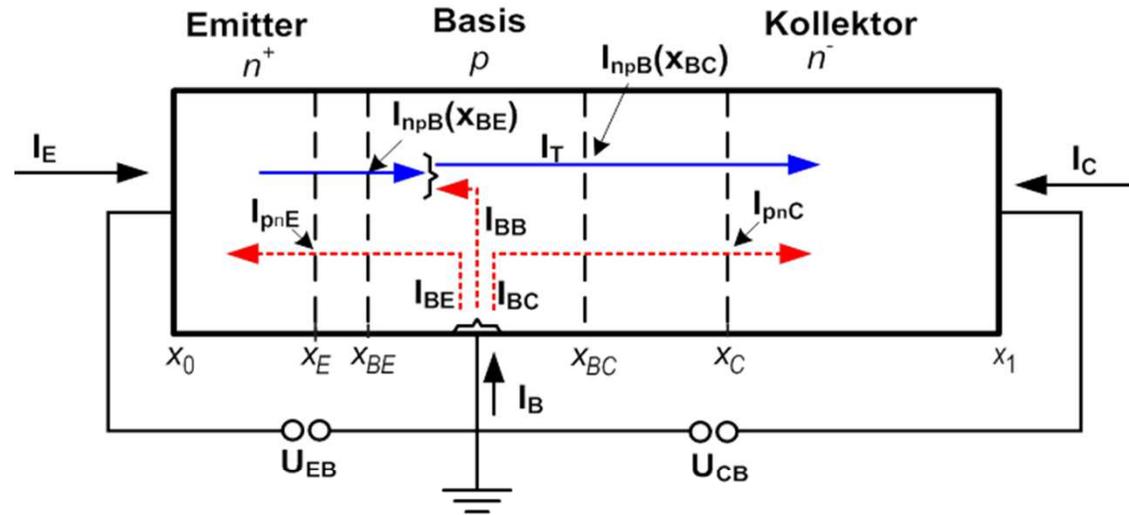
$$I_T \approx -I_{TS} e^{\frac{U_{BE}}{U_T}}$$

$$I_{TS} \approx A e^{-\frac{D_{nB} n_{p0B}}{l_E}}$$

$$I_{BE} \approx I_{BES} e^{\frac{U_{BE}}{U_T}}$$

$$I_{BES} = \frac{A e D_{pE} p_{n0E}}{l_E}$$

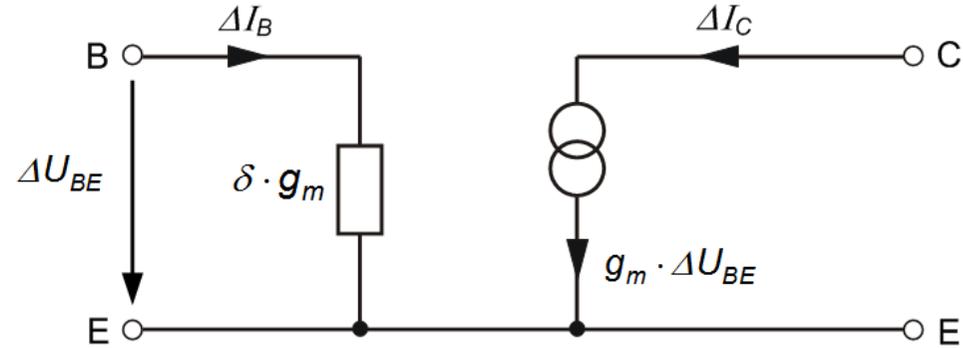
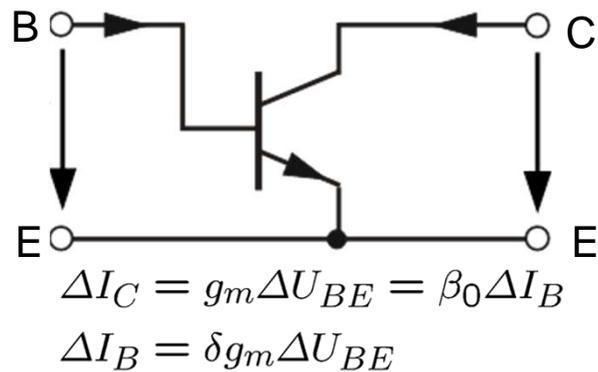
$$I_{BB} \approx I_{TS} \frac{1}{2} \left(\frac{w}{L_{nB}} \right)^2 e^{\frac{U_{BE}}{U_T}}$$



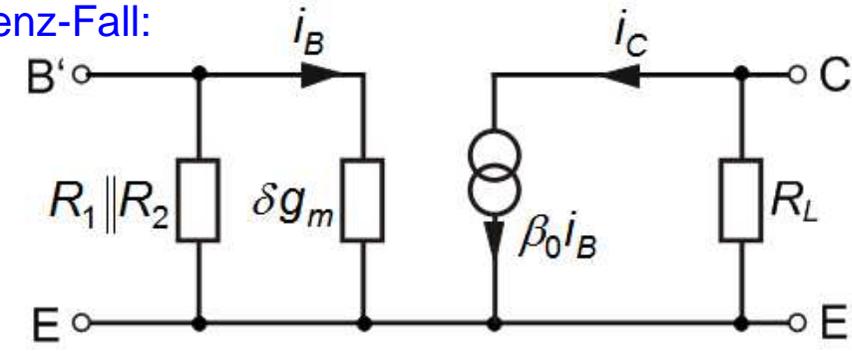
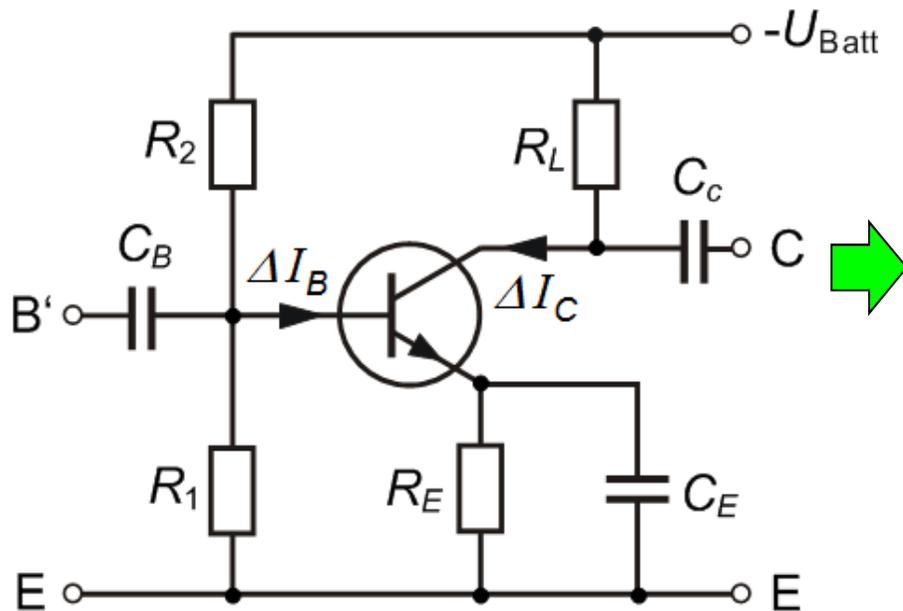
$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\Delta I_B}{\Delta I_C} &= \frac{\Delta I_B / \Delta U_{BE}}{\Delta I_C / \Delta U_{BE}} \\ &= \frac{D_{pE} w n_{AB}}{D_{nB} l_E n_{DE}} + \frac{1}{2} \left(\frac{w}{L_{nB}} \right)^2 \\ &= \delta = \frac{1}{\beta_0} \end{aligned}$$

β_0 = Kleinsignal-Niederfrequenz-Stromverstärkung in Emitterschaltung

Niederfrequenz-Ersatzschaltbild in Emitterschaltung



Kleinsignal-Schaltungsanalyse im Niederfrequenz-Fall:



Beispiel: $\delta = 0.004$, $I_C = 10 \text{ mA}$, $R_L = 1 \text{ k}\Omega$

$$G_U = \frac{u_{CE}}{u_{BE}} = -R_L g_m = -400$$

Spannungsverstärkung (im Leerlauf)

$$G_I = \frac{i_C}{i_B} = \beta_0 = \frac{1}{\delta} = 250$$

Stromverstärkung (bei Kurzschluss)

Vgl. dynamisches Verhalten der Diode: Modellierung von Ladungsspeicher-Effekten durch Sperrschichtkapazitäten und Diffusionskapazitäten

Hier: npn-Transistor im Normalbetrieb

Basis-Emitter-Übergang:

Vorspannung in Sperrrichtung

⇒ C_{BE} = Sperrschichtkapazität + emitterseitige Diffusionskapazität

Basis-Kollektor-Übergang:

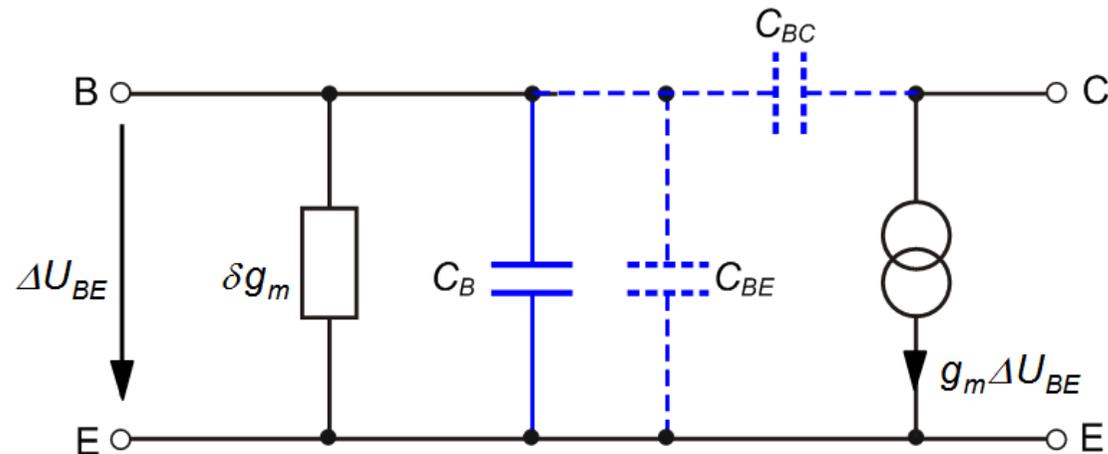
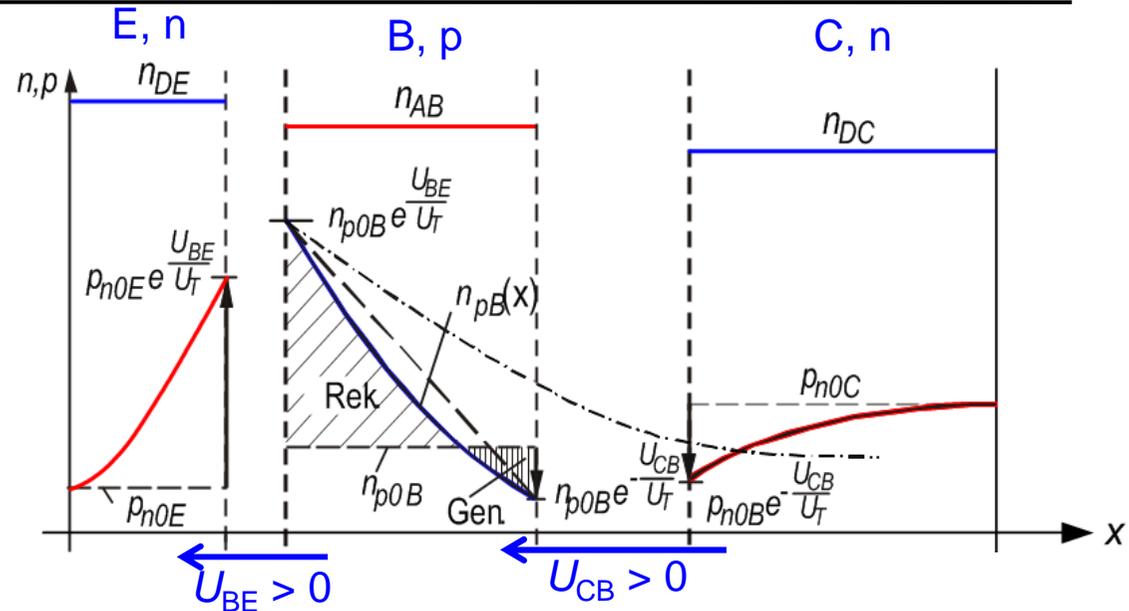
Vorspannung in Durchlassrichtung

⇒ C_{BC} = Sperrschichtkapazität

Basis:

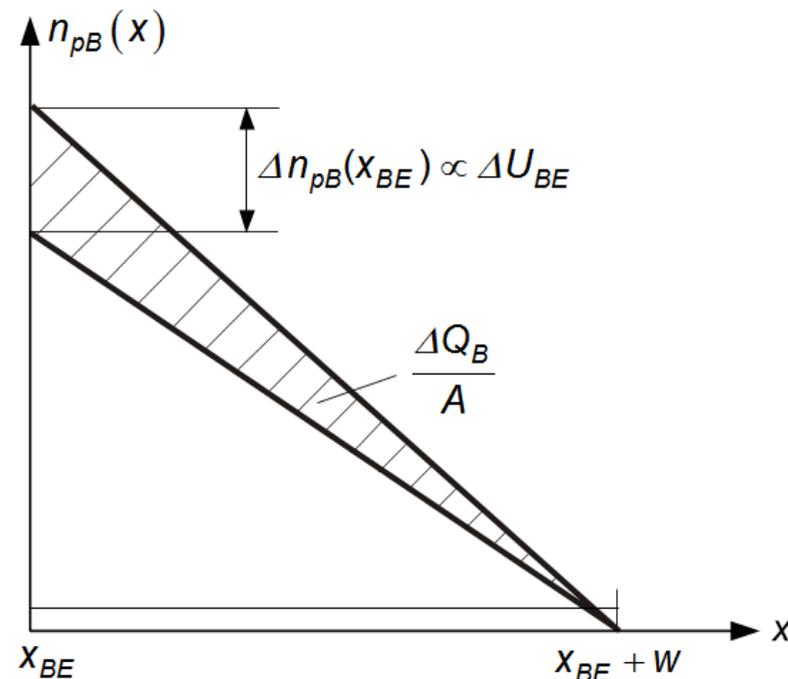
Gemeinsame Diffusionszone der beiden pn-Übergänge

⇒ Basis-Kapazität C_B (dominiert üblicherweise!)



- Eine Änderung U_{BE} bewirkt eine Änderung der in der Ladungsträgerdichte $n_{pB}(x_{BE})$ am linken Rand der Basis-Diffusionszone und damit eine Änderung der gespeicherten Ladungen
- Die Ladungsträgerdichte $n_{pB}(x_{BE}+w)$ am rechten Rand ist nahezu Null und spielt daher keine Rolle

Anmerkung: Modulation ist sehr schnell im Vergleich zu Minoritätsträgerlebensdauer in der Basis. In diesem Fall kann die Rekombination vernachlässigt werden und der Ladungstransfer durch externe Anschlüsse lässt sich direkt aus der Änderung der internen Ladungen berechnen.



⇒ Änderung der positiven Majoritätsträgerladung, die zur Kompensation der Elektronendichte in der DZ benötigte wird:

$$\Delta Q_B = \frac{1}{2} e A w \Delta n_{pB}(x_{BE}) = C_B \Delta U_{BE}$$

wobei $C_B = \frac{1}{2} e A \frac{n_{p0B}}{U_T} w e \frac{U_{BE}}{U_T} = \frac{1}{2} \frac{w^2}{D_{npB}} g_m$ **Basiskapazität**

Basisweitenmodulation (Early-Effekt)

Early-Effekt: Eine Änderung der Kollektor-Basis-Spannung führt zu einer Änderung Δw der Basisweite w .

⇒ Lineare Näherung mit Hilfe der **Early-Spannung U_A** :
$$\frac{\Delta w}{w} = - \frac{\Delta U_{CB}}{U_A}$$

Konsequenzen:

1. **Anwachsen des Kollektorstromes I_C mit U_{CE}** durch Erhöhung der Steigung des Ladungsträgerprofils in der Basis

$$I_C \approx eAD_nB \frac{n_{pnB}(x_{BE}) - n_{pnB}(x_{BC})}{w}$$

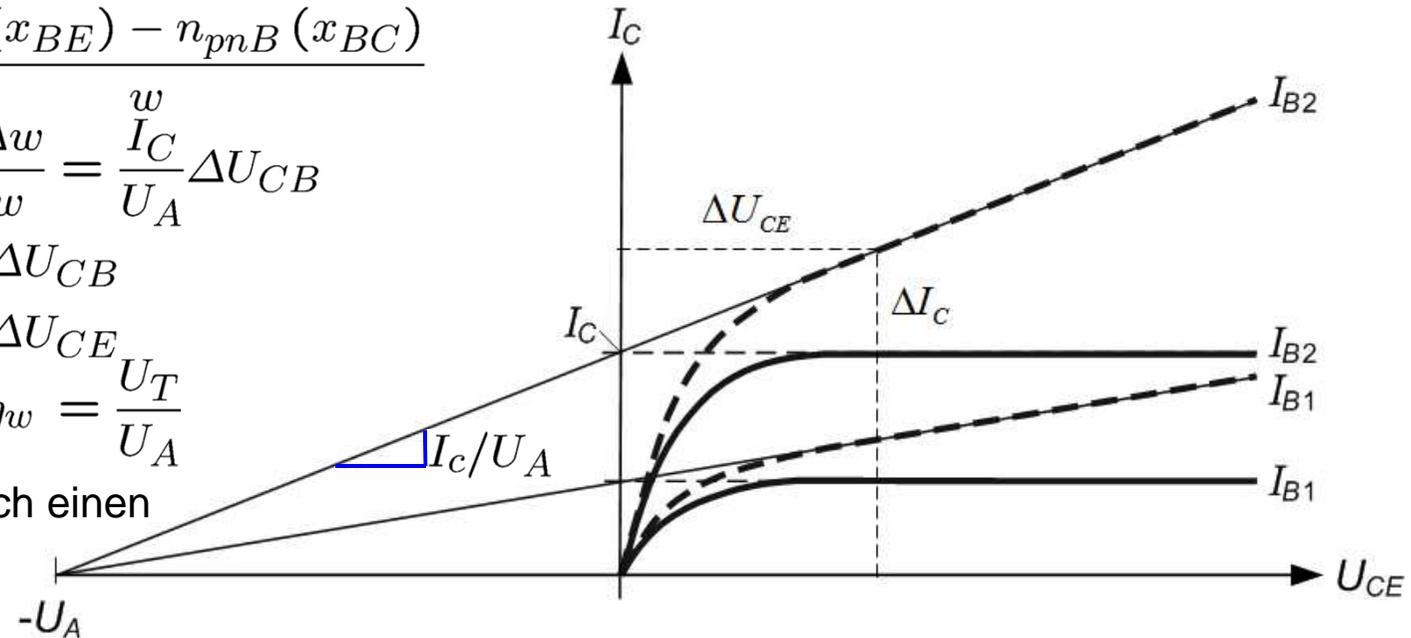
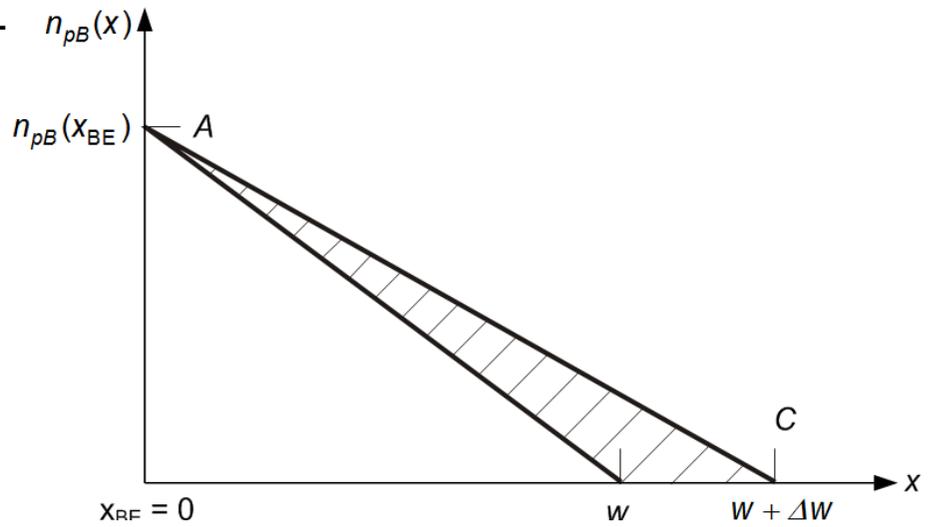
$$\Rightarrow \Delta I_C = -I_C \frac{\Delta w}{w} = \frac{I_C}{U_A} \Delta U_{CB}$$

$$\approx g_m \eta_w \Delta U_{CB}$$

$$\approx g_m \eta_w \Delta U_{CE}$$

wobei $g_m = \frac{I_c}{U_T}$; $\eta_w = \frac{U_T}{U_A}$

⇒ Modellierung durch einen **Leitwert $g_m \eta_w$** im Kleinsignal-ESB



2. Änderung des Basis-Rekombinationsstromes I_{BB} mit U_{CB} durch Erhöhung der Steigung des Ladungsträgerprofils in der Basis:

$$I_{BB} = I_{TS} \frac{1}{2} \left(\frac{w}{L_{nB}} \right)^2 \left[\left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) + \left(e^{-\frac{U_{CB}}{U_T}} - 1 \right) \right]$$

wobei
$$I_{TS} = \frac{AeD_{nB}n_{p0B}}{L_{nB} \sinh\left(\frac{w}{L_{nB}}\right)} \approx Ae \frac{D_{nB}n_{p0B}}{w}$$

$\Rightarrow \Delta I_B \approx \Delta I_{BB} = -g_m \delta_{rek} \eta_w \Delta U_{CB}$ Modellierung durch einen **Leitwert** $g_m \eta_w \delta_{rek}$ zwischen Kollektor und Basis im Kleinsignal-ESB

