UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. O. Knab
P. E. Bradley

WS 2000/2001
10.01.2001

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1

Mit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist wegen der Rekursionsformel der ~~[illegible]~~ Koeffizienten

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} = 1 + x + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} + a_n) x^{n+2} = 1 + x + x \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= 1 + x + x(f(x) - 1) + x^2 f(x) = 1 + (x + x^2) f(x).$$

$\Leftrightarrow \quad f(x) = \dfrac{1}{1 - x - x^2}$, wo auch immer die Potenzreihe konvergieren mag.

Aufgabe 2

a) Für $t < 0$ trifft die Aussage nicht zu, denn in diesem Falle gilt $x^t \to \infty$ für $x \to 0$. Für $t = 0$ ist sie hingegen offenbar richtig.

Wir müssen im folgenden also nur noch den Fall $t > 0$ betrachten: Logarithmieren wir die Abschätzung $e^x > x^t$, so ergibt sich

$$x > \ln(x^t) = t \ln x, \qquad \text{also} \qquad t^{-1} > \frac{\ln x}{x}.$$

Setzen wir $g(x) := (\ln x)/x$, so lässt sich unsere Frage wie folgt umformulieren: Für welche $t > 0$ nimmt g nur Werte $< t^{-1}$ an?

Für $x \in (0, 1]$ gilt $g(x) \le 0$. Aus $g'(x) = (\frac{1}{x} \cdot x - \ln x)/x^2 = (1 - \ln x)/x^2$ können wir folgendes schließen: Für $x \in (1, e)$ ist $g(x) > 0$, also g monoton steigend, für $x \in (e, \infty)$ ist $g(x) < 0$, also g monoton fallend. Die Funktion erreicht ihr Maximum somit an der Stelle $x = e$ mit $g(e) = e^{-1}$. Also: Genau dann nimmt g nur Werte $< t^{-1}$ an, wenn $e^{-1} < t^{-1}$, also $e > t$.

Die Antwort auf die Frage lautet: Die Aussage gilt genau dann, wenn $0 \le t < e$.

b) Logarithmieren der Abschätzung liefert

$$a \ln x \le x \ln a, \quad \text{also} \quad \frac{\ln x}{x} \le \frac{\ln a}{a}.$$

Nach obigen Überlegungen gilt dies genau dann für alle $x \ge 1$, wenn $(\ln a)/a \ge e^{-1}$, da $\max_{x \ge 1} (\ln x)/x = e^{-1}$. Wiederum nach den obigen Überlegungen bedeutet dies $a = e$.

Aufgabe 3

a) Es gilt $f'(x) = 8(e^{2x}+4)^{-2} \cdot 2e^{2x} = 16e^{2x}(e^{2x}+4)^{-2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$; also ist f streng monoton wachsend und damit injektiv. Wegen

$$\begin{aligned} 1-(f(x))^2 &= 1 - \left(1 - 8(e^{2x}+4)^{-1}\right)^2 = 1 - \left(1 - 16(e^{2x}+4)^{-1} + 64(e^{2x}+4)^{-2}\right) \\ &= 16(e^{2x}+4)^{-1} - 64(e^{2x}+4)^{-2} = 16(e^{2x}+4)^{-2}\left((e^{2x}+4)-4\right) = 16e^{2x}(e^{2x}+4)^{-2} \end{aligned}$$

gilt auch die behauptete Gleichung.

b) f hat als Bildbereich $(-1,1)$, denn $(e^{2x}+4)^{-1}$ hat als Bildbereich $(0,\frac{1}{4})$. Da stets $f'(x) \neq 0$ gilt, liefert der Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion

$$\forall y \in (-1,1): \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{1-(f(f^{-1}(y)))^2} = \frac{1}{1-y^2}.$$

c) Wir lösen $f(x) = y$ nach x auf:

$$\begin{aligned} 1 - 8(e^{2x}+4)^{-1} = y \iff (1-y)^{-1} = \tfrac{1}{8}(e^{2x}+4) &\iff 8(1-y)^{-1} - 4 = e^{2x} \\ &\iff x = \tfrac{1}{2}\ln\left(8(1-y)^{-1}-4\right) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8(1-y)^{-1}-4} \cdot \frac{8}{(1-y)^2} = \frac{4}{8(1-y)-4(1-y)^2} = \frac{4}{4-4y^2} = \frac{1}{1-y^2}.$$

d) Es gilt $f(0) = 1-\frac{8}{5} = -\frac{3}{5}$, $f'(0) = 1-(-\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25}$, $f^{-1}(-\frac{3}{5}) = 0$ und $(f^{-1})'(-\frac{3}{5}) = \frac{25}{16}$.

$$T(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0), \qquad \text{also} \qquad T(x) = \tfrac{16}{25}x - \tfrac{3}{5}$$

ist die Gleichung der Tangente am Graph von f in $x_0 = 0$. Die Tangente am Graph von f^{-1} in $y_0 = -\frac{3}{5}$ hat die Gleichung

$$T(y) = (f^{-1})'(y_0)(y-y_0) + f^{-1}(y_0), \qquad \text{also} \qquad T(y) = \tfrac{25}{16}y + \tfrac{15}{16}.$$

