

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt
Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Ist $z \in \mathbb{C}$ Nullstelle eines Polynoms $f(x)$ mit *reellen* Koeffizienten, dann ist auch $\bar{z}$ eine Nullstelle. Hat ein reelles Polynom keine reelle Nullstelle, so treten seine Nullstellen immer in Paaren $z, \bar{z} \in \mathbb{C}$ auf. Deren Vielfachheiten sind gleich: ist etwa die Vielfachheit m von z kleiner als die Vielfachheit von $\bar{z}$, so hat das reelle Polynom $\frac{f}{(x-z)^m(x-\bar{z})^m}$ in $\bar{z}$ eine Nullstelle, aber nicht in z . Widerspruch. Der Grad eines derartigen Polynoms ist aber stets eine gerade natürliche Zahl.

Aufgabe 2

- a) Die Polarkoordinaten von $1 - i$: $|1 - i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. $\arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$ (Skizze!). Also $1 - i = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$.

Dann sind die 5-ten Wurzeln von $1 - i$ die Zahlen z_k mit $|z_k| = 2^{\frac{1}{10}}$ und $\arg(z_k) = -\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}$, $k = 1, \dots, 5$. D. h. $z_k = 2^{\frac{1}{10}} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) \right)$.

- b) Es ist $z^2 - 2z + 3 = (z - 1)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)^2 = -2 \Leftrightarrow z = 1 \pm \sqrt{2}i$.
- c) Es ist $z^3 + 8 = (z + 2)(z^2 - 2z + 4) = (z + 2)((z - 1)^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow z = -2$ oder $(z - 1)^2 = -3 \Leftrightarrow z = 1 \pm \sqrt{3}i$.

- d) Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn sowohl ihre Beträge als auch ihre Argumente bis auf Vielfache von 2π übereinstimmen. Für $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ hat hier zu gelten:

Beträge: $r^3 = r \Leftrightarrow 0 = r^3 - r = r(r^2 - 1) = r(r - 1)(r + 1) \Leftrightarrow r \in \{0, 1\}$, da Beträge nicht negativ sind.

Argumente: $-\varphi = 3\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (Argumente sind nur bis auf Vielfache von 2π eindeutig bestimmt!)

$$\Leftrightarrow \varphi = -\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \varphi \in \{0, \pm\frac{\pi}{2}, \pi\} \text{ (Wähle } -\pi < \varphi \leq \pi).$$

Dann ist die Lösungsmenge gleich $\mathbb{L} = \{0, \pm i, \pm 1\}$.

- e) Es ist

$$\begin{aligned} z^4 - z^3 - z + 1 &= (z - 1)(z^3 - 1) = \\ &= (z - 1)^2(z^2 + z + 1) = (z - 1)^2 \left(\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow z &= 1 \text{ oder } \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow z = 1 \text{ oder } z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

- a) Es ist $\vec{a} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{o}$.
- b) Steht der Vektor $\vec{x}$ auf allen Vektoren des $\mathbb{R}^3$ senkrecht, so steht er auch auf sich senkrecht. Dann gilt aber $0 = \vec{x} \cdot \vec{x} = |\vec{x}|^2 \Rightarrow |\vec{x}| = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{o}$.

Aufgabe 4 Legen wir den Ursprung O auf eine der 3 Ecken und bezeichnen die anderen beiden mit A und B und nennen die zugehörigen Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Zwei Seitenmitten haben wir: M_a mit $\overrightarrow{OM_a} = \frac{1}{2}\vec{a}$ und M_b mit $\overrightarrow{OM_b} = \frac{1}{2}\vec{b}$. Die entsprechenden Seitenhalbierenden sind dann

$$s_a: \vec{x} = \vec{b} + \lambda \overrightarrow{BM_a} = \vec{b} + \lambda \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} \right) = \frac{\lambda}{2}\vec{a} + (1 - \lambda)\vec{b}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

$$s_b: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \overrightarrow{AM_b} = \vec{a} + \mu \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} \right) = \frac{\mu}{2}\vec{b} + (1 - \mu)\vec{a}, \quad 0 \leq \mu \leq 1.$$

Schnittbedingung:

$$\left(\frac{\lambda}{2} + \mu - 1 \right) \vec{a} + \left(1 - \lambda - \frac{\mu}{2} \right) \vec{b} = \vec{o}.$$

Da das Dreieck ein echtes ist, sind $\vec{a}, \vec{b}$ linear unabhängig, also ist äquivalent

$$\begin{array}{lcl} I: \frac{\lambda}{2} + \mu = 1 & \xleftrightarrow{-\frac{1}{2}II+I} & \frac{3}{4}\mu = \frac{1}{2} \\ II: \lambda + \frac{\mu}{2} = 1 & \Leftrightarrow & \lambda + \frac{\mu}{2} = 1 \Leftrightarrow \mu = \lambda = \frac{2}{3}. \end{array}$$

Der Schnittpunkt von zwei Seitenhalbierenden unterteilt diese jeweils im Verhältnis 2 : 1, damit müssen dann notwendigerweise alle Schnittpunkte von je zwei Seitenhalbierenden zusammenfallen.

