UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. O. Knab
P. E. Bradley

WS 2000/2001
20.10.2000

## Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

## Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

### Aufgabe 1

**a)** Die nächstgrößere Zweierpotenz nach 7 ist $8 = 2^3$. Deshalb schreiben wir

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{7 \cdot 2^3},$$

was uns die ersten Ziffern der Dualbruchentwicklung liefert:

$$0,001.$$

Die nächstgrößere Zweierpotenz nach $7 \cdot 2^3$ ist $8 \cdot 2^3 = 2^6$. Daher

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{7 \cdot 2^6},$$

und wir entwickeln weiter:

$$0,001001.$$

Dies läßt uns vermuten, dass die Dualbruchentwicklung von $\frac{1}{7}$ einfach $0,\overline{001}$ ist. Wegen $7 = 2^3 - 1$ verweisen wir nun auf den Aufgabenteil b).

**b)** Die nächstgrößere Zweierpotenz nach $2^m - 1$ ist natürlich $2^m$, und es ist

$$\frac{1}{2^m - 1} = \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m(2^m - 1)}.$$

Wir bekommen also ein Anfangsstück des Dualbruchs:

$$0,0\ldots01$$

mit der Eins an der $m$–ten Stelle nach dem Komma. Wir wollen nun nachweisen, dass

$$0,\overline{\underbrace{0\ldots0}_{m-1}1}$$

die Dualbruchentwicklung von $\frac{1}{2^m-1}$ ist. Dies geschehe mit vollständiger Induktion nach der Anzahl der auftretenden Einsen. Der Induktionsanfang: „Die erste 1 tritt an der $m$–ten Stelle nach dem Komma auf.“ wurde eben erledigt. Für den Induktionsschritt seien die ersten $n$ Einsen wie gewünscht platziert, d. h. es trete für $k \leq n$ die $k$–te 1 an der $mk$–ten Stelle nach dem Komma auf. Wir haben zu zeigen, dass dann die $n+1$–te 1 an der $m(n+1)$–ten Stelle nach dem Komma auftritt. Die Induktionsvoraussetzung besagt

$$\frac{1}{2^m-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{mk}} + \text{Rest} \quad \text{mit Rest} < \frac{1}{2^{mn}}.$$

Diesen Rest bestimmen wir nun. Die Potenzsumme ergibt gemäß der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{mk}} &= \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{mk}} = \frac{1}{2^m} \frac{\left(\frac{1}{2^m}\right)^n - 1}{\frac{1}{2^m} - 1} = \frac{\frac{1}{2^{mn}}\left(1-2^{mn}\right)}{1-2^m} = \frac{2^{mn}-1}{2^{mn}\left(2^m-1\right)} \\ &= \frac{1}{2^m-1} - \frac{1}{2^{mn}\left(2^m-1\right)}.\end{aligned}$$

Damit haben wir den Rest: $\frac{1}{2^{mn}(2^m-1)} < \frac{1}{2^{mn}}$. Die nächste Zweierpotenz, die größer ist als dessen Nenner, lautet $2^{m(n+1)}$. Damit entwickeln wir einen Schritt weiter:

$$\frac{1}{2^{mn}\left(2^m-1\right)} = \frac{1}{2^{m(n+1)}} + \frac{1}{2^{m(n+1)}\left(2^m-1\right)},$$

also

$$\frac{1}{2^m-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^{mk}} + \text{Rest} \quad \text{mit Rest} < \frac{1}{2^{m(n+1)}},$$

und die $(n+1)$–te 1 steht an der $m(n+1)$–ten Stelle.

**Aufgabe 2** Eine endliche Menge mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen hat genau eine Teilmenge mit Null Elementen (nämlich die leere Menge), genau $n$ einelementige Teilmengen, genau $n(n-1) = \binom{n}{2}$ zweielementige Teilmengen ...
Für $k \leq n$ haben wir ja genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, $k$ Elemente aus unserer Menge auszuwählen. Deshalb hat die Menge eben soviele $k$–elementige Teilmengen. Insgesamt macht dies

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n \quad \text{(Binomialformel!)}$$

Teilmengen.