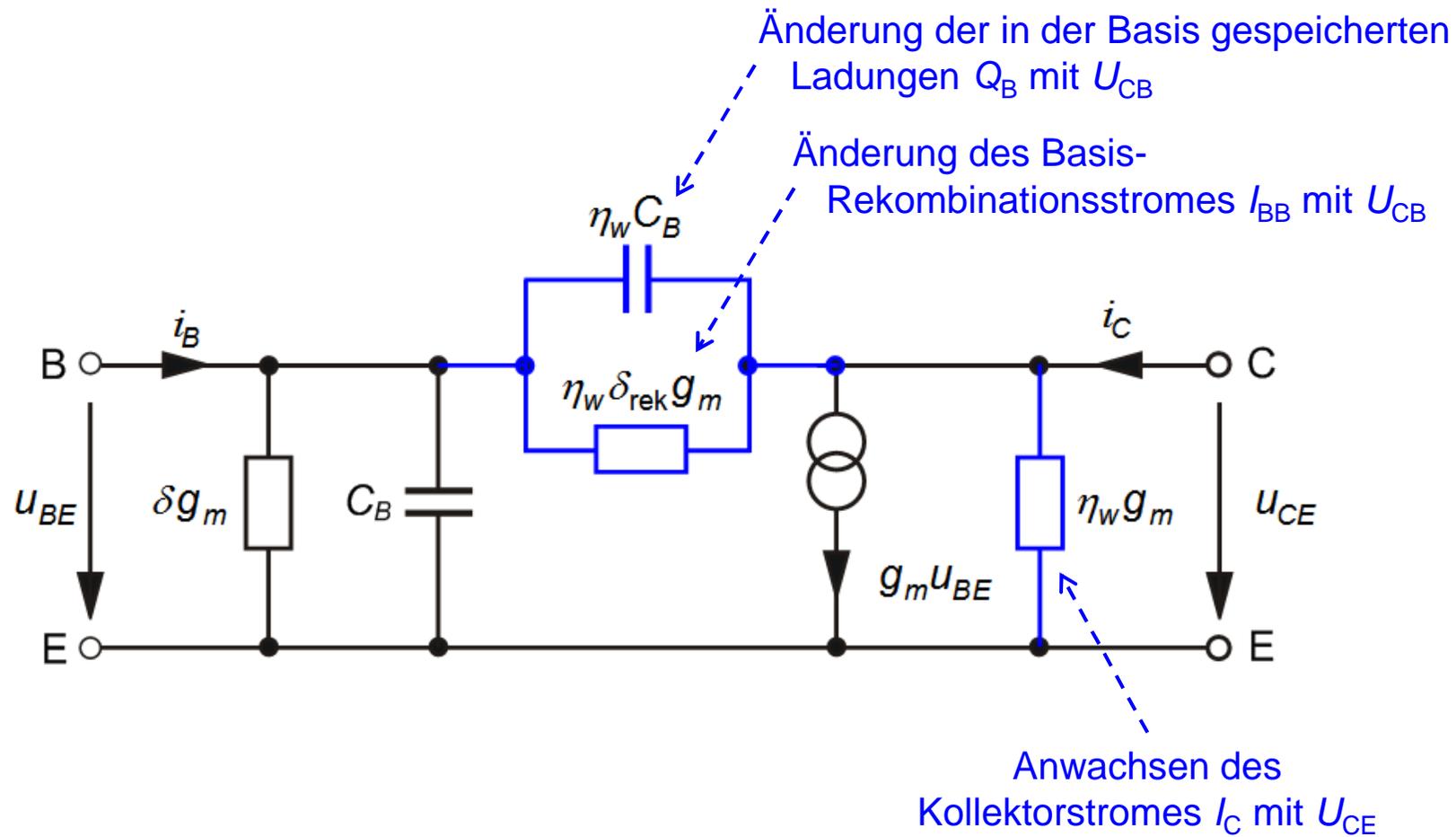
$$g_m = \frac{I_c}{U_T}; \quad \eta_w = \frac{U_T}{U_A}; \quad \delta_{rek} = \frac{1}{2} \left(\frac{w}{L_{nB}} \right)^2$$

Anteil des in die Basis injizierten Minoritätsträgerstromes, der in der Basis rekombiniert.

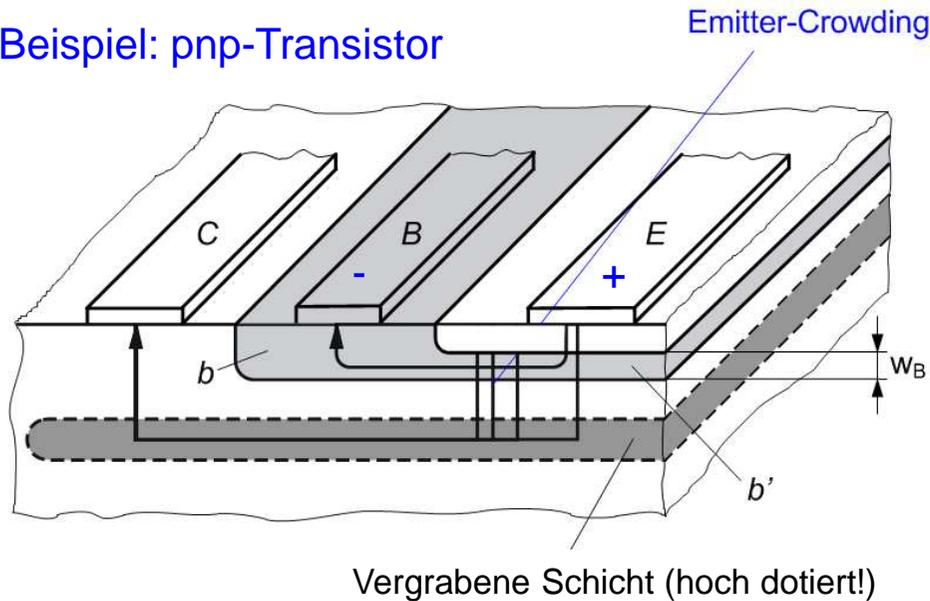
3. Änderung der in der Basis gespeicherten Ladungen: Betrachte Majoritätsträgerladung, die zur Kompensation der geänderte Elektronendichte in der DZ benötigt wird

$$\Delta Q_B = \frac{1}{2} e A n_{pB} (x_{BE}) \Delta w = -C_B \eta_w \Delta U_{CB}$$

Modellierung durch eine zusätzliche **Kapazität** $C_B \eta_w$ zwischen Basis und Kollektor



Beispiel: pnp-Transistor



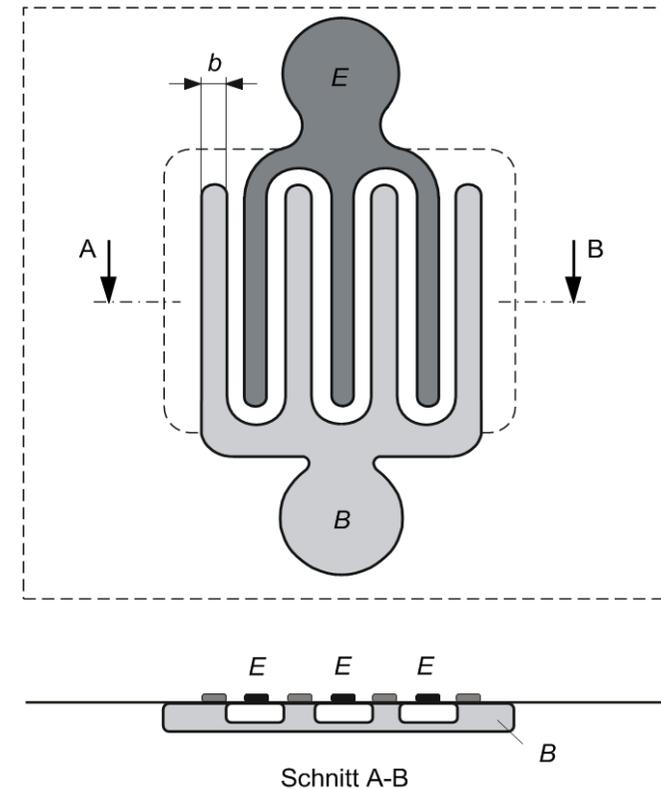
Kollektor und Emitter: Bahnwiderstände können durch große Querschnittsfläche klein gehalten werden

Basis: Basisweite w / Querschnittsfläche muss klein bleiben (hoher Emitterwirkungsgrad)

⇒ Hoher Bahnwiderstand

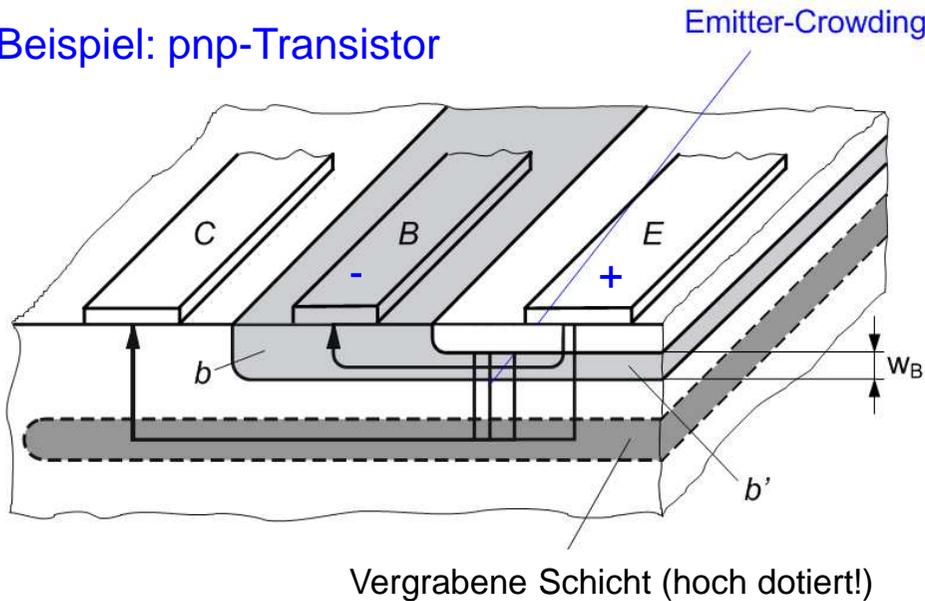
⇒ Der näher am Basisanschluss liegende Teil des Basis-Emitter-Überganges erfährt eine höhere Vorwärtsspannung und führt daher eine höhere Stromdichte (**Emitter Crowding**):

- Gegenmaßnahme: Interdigitalstruktur bei Hochfrequenz- und Leistungstransistoren
- Modellierung: Berücksichtigung des Effektes im ESB durch Unterscheidung eines **inneren und äußeren Basisanschlusses**



Interdigitaltransistor

Beispiel: pnp-Transistor



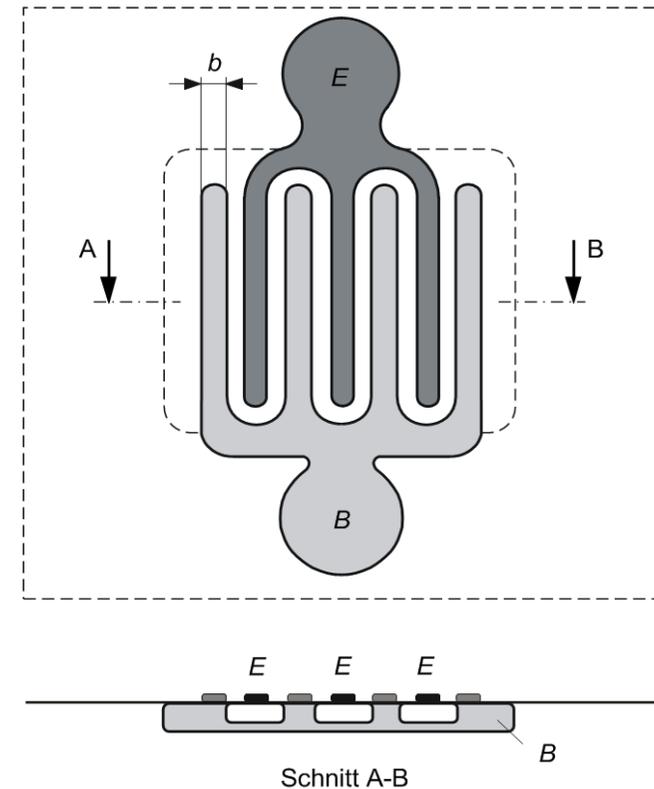
Kollektor und Emitter: Bahnwiderstände können durch große Querschnittsfläche klein gehalten werden

Basis: Basisweite w / Querschnittsfläche muss klein bleiben (hoher Emitterwirkungsgrad)

⇒ Hoher Bahnwiderstand

⇒ Der näher am Basisanschluss liegende Teil des Basis-Emitter-Überganges erfährt eine höhere Vorwärtsspannung und führt daher eine höhere Stromdichte (**Emitter Crowding**):

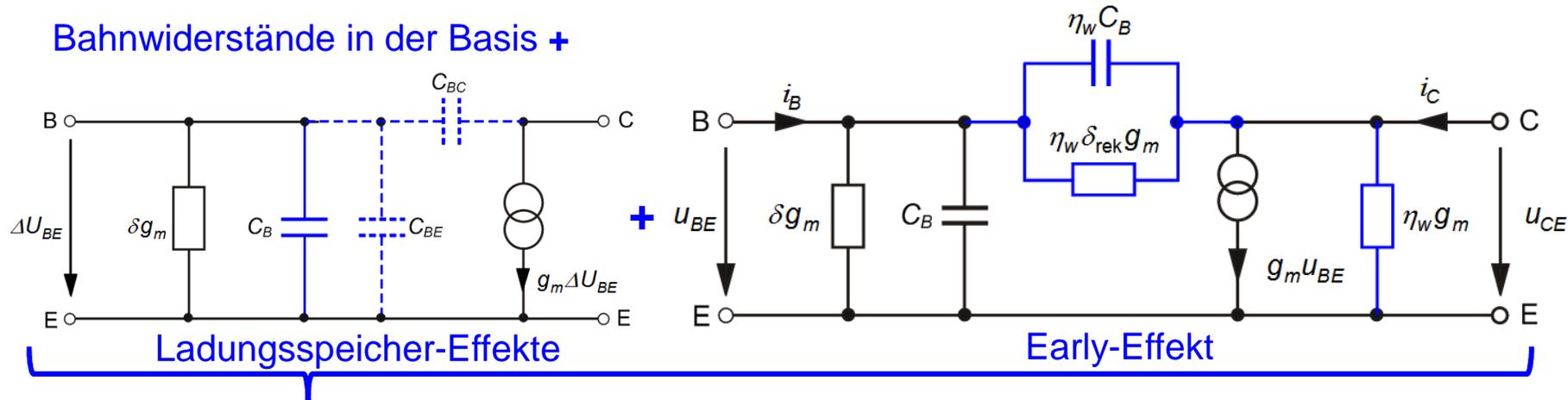
- Gegenmaßnahme: Interdigitalstruktur bei Hochfrequenz- und Leistungstransistoren
- Modellierung: Berücksichtigung des Effektes im ESB durch Unterscheidung eines **inneren und äußeren Basisanschlusses**



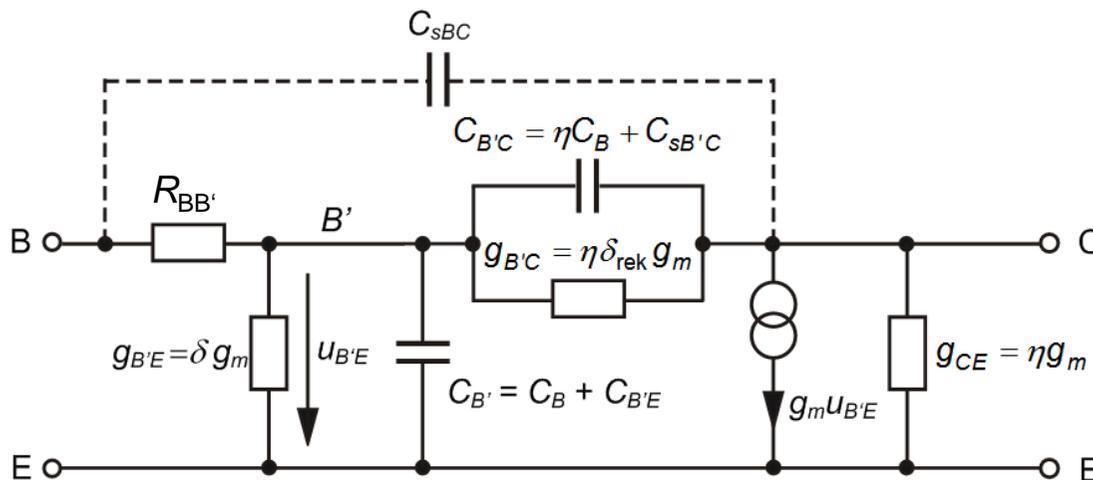
Interdigitaltransistor

Ersatzschaltbild nach Giacoletto

Bahnwiderstände in der Basis +



⇒ Ersatzschaltbild nach Giacoletto:

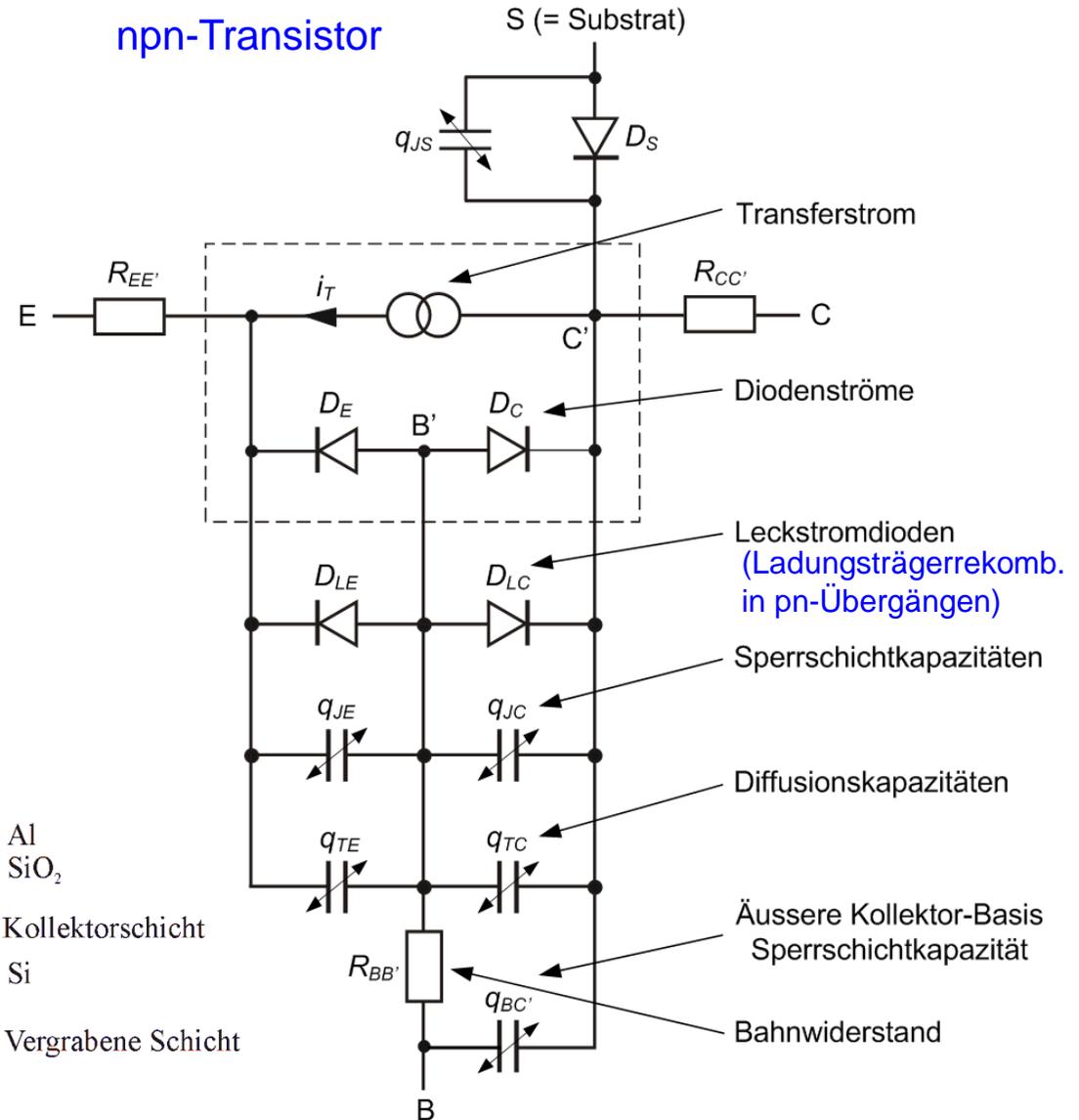
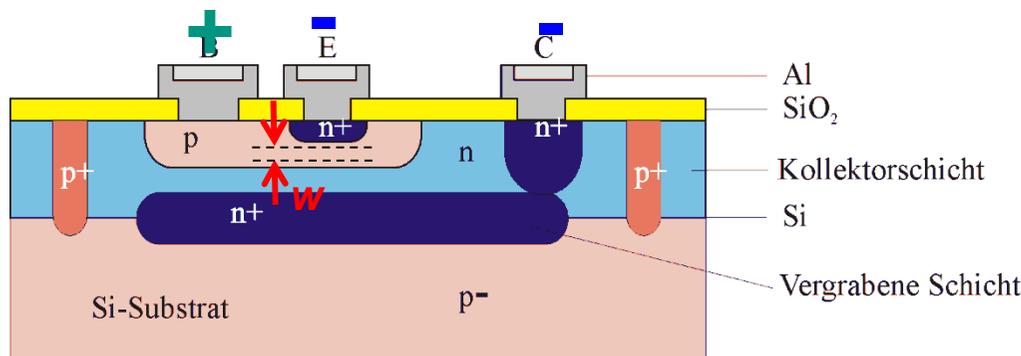


Physikalische Effekte und ESB-Größen:

$R_{BB'}$	Bahnwiderstand des Basis-Anschlusses
C_B	Ladungsspeicherung in der Basis
ηC_B	Einfluss der Basisweitenmodulation
$C_{sB'C}$	Kollektor-Basis-Sperrschichtkapazität des inneren Basisanschlusses
$C_{sB'E}$	Kollektor-Basis-Sperrschichtkapazität des äußeren Basisanschlusses
$C_{B'E}$	Sperrschichtkapazität und emitterseitige Diffusionskapazität des Basis-Emitter-Überganges

