

**Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt**  
**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen**  
**Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**

**Aufgabe 1**

- a) Da das reelle Polynom  $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$  ungeraden Grad hat, hat es mindestens eine reelle Nullstelle. Um weitere Nullstellen zu finden, betrachten wir die Ableitung:  $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 3(x-1)(x+\frac{1}{3})$ . Nun ist  $f(1) = -3 < 0$  und  $f(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^2} - \frac{2}{3} < 0$ . Da alle beiden kritischen Werte negativ sind, hat  $f$  keine weiteren reellen Nullstellen.
- b) Es ist  $f(1) = -2$  und  $f(2) = 1$ , also ist die reelle Nullstelle  $\xi \in (1, 2)$ . Mit  $g(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$  haben wir die Fixpunktgleichung  $g(x) = x$ . Wegen  $g'(x) = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)^{\frac{2}{3}}} > 0$  für  $x \in (1, 2)$  ist  $g$  monoton wachsend. Wegen  $g(1) = \sqrt[3]{3} > 1$  und  $g(2) = \sqrt[3]{7} < 2$  folgt, dass  $g$  eine Abbildung des Intervalls  $[1, 2]$  in sich selbst ist. Schließlich konvergiert wegen  $|g'(x)| < \frac{5}{6} = q$  (der Zähler von  $g'$  ist  $< 5$ , der Nenner  $> 3 \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3 \cdot (1+2)^{\frac{2}{3}} \geq 3 \cdot (1+2 \cdot \frac{2}{3}) > 3 \cdot 2 = 6$ ) das Iterationsverfahren  $x_0 = 0$ ,  $x_{n+1} = g(x_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  gegen  $\xi$  ( $x_0 = 0$  ist deshalb ein erlaubter Startwert, weil schon  $x_1 = g(x_0) = 1 \in [1, 2]$  ist).

Fehlerabschätzung:  $|\xi - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0| = \frac{(\frac{5}{6})^n}{1-\frac{5}{6}} |1 - 0| = 6 \cdot (\frac{5}{6})^n$ .

**Aufgabe 2**

- a) Hätte  $f$  eine Stammfunktion  $F$ , so wäre sie eine in  $[-1, 1]$  differenzierbare Funktion mit  $F' = f$ . Auf dem Teilintervall  $[-1, 1]$  gilt  $F' = 0$ , also  $F = a$  konstant. Auf  $(0, 1]$  gilt  $F' = 1$ , also  $F = x + b$  mit  $b \in \mathbb{R}$ . Da differenzierbare Funktionen stetig sind, folgt mit Einsetzen von  $x = 0$ , dass  $a = b$  ist. Für jedes  $a \in \mathbb{R}$  haben wir also eine Funktion  $F: x \mapsto \begin{cases} a, & x \in [-1, 0] \\ x + a, & x \in (0, 1] \end{cases}$ , und dies sind alle eventuell möglichen Stammfunktionen! Aber  $F$  ist in  $x = 0$  nicht differenzierbar:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0}{x} = 0.$$

Widerspruch!

- b) Da  $f$  stückweise konstant ist, berechnen wir

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = |[-1, 0]| \cdot 0 + |[0, 1]| \cdot 1 = 1.$$

**Aufgabe 3** Wir geben die Stammfunktionen bis auf eine additive Konstante an.

- a) Hier substituieren wir  $t = \sqrt[6]{2x-1}$ . Dann ist  $dt = \frac{1}{3}(2x-1)^{-\frac{5}{6}} dx = \frac{1}{3}t^{-5} dx$ . Für die Stammfunktion folgt:  $\int \frac{1}{\sqrt{2x-1} \cdot \sqrt[3]{2x-1}} dx = \int \frac{3t^5}{t^3-t^2} dt = \int \frac{3t^3}{t-1} dt = 3 \cdot \int \left( t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = 3 \left( \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t + \ln|t-1| \right) = \sqrt{2x-1} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x-1} + 3\sqrt[6]{2x-1} + 3 \ln|\sqrt[6]{2x-1} - 1|$ .
- b)  $\int \frac{x^3}{1-x^4} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{-4x^3}{1-x^4} dx = -\frac{1}{4} \ln|1-x^4|$
- c)  $\int \frac{1}{2x+x^2} dx = \int \frac{1}{x(x+2)} dx = \int \left( \frac{1/2}{x} - \frac{1/2}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{x+2} \right|$
- d)  $I = \int \frac{e^x(e^{4x}+1)}{(e^{2x}+1)^2} dx \stackrel{t=e^x, dt=e^x dx}{=} \int \frac{t^4+1}{(t^2+1)^2} dt = \int \left( 1 - \frac{2t^2}{(t^2+1)^2} \right) dt$ . Nun ist  $\int \frac{2t^2}{(t^2+1)^2} dt = \int t \cdot \frac{2t}{(t^2+1)^2} dt \stackrel{u=t, v'=\frac{2t}{(t^2+1)^2}}{=} t \cdot \left( -\frac{1}{t^2+1} \right) + \int \frac{1}{t^2+1} dt = -\frac{t}{t^2+1} + \arctan t$ . Dann ist  $I = t + \frac{t}{1+t^2} - \arctan t = e^x + \frac{e^x}{1+e^x} - \arctan e^x$ .