Aufgabe 5

- a) Gesucht: ein Normalenvektor in $\mathbb{R}^2$ auf g . Genauer: auf dem Richtungsvektor. Hier:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ steht senkrecht auf } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor muss normiert werden: $\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Abstand d zum Ursprung O : $d = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Damit HNF:

$$g: \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

- b) Zerlege $\vec{a}$ in eine Komponente längs g und eine senkrecht auf g : $\vec{a} = \vec{l} + \vec{n}$ mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{l} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Der Abstand von g und A ist dann $|\vec{n} - d\vec{n}_0| = \left(3 - \frac{1}{2} \right) \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \frac{5}{2}\sqrt{2}$.

- c) $\vec{n}$ und $\vec{n}_0$ zeigen in dieselbe Richtung, also muss die Gerade g zwischen O und A liegen.
- d) Zerlegen wir $\vec{a}'$ in Komponenten längs und senkrecht auf g , so haben wir: $\vec{a}' = \vec{l} + \vec{n}'$ mit $\vec{n}' = -\vec{n} + 2\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} -3 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 3 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$, also $\vec{a}' = \begin{pmatrix} -5 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Dass für $\vec{n}'$ noch zweimal $\vec{n}_0$ dazu addiert wird, liegt daran, dass wir bei Spiegelung an g den Fehler bei der einfacheren Spiegelung an O ($-\vec{n}$) wieder wett machen müssen. (Skizze!)

Aufgabe T1

- a) Es ist für $\zeta \neq 1$ und $n > 1$: $\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k = \frac{\zeta^n - 1}{\zeta - 1} = 0$, da ζ eine n -te Einheitswurzel ist.
- b) Die von 1 verschiedenen n -ten Einheitswurzeln haben die Gestalt $\zeta^\nu = \cos\left(\frac{2\nu\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\nu\pi}{n}\right)$ mit $\nu = 1, \dots, n-1$. Nun gilt für $k = 1, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned} (\zeta^\nu)^k = 1 &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\nu k\pi}{n}\right) = 1 \text{ und } \sin\left(\frac{2\nu k\pi}{n}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2\nu k\pi}{n} \text{ ist ganzzahliges Vielfaches von } 2\pi \Leftrightarrow n \text{ teilt } \nu k. \end{aligned}$$

Dann ist notwendig $\text{ggT}(n, \nu) \neq 1$, wobei $\text{ggT}(n, m)$ den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen n und m meint. Im Fall, dass $d = \text{ggT}(n, \nu) \neq 1$ ist, ist ζ^ν schon eine $k = \frac{n}{d}$ -te Einheitswurzel, da dann n ein Teiler von νk ist. Die gesuchten Einheitswurzeln sind also die ζ^ν mit $\text{ggT}(n, \nu) = 1$ ($\nu \in \{1, \dots, n-1\}$).

- c) Es ist $169 = 13^2$. Wir haben die Zahlen ν zwischen 1 und 13^2 zu zählen, die teilerfremd zu 13^2 sind, d. h. die nicht Vielfache von 13 sind. Auszuschließen sind also die Zahlen $13, 2 \cdot 13, \dots, 13 \cdot 13$. Dies sind 13 Stück. Es gibt daher $13^2 - 13 = 156$ primitive 169-te Einheitswurzeln.
- d) Jedenfalls ist $(\zeta_1 \cdot \zeta_2)^{mn} = \underbrace{(\zeta_1^m)^n}_{=1} \cdot \underbrace{(\zeta_2^n)^m}_{=1} = 1$. Wir behaupten, dass $\zeta = \zeta_1 \cdot \zeta_2$ eine primitive $m \cdot n$ -te Einheitswurzel ist. Sei dazu $k \in \{1, \dots, mn-1\}$. Dann ist $\zeta^k = \zeta_1^k \cdot \zeta_2^k$. Um nun die beiden Faktoren zu berechnen, führen wir Division mit Rest durch:

$$k = mq_1 + r_1 \text{ mit } 0 \leq r_1 < m, \quad k = nq_2 + r_2 \text{ mit } 0 \leq r_2 < n.$$

Dabei dürfen nicht beide Reste r_1, r_2 verschwinden (m, n teilerfremd!). Dann ist

$$\zeta^k = \zeta_1^{mq_1} \zeta_1^{r_1} \cdot \zeta_2^{nq_2} \zeta_2^{r_2} = \zeta_1^{r_1} \cdot \zeta_2^{r_2} \neq 1,$$

da sonst $\zeta_1^{r_1}$ auch eine n -te Einheitswurzel wäre, im Widerspruch zu $\text{ggT}(n, m) = 1$.

- e) Zunächst folgt in der Situation von d), dass bei $\text{ggT}(m, n) = 1$ jede mn -te Einheitswurzel das Produkt einer m -ten und einer n -ten Einheitswurzel ist: es sind ja $m \cdot n$ Stück. Damit folgt sofort, dass alle primitiven mn -ten Einheitswurzeln

gerade die Produkte von primitiven m -ten Einheitswurzeln mit primitiven n -ten Einheitswurzeln sind.