Gummel-Poon-Modell

- Komplexes Modell, das **alle Betriebszustände** des Transistors richtig beschreibt
- Verwendung in Simulationsprogrammen wie z.B. SPICE („Simulation Programm with Integrated Circuit Emphasis“)
- Parameter können aus Datenblättern der jeweiligen Transistoren entnommen werden



Grenzfrequenzen

Frequenzgang der Kleinsignal-Stromverstärkung in Emitter-Schaltung:

$$\beta = \frac{I_C}{I_B} = \frac{g_m U_{BE}}{(\delta g_m + j\omega C_B) U_{BE}} = \frac{\beta_0}{1 + j\frac{f}{f_\beta}}$$

wobei $f_\beta = \frac{\delta g_m}{2\pi C_B}$ **Grenzfrequenz der Stromverstärkung in Emitter-Schaltung**

Transitfrequenz: $f_T \approx \beta_0 f_\beta$

Frequenz, bei der die Kleinsignal-Stromverstärkung in Emitterschaltung auf 1 abgesunken ist

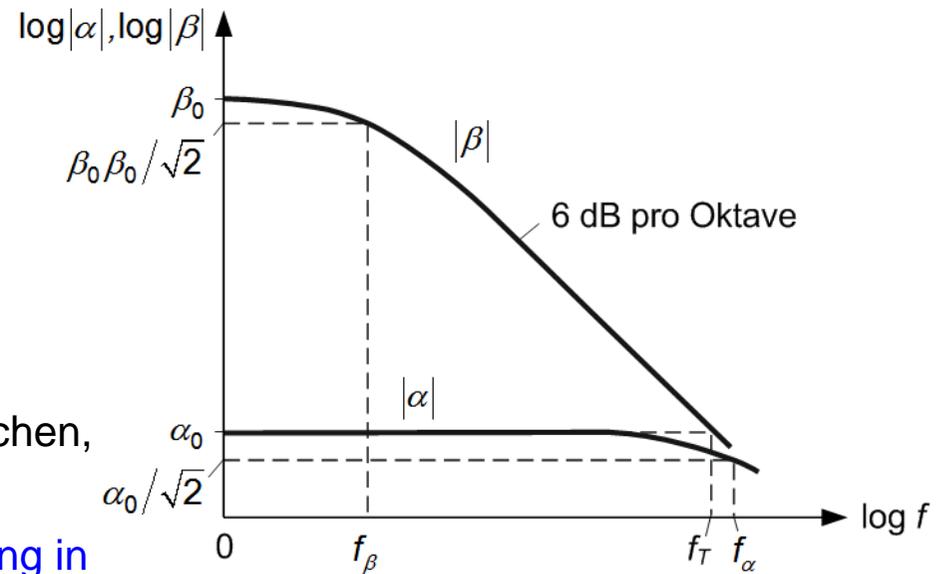
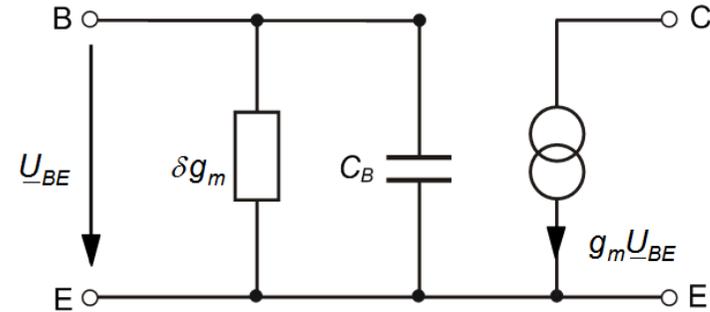
Transitzeit: $\tau_T = \frac{1}{2\pi f_T} = \frac{1}{2} \frac{w^2}{D_{npB}}$

Zeit, die die Minoritätsträger im Mittel brauchen, um aus der Basis „herauszudiffundieren“

Frequenzgang der Kleinsignal-Stromverstärkung in Basis-Schaltung:

$$\alpha = -\frac{I_C}{I_E} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta}} = \frac{\alpha_0}{1 + j\frac{f}{f_\alpha}}$$

wobei $f_\alpha = (1 + \beta_0) f_\beta \approx f_T$ **Grenzfrequenz der Stromverstärkung in Basis-Schaltung**



Erhöhung der Bandbreite

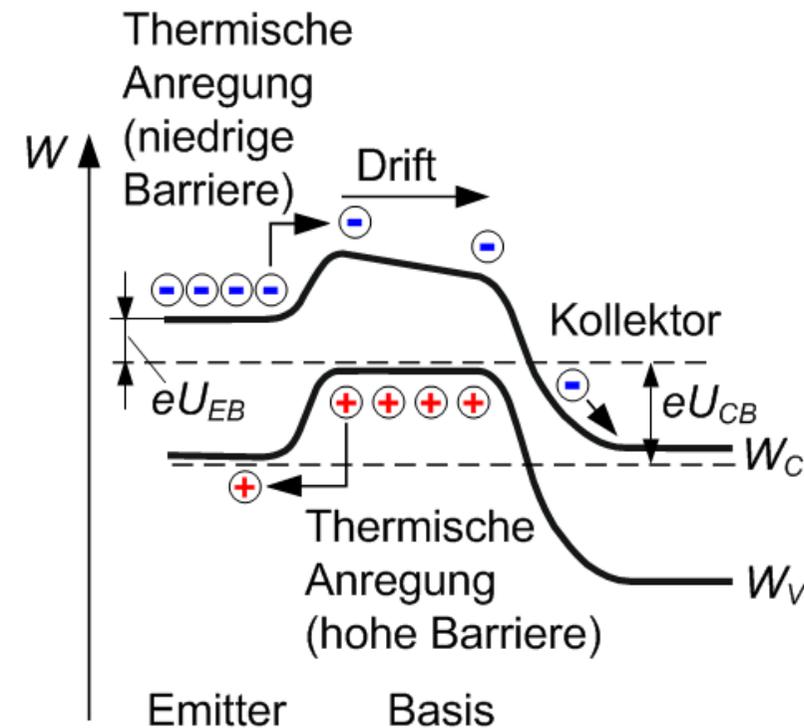
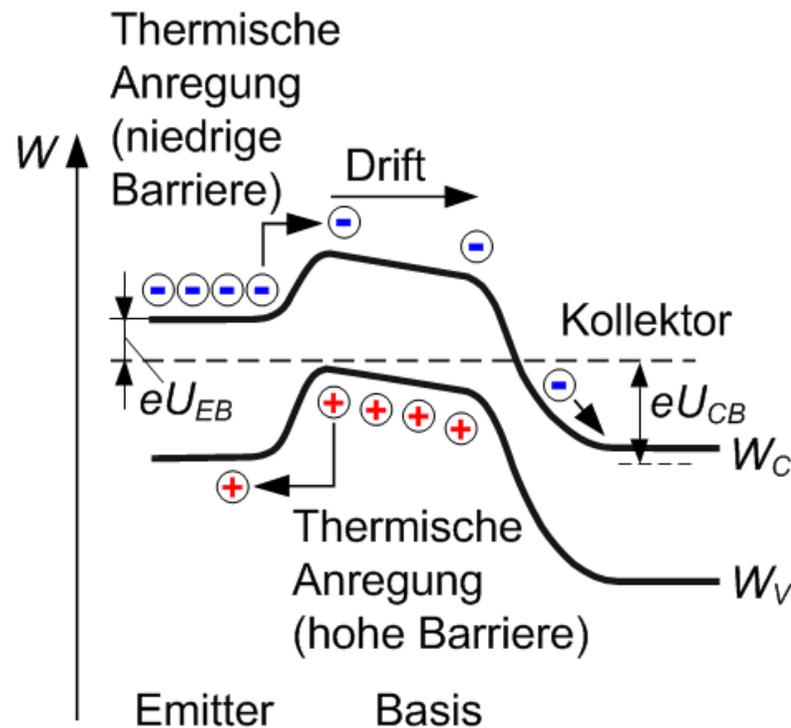
Ziel: Beschleunigtes Ausräumen von Minoritätsträger aus der Basis

Inhomogene Dotierung der Basis

- ⇒ Gradient des Leitungsbandes
- ⇒ Driftstrom

Räumlich variabler Bandabstand in der Basis

- ⇒ Gradient des Leitungsbandes
- ⇒ Driftstrom



Hetero-Bipolartransistor (HBT)

Problem beim Design von schnellen Transistoren:

- Forderung nach hohem Emitterwirkungsgrad limitiert die Dotierungsdichte der Basis ($n_{p0B} \gg p_{n0E}$)

$$\gamma_E = \frac{1}{1 + \frac{\mu_{pE} p_{n0E} L_{nB}}{\mu_{nB} n_{p0B} L_{nE}} \tanh\left(\frac{w}{L_n}\right)}$$

- Geringe Dotierung in der Basis führt zu starker Basisweitenmodulation und hohem Bahnwiderstand, und damit zu „Current Crowding“ und Bandbreitebegrenzungen durch RC-Effekte

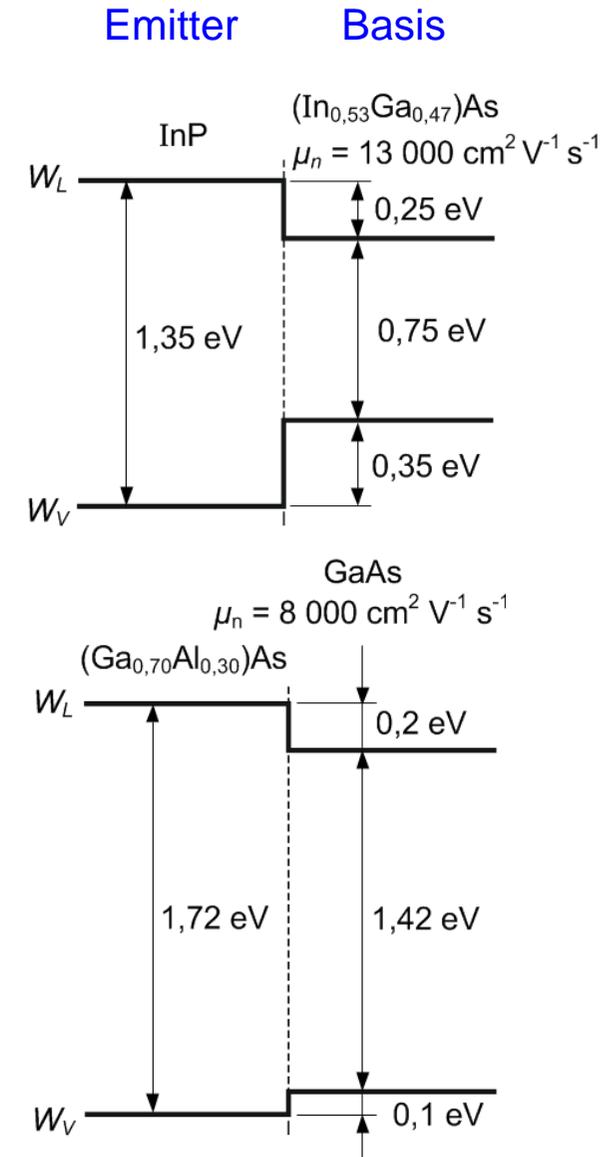
Lösung des Zielkonfliktes durch Verwendung Heteroübergängen mit einem kleineren Bandabstand in der Basis („Hetero-Bipolartransistor“):

$$n_{p0B} = \frac{n_{iB}^2}{n_{AB}} \quad \text{kann für kleine Bandabstände in der Basis auch bei hohen Dotierungen große Werte annehmen}$$

Besonders vorteilhaft: InP:InGaAs

- Große Differenz der Bandlückenenergien
- Hohe Beweglichkeit der Elektronen in der Basis

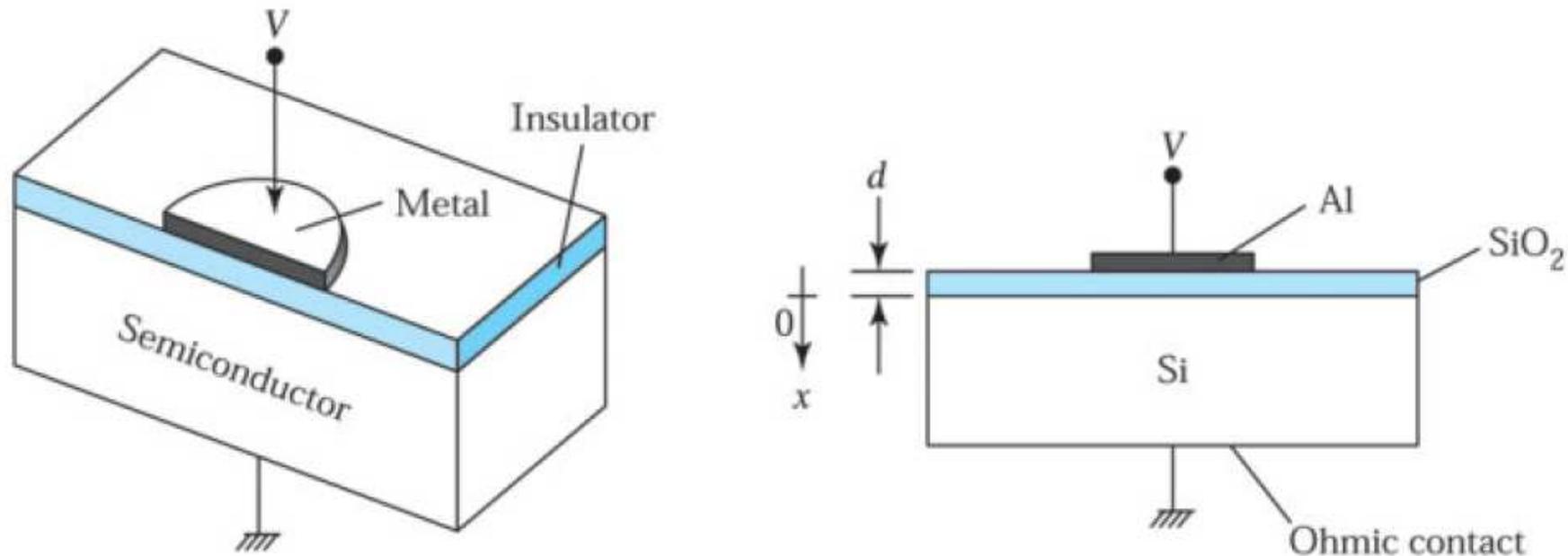
Weitere Materialsysteme: GaAlAs:GaAs; SiGe:Si



Kapitel 9: Halbleiter-Grenzschichten

Metal-Isolator-Halbleiter-Struktur

engl. „**Metal-Oxide-Semiconductor-(MOS-)Struktur**“
bzw. „**Metal-Insulator-Semiconductor-(MIS-)Struktur**“ (wenn ein anderes Oxidmaterial als SiO_2 verwendet wird):

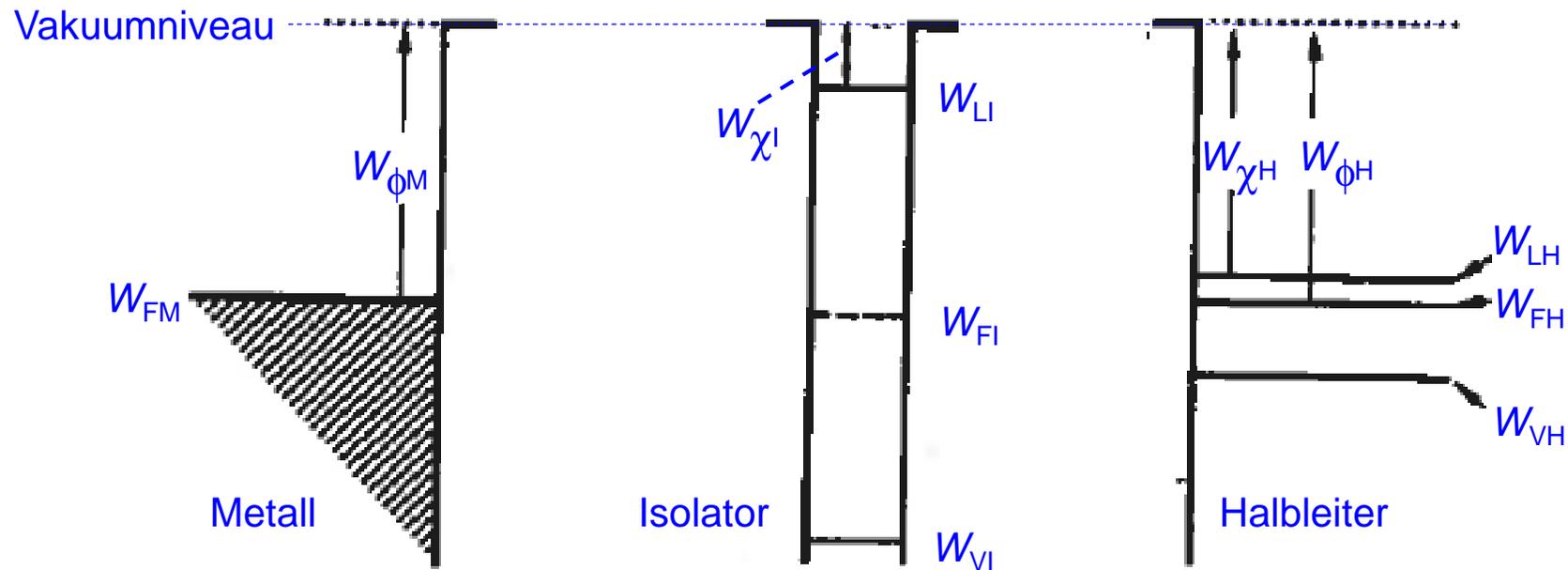


MOS-Strukturen sind von sehr großer Bedeutung in der Halbleitertechnik:

- Speicherkondensatoren in Halbleiterschaltungen und Charge-Coupled Devices (CCD)
- Grundstruktur von Feldeffekt-Transistoren (Metal-Oxide-Semiconductor Field Effect Transistor, MOSFET)
- Wichtige Teststruktur zur Untersuchung von Halbleiteroberflächen

Bilder nach Sze, „Semiconductor Devices – Physics and Technology“

Banddiagramme und Definition von Energieniveaus



- Gemeinsame Referenz für Energien und Potentiale: „Vakuumniveau“ weit entfernt vom Halbleiter
- Austrittsarbeit W_{ϕ} (engl. „work function“):
 - Entspricht der Arbeit die aufgewandt werden muss, um ein Elektron aus einem ungeladenen Festkörper zu lösen
 - Bei einem Metall ist das Abstand des Fermi-Niveaus vom Vakuumniveau; diese Definition wird auch auf Halbleiter übertragen
- Elektronenaffinität W_{χ} :
 - Entspricht der Arbeit, die aufgewandt werden muss, um ein Elektron aus dem Leitungsband eines ungeladenen Festkörpers auszulösen, also dem Abstand des Leitungsbandes vom Vakuumniveau

Bild nach Pierret, „Semiconductor Device Fundamentals“

MIS-Struktur: Qualitative Betrachtung am Energiediagramm

Ideale MIS-Struktur:

- Metall und Halbleiter weisen dieselben Austrittsarbeiten auf, $W_{\phi M} = W_{\phi H}$
⇒ **Flachbandfall** wird bei einer äußeren Spannung von $U = 0$ erreicht.
- Isolator ist frei von Raumladungen
- Kein Ladungstransport durch den Isolator; dieser weist einen unendlich hohen Widerstand auf.