**Aufgabe T1** Gesucht ist jeweils eine Stammfunktion. Diese wird bis auf eine eindeutig bestimmte additive Konstante angegeben.

- a)  $\int (1+x)^4 dx = \frac{1}{5}(1+x)^5$
- b)  $\int \frac{1}{(4x-1)^3} dx = -\frac{1}{8(4x-1)^2}$
- c)  $\int \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} dx = \int \frac{2x+1}{(x^2+x)^2} dx = -\frac{1}{x^2+x}$
- d)  $\int \arctan x dx = \int 1 \cdot \arctan x dx \stackrel{u'=\arctan x, v=1}{=} x \cdot \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
- e)  $\int x^2 \sin x dx \stackrel{u=x^2, v'=\sin x}{=} -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx \stackrel{u=2x, v'=\cos x}{=} -x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x dx = (-x^2 + 2) \cos x + 2x \sin x$
- f)  $\int \frac{x}{4x^2-8} dx = \frac{1}{8} \ln|4x^2-8|$
- g)  $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1} dx \stackrel{t=e^x, dt=e^x dx}{=} \int \frac{t^2}{t^2-1} dt = \int \left( 1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dx = \int \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) \right) dt = t + \frac{1}{2} (\ln|t-1| - \ln|t+1|) = e^x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^x-1}{e^x+1} \right|$
- h)  $\int \cos(\ln x) dx \stackrel{x=e^t, dx=e^t dt}{=} \int \frac{1}{2} e^t (\cos t + \sin t) dt$ . Wie kommen wir darauf? Zweimal partielle Integration!  $\int \cos t \cdot e^t dt \stackrel{u=\cos t, v'=e^t}{=} \cos t \cdot e^t + \int \sin t \cdot e^t dt \stackrel{u=\sin t, v'=e^t}{=} \cos t \cdot e^t + \sin t \cdot e^t - \int \cos t \cdot e^t dt \Leftrightarrow 2 \int \cos t \cdot e^t dt = e^t (\cos t + \sin t)$ . Also lautet eine gesuchte Stammfunktion  $\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$ .
- i)  $I = \int \frac{x-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}} dx \stackrel{t=\sqrt{x+2}, dt=\frac{dx}{2\sqrt{x+2}}}{=} 2 \cdot \int (t^2 + 2 - (\sqrt{t^2-1})) dt = 2 \cdot \left( \frac{1}{3}t^3 + 2t - J \right)$  mit  $J = \int \sqrt{t^2-1} dt \stackrel{t=\cosh s, dt=\sinh s ds}{=} \int (\sinh s)^2 ds$  (es ist  $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ )  $= \frac{1}{2}(\cosh s \cdot \sinh s - s)$ , denn zweimalige partielle Integration liefert  $\int \sinh^2 s ds \stackrel{u=v'=\sinh s}{=} \sinh s \cdot \cosh s - \int \cosh^2 s ds = \sinh s \cdot \cosh s - \int (1 + \sinh^2 s) ds$ .

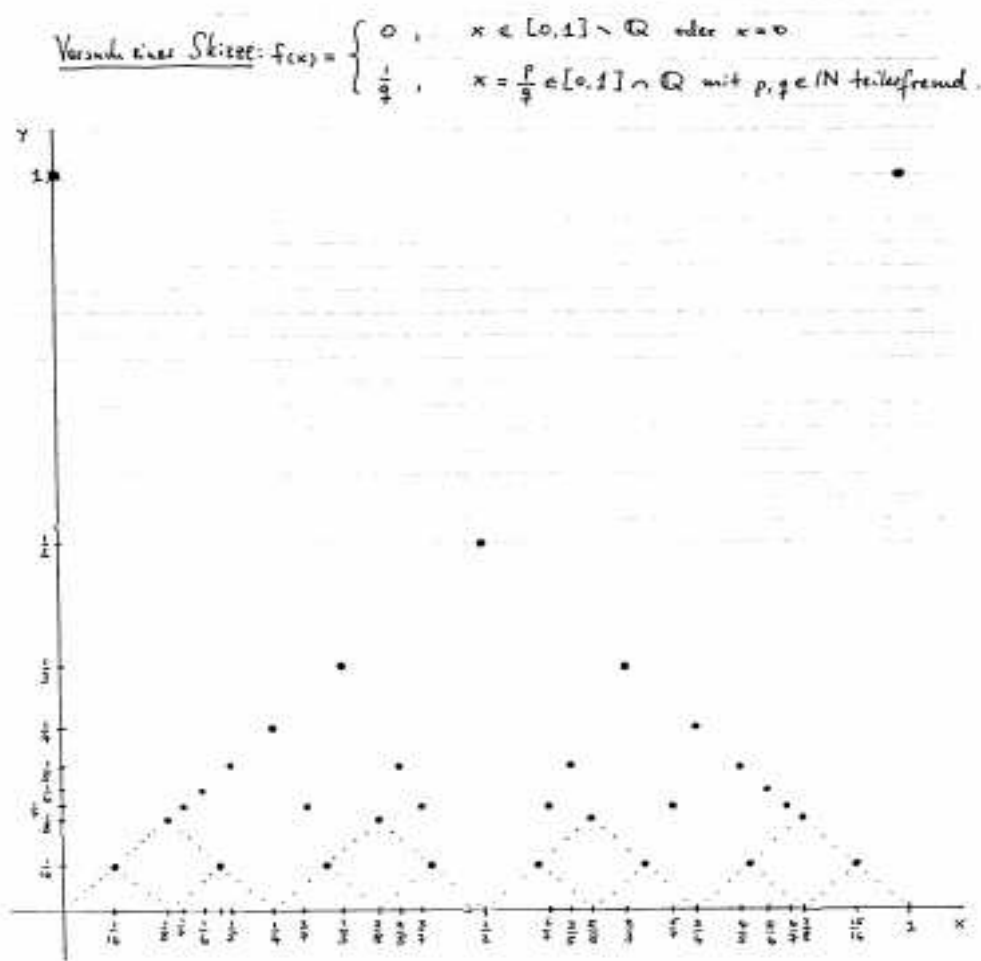
Also ist  $J = \frac{1}{2}(\cosh s \cdot \sqrt{\cosh^2 s - 1} - s) = \frac{1}{2}(t \cdot \sqrt{t^2 - 1} - \operatorname{Arcosh} t)$ . Damit ist  $I = 2 \left( \frac{1}{3}t^3 - 2t - \frac{1}{2}(t\sqrt{t^2 - 1} - \operatorname{Arsinh} t) \right) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - 4\sqrt{x+2} - \sqrt{x+2}\sqrt{x+1} + \operatorname{Arsinh} \sqrt{x+2}$ .