**Aufgabe 3**

**a)** Es ist eine quadratische Ergänzung hilfreich: $x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$. Wir sehen, dass der Term für $x \neq \frac{1}{2}$ positiv wird, der ganze Ausdruck für $x = \frac{1}{2}$ also minimal wird. Dieser minimale Wert $\frac{7}{4}$ ist damit sowohl das Minimum als auch das Infimum der Menge $A$.

Da es für jede natürliche Zahl $n$ ein $x$ gibt mit $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > n$, nämlich etwa $x = n+1$:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > n,$$

ist $A$ nach oben unbeschränkt, es existieren also weder Maximum noch Supremum.

**b)** Jedenfalls gilt für alle reellen $x$ mit $1 < x \leq 4$:

$$2 \leq x + \frac{1}{x}.$$

Diese Ungleichung wurde auf dem 1. Übungsblatt bewiesen. Da für $x \neq 1$ stets $(x-1)^2 > 0$, folgt sogar

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(x-1)^2 + 2 > 2.$$

Also ist $2 \notin B$. Wir behaupten aber: 2 ist das Infimum von $B$. Dazu müssen wir zeigen, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x$ mit $1 < x \leq 4$ und $x + \frac{1}{x} < 2 + \varepsilon$ gibt. Da für natürliche $n > \frac{1}{\varepsilon}$ gilt: $\varepsilon > \frac{1}{n}$, genügt es, die Existenz eines $x$ mit $1 < x \leq 4$ und $x + \frac{1}{x} < 2 + \frac{1}{n}$ nachzuweisen. Da wohl $x$ nahe der 1 sein muss, setzen wir

$$x = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}.$$

Und in der Tat ist

$$\frac{n+1}{n} + \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 + n^2}{n(n+1)} = \frac{2(n^2+n)+1}{n(n+1)} = 2 + \frac{1}{n(n+1)} < 2 + \frac{1}{n}.$$

Es ist also 2 das Infimum von $B$. Wegen $2 \notin B$ hat $B$ kein Minimum.

Nun behaupten wir, dass $x + \frac{1}{x} - \left(4 + \frac{1}{4}\right) \leq 0$ für $1 < x \leq 4$ ist. In der Tat ist

$$x\left(x + \frac{1}{x} - \left(4 + \frac{1}{4}\right)\right) = x^2 - \left(4 + \frac{1}{4}\right)x + 1 = (x-1)\left(x - \frac{1}{4}\right) \leq 0$$

für $1 < x \leq 4$. Da $x$ positiv ist, folgt die Behauptung. Somit ist $4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$ als das Maximum und damit auch als das Supremum von $B$ nachgewiesen.

**c)** Es ist für $n \in \mathbb{N}$ jedenfalls $-1 < (-1)^n + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{2}$. Sei $\varepsilon > 0$. Für ungerades natürliches $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ist

$$(-1)^n + \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{n} < -1 + \varepsilon.$$

Also ist $-1$ das Infimum von $C$. Wegen $-1 \notin C$ hat $C$ kein Minimum.

Damit $(-1)^n + \frac{1}{n}$ maximal werden soll, muss notwendigerweise $n$ gerade sein. Dann wird $\frac{1}{n}$ aber maximal $\frac{1}{2}$. Und für $n = 2$ ist tatsächlich $\frac{3}{2} = (-1)^2 + \frac{1}{2} \in C$. Es ist daher das Supremum gleich dem Maximum von $C$ gleich $\frac{3}{2}$.

**d)** Genau dann ist $x^2 \leq 2$, wenn $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ nicht positiv ist. Genau dann ist aber $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. Infimum und Minimum von $D$ ist daher $-\sqrt{2}$, Supremum und Maximum ist $\sqrt{2}$.

**e)** Es ist $0 \leq \frac{x^2}{1+x^2} < 1$. Für $x = 0$ wird $\frac{x^2}{1+x^2}$ Null, also ist das Infimum von $E$ gleich dessen Minimum: 0. Sei $\varepsilon > 0$. Für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$. Dann ergibt sich mit $x = n$:

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - 1}{n^2} < \frac{n^2}{1+n^2},$$

da $(n^2-1)(1+n^2) = n^4 - 1 < n^4$. Also ist das Supremum von $E$ gleich 1. $E$ hat kein Maximum.