(Die Gleichungen sehen hier aus wie Parametrisierungen: setzen wir im ersten Fall $x = s$ und $y = T(x)$, so haben wir eine Parametrisierung der beiden Koordinaten

$$x = s, \quad y = \frac{16}{25}s - \frac{3}{5}, \quad s \in \mathbb{R},$$

oder vektoriell $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{16}{25} \end{pmatrix}$. Dies liegt daran, dass wir aus *einer* Gleichung eben leicht eine Parametrisierung ablesen können. Das Umgekehrte ist jedoch schwieriger.)

<u>Aufgabe 4</u>

a) Ist $f(x) = (x-a)^m g_m(x)$ mit einer in a konvergenten Potenzreihe $g_m(x)$, so beginnt die Taylorreihe von f erst mit $(x-a)^m$: $f(x) = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m + \ldots$, d.h. alle Ableitungen $f^{(n)}(a)$ verschwinden für $n < m$. Gilt dies nun für alle $m \in \mathbb{N}$, so haben wir für alle $m \in \mathbb{N}$, dass $f^{(m)}(a) = 0$ gilt. Also ist die Taylorreihe von f identisch Null. Da die Taylorreihe einer Potenzreihe die Potenzreihe selbst ist, folgt $f = 0$, die Nullreihe.

b) Nehmen wir die konstante Potenzreihe $f = +1 \neq 0$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist $\frac{f(x)}{(x-1)^m} = \frac{+1}{(x-1)^m}$ eine Potenzreihe, die m-te Potenz ~~der~~ einer geometrischen Reihe.

Aufgabe T1

Da Polynome auf ihrem Definitionsbereich beliebig oft stetig differenzierbar sind, ist nur $x=0$ zu betrachten. Hierfür die Ableitungen zunächst für $x \neq 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3, & x>0 \\ -4x^3, & x<0 \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} 12x^2, & x>0 \\ -12x^2, & x<0 \end{cases} \qquad f'''(x) = \begin{cases} 24x, & x>0 \\ -24x, & x<0 \end{cases} \qquad f^{(4)}(x) = \begin{cases} 24, & x>0 \\ -24, & x<0 \end{cases}$$

Wir sehen nun: $f^{(4)}$ kann auf $\mathbb{R}$ nicht stetig sein, wie auch immer $f^{(4)}(0)$ sein mag, falls $f^{(3)}$ in $x=0$ überhaupt differenzierbar ist. Also ist $f \notin C^4(\mathbb{R})$ und damit auch $f \notin C^n(\mathbb{R})$ für $n \geq 4$.

Es ist

$$|f'(0)| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \lim_{x\to 0}|x^3| = 0, \quad f \text{ also in } x=0 \text{ db und } f' \text{ in } x=0 \text{ stetig } (f'(0)=0)$$

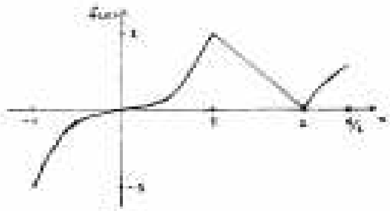
$$|f''(0)| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}\right| = \lim_{x\to 0}|\cancel{4}x^2| = 0, \text{ also } f''(0)=0 \text{ und } f'' \text{ in } x=0 \text{ stetig.}$$

$$|f'''(0)| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f''(x)-f''(0)}{x-0}\right| = \lim_{x\to 0}|12x| = 0, \text{ also } f'''(0)=0, \ f''' \text{ in } x=0 \text{ stetig.}$$

Somit ist $f \in C^3(\mathbb{R}) \subseteq C^2(\mathbb{R}) \subseteq C^1(\mathbb{R}) \subseteq C^0(\mathbb{R}) = C(\mathbb{R})$, ~~also~~
also $f \in C^n(\mathbb{R})$ genau für $n = 0, 1, 2, 3$.

Aufgabe T2

a)
$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in [-1,1] \\ -x+2, & x \in (1,2] \\ \sin(x-2), & x \in (2, \frac{5}{2}] \end{cases}$$



- Nullstellen: in $x=0$, $x=2$.
- f hat in x_0 ein globales Maximum: für alle $x \in D_f$ ist $f(x) \leq f(x_0)$.
  globales Minimum: für alle $x \in D_f$ ist $f(x) \geq f(x_0)$.

  f hat in x_0 ein lokales Maximum: es ex. $\delta > 0$ mit: $x \in D_f$ und $|x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$.
  lokales Minimum: es ex. $\delta > 0$ mit: $x \in D_f$ und $|x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$.

  Es ist $f(-1) = -1$ und $f(x) \geq -1$ für alle $x \in [-1, \frac{5}{2}]$ (bitte überprüfen!), also hat f in $x_0 = -1$ ein globales Minimum.