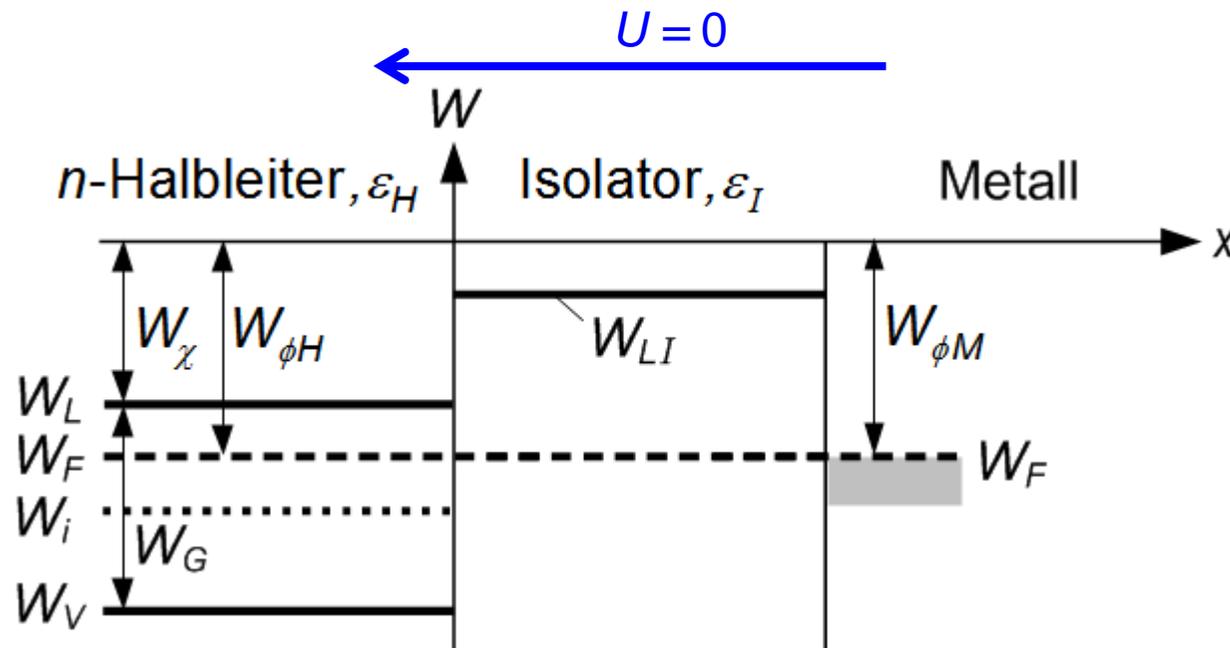
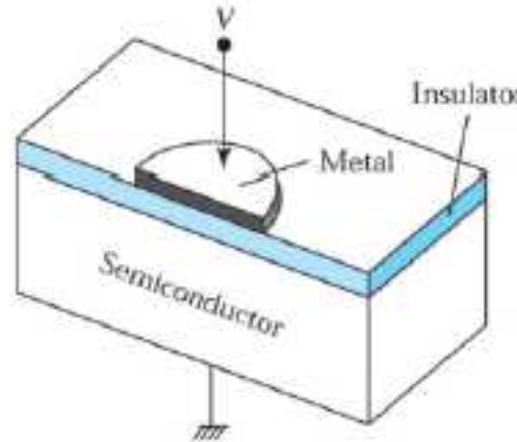
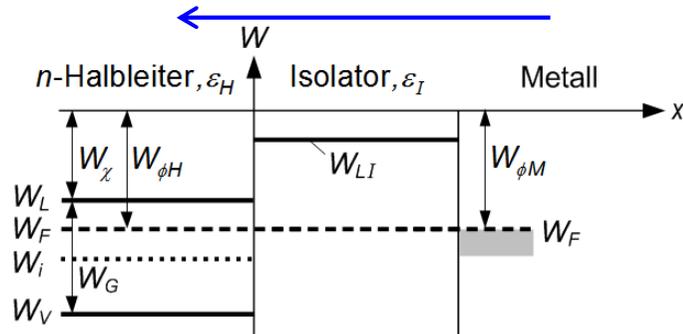


Bild nach Pierret, „Semiconductor Device Fundamentals“

MIS-Struktur unter angelegter Spannung I

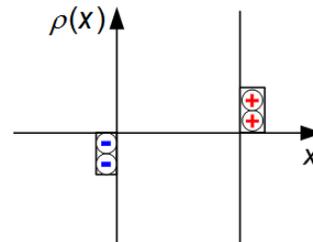
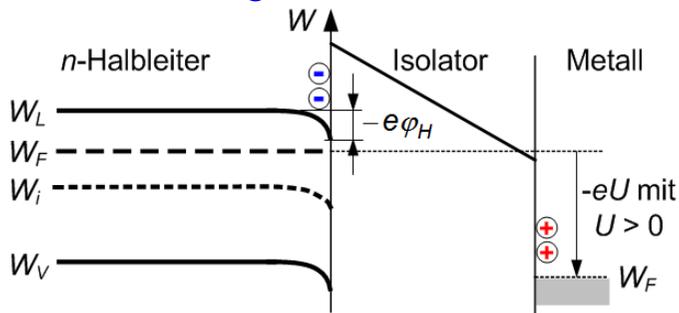
Flachbandfall: $U = 0$



x

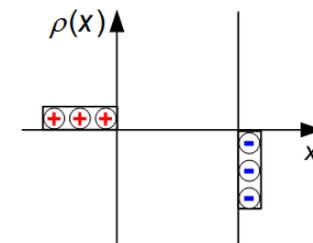
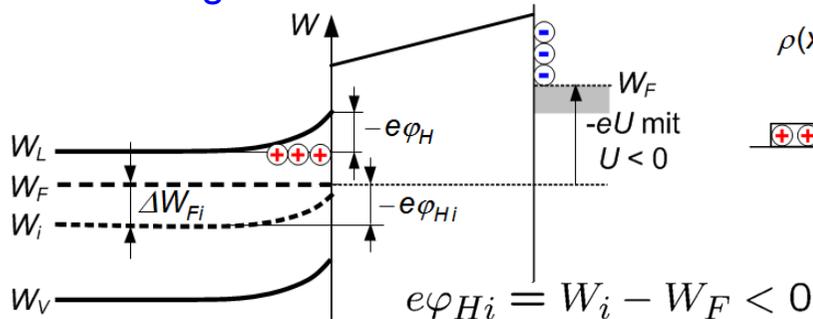
Bild nach Sze,
„Semiconductor Devices –
Physics and Technology“

Anreicherungsrandschicht: $U > 0$



- Positive angelegte Spannung führt zu positivem Randpotenzial $\phi_H > 0$
- Anreicherung von Elektronen (Majoritätsträger)
- Ausbildung einer Flächenladung mit entgegengesetztem VZ im Metall

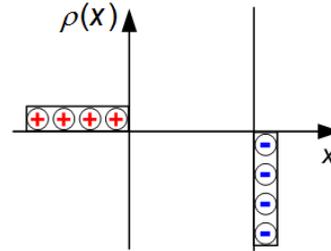
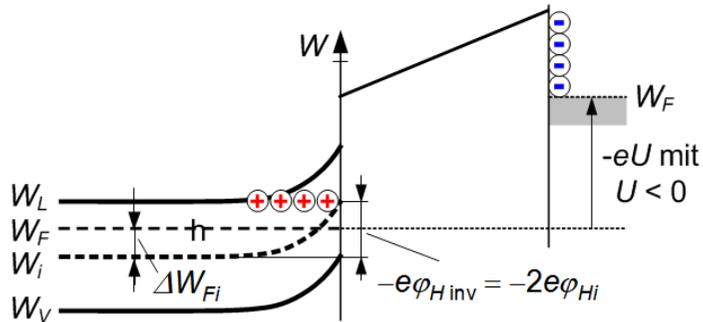
Verarmungsrandschicht: $U < 0$



- Negative angelegte Spannung führt zu negativem Randpotenzial ϕ_H wobei $\phi_{Hi} < \phi_H < 0$
- ⇒ Abfließen von Elektronen aus dem Grenzbereich zum Isolator
- ⇒ Positive geladene Donatorrümpfe bleiben zurück

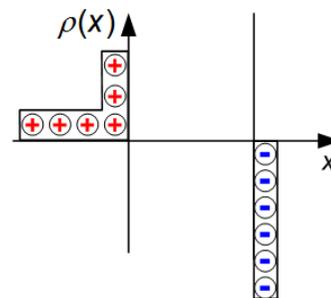
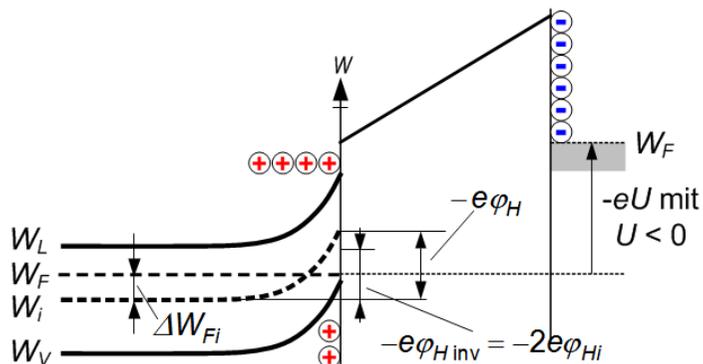
MIS-Struktur unter angelegter Spannung II

Schwache Inversionsrandschicht: $U < 0$



- Betragsmäßige Erhöhung der angelegten negativen Spannung U senkt das Randpotential ϕ_H des Halbleiters ($2\phi_{Hi} < \phi_H < \phi_{Hi} < 0$)
 \Rightarrow Mittellinie („ W_i “) der nach oben gebogenen Bänder überschreitet das Ferminiveau
 \Rightarrow Löcherdichte im Randbereich wird größer als Elektronendichte (**Inversionsrandschicht**); die Raumladungsdichte wird jedoch noch durch die positiv geladenen Donatorrümpfe dominiert.

Starke Inversionsrandschicht: $U < 0$



- Weitere betragsmäßige Erhöhung der angelegten negativen Spannung senkt das Randpotential ϕ_H des Halbleiters weiter ($\phi_H < 2\phi_{Hi} < 0$)
 \Rightarrow Valenzbandkante kommt in die Nähe des Fermi-Niveaus
 \Rightarrow Löcherdichte wird größer als Dotierungsdichte; es bildet sich eine dünne Raumladungsschicht mit sehr hoher Löcherdichte aus.

Quantitative Beschreibung der MIS-Struktur - Ansatz

Ausgangspunkt: Poisson-Gleichung in einer Dimension

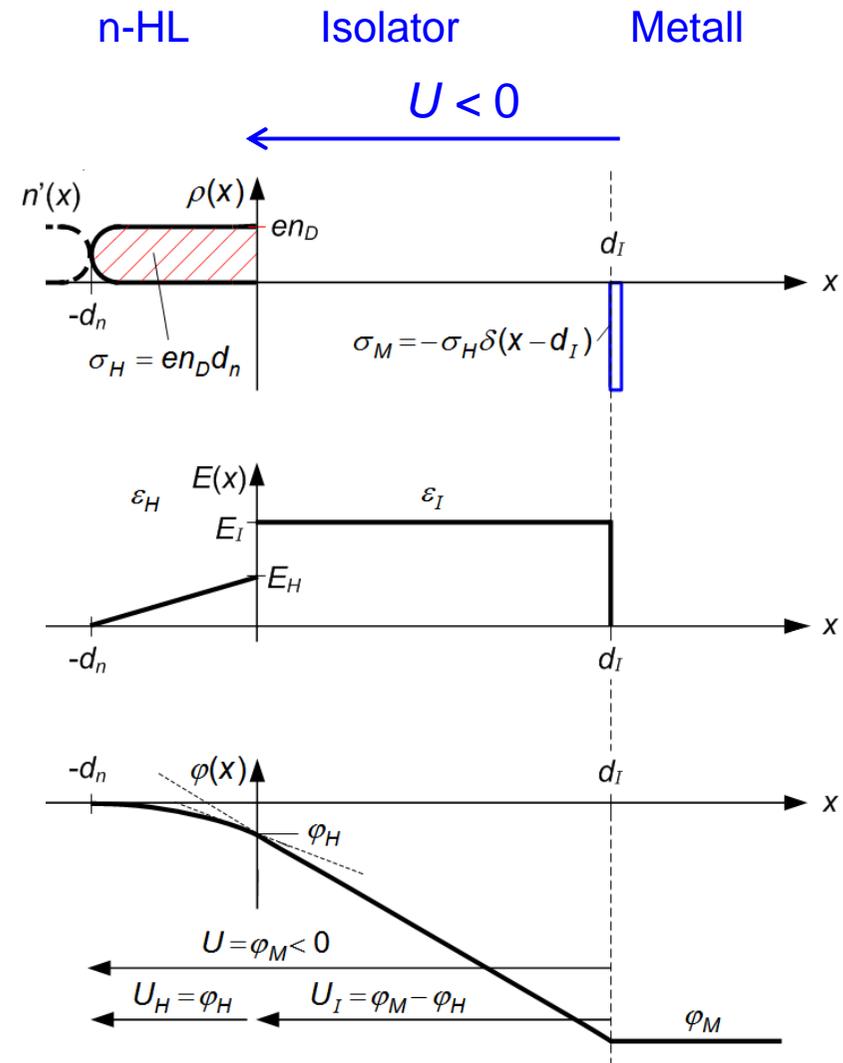
$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_H}$$

wobei

$$\rho(x) = e \left[n_D - n_D e^{\frac{\varphi}{U_T}} + \frac{n_i^2}{n_D} e^{-\frac{\varphi}{U_T}} \right]$$

„Trick“ zur analytischen Lösung: Verwendung des Potentials φ als unabhängige Variable und Umschreiben der Poisson-Gleichung auf das elektrische Feld

$$E(\varphi) = -\text{sgn}(\varphi_H) \sqrt{-\frac{2}{\epsilon_H} \int_0^\varphi \rho(\varphi') d\varphi'} = -\frac{d\varphi}{dx}$$



Die Verarmungsrandschicht

Ladungsträgerdichte: $\rho(x) \approx en_D$
 ⇒ Potentialverlauf: $\varphi(x) = -\frac{U_T}{2L_{Dn}^2}(x + d_n)^2$

wobei $d_n = L_{Dn} \sqrt{-\frac{2\varphi_H}{U_T}}$

Elektrisches Feld am Rand der Halbleiterschicht: $E(x=0) = \frac{U_T d_n}{L_{Dn}^2}$

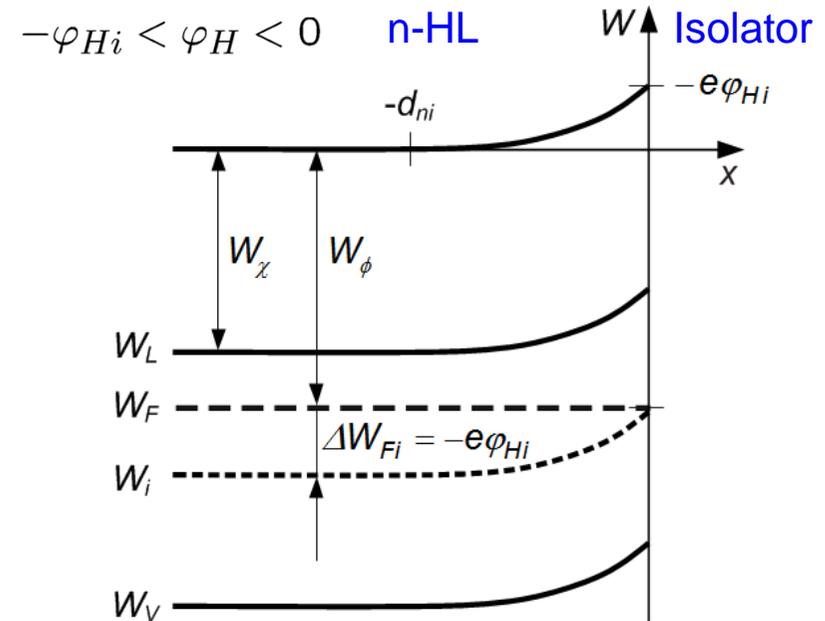
Flächenladungsdichte: $\sigma_H = \varepsilon_H E(x=0) = \frac{\varepsilon_H U_T}{L_{Dn}} \sqrt{-\frac{2\varphi_H}{U_T}}$

Kleinsignal-Kapazitätsbelag: Interpretiere Gesamtkapazität C als Reihenschaltung der Kapazität C_H der Anreicherungsrandschicht und der Kapazität C_I der Isolatorschicht

$$C'_I = \frac{\sigma_I}{U_I} = \frac{\varepsilon_I}{d_I} \quad C'_H = \frac{\varepsilon_H}{d_n}$$

$$C' = \frac{C'_I C'_H}{C'_I + C'_H} = C'_I \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_I d_n}{\varepsilon_H d_I}}$$

⇒ Die Kleinsignalkapazität ist aufgrund der Ausdehnung der Verarmungszone kleiner als die Kapazität C_I der Isolatorschicht.



Kleinsignalkapazität als Funktion der angelegten Spannung:

Berechne d_n aus

$$U = \varphi_H - d_I E_I = -\frac{en_D}{2\varepsilon_H} d_n^2 - \frac{d_I}{\varepsilon_I} en_D d_n$$

$$\Rightarrow \frac{C'}{C'_I} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\varepsilon_I^2 U}{en_D \varepsilon_H d_I^2}}}$$

Die Inversionsrandschicht

Schwache Inversion: Löcherdichte am Rand ist kleiner als Dotierungsdichte

$$p(0) < n_D \Rightarrow 2\varphi_{Hi} < \varphi_H < \varphi_{Hi} < 0$$

⇒ Raumladungsdichte: $\rho(x) \approx en_D$

⇒ Beschreibung mit den Formeln für den Verarmungsfall

Starke Inversion: Löcherdichte am Rand ist größer als Dotierungsdichte

$$p(0) > n_D \Rightarrow \varphi_H < -2\varphi_{Hi} < 0$$

⇒ Raumladungsdichte: $\rho(x) \approx e \frac{n_i^2}{n_D} e^{-\frac{\varphi}{U_T}}$

⇒ Beschreibung analog zum Fall der Anreicherung, unter Berücksichtigung der entsprechend angepassten Trägerdichten und des entgegengesetztem Vorzeichen des Potentials

Elektrisches Feld:
$$E(\varphi) = \frac{\sqrt{2}U_T}{L_{Dn}} e^{\frac{\varphi_{Hi}}{U_T}} \sqrt{e^{-\frac{\varphi}{U_T}} - 1}$$

Flächenladungsdichte:
$$\sigma_H = \epsilon_H E(\varphi_H) \approx \frac{\sqrt{2}\epsilon_H U_T}{L_{Dn}} e^{\frac{\varphi_{Hi}}{U_T}} e^{-\frac{\varphi_H}{2U_T}}$$

Dicke der stark invertierten Randschicht ist wesentlich kleiner als die Debye-Länge:

Beispiel: $\varphi_H \approx 12 U_T \approx 300 \text{ mV}$

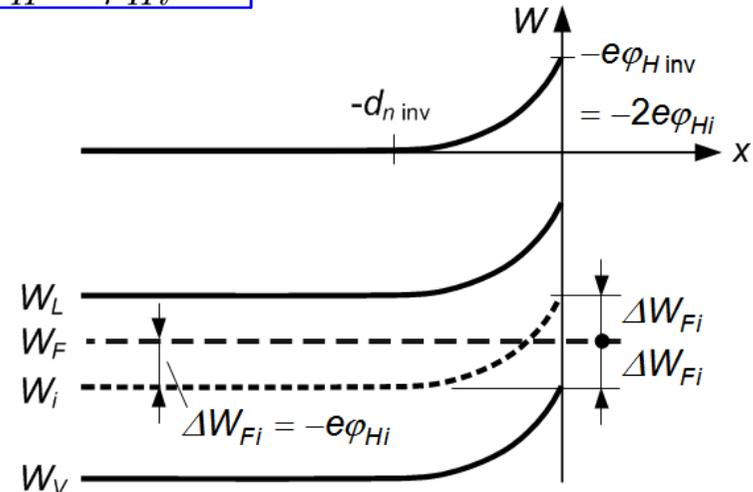
⇒ $d_n = 0,031 L_{Dn} \approx 4 \text{ nm}$

⇒ Die Anreicherungsrandschicht verhält sich wie eine reine Flächenladung.

$$\varphi_H < \varphi_{Hi} < 0$$

n-HL

Isolator



Raumladungsverteilung im Fall starker Inversion

Wichtig für die Funktion von Feldeffekttransistoren: Unterscheidung zwischen beweglichen und unbeweglichen Ladungsträgern an der Oberfläche des invertierten Halbleiters

⇒ **Bewegliche Ladungsträger im Inversionskanal:** Flächenladungsdichte σ_K

Unbewegliche Raumladungen der Donator-Rümpfe: Flächenladungsdichte $\sigma_{H,inv}$

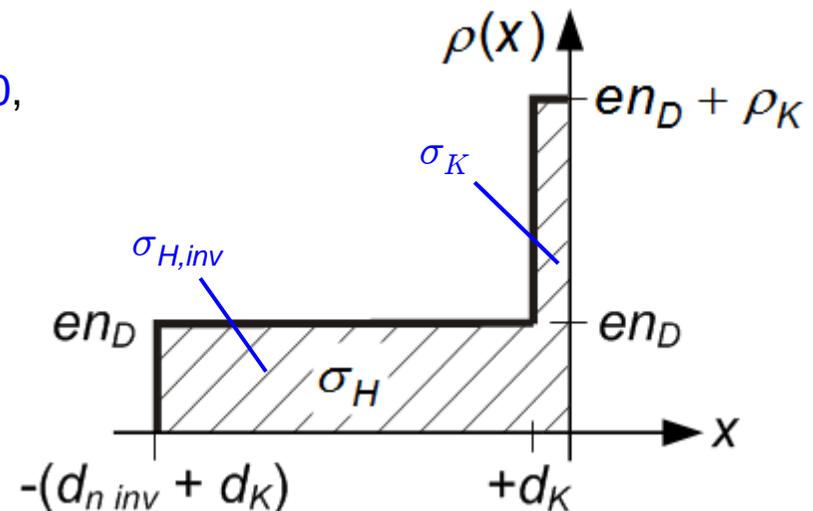
Gesamte Flächenladungsdichte: $\sigma_H \approx \sigma_{H,inv} + \sigma_K = en_D d_{n,inv} + \rho_K d_K$

Diese Flächenladungsdichte lassen sich vereinfacht beschreiben mit Hilfe der **Schwellenspannung** $U_{th} < 0$, die am Einsatzpunkt der starken Inversion über dem Isolator abfällt:

$$\sigma_{H,inv} = en_D d_{n,inv} = -C'_I U_{th}$$

$$\sigma_K = \rho_K d_K = C'_I (U_{th} - U_I)$$

$$\Rightarrow \sigma_H = -C'_I U_{th} - C'_I (U_I - U_{th}),$$



In realen Strukturen muss zunächst noch eine sog. **Flachbandspannung** U_{FB} über den Isolator angelegt werden, damit sich der Flachbandfall einstellt. Die Flächenladungsdichte der beweglichen Ladungsträger im Inversionskanal lässt sich dann schreiben als:

$$\sigma_K = C'_I (U_{th} + U_{FB} - U_I)$$

→ **MOSFET**

CCD-Bildsensoren

- Licht wird in der halbleiterseitigen Raumladungszone der MIS-Struktur absorbiert und das entstehende Elektron-Loch-Paar im durch das interne elektrische Feld getrennt.
- Elektronen sammeln sich in der Inversionsschicht an; die gespeicherte Ladung ist proportional zu absorbierten Lichtenergie.
- Das Auslesen erfolgt zeilenweise durch schrittweises Verschieben der Ladung in benachbarte Auslesezellen hin zu einem Ausleseverstärker („[Eimerkettenschaltung](#)“)