**Aufgabe 4**

**a)** Es stehen 10 Redner zur Verfügung. Davon sind 6 auszuwählen. Hierzu gibt es $\binom{10}{6}$ Möglichkeiten. Da Listen geordnet sind und sich die 6 Redner auf 6! verschiedene Weisen anordnen lassen, gibt es

$$\binom{10}{6}6! = \frac{10!}{6! \cdot 4!}6! = \frac{10!}{4!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$$

mögliche Rednerlisten.

**b)** Für die Auswahl des ersten Redners gibt es 4 Möglichkeiten. Es verbleiben noch 9 Redner, von denen 5 auszuwählen sind. Diese 5 lassen sich wiederum auf 5! verschiedene Möglichkeiten anordnen. Somit gibt es

$$4 \cdot \binom{9}{5}5! = 4 \cdot \frac{9!}{4!} = 4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 60480$$

mögliche Rednerlisten.

**c)** Zunächst bestimmen wir die Anzahl der Listen, auf denen *kein* Bürgerrechtler vorkommt. Es sind also aus 8 Rednern 6 auszuwählen und anschließend anzuordnen. Dies ergibt

$$\binom{8}{6}6! = \frac{8!}{2!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 20160$$

Möglichkeiten. Diese Zahl ist von der Zahl aller Rednerlisten abzuziehen. Dann verbleiben noch $151200 - 20160 = 131040$ Rednerlisten.

**Aufgabe 5** Wir führen vollständige Induktion nach $n$ durch.
Für $n = 1$ stimmt die Formel.
Gilt sie für $n > 1$, so haben wir nachzuweisen, dass

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

ist. Es ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{I.V.}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}.$$

Der Zähler des letzten Bruchs ist gleich

$$(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1)) = (n+1)(2n^2 + 7n + 6),$$

wohingegen der Zähler des erwünschten Bruchs gleich

$$(n+1)(n+2)(2n+3) = (n+1)(n^2 + 7n + 6)$$

ist. Beide Brüche sind also gleich, und die Formel gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

### Aufgabe T1

**a)** **Geschickte Zuhilfenahme der Binomialformel:** Es ist

$$4+6^n = 4+(5+1)^n = 4+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 5^k = 4+1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot 5^k = 5+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot 5^k.$$

Da die Binomialkoeffizienten natürliche Zahlen sind, erkennen wir alle auftretenden Summanden als durch 5 teilbar.

**vollständige Induktion:** Für $n=1$ ist der Ausdruck durch 5 teilbar: $4+6^1 = 10 = 2\cdot 5$. Sei nun $4+6^n$ durch 5 teilbar. Dann ist $4+6^{n+1} = 4+6\cdot 6^n = 4+6^n+5\cdot 6^n$ ebenfalls durch 5 teilbar.

**b)** **Geschickte Zuhilfenahme der Binomialformel:** Untersuchen wir erst einmal den zweiten Summand:

$$\begin{aligned} 5^{2n-1} &= 5\cdot\left(5^2\right)^{n-1} = 5\cdot(21+4)^{n-1} = 5\cdot\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\cdot 21^k\cdot 4^{n-1-k}\right) \\ &= 5\cdot 4^{n-1}+5\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}\cdot 21^k\cdot 4^{n-1-k}. \end{aligned}$$

Hiervon ist der zweite Summand durch 21 teilbar. Übrig bleibt nun insgesamt:

$$4^{n+1}+5\cdot 4n-1 = (4^2+5)\cdot 4^{n-1} = 21\cdot 4^{n-1}.$$

Also ist der ganze Ausdruck $4^{n-1}+5^{2n-1}$ durch 21 teilbar.

