

5. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Seien in $\mathbb{R}^3$ die Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

gegeben. Zeigen Sie, dass g und h *windschief* sind, d. h. weder parallel sind noch sich schneiden, und bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass die Folgen (a_n) gegen einen Wert a konvergieren, und geben Sie zu $\varepsilon = 10^{-10}$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ an, sodass für alle $n > n_0$ stets $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt:

a) $a_n = \frac{2n}{n+1}$

b) $a_n = \frac{n^2 - 3n + (-1)^n}{3n^2 - 7n + 5}$

c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n+1} + 1}}$

Aufgabe 3

- a) Sei (a_n) eine Folge positiver reeller Zahlen mit $a_{n+1} \leq \frac{1}{2}a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.
- b) Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{n!}{n^n}$ konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 4 Durch $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$ ist eine Folge gegeben. Weisen Sie mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums nach, dass die Folge konvergiert. Bestimmen Sie für $\varepsilon = 10^{-10}$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$, sodass für $m, n \geq n_0$ stets $|a_m - a_n| < \varepsilon$ ist. Bestimmen Sie schließlich den Grenzwert der Folge.

Aufgabe T1 Entscheiden Sie jeweils (Beweis oder Gegenbeispiel), ob die Folge (a_n) konvergiert, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n > n_0$ gilt:

- a) $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon,$
- b) $|a_n| < 2\varepsilon^2,$
- c) $|a_n + a_{n+1}| < \varepsilon,$
- d) $|a_n \cdot a_{n+1}| < \varepsilon,$
- e) $|a_n \cdot a_m| < \varepsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert der Folge.

Aufgabe T2 Bestimmen Sie die Häufungspunkte aller nachstehenden Folgen (a_n) :

- a) $a_n = \frac{2^n + (-3)^n}{(-2)^n + 3^n}$
- b) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ durch } 17 \text{ teilbar ist} \\ (-1)^n & \text{sonst} \end{cases}$
- c) $a_n = \sqrt{(-1)^n n + n^2} - \sqrt{n + n^2}$

Aufgabe T3 Machen Sie sich nochmals klar, dass für konvergente Folgen $(a_n), (b_n)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = a/b.$$

Letzteres gilt natürlich nur, falls $b \neq 0$ ist.

Aufgabe T4 Sei eine Folge (a_n) rekursiv wie folgt definiert:

$$a_0 = 0, \quad a_{2n} = \frac{1}{2} a_{2n-1}, \quad a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge.

Internet Informationen zur Vorlesung und zu Prüfungen finden Sie im Internet unter

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/>

Dort sind auch die Übungsblätter und deren Lösungen verfügbar.