

10. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Welche Funktion stellt die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit

$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

auf ihrem Konvergenzbereich dar?

Aufgabe 2

- a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ gilt: Aus $x > 0$ folgt $e^x > x^t$?
- b) Für welche $a > 0$ gilt: Aus $x \geq 1$ folgt $x^a \leq a^x$?

Aufgabe 3 Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) := 1 - 8(e^{2x} + 4)^{-1}$.

- a) Beweisen Sie, dass f injektiv ist und zeigen Sie $f'(x) = 1 - (f(x))^2$.
- b) Berechnen Sie daraus die Ableitung der Umkehrfunktion von f .
- c) Bestimmen Sie eine explizite Darstellung von f^{-1} und berechnen Sie daraus erneut die Ableitung von f^{-1} .
- d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graph von f in $x_0 = 0$ sowie die Gleichung der Tangente an den Graph von f^{-1} in $y_0 = -\frac{3}{5}$.

Aufgabe 4 Sei $f(x)$ eine Potenzreihe, die in $a \in \mathbb{R}$ konvergiert.

- a) Zeigen Sie: Ist $\frac{f(x)}{(x-a)^m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ eine in a konvergente Potenzreihe, so ist $f = 0$ (also $f(x)$ die Potenzreihe, deren Glieder alle gleich Null sind).
- b) Zeigen Sie, dass in a) nicht auf die Konvergenz in a verzichtet werden kann.

Aufgabe T1 Für welche $n = 0, 1, 2, \dots$ liegt die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^4 & x \geq 0 \\ -x^4 & x < 0 \end{cases}$$

in $C^n(\mathbb{R})$?

Aufgabe T2 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Nullstellen, Extrema, Wendepunkte und Konvexität, und skizzieren Sie die zugehörigen Graphen:

a) $f: [-1, \frac{5}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^3, & x \in [-1, 1] \\ -x + 2, & x \in (1, 2] \\ \sin(x - 2), & x \in (2, \frac{5}{2}] \end{cases}$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Aufgabe T3 Untersuchen Sie die durch

$$x \mapsto \frac{x(x-1)}{x+1}$$

gegebene Funktion auf Null- und Polstellen, auf Extrema und Wendepunkte. Skizzieren Sie ihren Graph.

Aufgabe T4 Skizzieren Sie folgende Menge in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 - 1) \left(x^2 + \left(y - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right) = 0 \right\} \\ & \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right], y \in \left(2, \frac{9}{4} \right] \right\} \\ & \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, y = 2 \right\} \\ & \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 + \left(y - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{100} = 0 \right\} \\ & \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left(x + \frac{1}{4} \right)^2 + \left(y - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{100} = 0 \right\} \\ & \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \frac{9}{4} + \sin \varphi \end{pmatrix} : \varphi \in \left(\frac{23}{16}\pi, \frac{25}{16}\pi \right) \right\} \end{aligned}$$

Internet Informationen zur Vorlesung und zu Prüfungen finden Sie im Internet unter

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/>

Dort sind auch die Übungsblätter und deren Lösungen verfügbar.

Frohe Weihnachten und gutes neues Jahr 2001!

$\chi\rho\rho\nu\iota\alpha\ \pi o\lambda\alpha!$ La mulți ani! Bonne Noël! Merry Christmas!