UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. O. Knab
P. E. Bradley

WS 2000/2001
1.12.2000

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Für $k=0$ besagt die Identität, welche Funktion die geometrische Reihe darstellt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ für $|x|<1$. $k=1$ besagt, dass die Ableitung der geometrischen Reihe die Ableitung jener Funktion darstellt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$. Allgemein ist die k–te Ableitung der Reihe gleich $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+k)\cdots(n+1)\cdot nx^n = \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{1-x}\right) \overset{\text{v.I.}}{=} k!\frac{1}{(1-x)^{k+1}}$. Dies zeigt aber: $\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)\cdots(n+1)\cdot n}{k!}x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{n}x^n$.

Aufgabe 2 Wir verwenden die Potenzreihendarstellungen der vorkommenden Funktionen.

a) Es ist $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + O(x^5)$. Dann ist $\frac{\sin x}{x} = \frac{x-\frac{1}{3!}x^3+O(x^5)}{x} = 1 - \frac{1}{3!} + O(x^4)$. Dies konvergiert für $x\to 0$ gegen 1.

b) Es ist $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} = x+\frac{1}{3!}x^3+O(x^5)$ und $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}x^{2k} = 1+\frac{1}{2}x^2+O(x^4)$. Dann ist $\frac{\sinh x-\sin x}{x(\cosh x-1)} = \frac{1+\frac{x^3}{3!}+O(x^5)-\left(1-\frac{x^3}{3!}+O(x^5)\right)}{x\left(1+\frac{x^2}{2!}+O(x^4)-1\right)} = \frac{\frac{x^3}{3}+O(x^5)}{\frac{x^3}{2}+O(x^4)} = \frac{\frac{1}{3}+O(x^2)}{\frac{1}{2}+O(x)}$, was für $x\to 0$ gegen $\frac{2}{3}$ konvergiert.

c) Es ist $\frac{2x+3}{2x+1} = 1+\frac{2}{2x+1}$. Weiter ist $\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1} = \left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{x+\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$, was für $x\to\infty$ gegen e konvergiert (betrachte zunächst halbzahlige x und dann die Monotonie des Terms).

Aufgabe 3

Für $x \neq 0$ sind die Funktionen $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ und $x \mapsto e^x$ beliebig oft differenzierbar. Dann ist auch ihre Verkettung $f: x \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2})$ für $x \neq 0$ beliebig oft differenzierbar.

Was passiert in $x = 0$?

<u>Behauptung:</u>
$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(\frac{1}{x}) \exp(-\frac{1}{x^2}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

mit einem gewissen Polynom p_n.

<u>Beweis:</u> Induktion.

<u>$n = 0$:</u> Das konstante Polynom $p_1 = 1$ tut's.

<u>$n \rightsquigarrow n+1$:</u> Zunächst ist für $x \neq 0$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(p_n(\tfrac{1}{x})\right) \cdot \exp(-\tfrac{1}{x^2}) + p_n(\tfrac{1}{x}) \cdot \frac{2}{x^3} \exp(-\tfrac{1}{x^2}) \quad \binom{\text{Ketten-}}{\text{regel}}$$
$$= \Big(\underbrace{\frac{d}{dx} p_n(\tfrac{1}{x}) + \frac{2}{x^3} p_n(\tfrac{1}{x})}_{=: p_{n+1}(\frac{1}{x})} \Big) \exp(-\tfrac{1}{x^2}).$$

Da $\frac{d}{dx} p_n(\frac{1}{x})$ trotz Kettenregel ein Polynom in $\frac{1}{x}$ ist, ist auch p_{n+1} ein Polynom. Dann folgt für $x = 0$:

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} p_n(\tfrac{1}{x}) \cdot \exp(-\tfrac{1}{x^2}) = 0,$$

denn mit $y = \frac{1}{x^2}$ haben wir für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$0 < y^{\frac{k}{2}} \cdot e^{-y} \underset{y > 1}{<} y^k \cdot e^{-y} \xrightarrow[y \to \infty]{} 0.$$

$\square$

Somit haben wir auch in $x = 0$, dass f beliebig oft differenzierbar ist.

Aufgabe 4

---

a) Wegen $\sqrt[n]{\left|\frac{2n+1}{(n-1)^2}\right|} = \frac{\sqrt[n]{2n+1}}{\sqrt[n]{(n-1)^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ ist der Konvergenzradius gleich 1.

