UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. O. Knab
P. E. Bradley

WS 2000/2001
17.10.2000

1. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Seien A und B Teilmengen einer Menge X. Zeigen Sie:

a) $A \subseteq B \Leftrightarrow X \setminus B \subseteq X \setminus A$.

b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

i) $A \subseteq B$.

ii) $A \cap B = A$.

iii) $A \cup B = B$.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass die Menge aller Primzahlen nicht endlich ist.

Aufgabe 3 Seien X, Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Für eine Teilmenge A von X sei

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

das Bild von A unter f. Zeigen Sie für beliebige $A, B \subseteq X$:

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Zeigen Sie, dass in b) im Allgemeinen die Gleichheit nicht gilt.

Aufgabe 4 Sei $f(x)$ ein reelles Polynom. Zeigen Sie, dass genau dann $a \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von f ist, wenn $x - a$ als Faktor von f abgespalten werden kann, d. h. es ein reelles Polynom g gibt mit

$$f = (x - a) \cdot g.$$

Aufgabe 5 Zeigen Sie mittels einer Wahrheitstafel, dass für Aussagen A, B und C gilt:

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

— bitte wenden —

Aufgabe T1 Zeigen Sie, dass $\sqrt{5}$ keine rationale Zahl ist.

Aufgabe T2 Seien folgende Abbildungen $f_i\colon D_i \to \mathbb{R}$ gegeben:

$$f_1(x) = \frac{1}{x-1}, \quad f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad f_3(x) = x^2 + x + 1.$$

a) Bestimmen Sie für jede Abbildung f_i den maximalen Definitionsbereich $D_i \subseteq \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie zu jeder Abbildung f_i die Bildmenge $R(f_i) = f(D_i)$.

c) Welche der Abbildungen sind injektiv? Geben Sie zu den injektiven Abbildungen jeweils die Umkehrabbildung an.

d) Welche Kompositionen $f_i \circ f_j$ sind erlaubt?

e) Geben Sie die Abbildungsvorschrift für $f_1 \circ f_2$ explizit an.

f) Ist $f_2 \circ (f_1 \circ f_3)$ erlaubt?

Aufgabe T3

a) Zeigen Sie, dass für reelle $a > 0$ stets

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

ist.

b) Spalten Sie bei folgenden reellen Polynomen gemäß Aufgabe 4 so viele Linearfaktoren wie möglich ab:

i) $f(x) = x^4 - x^3 - x + 1$.

ii) $g(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

iii) $h(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1$.

Hinweis Die mit **T** gekennzeichneten Aufgaben sind für die Tutorien gedacht.

Übungsklausuren Die Übungsklausuren zur Höheren Mathematik I finden am Samstag, den 9.12.2000, und am Samstag, den 3.2.2001, jeweils von 8.00 bis 10.00 Uhr statt.

Vordiplom Die Vordiplomklausur zur HM I findet am Montag, den 26.3.2001 von 8.00 bis 10.00 Uhr statt. Der Anmeldeschluss hierfür ist am 9.3.2001 um 11.30 Uhr.