UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. O. Knab
P. E. Bradley

WS 2000/2001
17.11.2000

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Die Geraden sind sicher nicht parallel, denn ihre Richtungen sind linear unabhängig. Dass sie sich nicht schneiden, zeigen wir, indem wir nachweisen, dass die Differenz $\vec{d}$ ihrer gegebenen Stützvektoren nicht in der Ebene E liegt, die von ihren Richtungen aufgespannt wird. Dabei wird auch der Abstand von g und h herauskommen.

Es ist $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Zu zeigen: orthogonale Projektion von $\vec{d}$ auf Normalenrichtung von E ist nicht der Nullvektor. Genauer: dessen Länge (= Abstand von g und h) ist zu bestimmen.

Normaleneinheitsvektor auf E: $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (normiertes Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren).

Länge der Orthogonalprojektion von $\vec{d}$ auf $\vec{n}$–Richtung: $|\vec{d} \cdot \vec{n}| = |\frac{3}{\sqrt{13}}|$.

Aufgabe 2

a) Es ist $a_n = \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}}$ und konvergiert gegen 2. Weiter ist $|a_n - 2| = \left|\frac{2-2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{1}{n}}\right| = \frac{2}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Hier etwa $n_0 = 10^7$ wählbar.

b) $a_n = \frac{n^2-3n+(-1)^n}{3n^2-7n+5} = \frac{1-\frac{3}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2}}{3-\frac{7}{n}+\frac{5}{n^2}}$ konvergiert gegen $\frac{1}{3}$. Weiter:

$\left|a_n - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3\left(n^2-3n+(-1)^n\right)-(3n^2-7n+5)}{3(3n^2-7n+5)}\right| = \left|\frac{-2n-5+3(-1)^n}{9n^2-21n+15}\right| < \frac{2n+8}{|9n^2-21n|} \leq \frac{2n+8n}{9n^2-21n} = \frac{10}{9n-21} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{10}{9\varepsilon} + \frac{7}{3}$. Nehmen wir hier $n_0 = 10^{11}$.

c) Hier bestimmen wir sofort für gegebenes $\varepsilon > 0$ ein n_0 mit $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$: $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n+1}+1}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{n+1}+1} > \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n+1} > \frac{1}{\epsilon^2} - 1 \Leftrightarrow n > \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)^2 - 1$. Die nächst größere natürliche Zahl kann dann als n_0 dienen, und wir sehen, dass (a_n) gegen Null konvergiert. Hier ist etwa $n_0 = 10^{40}$.

Aufgabe 3

a) Es ist $0 \leq a_{n+1} \leq \frac{1}{2}a_n \leq \frac{1}{2^2}a_{n-1} \leq \cdots \leq \frac{1}{2^n}a_1 \to 0$. Nach dem Sandwichtheorem folgt dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Wir behaupten: $a_{n+1} \leq \frac{1}{2} a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! n^n}{(n+1)^{n+1} n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \overset{\text{Bernoulli}}{\leq} \frac{1}{1+n\cdot\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$. Nach a) folgt Konvergenz von (a_n) gegen Null.

Aufgabe 4 Wir haben die Differenz von je zwei Folgegliedern abzuschätzen. Zunächst: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) - a_n = -\frac{1}{2}(a_n - a_{n-1}) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-1}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 (a_{n-1} - a_{n-2}) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a_1 - a_0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Dann aber ist

$a_{n+k} - a_n = \sum_{i=0}^{k-1} (a_{n+i+1} - a_{n+i}) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+i} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \sum_{i=0}^{k-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^i = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)$.

Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$: $|a_{n+k} - a_n| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^n} \underbrace{\left|1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right|}_{<\frac{3}{2}} < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. somit ist die Folge nach dem Cauchykriterium konvergent.

Letztere Ungleichung gilt genau dann, wenn $n > -\log_2 \varepsilon$ ist. Hier: $n_0 = 40$ wählbar ($\log_2 10^{10} = 10 \log_2 10 < 10 \cdot 4 = 40$).

Wir bestimmen nun den Grenzwert der Folge. Es ist $a_n = a_n - a_0 = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ nach dem eingangs Gesagten. Der Grenzwert ist also $\frac{2}{3}$.

Aufgabe T1

a) Etwa $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ erfüllt $|a_n - a_{n+1}| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Aber die harmonische Reihe ist bekanntlich divergent!

b) Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $\varepsilon = 2\delta^2$ für geeignetes $\delta > 0$. Dann existiert ein n_0, sodass für $n > n_0$ stets $|a_n| < 2\delta^2 = \varepsilon$ ist. Die Folge konvergiert also gegen Null.

c) Etwa $a_n = (-1)^n$ erfüllt $|a_n + a_{n+1}| = 0 < \varepsilon$. Die Folge ist jedoch divergent.

d) Die Folge $a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$ erfüllt sicher $|a_n \cdot a_{n+1}| = 0 < \varepsilon$, ist aber divergent.

e) In diesem Fall ist (a_n) konvergent mit Grenzwert Null. Wäre (a_n) keine Nullfolge, so gäbe es zu vorgegebenem ε eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, für welche stets $|a_{n_k}| \geq \sqrt{\varepsilon}$ wäre. Dann wäre aber stets $|a_{n_k}^2| \geq \sqrt{\varepsilon}^2 = \varepsilon$ im Widerspruch zur Voraussetzung!

