

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt
Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe T1

- a) Hier ist natürlich vorauszusetzen, dass $a_{1001} \neq 0$ ist, sonst ist die Behauptung falsch: ist etwa $p(x)$ das Nullpolynom (alle $a_i = 0$), so nimmt die Nullfunktion nicht den Wert 1001 an.

Sei nun $a_{1001} > 0$. Dann gilt, da der Grad des Polynoms ungerade ist: $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$. Deshalb gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $p(a) < 1001$ und $p(b) > 1001$. Sei ohne Einschränkung $a < b$. Dann existiert nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen ein $x \in (a, b)$ mit $p(x) = 1001$.

Ist aber $a_{1001} < 0$, so können wir uns wie eben überlegen, dass die Polynomfunktion $-p$ den Wert -1001 annimmt. Dann nimmt p den Wert 1001 an.

- b) Ist $f = 0$ die Nullfunktion, so ist nichts zu zeigen.

Sei daher $\xi \in \mathbb{R}$ mit $f(\xi) \neq 0$. Dann ist $|f(\xi)| > 0$. Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ gibt es ein $K > |\xi|$ mit $|f(x)| < |f(\xi)|$ für alle x mit $|x| > K$.

Auf dem Intervall $[-K, K]$ jedoch nimmt die stetige Funktion $|f|$ ihr Maximum an: etwa an der Stelle $x_0 \in [-K, K]$. Da aber auch $\xi \in [-K, K]$ ist, gilt somit für alle $x \in \mathbb{R}$, dass $|f(x)| \leq |f(x_0)|$ ist.

- c) Die stetige Funktion f hat in $[a, b]$ ein Minimum, das etwa in $\xi \in [a, b]$ angenommen werde. Dann ist für alle $x \in [a, b]$: $0 \leq \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{f(\xi)}$, also die Funktion $\frac{1}{f}$ beschränkt.

Aufgabe T2

- a) Für $x \in [0, 1]$ ist $\frac{nx^2}{n^3+x^3} = \frac{x^2}{n^2+\frac{x^3}{n}} \leq \frac{1}{n^2}$, nach dem Majorantenkriterium also f gleichmäßig (und damit auch punktweise) auf $[0, 1]$ konvergent.

- b) Die Reihe ergibt: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}} = 1+x^2, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ (da $\frac{1}{1+x^2} < 1$). Damit ist f unstetig. Da die Partialsummen aber stetige Funktionen sind, kann die Konvergenz auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig sein.

- c) Da $1+x+x^2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ ist, gilt $e^{-(1+x+x^2)} \leq e^{-\frac{3}{4}} < 1$. Somit konvergiert die gegebene Funktionenreihe gleichmäßig (und damit auch punktweise) auf ganz $\mathbb{R}$.

- d) Es ist $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+\frac{1}{1+x^2}} = x^2 \cdot \frac{1+x^2}{2+x^2}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, somit liegt punktweise Konvergenz vor. Zur Gleichmäßigkeit der Konvergenz bemerken wir zunächst, dass f eine Leibnizreihe ist. Dies hat zur Folge, dass $\left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k} - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k} \right| \leq \left| \frac{(-1)^{N+1} x^2}{(1+x^2)^{N+1}} \right| = \frac{x^2}{(1+x^2)^{N+1}}$ gilt. Dann ist auch

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{x^2}{(1+x^2)^{N+1}} \right\} \stackrel{\text{Bernoulli}}{\leq} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{x^2}{1+(N+1)x^2} \right\} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{\frac{1}{x^2} + N+1} \right\} = \frac{1}{N+1}.$$

Der letzte Ausdruck konvergiert für $N \rightarrow \infty$ gegen Null. Damit gilt für die N -ten Partialsummen f_N : $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_N(x) - f(x)|$ konvergiert gegen Null, die Konvergenz ist also gleichmäßig.

Aufgabe T3 Sei $x \in [0, 1]$ fest. Zu $\varepsilon > 0$ existiert sicher ein n_0 mit $|f_n(x)| = 0 < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Also konvergiert die Folge (f_n) punktweise gegen die Nullfunktion. Da für $x_n = \frac{1}{n}$ die Folge $|f_n(\frac{1}{n})| = 2n - n = n$ unbeschränkt ist, kann die Folge $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)|$ keine Nullfolge sein. Dann ist die Konvergenz auf $[0, 1]$ auch nicht gleichmäßig.

