UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. O. Knab
P. E. Bradley

WS 2000/2001
24.10.2000

2. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1

a) Entwickeln Sie $\frac{1}{7}$ in einen Dualbruch.

b) Entwickeln Sie allgemein $\frac{1}{2^m-1}$ für $m \in \mathbb{N}$ in einen Dualbruch.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass eine endliche Menge mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen genau 2^n Teilmengen besitzt.

Aufgabe 3 Entscheiden Sie, ob folgende Mengen ein Minimum, Maximum, Infimum oder Supremum in $\mathbb{R}$ besitzen und bestimmen Sie diese Werte gegebenenfalls.

a) $A = \{x^2 - x + 2 \mid x \in \mathbb{R}\}$

b) $B = \left\{x + \frac{1}{x} \mid 1 < x \leq 4\right\}$

c) $C = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$

e) $E = \left\{\frac{x^2}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$

Aufgabe 4 Bei einem Festakt sollen sechs Reden gehalten werden. Dafür stehen 4 Regierungsvertreter, 4 Oppositionsvertreter und 2 Bürgerrechtler zur Verfügung. Es darf jeder höchstens eine Rede halten.

a) Wieviele mögliche Rednerlisten gibt es?

b) Wieviele gibt es, wenn jemand von der Regierung die erste Rede halten soll?

c) Wieviele gibt es, wenn mindestens ein Bürgerrechtler sprechen soll?

Aufgabe 5 Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

— bitte wenden —

Aufgabe T1 Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ jeweils mittels vollständiger Induktion und jeweils durch geschickte Zuhilfenahme der Binomialformel:

a) $4 + 6^n$ ist durch 5 teilbar.

b) $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ ist durch 21 teilbar.

Aufgabe T2 Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit

a) $|2\,x| > |5 - 2\,x|$.

b) $|2 - |2 - x|| \leq 1$.

c) $|x - 2| \cdot |x + 2| = 2$.

d) $|x - 1| + |x + 1| > 2$.

Aufgabe T3

a) Zeigen Sie, dass die Summe der ersten n kubischen Zahlen das Quadrat der Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist.

b) Was ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen?

Aufgabe T4 Ich „beweise“: Alle natürlichen Zahlen sind gleich! Dies geschehe mit vollständiger Induktion: $1 = 1$ ist der Induktionsanfang. Sind nun die ersten n natürlichen Zahlen gleich, so folgt aus $(1 = \cdots =)n - 1 = n$ auch $n = n + 1$. Dann sind die ersten $n + 1$ natürlichen Zahlen gleich. Dies war der Induktionsschluss. Vollständige Induktion besagt dann, dass alle natürlichen Zahlen gleich sind.
Wo steckt der Fehler?