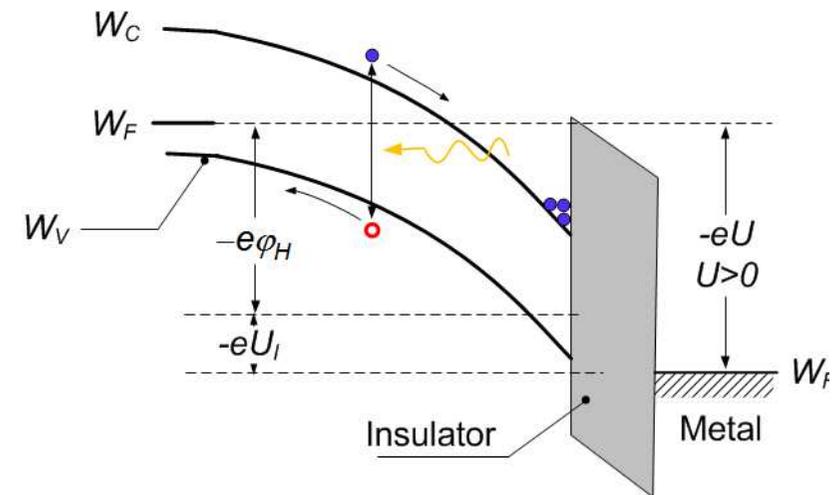
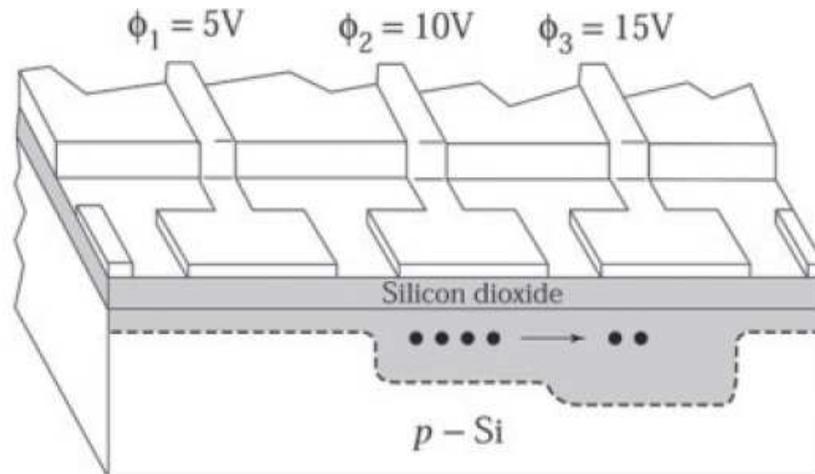
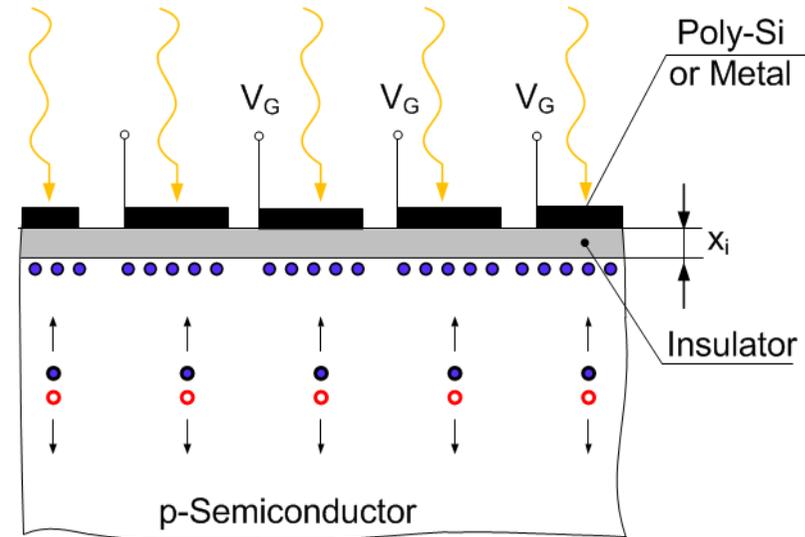
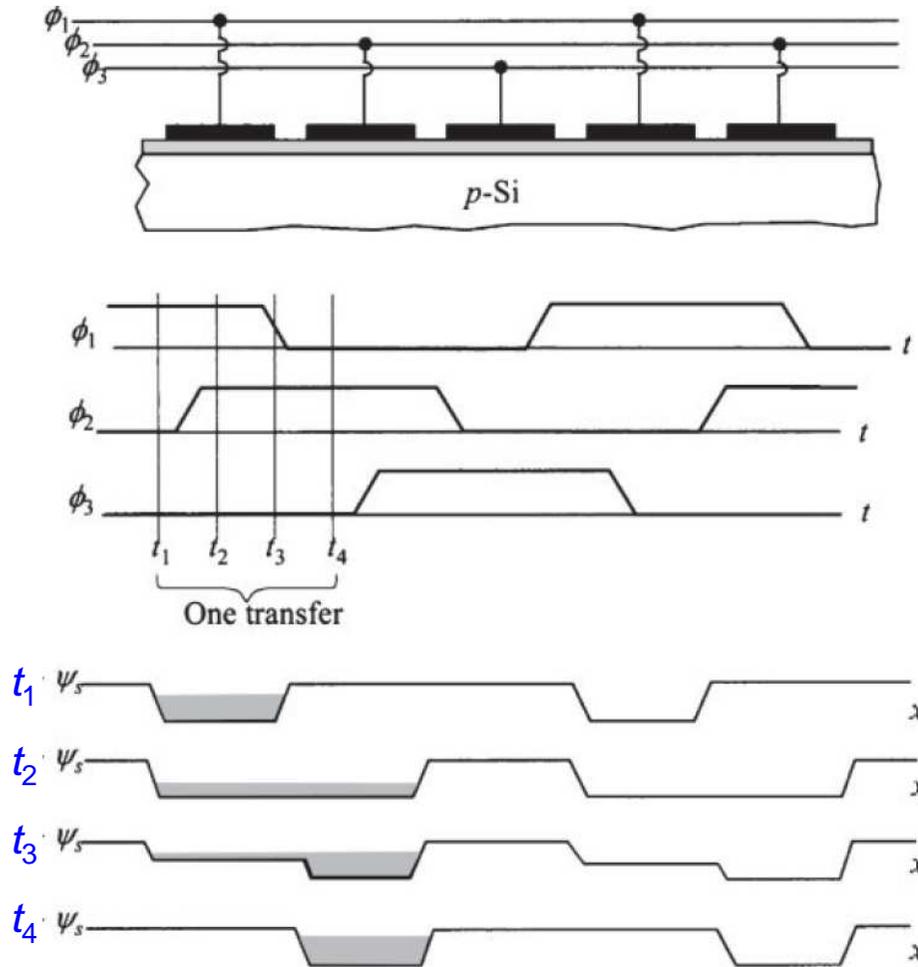
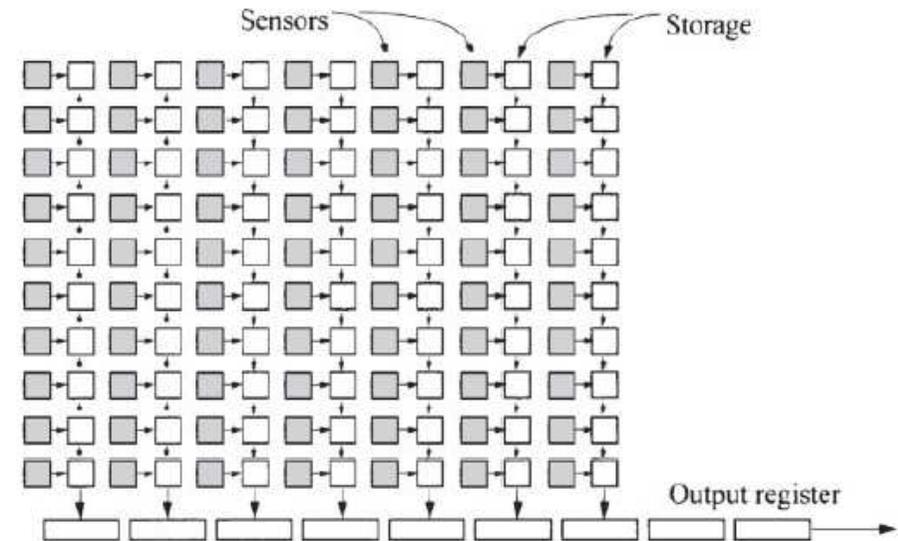


Bild nach Sze, „Semiconductor Devices: Physics and Technology“



Ausleseprinzip von CCD-Sensorarrays:
 Transport von Ladungen entlang einer Kette von CCD-Zellen durch Anlegen von drei phasenverschobenen Steuersignalen
 ⇒ Schieberegister bzw. Eimerkettenschaltung



Bilder nach Sze, „Semiconductor Devices: Physics and Technology“

Farbempfindliche CCD-Bildsensoren

RGB inside the camera

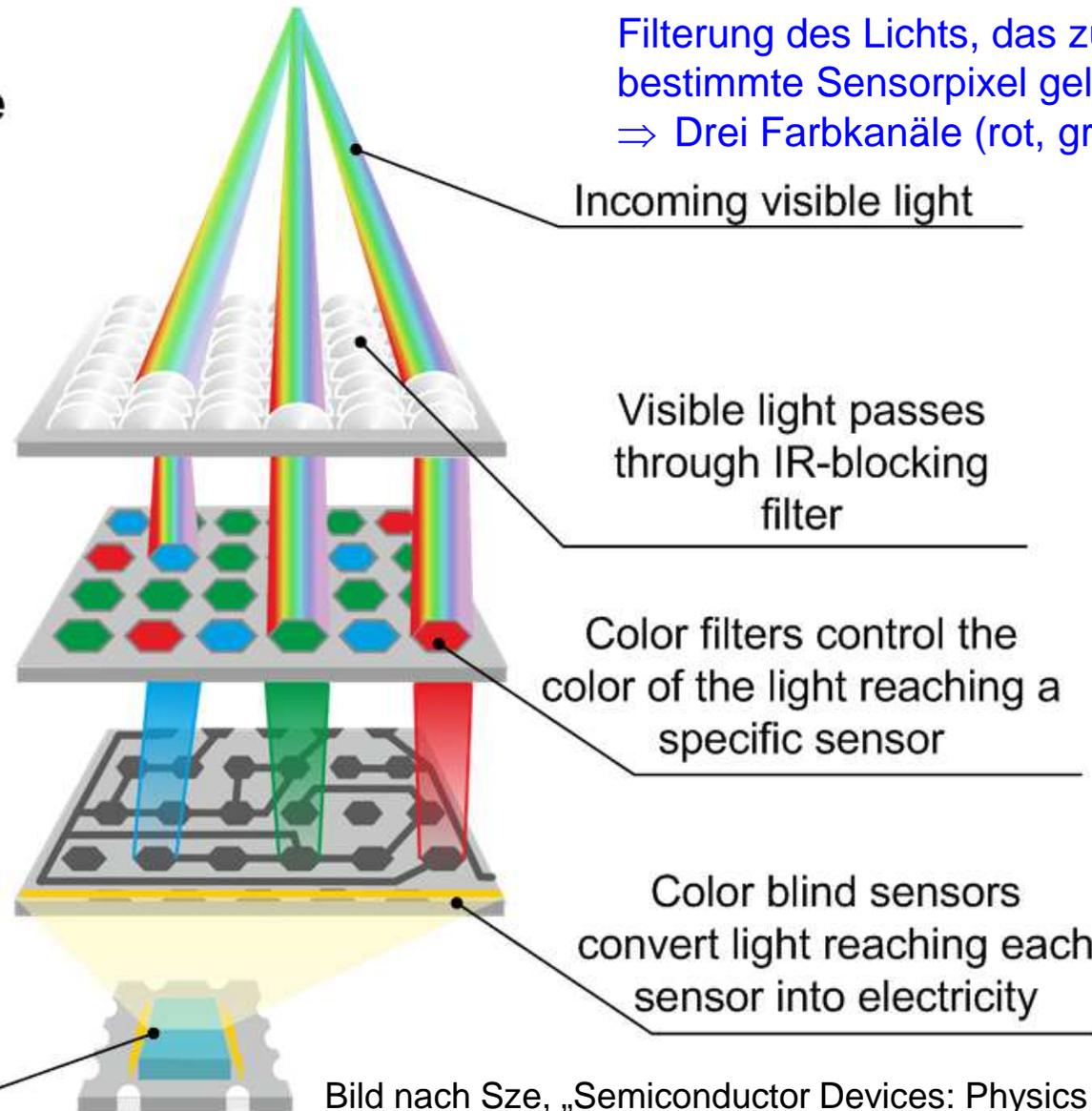
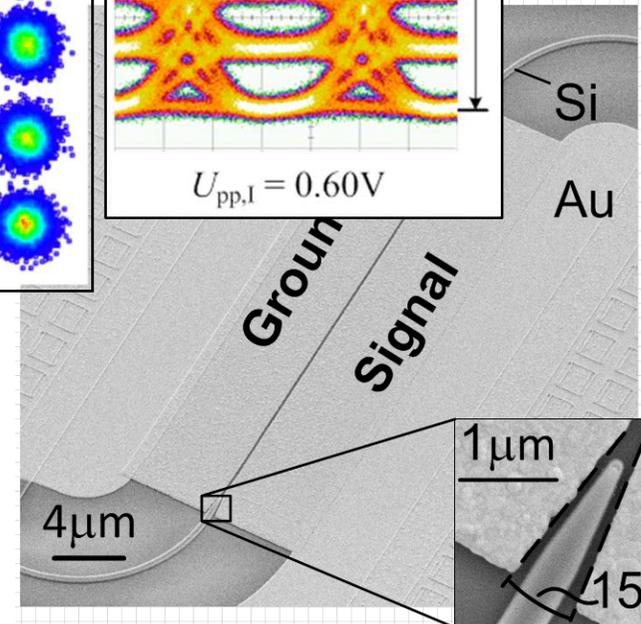
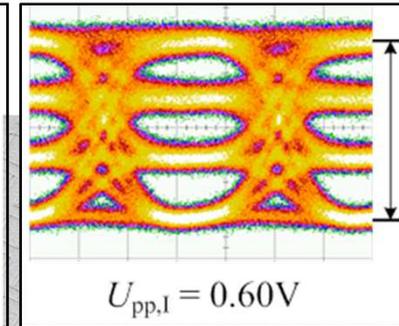
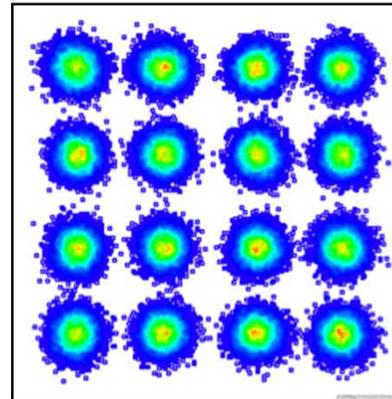


Bild nach Sze, „Semiconductor Devices: Physics and Technology“

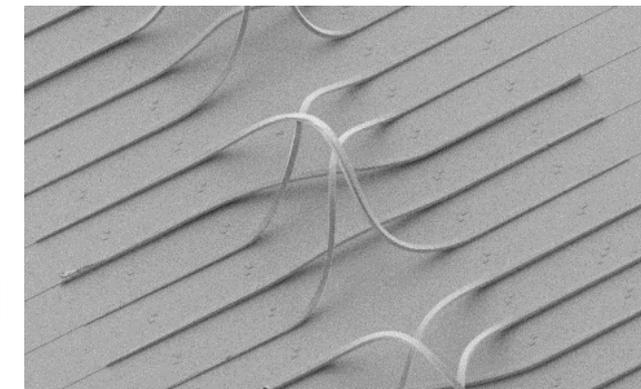
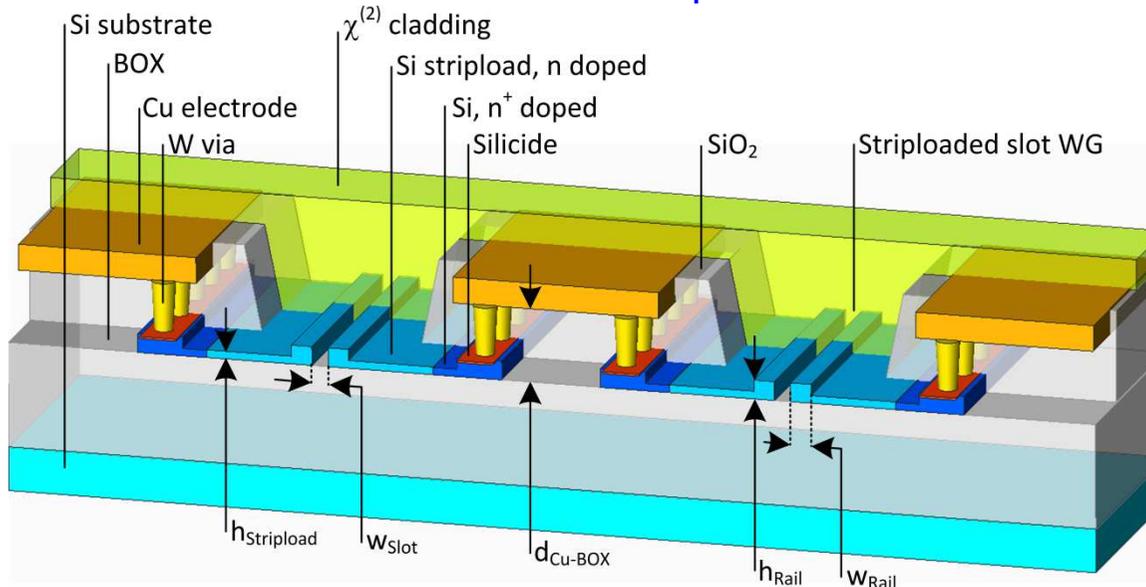
Führung durch das IPQ und Vorstellung laufender Arbeiten auf den Gebieten **Nanophotonik und Teratronik:**

- Silizium-Photonik und Plasmonik
- Optische Systemintegration und „photonisches Wirebonden“
- Photonische Terabit-Kommunikation
- Optische Messtechnik und Biophotonik



Fragen zum Institut werden bei **Kaffee und Kuchen** beantwortet.

Treffpunkt: NTI-Hörsaal



Fragestunde am Montag, dem 02. März 2015 (eine Woche vor der Klausur)

- Hier im NTI Hörsaal, 14:00 Uhr
- Möglichkeit zur Klärung von Fragen zu Vorlesung und Übung
- Fragen bitte im Voraus, spätestens jedoch am Freitag, 27. Februar per Email an:

simon.schneider@kit.edu

matthias.lauermann@kit.edu

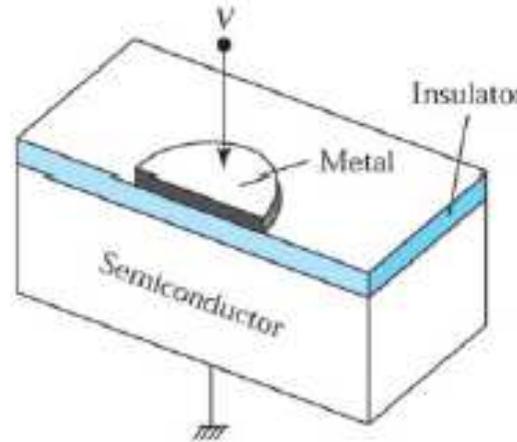
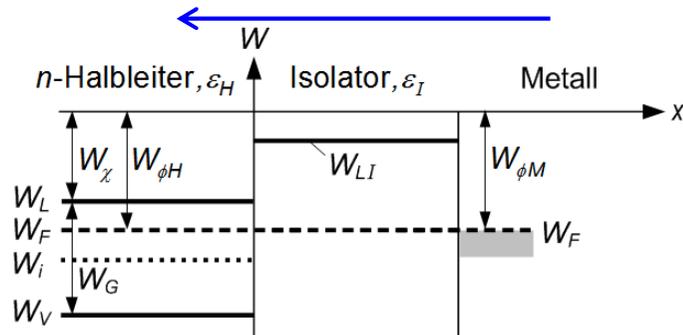
wladislaw.hartmann@kit.edu

sascha.muehlbrandt@kit.edu

MIS-Struktur unter angelegter Spannung I

Flachbandfall:

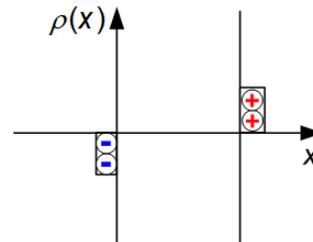
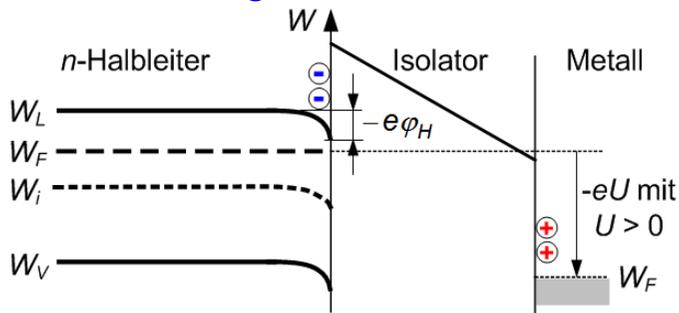
$$U = 0$$



x

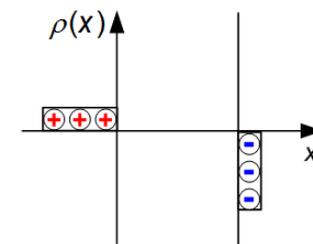
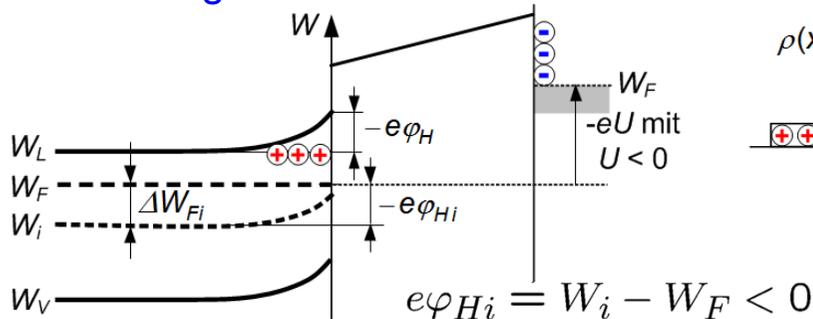
Bild nach Sze,
„Semiconductor Devices –
Physics and Technology“

Anreicherungsrandschicht: $U > 0$



- Positive angelegte Spannung führt zu positivem Randpotenzial $\phi_H > 0$
- Anreicherung von Elektronen (Majoritätsträger)
- Ausbildung einer Flächenladung mit entgegengesetztem VZ im Metall

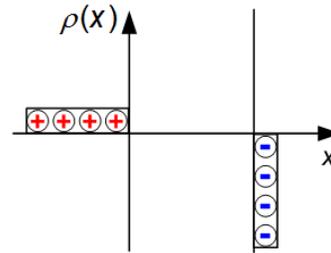
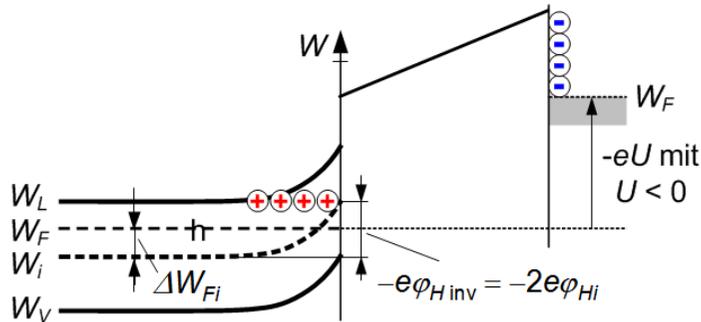
Verarmungsrandschicht: $U < 0$



- Negative angelegte Spannung führt zu negativem Randpotenzial ϕ_H wobei $\phi_{Hi} < \phi_H < 0$
- ⇒ Abfließen von Elektronen aus dem Grenzbereich zum Isolator
- ⇒ Positive geladene Donatorrümpfe bleiben zurück

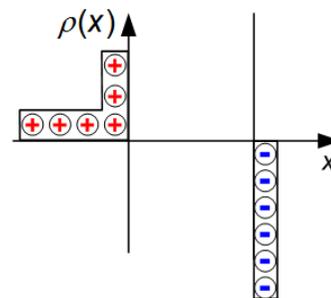
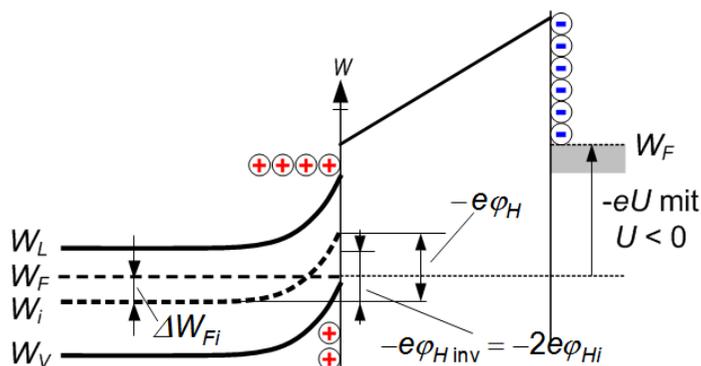
MIS-Struktur unter angelegter Spannung II

Schwache Inversionsrandschicht: $U < 0$



- Betragsmäßige Erhöhung der angelegten negativen Spannung U senkt das Randpotential ϕ_H des Halbleiters ($2\phi_{Hi} < \phi_H < \phi_{Hi} < 0$)
 \Rightarrow Mittellinie („ W_i “) der nach oben gebogenen Bänder überschreitet das Fermi-niveau
 \Rightarrow Löcherdichte im Randbereich wird größer als Elektronendichte (**Inversionsrandschicht**); die Raumladungsdichte wird jedoch noch durch die positiv geladenen Donatorrümpfe dominiert.