Skizzieren wir etwa f_1, f_2, f_3 , so erkennen wir, dass die unbeschränkt höher werden Spitzen dafür sorgen, dass die Konvergenz nicht gleichmäßig ist.

Bemerkung: Diese Aufgabe ist ein eindrucksvolles Beispiel dafür, dass bei einer (punktweise) konvergenten Folge stetiger Funktionen f_n aus der Stetigkeit der Grenzfunktion im Allgemeinen *nicht* die Gleichmäßigkeit der Konvergenz folgt.

Aufgabe T4

- a) $\frac{\sqrt{x}-2}{4-x} = \frac{\sqrt{x}-2}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} = -\frac{1}{2+\sqrt{x}}$ konvergiert für $x \rightarrow 4$ gegen $-\frac{1}{4}$.
- b) Es ist $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3x^2+4}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2(x+1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-1} = 0$.
- c) Da 0 eine Nullstelle des Nenners, aber nicht des Zählers ist, existiert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+3x-4}{x^3-2x^2+7x}$ nicht in $\mathbb{R}$.
- d) Sei $a > 1$. Dann konvergiert $\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}} = \frac{(a^x)^2+1}{(a^x)^2-1}$ für $x \rightarrow -\infty$ gegen -1 .
Sei nun $a < 1$. Dann konvergiert $\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}} = \frac{1+a^{-2x}}{1-a^{-2x}}$ für $x \rightarrow -\infty$ gegen 1.
Für $a = 1$ existiert der Grenzwert nicht in $\mathbb{R}$.
- e) Der Grenzwert existiert offensichtlich nicht in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 1 Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ohne Einschränkung monoton wachsend. Ist x eine Unstetigkeitsstelle von f , so existieren Folgen (x_n^-) und (x_n^+) , die gegen x konvergieren, derart dass (x_n^-) monoton wächst, (x_n^+) monoton fällt, stets $x_n^- < x$, $x_n^+ > x$ ist und die Bildfolgen beide konvergieren mit $f(x)^- = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^-) < \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^+) = f(x)^+$ (Dass die Bildfolgen konvergieren, folgt aus der Monotonie von f : die Folge $(f(x_n^-))$ wächst,

die Folge $(f(x_n^+))$ fällt, und beide sind durch $f(x)$ beschränkt). Das nichtleere Intervall $[f(x)^-, f(x)^+]$ enthält eine rationale Zahl q_x . Da nun f monoton wächst, ist die Zuordnung

$$\{\text{Unstetigkeitsstellen von } f\} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad x \mapsto q_x$$

ebenfalls monoton wachsend, also injektiv. Somit kann f höchstens so viele Unstetigkeitsstellen haben wie es rationale Zahlen gibt, also höchstens abzählbar viele.

Aufgabe 2

- a) Ist f die Funktion $x \mapsto x$, so ist nichts zu zeigen: jeder Punkt des Intervalls $[a, b]$ ist Fixpunkt.

Im andern Fall gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) \neq \xi$. Sagen wir $f(\xi) > \xi$. Gibt es aber kein $\eta \in [a, b]$ mit $f(\eta) < \eta$, dann bleibt nichts anderes übrig als $f(b) = b$ (da ja $f(b) \in [a, b]$ gilt), und f hat einen Fixpunkt b .

Schließlich sei $\eta \in [a, b]$ mit $f(\eta) < \eta$. Dann hat die stetige Funktion

$$h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) - x,$$

in η einen negativen Wert und in ξ einen positiven Wert. Der Zwischenwertsatz besagt, dass h in $[a, b]$ eine Nullstelle besitzt, etwa in x_0 . Das heißt aber, dass x_0 ein Fixpunkt von f ist.

- b) Können wir zeigen, dass die stetige Zuordnung $f: x \mapsto \frac{x+2}{x+3}$ das Intervall $[0, 2]$ in sich selbst abbildet, so sagt uns Teil a), dass f in $[0, 2]$ einen Fixpunkt besitzt. Da für alle $x \in [0, 2]$ gilt: $0 < x + 2 < x + 3$, ist sogar stets $f(x) \in (0, 1)$. Hiermit ist alles gezeigt.
- c) Es ist $f(x) = \frac{x+2}{x+3} = \frac{x+3-1}{x+3} = 1 - \frac{1}{x+3}$, f auf $[0, 2]$ also monoton wachsend. Starten wir die Iteration mit x_1 , für das $x_1 \leq x_2 = f(x_1)$ gilt, so ist die Folge (x_n) monoton wachsend. Im Fall, dass $x_1 \geq f(x_1) = x_2$ ist, fällt die Folge (x_n) monoton (vollständige Induktion!). Da die Folge (x_n) beschränkt ist, folgt in beiden Fällen die Konvergenz.