**vollständige Induktion:** Der Induktionsanfang gelingt: $4^{1+1}+5^{2\cdot 1-1} = 21$. Ist nun $4^{n+1}+5^{2n-1}$ durch 21 teilbar, so ist es auch

$$\begin{aligned} 4^{n+2}+5^{2n+1} &= 4\cdot 4^{n+1}+5^2\cdot 5^{2n-1} = 4\cdot 4^{n+1}+(4+21)\cdot 5^{2n-1} \\ &= 4\cdot\left(4^{n+1}+5^{2n-1}\right)+21\cdot 5^{2n-1}. \end{aligned}$$

### Aufgabe T2

**a)** $|2x| > |5-2x|$ besagt, dass notwendig $x \neq 0$ sein muss. Für $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt aber

$$\begin{aligned} |2x| > |5-2x| \quad&\Leftrightarrow\quad \left|\frac{5-2x}{2x}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \underbrace{\frac{5-2x}{2x}}_{=\frac{5}{2x}-1} < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{5}{2x} < 2 \Leftrightarrow \frac{2}{5}\,x > \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow\quad x > \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

**b)** Es ist

$$\begin{aligned} &|2-|2-x|| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le 2-|2-x|| \le 1 \Leftrightarrow -3 \le -|2-x| \le -1 \Leftrightarrow 1 \le |2-x| \le 3 \\ &\quad\Leftrightarrow 1 \le 2-x \le 3 \text{ oder } -3 \le 2-x \le -1 \Leftrightarrow -1 \le -x \le 1 \text{ oder } -5 \le -x \le -3 \\ &\quad\Leftrightarrow -1 \le x \le 1 \quad\text{oder}\quad 3 \le x \le 5. \end{aligned}$$

**c)** Es ist

$$|x-2|\cdot|x-2|=2 \;\Leftrightarrow\; |x^2-4|=2 \Leftrightarrow x^2-4\in\{-2,\ 2\} \Leftrightarrow x^2\in\{2,\ 6\}$$
$$\Leftrightarrow\; x\in\{\pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{6}\}.$$

**d)** Es ist

$$|x-1|+|x+1|>2 \overset{\text{alles}>0}{\Leftrightarrow} (|x-1|+|x+1|)^2=(x-1)^2+2|x^2-1|+(x+1)^2>4$$
$$\Leftrightarrow\; 2|x^2-1|+2(x^2+1)>4 \Leftrightarrow |x^2-1|+x^2+1>2.$$

Hier ist notwendig $x^2>1$, da sonst der Widerspruch $-(x^2-1)+x^2+1=2>2$ folgt. Damit ist unsere Ungleichung äquivalent zu

$$2x^2>2 \Leftrightarrow x^2>1 \Leftrightarrow x<-1 \quad\text{oder}\quad x>1.$$

**Aufgabe T3**

**a)** Zu zeigen ist $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2$.

Der Induktionsanfang $n=1$ gelingt: $1^2=1^3$. Der Induktionsschritt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{\text{I.V.}}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{2^2} + (n+1)^3$$

gemäß der Formel für die Summe der ersten $n$ Zahlen. Das ganze ist aber gleich

$$\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{2^2} = \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2.$$

**b)** Wir machen ein paar Versuche:

$$1,\quad 1+3=4,\quad 1+3+5=9,\quad 1+3+5+7=16,\ \ldots$$

Die Summe scheint stets eine Quadratzahl zu sein. Aber welche? Sehen wir genauer hin und beachten, dass jede ungerade Zahl die Gestalt $2k+1$ mit $k=0,1,2,\ldots$ hat:

$$1=1^2,\ 1+(2\cdot1+1)=2^2,\ 1+(2\cdot1+1)+(2\cdot2+1)=3^2,$$

Wir behaupten nun

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2.$$

Der Induktionsanfang ist schon gelaufen. Für den Induktionsschritt:

$$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1)=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)+2(n+1)+1 \overset{\text{I.V.}}{=} (n+1)^2+2(n+1)+1=n^2+4n+4=(n+2)^2.$$

**Aufgabe T4** Der Fehler steckt schon beim allerersten Induktionsschritt: von 1 auf 2. Aus $1=1$ kann nämlich nicht auf jener Weise, wie ich es vorschlug, auf $1=2$ geschlossen werden.