Um nun innerhalb $[-1,1]$ den vollen Konvergenzbereich ausfindig zu machen, müssen wir die Randpunkte untersuchen.

$x=-1$: Für $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}(-1)^n$ ist $\frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} > 0$ eine monotone Nullfolge. Nach Leibniz konvergiert die Reihe.

$x=1$: Wegen $\frac{2n+1}{(n-1)^2} \ge \frac{2}{n-1}$ divergiert $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}$.

Der Konvergenzbereich ist also $[-1,1)$.

b) Mit $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{4n} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ ist $a_k = \begin{cases} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, & k = 4n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Dann ist $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[4n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \sqrt[4]{e}$, der Konvergenzradius also $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$. Randuntersuchung:

$|x| = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n}$. Bekanntlich gilt $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \nearrow e$. Dann folgt wegen $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ hieraus $e \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Dies zeigt $e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \frac{e}{n} \left(\le \frac{3}{n}\right)$. Jetzt sehen wir:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} = \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right)^n \ge \left(\frac{e-\frac{e}{n}}{e}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e},$$

die Reihenglieder sind also keine Nullfolge. Der Konvergenzbereich der Potenzreihe ist somit $(-e^{-1/4}, e^{-1/4})$.

c) Hier ist $\sqrt[k]{|2^k x^{k^2}|} = 2|x|^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \begin{cases} 0, & |x|<1 \\ \infty, & |x|>1 \end{cases}$

Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist also 1. Am Rand $(|x|=1)$ haben wir die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^{k^2}$, deren Glieder absolut, $|2^k x^{k^2}| = 2^k$, keine Nullfolge sind. Der Konvergenzbereich ist daher $(-1,1)$.

Aufgabe T1

a) Für $\alpha \le -1$ divergiert die Binomialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ an der Stelle $x=1$. Dann divergiert auch ihre Ableitung $\sum_{n=0}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} x^{n-1}$ in $x=1$.

Für $\alpha > -1$ konvergiert die Binomialreihe in $x=1$. Differenzieren wir nun $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ mit nach x, so erhalten wir zwar $\alpha(1+x)^{\alpha-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} x^{n-1}$, und Einsetzen von $x=1$ würde uns die Identität $\sum_{n=0}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} = \alpha \cdot 2^{\alpha-1}$ liefern, doch wir können nicht einfach davon ausgehen, dass auch die abgeleitete Reihe konvergiert, wie uns folgendes Beispiel lehrt:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n \quad \text{und} \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n-1}$$

haben zwar beide Konvergenzradius 1, und in $x = 1$ konvergiert f, aber f' ist in $x = 1$ divergent!

Deshalb geben wir einen direkten Beweis zunächst für $\alpha > 0$:
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \alpha\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n\cdot(n-1)!} = \alpha\sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n-1} = \alpha\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}$
$\overset{\alpha-1>-1}{=} \alpha \cdot 2^{\alpha-1}$.

Im Fall $\alpha = 0$ gilt die Identität trivialerweise.

Bleibt uns nur noch der Fall $\alpha \in (-1, 0)$. Wie im Fall $\alpha > 0$ kommen wir auf die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}$: es ist $\left|\binom{\alpha-1}{n}\right| = \left|\frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right| = \frac{(n-\alpha)\cdots(1-\alpha)}{n!} = \frac{n-\alpha}{n-1}\cdot$
$\frac{n-\alpha-1}{n-2}\cdots\frac{2-\alpha}{1}\cdot\frac{1-\alpha}{n} \overset{\alpha\in(-1,0)}{>} \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdots\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{n} = 1$, die Reihenglieder sind also keine Nullfolge. Daher ist die angegebene Identität für $\alpha \in (-1, 0)$ falsch!

b) Hier differenzieren wir die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ nach x und erhalten $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, also haben wir $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2$.

c) Da nach b) die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nq^{n-1}$ für $|q| < 1$ konvergiert, ist (nq^{n-1}) für derartige q eine Nullfolge. Dann gilt aber auch $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$ für $|q| < 1$.

