

4. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Gegeben seien drei Ebenen in $\mathbb{R}^3$:

$$E_1: -y + z - 2 = 0, \quad E_2: 3x + y + 2z - 1 = 0, \quad E_3: z - 3 = 0.$$

- a) Bestimmen Sie $S = E_1 \cap E_2 \cap E_3$.
- b) Welchen Abstand hat S von der Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} ?$$

- c) Wie lautet E in Hesse-Normalform?

Aufgabe 2

- a) Sind für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ die Vektoren $\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ linear unabhängig?
- b) Zeigen Sie, dass genau dann zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ linear abhängig sind, wenn $a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$ ist.
- c) Zeigen Sie für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$: Aus $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b} \times \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ folgt $\vec{a} = \vec{b}$.

Aufgabe 3 Gegeben seien in $\mathbb{R}^3$ die Punkte A, B, C mit den zugehörigen Ortsvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie der Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

- a) Wie groß ist die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$?
- b) Wie groß ist der Winkel bei A im Dreieck $\triangle ABC$?
- c) Wie groß ist das Volumen des Spats, der von $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ und $\vec{u}$ aufgespannt wird?

Aufgabe T1 Gegeben seien folgende Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ linear unabhängig?
- b) Sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig?
- c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ des $\mathbb{R}^3$ derart, dass $\vec{x}$ die Gerade $\{\lambda\vec{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ aufspannt und $\vec{x}, \vec{y}$ die Ebene $\{\lambda\vec{a} + \mu\vec{c} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ aufspannen.
- d) Stellen Sie $\vec{d}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ dar.

Aufgabe T2 Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass genau dann $\vec{a}, \vec{b}$ linear unabhängig sind, wenn $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe T3 Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ die Ortsvektoren der Punkte A, B, C in $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass genau dann A, B, C auf einer Gerade liegen, wenn $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$ ist.

Aufgabe T4 Gegeben sei ein echtes ebenes Dreieck $\triangle ABC$. Die Mittelpunkte der Seiten AB und AC seien D und E . Zeigen Sie, dass die Strecke DE parallel zur Seite BC ist. Bestimmen Sie das Längenverhältnis $|DE| : |BC|$.

Aufgabe T5 Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Gilt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \times (\vec{a} \cdot \vec{c})$?

Sprechzeiten Die Sprechzeiten von P. E. Bradley werden bis auf weiteres auf

dienstags 14.30 – 16.00 Uhr

verlegt.

Internet Informationen zur Vorlesung und zu Prüfungen finden Sie im Internet unter

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/>

Dort sind auch die Übungsblätter und deren Lösungen verfügbar.