Aufgabe T2

a) Es ist $a_n = \begin{cases} \frac{2^n+3^n}{2^n+3^n} = 1 & n \text{ gerade} \\ \frac{2^n-3^n}{-2^n+3^n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$ Die Teilfolge mit geraden Indizes hat Grenzwert 1. Die Teilfolge mit ungeraden Indizes lautet $a_n = \frac{2^n-3^n}{-2^n+3^n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{-\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$ und konvergiert gegen -1. Somit haben wir die beiden Häufungspunkte der Folge: 1 und -1.

b) Die Teilfolge $(a_{17k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen Null. Die Teilfolge mit nicht durch 17 teilbaren Indizes $a_n = (-1)^n$ hat die beiden Häufungspunkte ± 1. Die Häufungspunktmenge der gegebenen Folge ist also $\{0, \pm 1\}$.

c) Es ist $a_n = \sqrt{(-1)^n + n^2} - \sqrt{n+n^2} = \frac{(-1)^n n + n^2 - (n+n^2)}{\sqrt{(-1)^n n + n^2} + \sqrt{n+n^2}} = \frac{(-1)^n n - n}{\sqrt{(-1)^n n+n^2}+\sqrt{n+n^2}}$. Für gerade n ist a_n konstant Null. Für ungerade n ist $a_n = \frac{-2n}{\sqrt{-n+n^2}+\sqrt{n+n^2}} = \frac{-2}{\sqrt{-\frac{1}{n}+1}+\sqrt{\frac{1}{n}+1}}$ und konvergiert gegen -1. Hierbei haben wir eine weitere Rechenregel verwendet: ist $c_n \geq 0$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ ($\geq 0!$), so konvergiert die Folge $\sqrt{c_n}$ gegen $\sqrt{c}$. Denn es ist $\sqrt{c_n} - \sqrt{c} = \underbrace{(c_n - c)}_{|\,|<\frac{\varepsilon}{K}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{c_n}+\sqrt{c}}}_{|\,|\leq K} < \varepsilon$ für $n > n_0$.

Übrigens erkennen wir so auch die Folge $(\sqrt{c_n} - \sqrt{c})_{n\in\mathbb{N}}$ als Produkt einer Nullfolge mit einer beschränkten Folge. Dass ein solches Produkt gegen Null konvergiert, wollen wir in der folgenden Aufgabe kurz nachweisen.

Aufgabe T3 Die angegebenen Rechenregeln für Grenzwerte stehen im Skript. Stattdessen beweisen wir die Aussage „Nullfolge · beschränkte Folge = Nullfolge".
Seien (a_n) mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und (b_n) mit $|b_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein festes $K \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$. Da (a_n) eine Nullfolge ist, gibt es ein n_0, sodass für alle $n > n_0$ stets $|a_n| < \frac{\varepsilon}{K}$ ist. Dann ist für alle $n > n_0$

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon,$$

also $(a_n \cdot b_n)$ eine Nullfolge.

Aufgabe T4 Um die Häufungspunkte einer rekursiv definierten Folge zu bestimmen, wünschen wir uns die Folge lieber als Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$. Dazu schreiben wir uns die ersten paar Folgeglieder auf:

$$a_0 = 0,\ a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{4},\ a_3 = \frac{3}{4},\ a_4 = \frac{3}{8},\ a_5 = \frac{7}{8},\ a_6 = \frac{7}{16},\ a_7 = \frac{15}{16},\ a_8 = \frac{15}{32},\ \ldots$$

und erkennen, dass allgemein

$$a_{2k} = \frac{2^k - 1}{2^{k+1}} \quad \text{und} \quad a_{2k+1} = \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}$$

für $k = 0, 1, \ldots$ gelten könnte. Mit vollständiger Induktion bestätigen wir dies. Der Induktionsanfang ist schon durchgeführt.
Induktionsschritt: sei für alle $l \leq n$ das Folgeglied a_l wie oben beschrieben. Wir haben a_{n+1} zu bestimmen. Ist $n+1 = 2k+1$, so ist $a_{n+1} = \frac{1}{2} + a_{2k} = \frac{1}{2} + \frac{2^k-1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}$, und ist $n+1 = 2k$, so ist $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_{2k-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^k-1}{2^k} = \frac{2^k-1}{2^{k+1}}$, wie gewünscht.
Nun zu den Häufungspunkten. Für gerade $n = 2k$ konvergiert die Teilfolge $a_n = \frac{2^k-1}{2^{k+1}} = \frac{1-\frac{1}{2^k}}{2}$ gegen $\frac{1}{2}$. Die Teilfolge mit ungeraden Indizes $a_{2k+1} = \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$ konvergiert gegen 1. Somit haben wir für unsere Folge die beiden Häufungspunkte $\frac{1}{2}$ und 1.