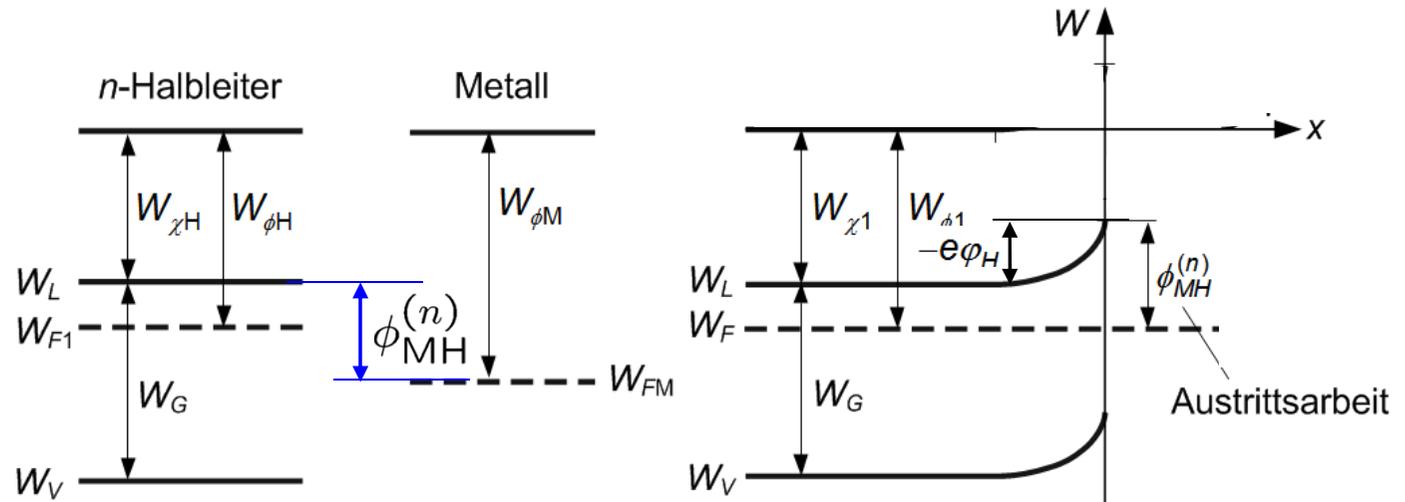
Starke Inversionsrandschicht: $U < 0$



- Weitere betragsmäßige Erhöhung der angelegten negativen Spannung senkt das Randpotential ϕ_H des Halbleiters weiter ($\phi_H < 2\phi_{Hi} < 0$)
 \Rightarrow Valenzbandkante kommt in die Nähe des Fermi-Niveaus
 \Rightarrow Löcherdichte wird größer als Dotierungsdichte; es bildet sich eine dünne Raumladungsschicht mit sehr hoher Löcherdichte aus.

Der Metall-Halbleiter-Kontakt (Schottky-Kontakt)

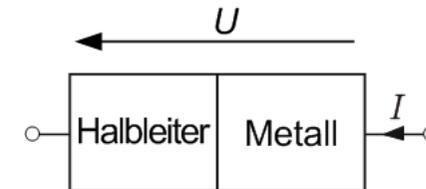
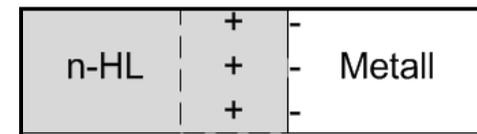
Hier:
Verarmungszone im Halbleiter
⇒ Gleichrichtender Kontakt



Definition von Austrittsarbeiten („Barrier Heights“):

$\phi_{MH}^{(n)}$ für Elektronen (positiv, wenn die LB-Kante bei $x = 0$ oberhalb des Fermi-niveaus des Metalls liegt)

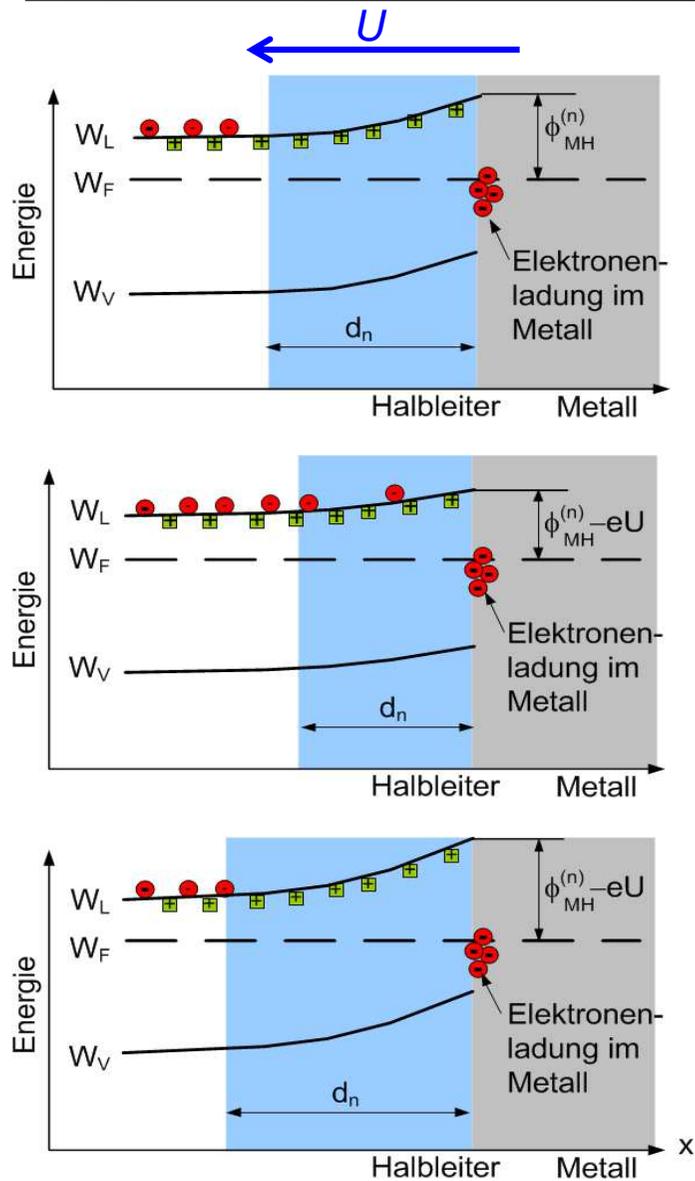
$\phi_{MH}^{(p)}$ für Löcher (positiv, wenn die VB-Kante bei $x = 0$ unterhalb des Fermi-niveaus des Metalls liegt)



Anmerkung: Diese Austrittsarbeiten lassen sich i.d.R nicht aus den Austrittsarbeiten bzw. Elektronenaffinitäten des Halbleiters/Metalls berechnen. Sie müssen statt dessen für bestimmte Materialkombination separat gemessen und tabelliert werden.

Grund: In Realität kein abrupter Übergang zwischen den Materialien, sondern komplexe Verbindungen an den Grenzflächen, die zu Oberflächenladungen und Dipolschichten führen!

Schottky-Diode: Gleichrichtende Wirkung



Keine äußere Spannung ($U = 0$): Elektronen im Halbleiter und Metall sind durch eine Potentialbarriere voneinander getrennt

Spannung in Durchlassrichtung ($U > 0$): Potentialbarriere wird kleiner; Elektronen gelangen vom Halbleiter ins Metall
 ⇒ Starker Stromfluss in Vorwärtsrichtung

Spannung in Sperrrichtung ($U < 0$): Potentialbarriere wird größer; kein nennenswerter Elektronenfluss
 ⇒ Sehr kleiner Stromfluss in Rückwärtsrichtung infolge von Löcherdiffusion und Generation in der Raumladungszone

Strom-Spannungs-Charakteristik (ohne Herleitung!):

$$I = I_n + I_p = Ae \left[\frac{D_n n(0) d_n}{2L_{Dn}^2} + \frac{D_p p_{n0} d_n}{2L_{Dn}^2} \right] (e^{U/U_T} - 1)$$

wobei $d_n = L_{Dn} \sqrt{-\frac{2(\varphi_H + U)}{U_T}}$ $\varphi_H < 0$ $0 < U < |\varphi_H|$

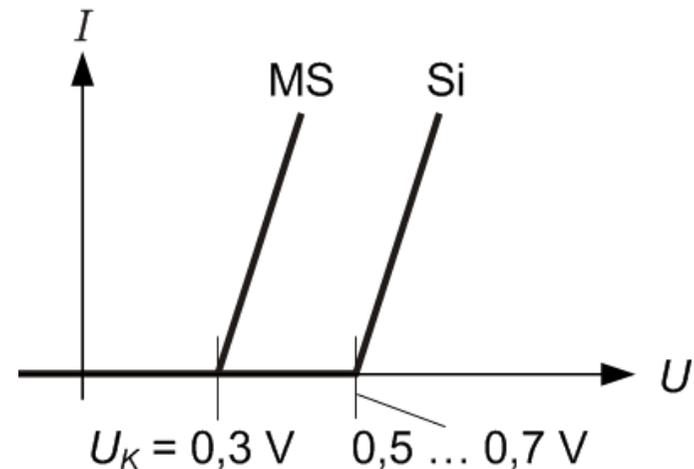
$$n(0) = n_D \exp\left(-\frac{\Phi_{MH}^{(n)}}{kT}\right)$$

Eigenschaften:

- Stromfluss wird durch **Majoritätsträger** dominiert

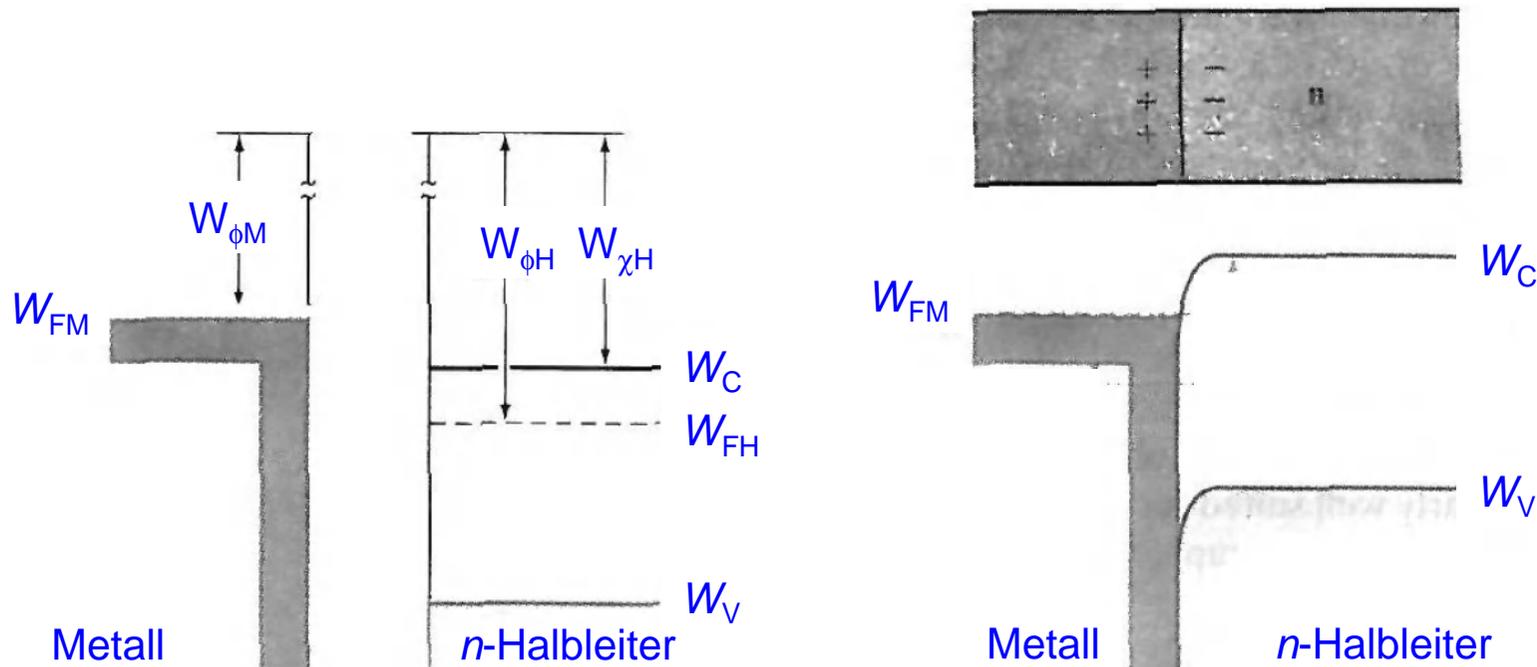
$$\frac{I_n}{I_p} \approx \gamma = \frac{n(0)}{p_{n0}} = \frac{n_D}{n_i \exp\left(\frac{\phi_{MH}^{(n)} - W_G/2}{kT}\right)} \gg 1$$

- **Hohe Schaltgeschwindigkeiten**, da sich Majoritätsträger innerhalb der dielektrischen Relaxationszeit rearrangieren
- **Geringere Durchlassspannung** („Knickspannung“), **geringere Durchbruchspannung** und **höherer Sperrstrom** als pn-Diode



Ohmscher Kontakt

Idealer ohmscher Kontakt: Wahl der Materialien so, dass ein Angleichen der Fermi-Energien nach Kontaktierung durch Zufluss von Majoritätsträgern in den HL erfolgt!
 ($W_{FM} > W_{FH}$ im n -Halbleiter bzw. $W_{FM} < W_{FH}$ im p -Halbleiter vor der Kontaktierung)
 ⇒ Keine Verarmungszone im Halbleiter; verschwindender Kontaktwiderstand!



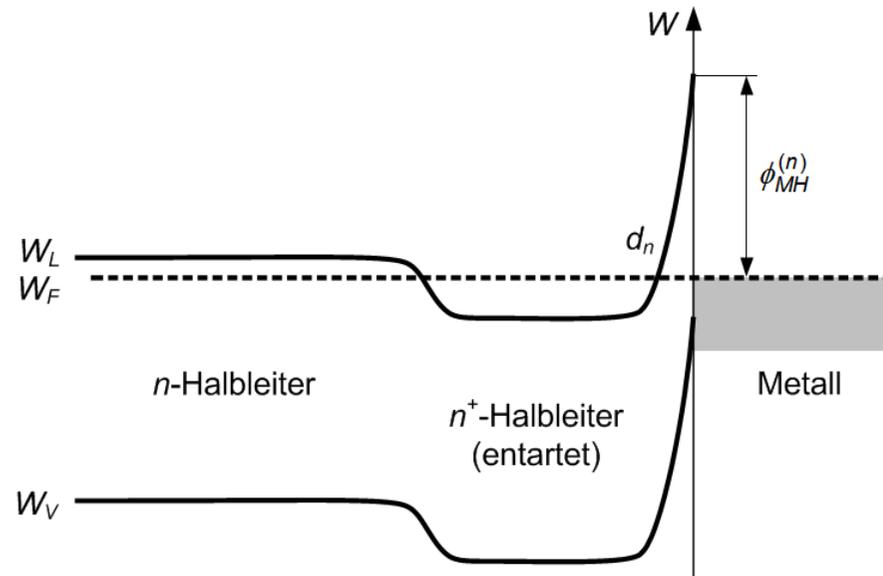
Problem: Erfordert beim n -HL ein Metall mit hinreichend kleiner Austrittsarbeit!

Ohmscher Kontakt durch Tunnelstrom

Kontaktierung eines Metalls mit großer Austrittsarbeit möglich durch sehr starke Dotierung des Halbleiters (Entartung!) am Metallkontakt

⇒ Sehr schmale Potentialbarrieren, die **durchtunnelt** werden können („Tunnelkontakt“)

Wird auch angewandt, um **p-Silizium** mit **Aluminium**-Elektroden zu kontaktieren.



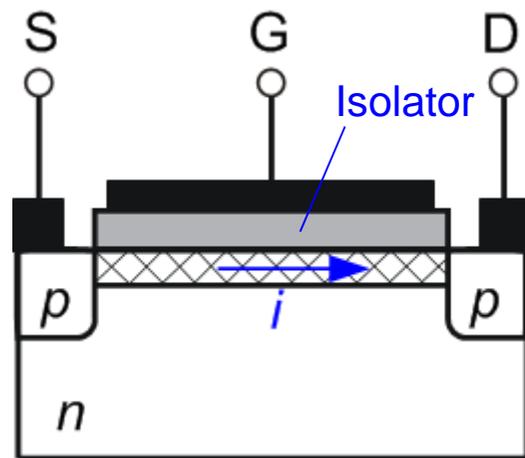
Problem bei Metallkontakten: Dotierung des Halbleiters an der Kontaktstelle durch Eindiffusion der Metall-Atome; bei Kontakten von n -Silizium mit Al (Akzeptor!) führt die Eindiffusion von Al beispielsweise zum „Umdotierung“ des Halbleiters.

⇒ Statt dessen: Kontaktierung über eine Schicht aus **Siliciden** (binäre metallische Verbindung von Si, z.B. mit Ti, W, Mo, Pt, Ni)

Beispiel: n -Si/ TiSi / TiN / Al erlaubt niederohmige Kontakte zwischen Aluminium und n -Silizium

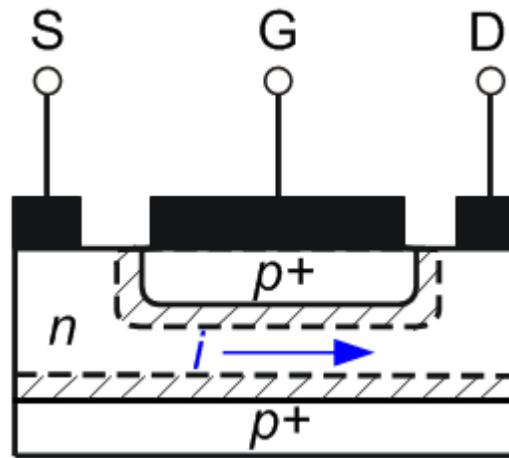
Kapitel 10: Feldeffekttransistoren

Klassifizierung von Feldeffekttransistoren (FET)



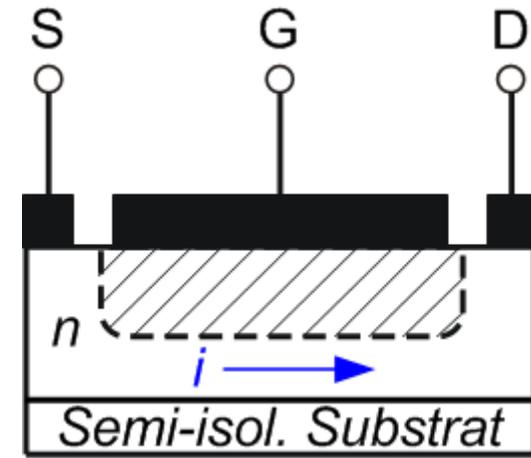
Metal-Insulator-Semiconductor FET (**MISFET**) bzw. Insulated-Gate Field Effect Transistor (**IGFET**) :

- Kontrolle des Stromflusses durch Modulation der Anreicherungs- oder Verarmungsrandschicht einer MIS-Struktur
- Falls SiO₂ als Isolator verwendet wird: **Metal-Oxide Semiconductor FET (MOSFET)**



Junction Field Effect Transistor (**JFET**):

- Kontrolle des Stromflusses durch Modulation der Breite der Raumladungszone eines pn-Überganges („**Junction Gate**“)



Metal-Semiconductor Field Effekt Transistor (**MESFET**) :

- Kontrolle des Stromflusses durch Modulation der Breite der Raumladungszone eines Schottky-Überganges („**Schottky Gate**“)

Anmerkung: Der Aufbau der Bauteile ist im Prinzip symmetrisch, d.h. die Kennlinien ändern sich nicht, wenn die Rollen von Source und Drain vertauscht werden. In der Praxis sollte man die Anschlüsse trotzdem nicht vertauschen, da die Kapazitäten zwischen Gate und Drain durch ein entsprechendes Bauteildesign häufig geringer gehalten werden als zwischen Gate und Source.