Aufgabe T2

a) Es ist $x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) = \frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{1-\left(1-\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{x}\right)^2+O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)}{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Dann ist $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$.

b) Es ist $a^{x^2} = e^{x^2\ln a} = 1 + x^2\ln a + O(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$ und $\tan x^2 = \frac{\sin x^2}{\cos x^2} = \frac{x^2+O(x^6)}{1-O(x^4)}$. Dann ist $\frac{a^{x^2}-\cos x}{\tan x^2} = \frac{\cos x^2\left(e^{x^2\ln a}-\cos x\right)}{\sin x^2} = \frac{(1+O(x^4))\left(\left(\ln a+\frac{1}{2}\right)x^2+O(x^4)\right)}{x^2+O(x^6)}$
$= \frac{\left(\ln a+\frac{1}{2}\right)x^2+O(x^4)}{x^2+O(x^6)} = \frac{\ln a+\frac{1}{2}+O(x^2)}{1+O(x^4)}$. Es folgt $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-\cos x}{\tan x^2} = \ln a + \frac{1}{2}$.

c) Es ist $(\tan x)^{\tan(2x)} = e^{\tan(2x)\cdot\ln(\tan x)}$. Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion genügt es, den Limes des Exponenten zu berechnen. Doch der ist problematisch. Wegen $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x = 1$ betrachten wir $\lim\limits_{y\to 1}\frac{\ln y}{y-1}$: dieser ist gleich 1, da $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ ist — substituiere hier einfach $x = \ln y$. Damit schreiben wir den Exponent als

$$\tan(2x)(\tan x - 1)\cdot\frac{\ln(\tan x)}{\tan x - 1}$$

und betrachten nur noch den ersten Faktor: $\tan(2x)(\tan x - 1) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}\cdot\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}$
$= \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\cdot\frac{\sin x-\cos x}{\cos x} = \frac{-2\sin x}{\cos x+\sin x}$. Dies konvergiert für $x \to \frac{\pi}{4}$ gegen $\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$. Somit ist $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan(2x)} = e^{-1}$.

Aufgabe T3 Die Potenzreihen seien alle $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

a) Hier ist $\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \sqrt[n]{n^n} = n$, also der Konvergenzradius $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \infty$. Die Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Hier schätzen wir die Summe a_n durch n mal das größte bzw. das kleinste Glied ab: $\sqrt[n]{\frac{n}{n}} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{n}$. Nach dem Sandwichtheorem folgt $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, der Konvergenzradius ist also gleich 1. Die Randpunkte des Konvergenzbereichs $|x| = 1$ müssen separat untersucht werden: in der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) (-1)^n$ sind die Glieder keine Nullfolge, die Reihe also divergent. Der Konvergenzbereich der Potenzreihe ist demnach $(-1, 1)$.

c) Hier ist $a_{2n} = e^{n\left(1+(-1)^n \cos \frac{1}{n}\right)}$ und $a_{2n-1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist n gerade, so konvergiert $\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = e^{\frac{1}{2}\left(1+\cos \frac{1}{n}\right)}$ für $n \to \infty$ gegen e, und ist n ungerade, so konvergiert $\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = e^{1-\cos \frac{1}{n}}$ gegen 1. Somit ist $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = e$, der größtmögliche Konvergenzbereich also $[-e^{-1}, e^{-1}]$. Die Randuntersuchung liefert in den beiden Randpunkten die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n}$, dessen Glieder keine Nullfolge sind: es ist das $2n$–te Reihenglied für gerades n gleich $e^{n\left(\cos \frac{1}{n} - 1\right)}$, und $\lim\limits_{n\to\infty} n \left(\cos \frac{1}{n} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos \frac{1}{n} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{2!}x^2 + O(x^4) - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2!}x + O(x^3) = 0$. Somit konvergieren diese Reihenglieder gegen 1. Dies zeigt, dass der Konvergenzbereich der PR gleich $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ ist.

Aufgabe T4 Die durch die jeweilige Potenzreihe dargestellte Funktion heiße f.

a) Jedenfalls ist $f(0) = 0$. Die angegebene Reihe erkennen wir als Differenz zweier Reihen: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-2}{(n+1)!} x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)!} x^n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!} x^n$. Die erste Reihe ist gleich $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x - 1$, und die zweite ist für $x \neq 0$ gleich $\frac{2}{x} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{2}{x} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 2 \cdot \frac{e^x - x - 1}{x}$. Somit wird die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0, & x = 0 \\ e^x - 1 - 2 \cdot \frac{e^x - x - 1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

dargestellt.

b) Hier ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^{4n}}{(2n)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\left((x-3)^2\right)^{2n}}{(2n)!} = \cosh\left((x-3)^2\right)$, also

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cosh\left((x-3)^2\right).$$

c) Es ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x+1)^{2n+2} = (x+1) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x+1)^{2n+1} = (x+1)\sin(x+1)$, also

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x+1)\sin(x+1).$$