

## 8. Übungsblatt

### Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

**Aufgabe 1** Zeigen Sie, dass für  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  und  $|x| < 1$  gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}},$$

und berechnen Sie für  $|x| < 1$  folgende Reihenwerte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)x^n.$$

**Aufgabe 2** Bestimmen Sie, falls möglich, folgende Grenzwerte.

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x(\cosh x - 1)}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ .

**Aufgabe 3** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar ist.

**Aufgabe 4** Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergieren folgende Potenzreihen?

- a)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$
- b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{4n}$
- c)  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^{k^2}$ .

**Aufgabe T1** Zeigen Sie, dass

- a) für  $\alpha > -1$  stets  $\sum_{n=0}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} = \alpha \cdot 2^{\alpha-1}$  gilt,  
b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$  ist,  
c) und  $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$  für  $|q| < 1$  gilt.

*Hinweis:* Potenzreihen.

**Aufgabe T2** Bestimmen Sie, falls möglich, folgende Grenzwerte.

- a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)$   
b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - \cos x}{\tan x^2} \quad (a > 0)$   
c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan(2x)}$ .

**Aufgabe T3** Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergieren folgende Potenzreihen?

- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} (x-2)^n$   
b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) x^n$   
c)  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n \cos \frac{1}{n})} x^{2n}$ .

**Aufgabe T4** Welche Funktionen stellen folgende Potenzreihen dar?

- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} x^n$   
b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^{4n}}{(2n)!}$   
c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x+1)^{2n+2}$ .

**Internet** Informationen zur Vorlesung und zu Prüfungen finden Sie im Internet unter

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/>

Dort sind auch die Übungsblätter und deren Lösungen verfügbar.