Der MIS-Feldeffekttransistor (MOSFET)

Betrachte n-Kanal Feldeffekttransistor:

Drain-Strom: $I_D = -\sigma_K(y) b v_n$

Annahme: $U_I(y) > U_{th} \forall y$, d.h. der Halbleiter unter der Gate-Elektrode ist auf der gesamten Länge invertiert.

$$\Rightarrow \sigma_K(y) = C'_I (U_{th} - U_I(y))$$

$$v_n = \mu_n \frac{dU_K(y)}{dy}$$

$$U_I(y) = U_{GS} - U_K(y)$$

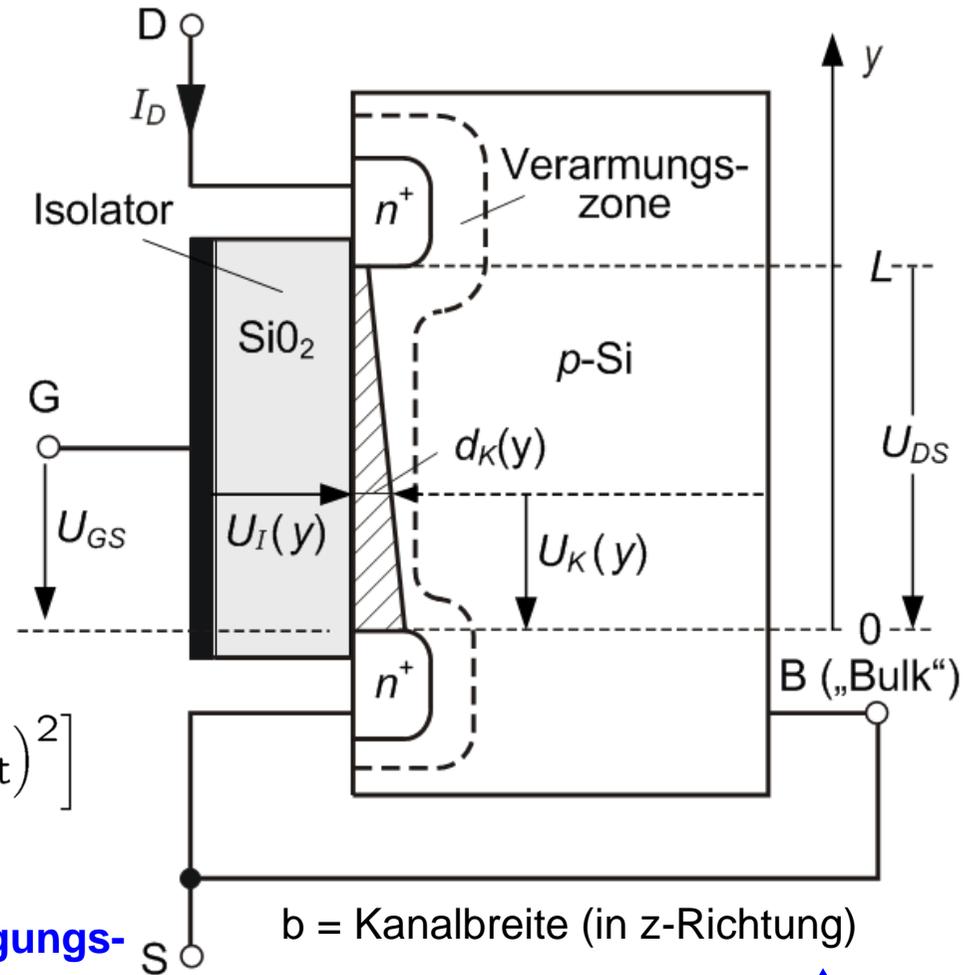
\Rightarrow Drain-Strom im sog. **ohmschen Bereich** ($U_{DS} < U_{GS} - U_{th}$):

$$I_D = \frac{\mu_n b C'_I}{2L} \left[U_{DS,sat}^2 - (U_{DS} - U_{DS,sat})^2 \right]$$

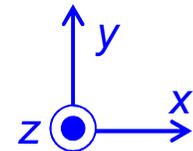
wobei $U_{DS,sat} = U_{GS} - U_{th}$

Für $U_{DS} > U_{GS} - U_{th}$ (**Abschnür- bzw. Sättigungsbereich**) bleibt der Drain-Strom konstant:

$$I_D = I_{D,sat} = \frac{\mu_n b C'_I}{2L} U_{DS,sat}^2$$

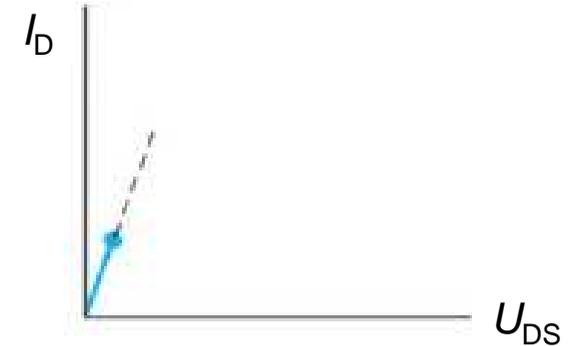
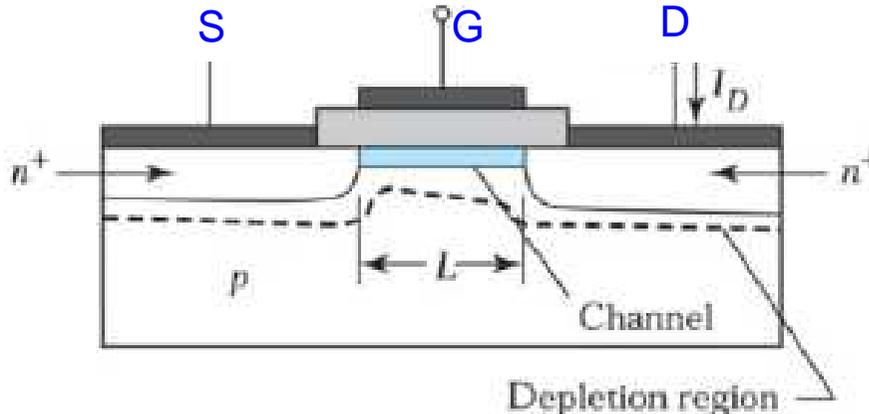


Inversionsrandschicht in der MIS-Struktur...

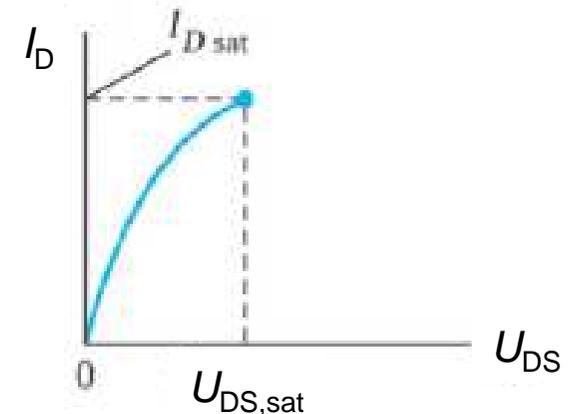
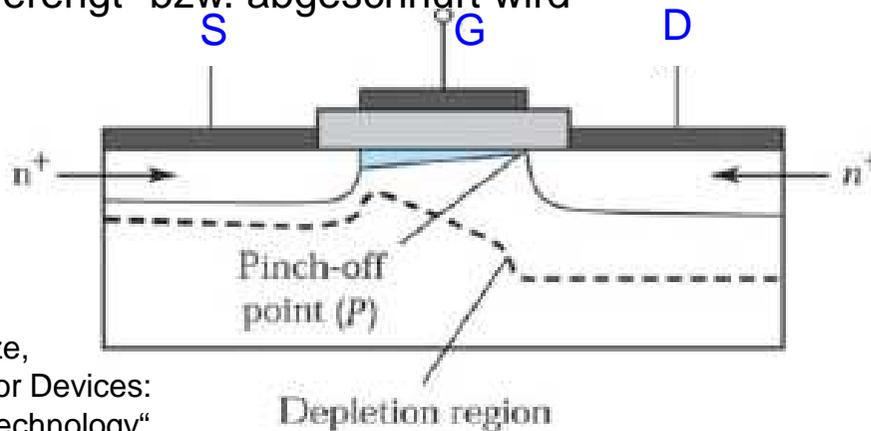


Betriebsbereiche des n -Kanal MOSFET

Ohmscher Bereich (engl. „Ohmic Region“ bzw. „Linear Region“): $U_{DS} \ll U_{DS,sat} = U_{GS} - U_{th}$
 „Offener Inversionskanal“; Zunahme des Drainstromes I_D mit der Drain-Source-Spannung U_{DS} ; diese Zunahme erfolgt näherungsweise linear für kleine Werte von U_{DS}



Abschnürung (engl. „Saturation“) für $U_{DS} \approx U_{DS,sat} = U_{GS} - U_{th}$
 Zunahme des Drainstromes I_D verlangsamt sich, da der Inversionskanal am Drain-seitigen Ende „verengt“ bzw. abgeschnürt wird



Bilder nach Sze,
 „Semiconductor Devices:
 Physics and Technology“

Betriebsbereiche des n -Kanal MOSFET

Abschnürbereich bzw. Sättigungsbereich (engl. „Saturation Region“): $U_{DS} > U_{DS,sat} = U_{GS} - U_{th}$

- Drainstrom I_D nimmt bei weiterer Erhöhung von U_{DS} nicht mehr zu; statt dessen fällt die zusätzliche Spannung über den abgeschnürten Bereich des Kanals ab (hochohmig, da kleine Ladungsträgerdichte!)
- Eine geringfügige Zunahme von I_D mit U_{DS} bleibt aufgrund einer Kanallängenmodulation bestehen („Channel-Length Modulation“), ist aber in vielen Fällen vernachlässigbar.

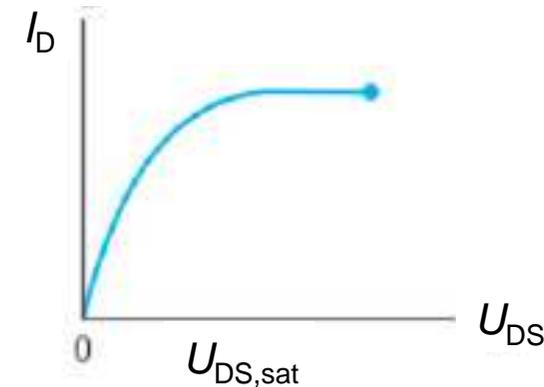
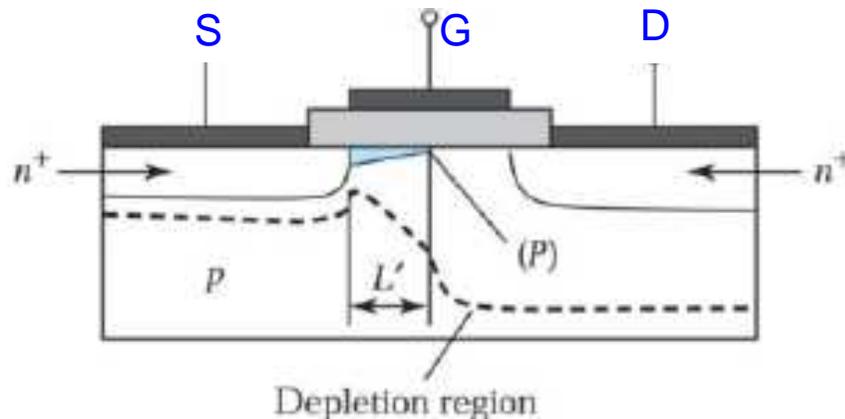
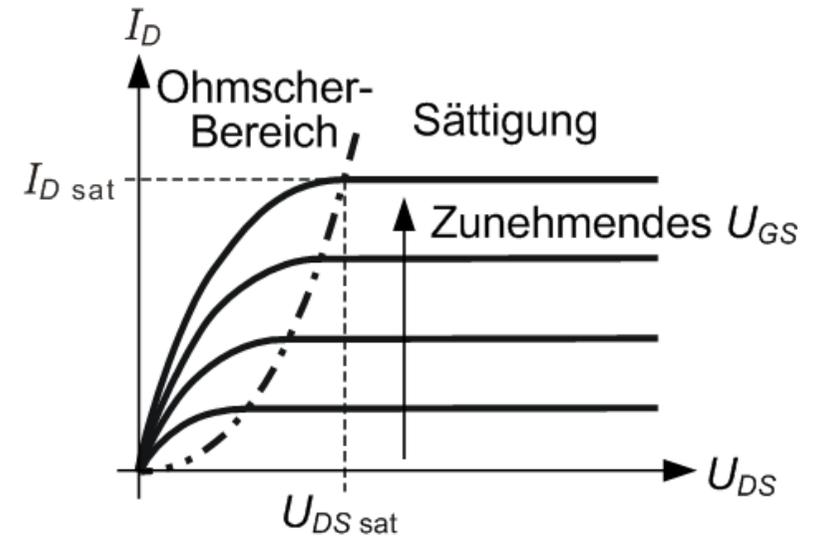


Bild nach Sze, „Semiconductor Devices: Physics and Technology“

MOSFET: Klassifikation und Kennlinienfelder

$$V_D = U_{DS}; V_G = U_{GS}$$

$$V_T = U_{th}$$

n-Kanal
Anreicherungstyp
(selbstsperrend)

n-Kanal
Verarmungstyp
(selbstleitend)

p-Kanal
Anreicherungstyp
(selbstsperrend)

p-Kanal
Verarmungstyp
(selbstleitend)

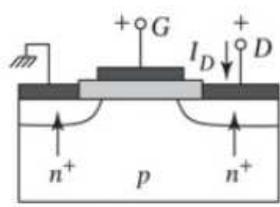
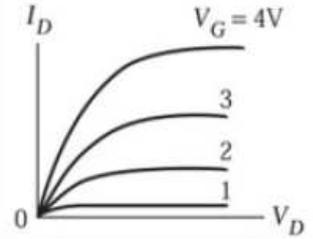
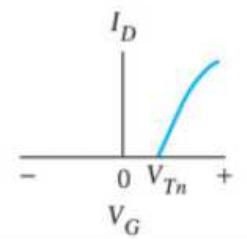
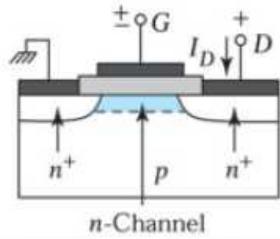
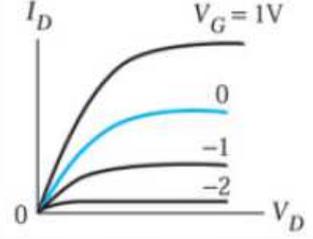
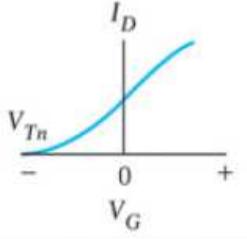
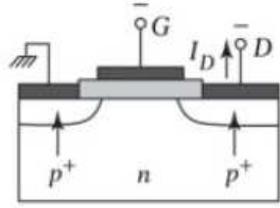
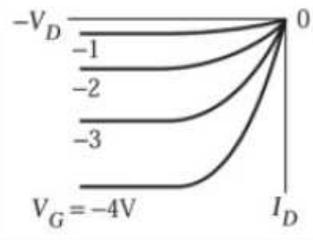
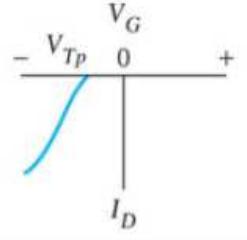
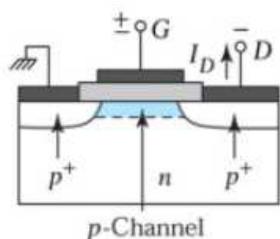
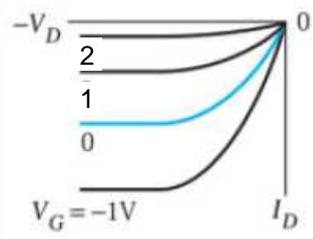
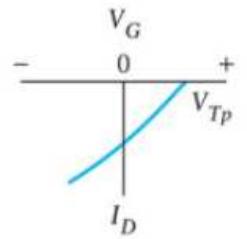
Type	Cross Section	Output Characteristics	Transfer Characteristics
n-Channel Enhancement (Normally Off)			
n-Channel Depletion (Normally On)			
p-Channel Enhancement (Normally Off)			
p-Channel Depletion (Normally On)			

Bild nach Sze, „Semiconductor Devices: Physics and Technology“

MOSFET: Kleinsignal-Ersatzschaltbild

Niederfrequenz-Fall: Das Kleinsignal-ESB ergibt sich aus der Linearisierung der Großsignal-Charakteristik um einen Arbeitspunkt (U_{GS} , U_{DS} , I_D)

$$i_D = g_m u_{GS} + g_d u_{DS}$$

wobei $g_m = \frac{\partial I_D}{\partial U_{GS}} = \begin{cases} \frac{\mu_n b C'_I}{L} U_{DS} & \text{für } U_{DS} < U_{GS} - U_{th} \\ \frac{\mu_n b C'_I}{L} [U_{GS} - U_{th}] & \text{für } U_{DS} > U_{GS} - U_{th} \end{cases}$ Steilheit

$$g_d = \frac{\partial I_D}{\partial U_{DS}} = \begin{cases} \frac{\mu_n b C'_I}{L} [U_{GS} - U_{th} - U_{DS}] & \text{für } U_{DS} < U_{GS} - U_{th} \\ 0 & \text{für } U_{DS} > U_{GS} - U_{th} \end{cases}$$
 Kanal-Leitwert

Hochfrequenz-Fall: Kapazitive Kopplung zwischen Gate und Source bzw. zwischen Gate und Drain wird durch die Kapazitäten C_{GS} und C_{GD} berücksichtigt.

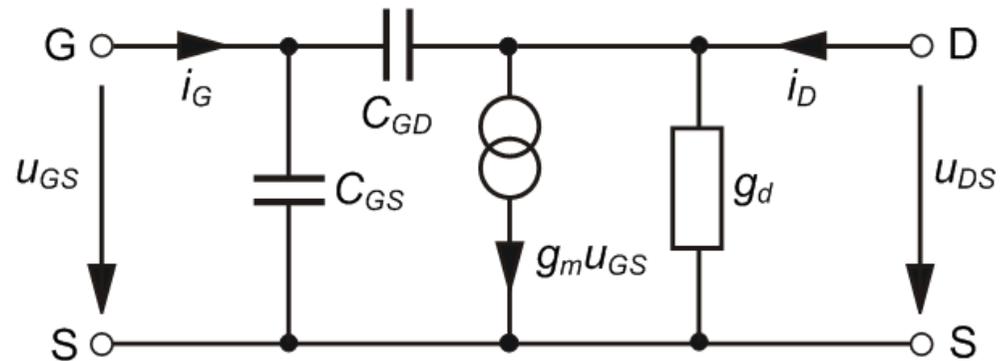
Grenzfrequenz: Die Grenzfrequenz (Cut-Off-Frequency) ist erreicht, wenn die Kurzschluss-Stromverstärkung auf 1 abgefallen ist.

Komplexe Kleinsignal-Amplitude \rightarrow

$$\left| \frac{I_D}{I_G} \right| = \left| \frac{g_m - j\omega C_{GD}}{j\omega (C_{GD} + C_{GS})} \right|$$

$$\approx \frac{g_m}{\omega C_{GS}} = \frac{\mu_n U_{DS}}{\omega L^2}$$

\Rightarrow Grenzfrequenz: $\omega_G = \frac{\mu_n U_{DS}}{L^2}$



Kleine Schaltspannung am Gate: Betrachte Spannungshub ΔU_{GS} , der für eine bestimmte Änderung der Flächenladungsdichte σ_K im Kanal benötigt wird:

$$\Delta\sigma_K = \epsilon_I \Delta E_I = \frac{\epsilon_I}{d_I} \Delta U_{GS}$$

- ⇒
- Gate-Dielektrikum mit möglichst kleiner Dicke d_I (nach unten begrenzt durch Tunnelströme und Gefahr von dielektrischen Durchbrüchen)
 - Hohe Dielektrizitätszahl ϵ_I (→ „High-k Dielectrics“)

Großer Drainstrom / hohe Steilheit g_m :

$$I_D = \frac{\mu_n b \epsilon_I}{2L d_I} \left[U_{DS,sat}^2 - (U_{DS} - U_{DS,sat})^2 \right]$$

- ⇒
- Hohe Beweglichkeit μ_n im Kanal
 - Hohe Dielektrizitätszahl ϵ_I
 - Geringe Kanallänge L
 - Dünnes Gate-Dielektrikum

Hohe Grenzfrequenz:

$$\omega_G = \frac{\mu_n U_{DS}}{L^2}$$

- ⇒
- Hohe Beweglichkeit μ_n im Kanal
 - Geringe Kanallänge L

MOSFET-Skalierung

„Constant-Field Scaling“ bzw. „Dennard Scaling“: Reduzierung aller Bauteilabmessungen und aller angelegten Spannungen um einen Skalierungsfaktor κ ; gleichzeitig Erhöhung aller Dotierungsdichten um denselben Faktor.