Es ist $21 = 3 \cdot 7$. Da beide Faktoren prim sind, gibt es 2 primitive dritte und 6 primitive 7-te Einheitswurzeln. Zusammen: $2 \cdot 6 = 12$ primitive 21-te Einheitswurzeln.

Es ist $63 = 3^2 \cdot 7$. Wie in c) finden wir $3^2 - 3 = 6$ primitive 9-te Einheitswurzeln. Da wiederum 7 prim ist, gibt es 6 primitive 7-te Einheitswurzeln. Zusammen: $6 \cdot 6 = 36$ primitive 63-te Einheitswurzeln.

Aufgabe T2 Siehe jeweils auch die Skizze.

a) A ist die Menge aller Punkte in $\mathbb{C}$, die vom Punkt $-1 - i$ denselben Abstand haben wie vom Punkt $2 + i$. Dies ist die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke der beiden Punkte.

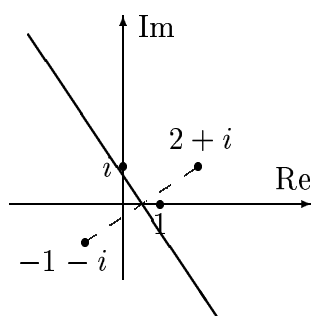
b) Es ist

$$\begin{aligned} z = x + iy \in B &\Leftrightarrow 1 \geq \operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}((x + iy)^2) = \operatorname{Re}(x^2 + 2ixy - y^2) = x^2 - y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 \leq 1 + y^2 \Leftrightarrow -\sqrt{1 + y^2} \leq x \leq \sqrt{1 + y^2}. \end{aligned}$$

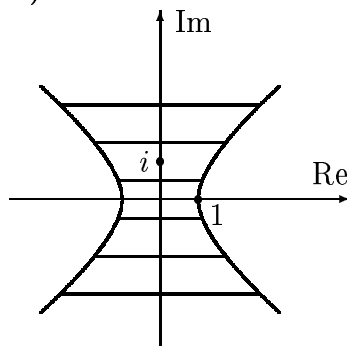
c) Es handelt sich bei der Menge C um ein Segment.

d) Aus der Kreisscheibe mit Mittelpunkt 1 und Radius 1 wird ein offenes Loch um $\frac{1+i}{2}$ mit Radius $\frac{1}{8}$ und ein abgeschlossenes Loch um $\frac{3}{2}$ mit Radius $\frac{1}{3}$ herausgeschnitten. In der Skizze bedeutet dabei der dünn gezeichnete Kreis, dass dessen Rand nicht zu D gehört.

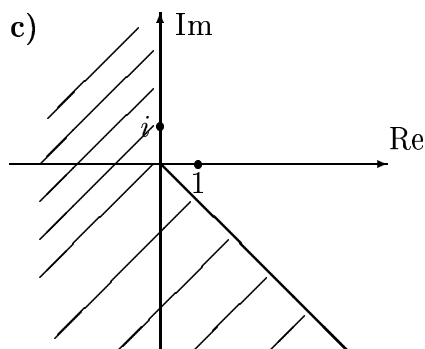
a)



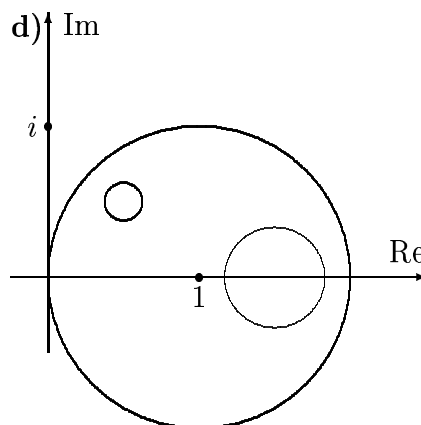
b)



c)



d)



Aufgabe T3 Es ist $z = 1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$.

a) $z^{10} = 2^5(\cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2}) = 32(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 32i$.

b) $\frac{1}{z} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1-i}{2}$.

c) $\bar{z}^2 = (1-i)^2$ und nach b): $\frac{2}{z^2} = \frac{(1-i)^2}{2}$.

Also $\bar{z}^2 + \frac{2}{z^2} = \frac{3}{2}(1-i)^2 = \frac{3}{2} \cdot 2(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})) = -3i$.

Aufgabe T4

a) Zwei Richtungsvektoren von E sind: $\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Senkrecht auf diesen beiden steht offensichtlich der normierte Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Abstand von E zu O ist $\vec{n} \cdot \vec{a} = 1$. Damit lautet die HNF von E : $z - 1 = 0$.

b) Zerlege $\vec{p}$ in eine Komponente in E und eine Komponente senkrecht auf E : $\vec{p} = \vec{c} - \vec{a} + 2\vec{n}$. Damit hat P den Abstand 1 von E .