

13. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Lösen Sie in $\mathbb{R}$ die Gleichung

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + e^{xt}} = x$$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie den Konvergenzbereich folgender Reihen und berechnen Sie ihren Wert.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\sin^n x}{x}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$

Hinweis: Ableiten, was das Zeug hält ...

Aufgabe 3

a) Berechnen Sie für die Eulersche Gammafunktion $\Gamma(x)$ die Werte $\Gamma\left(\pm\frac{1}{2}\right)$, $\Gamma\left(\pm\frac{3}{2}\right)$ und $\Gamma\left(\pm\frac{5}{2}\right)$. Verwenden Sie dabei ohne Beweis: $\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktionalgleichung

$$x \cdot \Gamma(x) = \Gamma(x+1)$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(-\frac{2k-1}{2}\right) = (-1)^k \cdot \pi$$

Aufgabe T1 Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

a) $\int_0^\infty e^{-t} \ln(1+t) dt$

b) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{\cosh x - 1}} dx$

c) $\int_0^1 (\ln x)^4 dx$

d) $\int_0^\infty \frac{t^a}{e^t - 1} dt \quad (a \in \mathbb{R})$

e) $\int_0^\infty \frac{y \ln y}{\sinh y - y} dy$

Aufgabe T2 Berechnen Sie näherungsweise

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

a) mittels der Trapezregel

b) mittels der Simpsonregel

bei Unterteilung in jeweils vier Teilintervalle. Geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

Aufgabe T3

a) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

konvergiert und berechnen Sie den Wert des Integrals.

b) Berechnen Sie den Cauchyschen Hauptwert von

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$$

Konvergiert das Integral?

Internet Informationen zur Vorlesung und zu Prüfungen finden Sie im Internet unter

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/>

Dort sind auch die Übungsblätter und deren Lösungen verfügbar.