⇒ Interne elektrische Felder bleiben unverändert

Device Parameter	Scaling Factor
Device dimensions: d_{ox} , L , $b \dots$	$1/\kappa$
Doping concentration n_A , n_D	κ
Voltage U	$1/\kappa$



Device or Circuit Parameter	Scaling Factor
Electric field E	1
Carrier velocity v_n , v_p	1
Channel resistance R	1
Current (drift) I	$1/\kappa$
Depletion layer width (l_n , l_p , l)	$1/\kappa$
Capacitance eA/d	$1/\kappa$
Inversion-layer charge density σ_K	1
Circuit delay time / RC time constant UC/I	$1/\kappa$
Power dissipation per circuit UI	$1/\kappa^2$
Circuit density	κ^2
Power density UI/A	1

Absehbare Grenze der Skalierbarkeit: Oxid-Dicke d (Durchschlagfestigkeit, Tunnelströme)

⇒ Verwendung von „High-k Dielectrics“ mit großer Bandlücke:

material	Band gap (eV)	Relative dielectric constant	Conduction band offset (eV)	Leakage current reduction (ref SiO ₂)
SiO ₂	9	3.9	3.15	
Al ₂ O ₃	8.8	9.5-12	2.8	10^2 - 10^3
ZrO ₂	5.7-5.8	12-16	1.4-1.5	10^4 - 10^5
HfO ₂	4.5-6	16-30	1.5	10^4 - 10^5
ZrSiO ₄	~6	10-12	1.5	
HfSiO ₄	~6	~10	1.5	

Sperrschicht-FET (JFET) und Metal-Halbleiter FET (MESFET)

Betrachte Drain-Strom

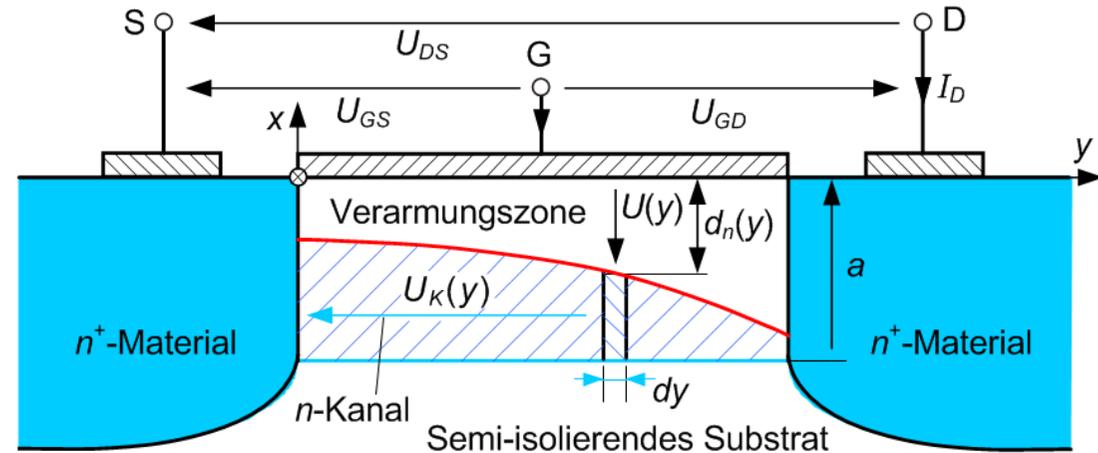
$$I_D = -\sigma_n b (a - d_n(y)) E_y$$

$$= \sigma_n b (a - d_n(y)) \frac{dU_K(y)}{dy}$$

wobei

$$U_K(y) = U_{GS} - U(y)$$

$$d_n(y) = \begin{cases} L_{Dn} \sqrt{-\frac{2[\varphi_H + U(y)]}{U_T}} \\ L_{Dn} \sqrt{\frac{2[U_D - U(y)]}{U_T}} \end{cases}$$



für MESFET (Schottky-Übergang)

für JFET (einseitig abrupter p-n-Übergang mit $n_D \ll n_A$)

⇒ Die Sperrschichtdicken für JFET und MESFET lassen sich mit äquivalenten Formeln beschreiben! Die entsprechenden Beziehungen für den MESFET erhält man, indem man U_D durch $-\varphi_H$ ersetzt.

„Pinch-Off“: Der Kanal wird am Drain-seitigen Ende abgeschnürt, wenn die über die Sperrschicht abfallende Spannung $U(L)$ hinreichend negativ wird, $U(L) = U_P < 0$ (Pinch-Off). Beim JFET ist die **Abschnürspannung** bzw. **Pinch-Off-Spannung** U_P gegeben durch

$$U_D - U_P = \frac{1}{2} U_T \left(\frac{a}{L_{Dn}} \right)^2$$

Funktionsweise des JFET bzw. MESFET

Lösen der DGL für $U_K(y)$ und Entwickeln des Ergebnisses in eine Potenzreihe führt zu:

$$I_D \approx \begin{cases} \frac{\mu_n b C'}{2L} \left[2U_{DS} (U_{GS} - U_P) - U_{DS}^2 \right] & \text{für } U_{DS} < U_{GS} - U_P \\ \frac{\mu_n b C'}{2L} \left[(U_{GS} - U_P)^2 \right] & \text{für } U_{DS} > U_{GS} - U_P \end{cases}$$

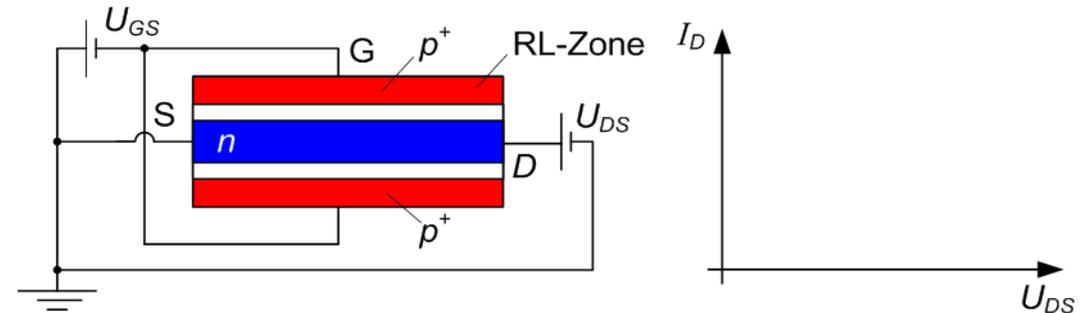
wobei $C' = \frac{\epsilon_H}{a}$

Der JFET bzw. MESFET weist ein zum MISFET äquivalentes Verhalten auf. Man erhält die Formeln für den JFET, wenn in den Beziehungen für den MISFET die Schwellenspannung U_{th} durch die Pinch-Off-Spannung U_p und der Kapazitätsbelag C_1 durch den Kapazitätsbelag C' eines in voller Breite verarmten Kanals ersetzt werden.

Verhalten des JFET:

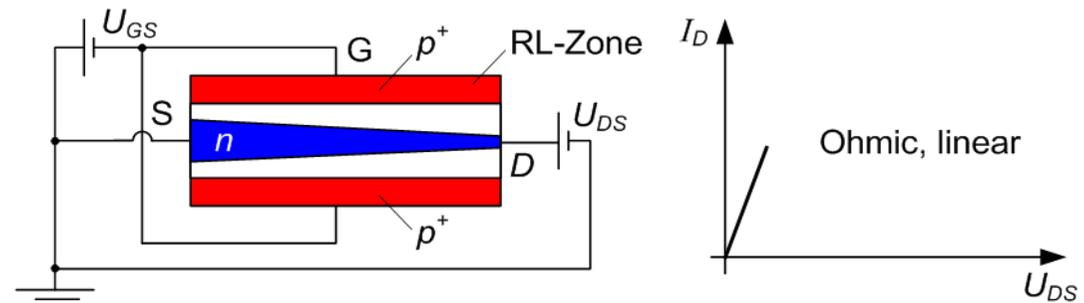
- Keine äußeren Spannungen
⇒ Kein Stromfluss

(a) $U_{GS} = 0 \text{ V}, U_{DS} = 0 \text{ V}$



- Positive Drain-Source-Spannung:**
pn-Übergang auf der Drain-Seite in Sperrrichtung vorgespannt
⇒ Verbreiterung der RLZ, macht sich bei kleinen Spannungen aber noch nicht bemerkbar, **Ohmscher Bereich**

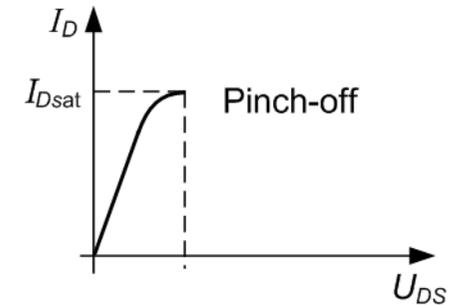
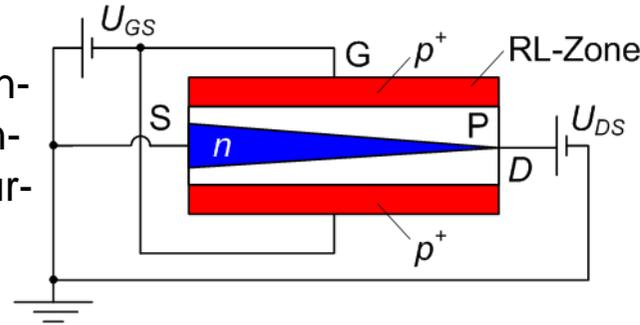
(b) $U_{GS} = 0 \text{ V}, U_{DS} > 0 \text{ V}$



Funktionsweise des JFET bzw. MESFET

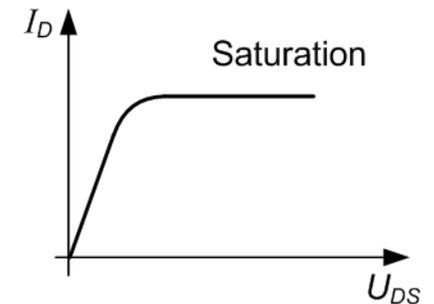
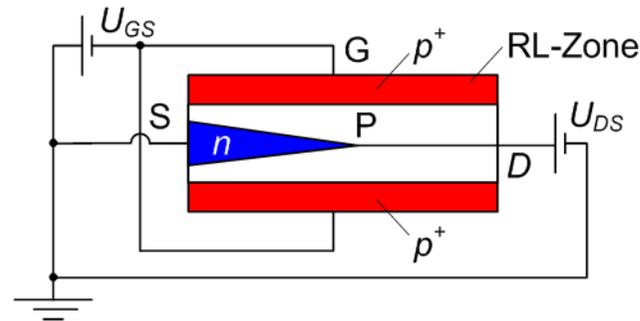
- **Abschnürbereich:** Abschnüren des leitfähigen Kanals ein Drain-seitigen Ende, sobald die Drain-Source-Spannung die Abschnür-Spannung („Pinch-off“) U_P erreicht.

(c) $U_{GS} = 0 \text{ V}$, $U_{DS} = V_{DSat}$



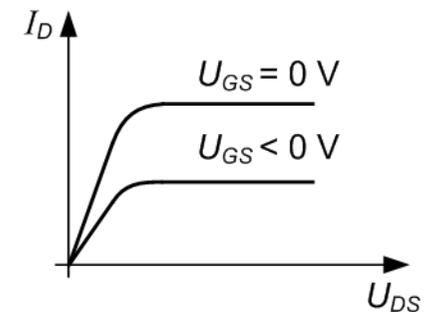
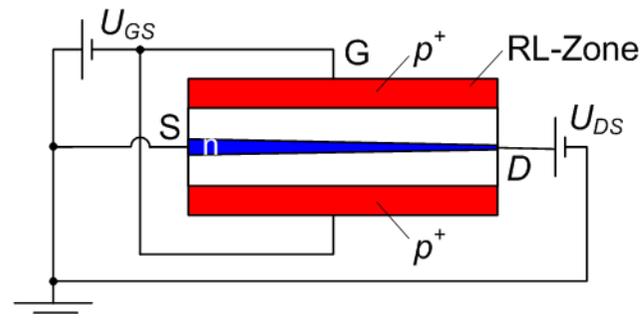
- **Sättigung:** Abschnürpunkt verschiebt sich nach links
 \Rightarrow Spannung fällt im hochohmigen Drain-seitigen Bereich des Kanals ab; Drain-Strom steigt mit wachsender Drain-Source-Spannung nicht weiter an

(d) $U_{GS} = 0 \text{ V}$, $U_{DS} > 0 \text{ V}$



- **Negative Gate-Spannung** führt zu Verbreiterung der RLZ und zur Verengung des Kanals
 \Rightarrow Kleinerer Drain-Strom; Pinch-Off wird früher erreicht

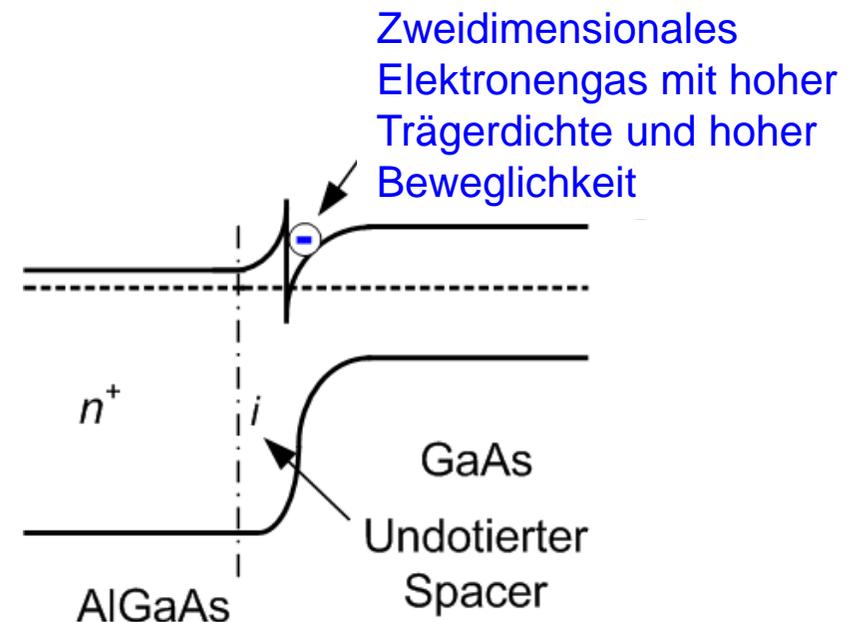
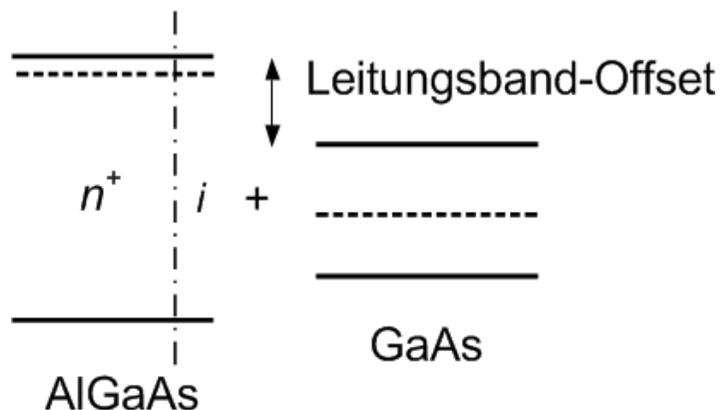
(e) $U_{GS} < 0 \text{ V}$, $U_{DS} > 0 \text{ V}$



Der High-Electron-Mobility-Transistor (HEMT)

Zielkonflikt beim Design von JFET:

- Hohe Steilheit erfordert hohe Kanalleitfähigkeit und damit starke Dotierung.
 - Starke Dotierung verringert die Beweglichkeit der Träger im Kanal und führt daher zu einer großen Transit-Zeit, d.h. das Bauteil wird langsam.
- ⇒ **Lösung:** Kanal ist undotiert; Ladungsträger werden von einem benachbarten Halbleiter mit hoher Dotierung und größerer Bandlücke geliefert
- ⇒ **High-Electron-Mobility-Transistor (HEMT)** (auch: Modulation-Doped Field-Effect Transistor, MODFET)



HEMT: Bauteilstruktur

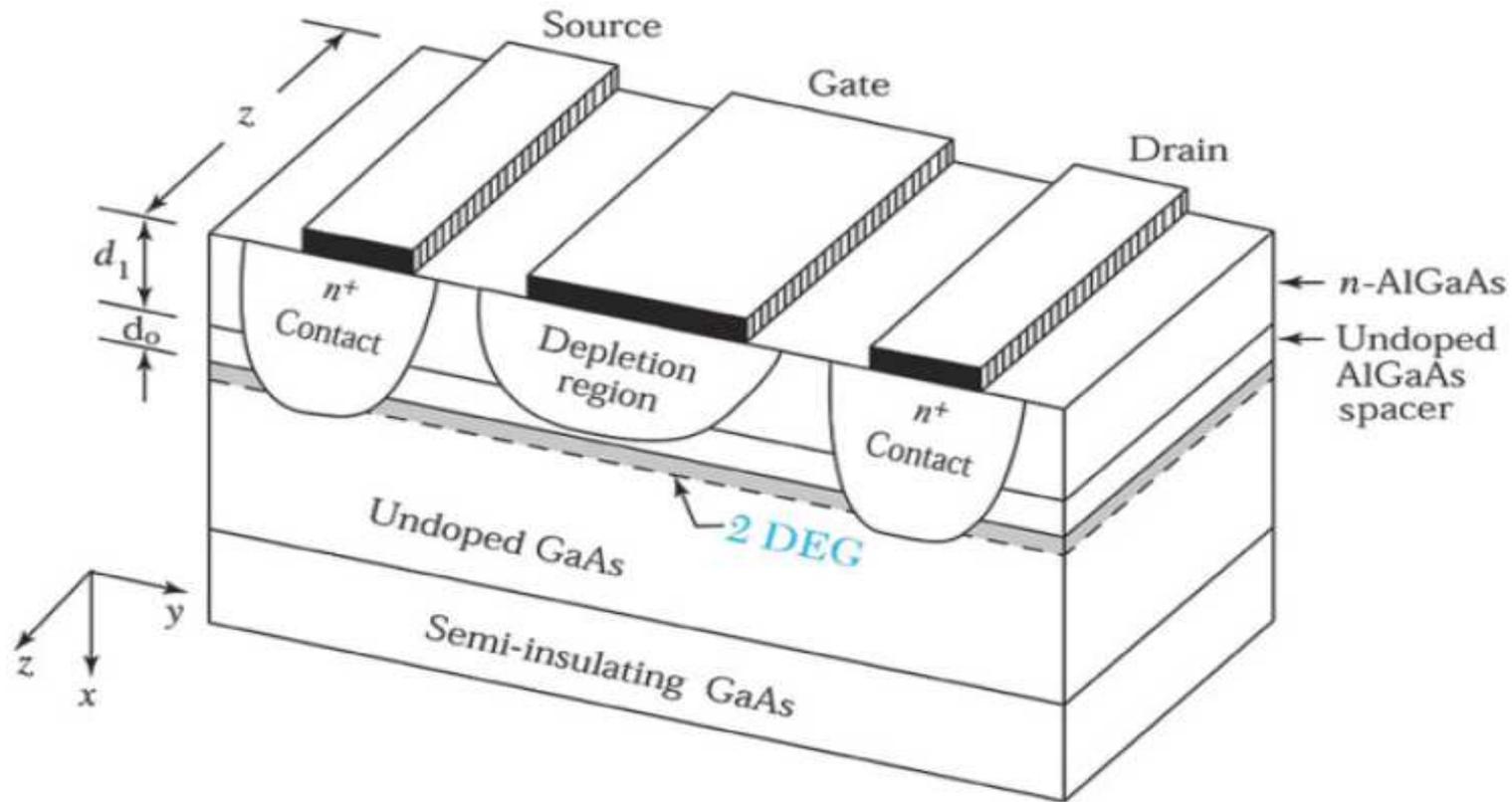
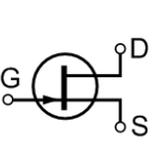
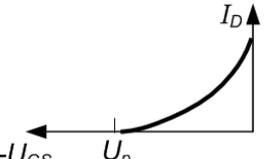
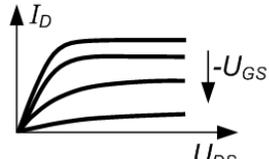
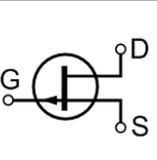
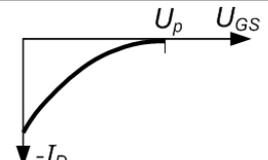
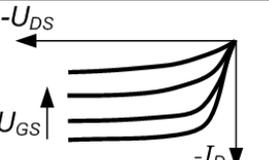
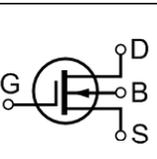
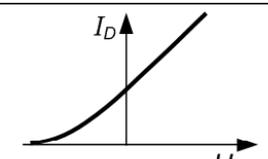
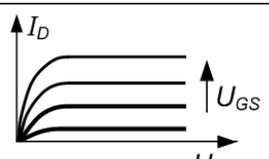
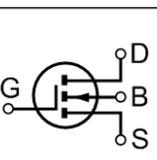
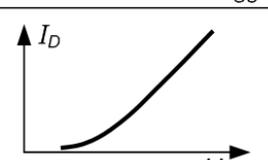
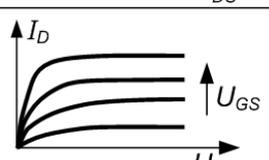
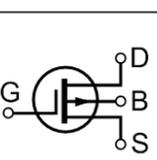
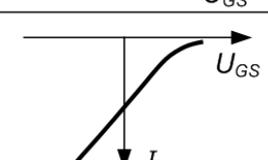
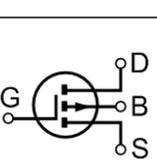
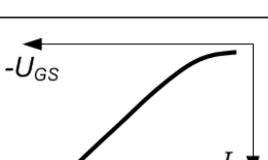


Bild nach Sze, „Semiconductor Devices: Physics and Technology“

Schaltungssymbole und Kennlinienfelder von FET

Typ	Symbol	Übertragungscharakteristik	Ausgangscharakteristik
<i>n</i> -Kanal Sperrschicht FET selbstleitend			
<i>p</i> -Kanal Sperrschicht FET selbstleitend			
<i>n</i> -Kanal MOS FET selbstleitend			
<i>n</i> -Kanal MOS FET selbstsperrend			
<i>p</i> -Kanal MOS FET selbstleitend			
<i>p</i> -Kanal MOS FET selbstsperrend			

Schaltungssymbole:

JFET / MESFET:

- Gate wird durch einen einzigen dicken Strich dargestellt
- Pfeil zeigt in Durchlassrichtung des Gate-Überganges

MISFET/MOSFET:

- Gate wird durch zwei Striche dargestellt
- Drain-Source-Linie durchgezogen für selbstleitende Bauteile bzw. unterbrochen für selbstsperrende Bauteile
- Beim *n*-Kanal-Bauteil zeigt der Pfeil zum Gate, sonst vom Gate weg („Bewegungsrichtung der Elektronen beim Schaltvorgang“)

- Kombination von p-Kanal- und n-Kanal-Feldeffekttransistoren
 - Komplementäre Ausführung jeder Logikoperation – einmal in p-Kanal und einmal in n-Kanal-Technik; dabei sperrt immer ein Transistor, während der andere leitet.
- ⇒ Stromfluss nur im Moment des Umschaltens (im Gegensatz zur Realisierung mit Arbeitswiderständen!)
- ⇒ **Sehr geringer Leistungsverbrauch**

CMOS ist heute die meistgenutzte Logik-Familie!

Beispiel: CMOS-Inverter