  $x_0 = 1$: globales Maximum, da $f(1) = 1$ und für alle $x \in [-1, \frac{5}{2}]$ gilt $f(x) \leq 1$.

  $x_0 = 2$: für $x \in [1,2]$ ist ~~[illegible]~~ $f(x) \geq f(2) = 0$, für $x \in (2, \frac{5}{2})$ ist $f(x) \geq f(2)$.
  Also in $x_0 = 2$ lokales Minimum.

- Bleibt noch $x_0 = 0$: Zwar $f'(0) = 0$, aber auch $f''(0) = 0$, also kein Extremum: in der Tat ist für $x < 0$ stets $f(x) < 0 = f(0)$ und für $x > 0$ stets $f(x) > 0$.
  Da in $(-1,1)$ $f''(x) = 6x$ das Vorzeichen wechselt (in $x_0 = 0$), ist in $x_0 = 0$ ein Wendepunkt. Wegen $f''(x) \neq 0$ für $x \in (-1,1)$ gibt es in $(-1,1)$ keine weiteren WP. In $[1,2]$ ist f eine Gerade, d.h. f' hat auf ~~ganz~~ jedem $x \in (1,2)$ ein relatives Maximum ($f'(x) = -1$). Also hat f in jedem $x \in (1,2)$ einen Wendepunkt. Weitere gibt es jedoch nicht.

- Es ist
$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \in [-1,1) \\ -1, & x \in (1,2) \\ \cos(x-2), & x \in (2, \frac{5}{2}) \end{cases}$$

  f' ist monoton wachsend auf $(0,1)$, $(1,2)$. Dort ist f jeweils konvex.

  f' ist monoton fallend auf $(-1,0)$, $(1,2)$, $(2, \frac{5}{2})$. Dort ist f jeweils konkav.

b) • Nullstellen: $g(0) = 0$ und $g(x) = \exp(-\frac{1}{x^2}) > 0$ für $x \neq 0$.

• Extrema: $g'(0) = 0$

$x \neq 0$: $g'(x) = \frac{2}{x^3} \exp(-\frac{1}{x^2}) < 0$ für $x < 0$ und > 0 für $x > 0$.

$\Rightarrow$ $x = 0$ einziger stationärer Punkt, und dort hat g ein Minimum.

• Wendepunkte: zwar ist $g''(0) = 0$, doch hat g in $x = 0$ keinen Wendepunkt, da g dort ein Minimum hat und der Graph von g kein Geradenstück enthält.

$x \neq 0$: $g''(x) = -\frac{6}{x^4} \exp(-\frac{1}{x^2}) + \frac{4}{x^6} \exp(-\frac{1}{x^2}) = (-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}) \exp(-\frac{1}{x^2}) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{6}{x^4} = \frac{4}{x^6} \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

weiter: $g''(x) = \frac{4-6x^2}{x^6} \exp(-\frac{1}{x^2}) \begin{cases} > 0 & \text{für } |x| < \sqrt{\frac{2}{3}} \\ < 0 & \text{für } |x| > \sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$

$\Rightarrow$ g hat in $\sqrt{\frac{2}{3}}$ und in $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ Wendepunkte.

• Konvexität: Da der Graph von g kein Geradenstück enthält, folgt aus der Betrachtung von g'': g ist für $|x| < \sqrt{\frac{2}{3}}$ konvex und für $|x| > \sqrt{\frac{2}{3}}$ konkav.

• Verhalten im ∞: $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$.

Aufgabe T1:

• $f(x) = \frac{x(x-1)}{x+1}$ hat offenbar genau in $\{0, 1\}$ Nullstellen und in $x = -1$ eine Polstelle.

• Polynomdivision liefert $f(x) = \frac{x^2 - x}{x+1} = x - 2 + \frac{2}{x+1}$, also $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
Eine Asymptote ist $g(x) = x - 2$. Weiter: $\cancel{\lim}$

$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$.

• Extrema: $f'(x) = \frac{(2x-1)(x+1) - (x^2-x)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+2x-1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 1$ oder $x = -\sqrt{2} - 1$.

Da dies die einzigen stationären Punkte sind, ~~gilt~~ gilt:

$\sqrt{2} - 1 > -1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-1^+} f(x) = \infty$ $\Rightarrow$ f hat in $\sqrt{2}-1$ ein lokales Minimum.

$-\sqrt{2} - 1 < -1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ $\Rightarrow$ f hat in $-\sqrt{2}-1$ ein lokales Maximum.

• Wendepunkte: $f'(x) = 1 - \frac{2}{(x+1)^2}$ ist für $x > -1$ monoton wachsend $\Rightarrow$ f auf $(-1, \infty)$ konvex,
für $x < -1$ monoton fallend $\Rightarrow$ f auf $(-\infty, -1)$ konkav.

Somit hat f keine Wendepunkte in $(-1, \infty)$ oder in $(-\infty, -1)$, da ~~g hat keine Gerade ist~~ der Graph von f kein Geradenstück enthält.