Auch den Grenzwert können wir im Prinzip bestimmen: wegen der Stetigkeit von f gilt $\lim x_n = \lim f(x_n) = f(\lim x_n)$, also konvergiert die iterierte Folge gegen einen Fixpunkt von f .

Aufgabe 3

- a) Es gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Für $x > 0$ gilt

$$f_n(x) = \frac{x + nx^2 + nx}{1 + nx} = \frac{x/n + x^2 + x}{1/n + x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x} = x + 1.$$

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

Auf $[0, \infty)$ ist die Konvergenz nicht gleichmäßig, da die Funktion f in 0 unstetig ist, alle f_n dort aber stetig sind.

- b) Auf $[a, \infty)$ mit einem $a > 0$ liegt dagegen gleichmäßige Konvergenz vor. Dort gilt

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{x + nx^2 + nx}{1 + nx} - (x + 1) \right| = \left| \frac{x + nx^2 + nx - (x + 1)(1 + nx)}{1 + nx} \right| \\ &= \left| \frac{x + nx^2 + nx - x - nx^2 - 1 - nx}{1 + nx} \right| = \left| \frac{-1}{1 + nx} \right| \leq \frac{1}{1 + na}. \end{aligned}$$

Somit konvergiert $\sup_{x \in [a, \infty)} |f_n(x) - f(x)|$ gegen Null, die Konvergenz ist gleichmäßig.

Bemerkung: Auf dem Intervall $(0, \infty)$ ist die Konvergenz wiederum *nicht* gleichmäßig, denn es ist $\sup_{x \in (0, \infty)} \{|f_n(x) - f(x)|\} = 1$.

- c) Es gilt $p_n(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $x \in (0, 1]$, so folgt $|1 - x| < 1$ und damit

$$p_n(x) = (1 - x)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Die Funktionenfolge konvergiert also punktweise gegen die Funktion p mit

$$p(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Auf $[0, 1]$ ist diese Funktion unstetig, im Gegensatz zu den Funktionen p_n ; also kann die Konvergenz auf $[0, 1]$ nicht gleichmäßig sein.

- d) Auf $[\frac{1}{2}, 1]$ liegt jedoch gleichmäßige Konvergenz vor: Hier gilt $|1 - x| \leq \frac{1}{2}$, also

$$|p_n(x) - p(x)| = |p_n(x)| = |(1 - x)^n| = |1 - x|^n \leq 2^{-n},$$

und wie bei **a)** bedeutet dies gleichmäßige Konvergenz.

Bemerkung: Auf dem Intervall $(0, 1]$ ist die Konvergenz jedoch *nicht* gleichmäßig, denn $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in (0, 1]\} = 1$.

Aufgabe 4

- a) Setzt man $x = 1$ ein, so ergibt sich der Wert 0. Für $x \in (-1, 1)$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1 - x) = (1 - x) \sum_{n=1}^{\infty} x^n = (1 - x)x \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x(1 - x) \cdot \frac{1}{1 - x} = x.$$

Die Funktionenreihe konvergiert also punktweise gegen die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ x, & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Da diese Funktion, im Gegensatz zu den Partialsummenfunktionen, in $x = 1$ nicht stetig ist, liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor.

Bemerkung: Auch auf $(-1, 1)$ liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor, denn es gilt

$$\left| \sum_{n=1}^N x^n(1 - x) - x \right| = \left| (1 - x)x \sum_{n=0}^{N-1} x^n - x \right| = \left| (1 - x)x \frac{1 - x^N}{1 - x} - x \right| = |x^{N+1}|,$$

und offenbar ist $\sup\{|x^{N+1}| : x \in (-1, 1)\} = 1$.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ haben wir

$$\left| \frac{1}{x^2 + n^2} \right| = \frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Da die Reihe über $1/n^2$ konvergiert, folgt aus dem Majorantenkriterium: Die vorliegende Funktionenreihe konvergiert gleichmäßig und damit auch punktweise auf ganz $\mathbb{R}$.