**Bemerkung:** Die Substitution  $t = \cosh s$  ist hier tatsächlich erlaubt, da  $t = \sqrt{x+2} > 1$  ist.

j) 
$$\int \frac{\cosh^5 x - \cosh^2 x - 7}{\cosh^4 x} \sinh x \, dx \stackrel{t=\cosh x, dt=\sinh x \, dx}{=} \int \frac{t^5 - t^2 - 7}{t^4} dt = \int \left( t - \frac{1}{t^2} - \frac{7}{t^4} \right) dt = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{t} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{t^3} = \frac{1}{2} \cosh^2 x + \frac{1}{\cosh x} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{\cosh^3 x}.$$

**Aufgabe T2** Gemeint war, dass  $f$  den Definitionsbereich  $[0, 1]$  hat (uneigentliche Integrale sind noch nicht Stoff dieses Übungsblatts).

a)



b) In der Literatur wird wohl häufiger vom *oberen* bzw. *unteren Integral* gesprochen. Gemeint sind jedenfalls die Größen  $s = \sup_E \{U_E(f)\}$  (oberes Integral) und  $S = \inf_E \{O_E(f)\}$  (unteres Integral) aus der Vorlesung. Wir verwenden die Bezeichnungen

$$s = \int_0^1 f(x) \, dx, \quad S = \int_0^1 f(x) \, dx.$$

Da für jede Einteilung des Einheitsintervalls in jedem auftretenden Teilintervall eine irrationale Zahl liegt, ist das untere Integral  $\int$  gleich Null.

Zum oberen Integral: jedenfalls ist  $0 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 f(x) dx$ . Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig. Ist für  $x$  rational  $f(x) > \frac{1}{n}$ , so hat  $x$  einen Nenner, der kleiner ist als  $n$ . Dies geht in  $[0, 1]$  nur für endlich viele  $x$ , etwa für  $x = x_1, \dots, x_m$ . Mit  $\varphi_n(x) = \min \left\{ f(x), \frac{1}{n} \right\}$  ist  $f(x) = \varphi_n(x) + g(x)$ , wobei

$$g(x) = \begin{cases} f(x_i) - \frac{1}{n}, & \text{falls } x = x_i \text{ für ein } i \in \{1, \dots, m\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist. Dann gilt für das obere Integral

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \varphi_n(x) dx + \int_0^1 g(x) dx \leq (1 - 0) \cdot \frac{1}{n} + 0 = \frac{1}{n},$$

da das obere Integral für Funktionen, die nur in endlich vielen Stellen von Null verschieden sind, gleich Null ist.

Also ist  $0 = \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n}$  für jedes  $n$ , nach dem Sandwichtheorem also  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ .

### Aufgabe T3

- a)  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(x_k)$ , wobei  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  und  $x_k = \frac{k}{n}$  für  $k = 0, \dots, n-1$  eine äquidistante Einteilung des Einheitsintervalls  $[0, 1]$  liefert. Es folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$ .
- b)  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x_k)$ , wobei  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  und  $x_k = \frac{k}{n}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Wie in a) folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2$ .
- c)  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt[n]{e^{-k}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot e^{-\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x_k)$ , wobei  $f(x) = e^{-x}$  und  $x_k = \frac{k}{n}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Wie in a) folgt wieder  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$ .