

3. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass ein reelles Polynom ungeraden Grades mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie zu folgenden Gleichungen alle Lösungen in $\mathbb{C}$:

- a) $z^5 = 1 - i$,
- b) $z^2 - 2z + 3 = 0$,
- c) $z^3 + 8 = 0$,
- d) $\bar{z} = z^3$,
- e) $z^4 - z^3 - z + 1 = 0$.

Aufgabe 3

- a) Zeigen Sie, dass für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ stets die Vektoren $\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$ linear abhängig sind.
- b) Zeigen Sie, dass nur der Nullvektor auf allen Vektoren des $\mathbb{R}^3$ senkrecht steht.

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass sich die drei Seitenhalbierenden eines echten Dreiecks (d. h. dessen Eckpunkte nicht auf einer gemeinsamen Gerade liegen) in genau einem Punkt schneiden.

Hinweis: In welchem Verhältnis teilt der Schnittpunkt zweier Seitenhalbierenden diese?

Aufgabe 5 Gegeben sei in $\mathbb{R}^2$ eine Gerade

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

- a) Bestimmen Sie die Hesse–Normalform von g .
- b) Welchen Abstand von g hat der Punkt A , dessen Ortsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ ist?
- c) Liegt A auf der selben Seite von g wie der Ursprung O (dessen Ortsvektor $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist)?
- d) Spiegeln Sie A an g , und bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunkts A' .

Aufgabe T1

- a) Seien $n > 1$ und $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ eine n -te Einheitswurzel (von 1). Zeigen Sie:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k = 0.$$

- b) Welche n -ten Einheitswurzeln $\zeta \in \mathbb{C}$ haben die Eigenschaft, dass $\zeta^n = 1$, aber für $k = 1, \dots, n-1$ stets $\zeta^k \neq 1$ ist?

Solche n -ten Einheitswurzeln heißen *primitiv*.

- c) Wieviele primitive 169-te Einheitswurzeln gibt es?
- d) Seien m und n teilerfremde natürliche Zahlen, ζ_1 eine primitive m -te und ζ_2 eine primitive n -te Einheitswurzel. Für welche Zahl N ist $\zeta_1 \cdot \zeta_2$ primitiv?
- e) Wieviele 21-te und wieviele 63-te primitive Einheitswurzeln gibt es?

Aufgabe T2

 Skizzieren Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$:

- a) $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - (-1 - i)| = |z - (2 + i)|\}$
- b) $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2) \leq 1\}$
- c) $C = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{7}{4}\pi\}$
- d) $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \frac{i+1}{2}| \geq \frac{1}{8}\} \cap (\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \frac{3}{2}| \leq \frac{1}{3}\})$

Aufgabe T3

 Sei $z = 1 + i \in \mathbb{C}$. Stellen Sie folgende Zahlen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar:

- a) z^{10} ,
- b) $\frac{1}{z}$,
- c) $\bar{z}^2 + \frac{2}{z^2}$.

Aufgabe T4

 Gegeben seien Punkte A, B, C in $\mathbb{R}^3$ mit zugehörigen Ortsvektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Wie lautet die Hesse-Normalform der durch $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Ebene E ?
- b) Welchen Abstand hat der durch $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegebene Punkt P von der Ebene E ?