UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. O. Knab
P. E. Bradley

WS 2000/2001
02.02.2001

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1

a) Wir substituieren $z = xy$. Da in der Gleichung x^{-2} vorkommt, müssen wir $x = 0$ ausschließen und können schreiben: $y = z/x$. Hieraus folgt $y' = z'/x - z/x^2$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} 2y' + y^2 + x^{-2} = 0 \quad &\leftrightarrow \quad 2(z'/x - z/x^2) + (z/x)^2 + x^{-2} = 0 \\ \leftrightarrow \quad 2xz' - 2z + z^2 + 1 = 0 \quad &\leftrightarrow \quad 2xz' + (z-1)^2 = 0 \quad \leftrightarrow \quad z' = -\frac{(z-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,. \end{aligned}$$

Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Offenbar ist $z(x) = 1$ eine Lösung (d. h. $y(x) = 1/x$ ist eine Lösung der ursprünglichen Gleichung); die anderen Lösungen erhalten wir aus

$$\int -\frac{2}{(z-1)^2}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx\,, \qquad \text{also} \qquad \frac{2}{z-1} = \ln|x| + c\,,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Die Gleichung für z hat also für $z(x) \neq 1$ die allgemeine Lösung

$$z(x) = 1 + \frac{2}{\ln|x| + c} \qquad (c \in \mathbb{R} \text{ beliebig}),$$

und zwar auf jedem Intervall, das 0 und $\pm e^{-c}$ nicht enthält. Wegen $y = z/x$ liefert dies auf den gleichen Intervallen die folgenden Lösungen der ursprünglichen Gleichung:

$$y(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x\ln|x| + cx} \qquad (c \in \mathbb{R} \text{ beliebig})$$

b) Hier drängt sich $z = x - y$ geradezu auf, und es gilt $y' = (x - z)' = 1 - z'$. Somit folgt

$$y' = (x-y)^2 + 1 \quad \leftrightarrow \quad 1 - z' = z^2 + 1 \quad \leftrightarrow \quad z' = -z^2\,.$$

Wieder handelt es sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen, deren Lösungen wir aus

$$\int -\frac{1}{z^2}\,dz = \int 1\,dx, \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{z} = x + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

gewinnen können; die Lösungen sind gegeben durch $z(x) = (x + c)^{-1}$, und zwar auf jedem Intervall, das $-c$ nicht enthält. Hieraus ergibt sich

$$y(x) = x - z(x) = x - \frac{1}{x+c} \qquad (c \in \mathbb{R} \text{ beliebig})$$

auf ebendiesen Intervallen.

Aufgabe 2

a) Als erstes lösen wir die homogene Gleichung. Da das Polynom $\lambda^2 - 2\lambda + 5$ die Nullstellen $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$ hat, lautet die (komplexe) Lösung der homogenen Gleichung

$$y(x) = C_1 e^{(1+2i)x} + C_2 e^{(1-2i)x} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{C}).$$

Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir jetzt den Ansatz $y_\mathrm{p}(x) = u(x)y_\mathrm{h}(x)$ mit $y_\mathrm{h}(x) := e^{(1+2i)x}$. Dann ergibt sich

$$y_\mathrm{p}' = u'y_\mathrm{h} + uy_\mathrm{h}', \qquad y_\mathrm{p}'' = u''y_\mathrm{h} + 2u'y_\mathrm{h}' + uy_\mathrm{h}'',$$

und damit

$$\begin{aligned} y_\mathrm{p}'' - 2y_\mathrm{p}' + 5y &= u''y_\mathrm{h} + 2u'y_\mathrm{h}' + uy_\mathrm{h}'' - 2(u'y_\mathrm{h} + uy_\mathrm{h}') + 5uy_\mathrm{h} \\ &= u''y_\mathrm{h} + u'(2y_\mathrm{h}' - 2y_\mathrm{h}) + u(y_\mathrm{h}'' - 2y_\mathrm{h}' + 5y_\mathrm{h}) = u''y_\mathrm{h} + 2u'(y_\mathrm{h}' - y_\mathrm{h}). \end{aligned}$$

Nun ist $y_\mathrm{h}' - y_\mathrm{h} = (1+2i)y_\mathrm{h} - y_\mathrm{h} = 2iy_\mathrm{h}$. Damit y_p eine Lösung ist, muss $u'' + 4iu' = -4$ gelten. Dies trifft etwa für $u(x) = ix$ zu. Dann ist $y_\mathrm{p}(x) = ixe^{(1+2i)x}$, und die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$y(x) = ixe^{(1+2i)x} + C_1 e^{(1+2i)x} + C_2 e^{(1-2i)x} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{C}).$$

Die rechte Seite der ursprünglichen Gleichung ist der Realteil der rechten Seite der komplexen Gleichung. Also müssen wir den Realteil nehmen, um die allgemeine (reelle) Lösung der ursprünglichen Gleichung zu bekommen:

$$y(x) = -xe^x \sin(2x) + ae^x \sin(2x) + be^x \cos(2x) \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

b) Wir betrachten zunächst für $x \neq 0$ die homogene Gleichung

$$x^3 y' + (2 - 3x^2)y = 0, \qquad \text{also} \qquad y' + \left(\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}\right) y = 0.$$

Diese besitzt die Lösungen

$$y(x) = C \exp\left(-\int^x \left(\frac{2}{t^3} - \frac{3}{t}\right) dt\right) = C \exp(x^{-2} + 3\ln|x|) = C|x|^3 e^{1/x^2} \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

Also: $y(x) = C_1 x^3 e^{1/x^2}$ (mit $C_1 \in \mathbb{R}$ beliebig) ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung, und zwar auf jedem Intervall, das 0 nicht enthält.

Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz $y_\mathrm{p}(x) = C(x)y_\mathrm{h}(x)$, wobei $y_\mathrm{h}(x) := x^3 e^{1/x^2}$. Dann ist

$$\begin{aligned} x^3 y_\mathrm{p}' + (2 - 3x^2)y_\mathrm{p} &= x^3(C'y_\mathrm{h} + Cy_\mathrm{h}') + (2 - 3x^2)Cy_\mathrm{h} \\ &= x^3 C' y_\mathrm{h} + \big(x^3 y_\mathrm{h}' + (2 - 3x^2)y_\mathrm{h}\big)C = x^3 C' y_\mathrm{h}. \end{aligned}$$

(Beachte: y_h löst die homogene Gleichung.) Damit y_p die inhomogene Gleichung löst, muss also $x^3 C' y_\mathrm{h} = x^3$ sein, d. h. es muss

$$C'(x) = 1/y_\mathrm{h}(x) = x^{-3} e^{-1/x^2}$$

gelten. Dies ist für $C(x) = \frac{1}{2} e^{-1/x^2}$ der Fall, und hiermit ergibt sich die partikuläre Lösung $y_\mathrm{p}(x) = \frac{1}{2}x^3$. Insgesamt: Auf jedem Intervall, das 0 nicht enthält, ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = \tfrac{1}{2}x^3 + Cx^3 e^{1/x^2} \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

Bemerkung: $x \mapsto \frac{1}{2}x^3$ ist sogar auf ganz $\mathbb{R}$ Lösung der Differentialgleichung; andere Lösungen gibt es auf Intervallen, die 0 enthalten, aber nicht.

Aufgabe 3

a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass man die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung sofort in der Hand hat, wenn man die Nullstellen des zugehörigen Polynoms $\lambda^2-2\lambda+3$ kennt; dies sind $\lambda_{1,2}=1\pm\sqrt{2}\,i$. Folglich hat die vorliegende Gleichung die allgemeine Lösung

$$y(x)=C_1e^x\sin(\sqrt{2}\,x)+C_2e^x\cos(\sqrt{2}\,x)\qquad(C_1,C_2\in\mathbb{R}).$$

Dann ist $y(0)=C_2$ und wegen

$$y'(x)=C_1e^x\sin(\sqrt{2}\,x)+C_1e^x\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}\,x)+C_2e^x\cos(\sqrt{2}\,x)-C_2e^x\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\,x)$$

gilt $y'(0)=\sqrt{2}\,C_1+C_2$. Die Bedingungen $y(0)=0$ und $y'(0)=2$ implizieren daher $C_2=1$ und $C_1=\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Die Lösung lautet mithin

$$y(x)=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,e^x\sin(\sqrt{2}\,x)+e^x\cos(\sqrt{2}\,x).$$

b) Das Polynom $\lambda^2-5\lambda+4$ hat die Nullstellen 1 und 4. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet folglich

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{4x}.$$

Für eine Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz $y_{\mathrm{p}}(x)=Ce^{2x}$. Dann ist $y_{\mathrm{p}}'=2Ce^{2x}$ und $y_{\mathrm{p}}''=4Ce^{2x}$, also

$$y_{\mathrm{p}}''-5y_{\mathrm{p}}'+4y_{\mathrm{p}}=4Ce^{2x}-10Ce^{2x}+4Ce^{2x}=-2Ce^{2x}.$$

Damit dies $=e^{2x}$ wird, muss $C=-\frac{1}{2}$ gewählt werden. Es folgt $y_{\mathrm{p}}(x)=-\frac{1}{2}e^{2x}$, und die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist somit

$$y(x)=-\tfrac{1}{2}e^{2x}+C_1e^x+C_2e^{4x}.$$

Aus $y(0)=1$ folgt $-\frac{1}{2}+C_1+C_2=1$ und aus $y'(0)=-1$ folgt $-1+C_1+4C_2=-1$. Ziehen wir die zweite Gleichung von der ersten ab, folgt $-3C_2=\frac{3}{2}$, also $C_2=-\frac{1}{2}$ und damit $C_1=2$. Die Lösung lautet daher

$$y(x)=-\tfrac{1}{2}e^{2x}+2e^x-\tfrac{1}{2}e^{4x}.$$

Aufgabe 4 Wir setzen an: $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $y'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$, und setzen in die Differentialgleichung ein: $0=(x-2x^2)y'-2xy=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}-2x^2\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}-2x\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^n-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_nx^{n+1}-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^n-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(na_n-2na_{n-1})x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-2a_{n-1})x^n$. Koeffizientenvergleich sagt uns nun, dass a_0 frei wählbar ist und $n(a_n-2a_{n-1})=0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ ist. Äquivalent dazu ist

$$a_0=C\in\mathbb{R}\text{ beliebig},\quad a_n=2a_{n-1}\text{ für alle}n\in\mathbb{N}.$$

Mit Induktion folgt, dass äquivalent dazu gilt: $a_n=C\cdot 2^n$ für alle $n=0,1,2,\dots$. Die allgemeine Lösung hat demnach die Gestalt $y=C\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^nx^n=\frac{C}{1-2x}$ mit Konvergenzbereich $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
Die Lösung des Anfangswertproblems ist durch $1=y(0)=C$ (0 in die Potenzreihe eingesetzt, ergibt das konstante Glied) gegeben: $y=\frac{1}{1-2x}$.
Alternative: Trennung der Variablen: $y=0$ ist eine Lösung. Und für $y\neq 0$ gilt $(x-2x^2)y'=2xy$ genau dann, wenn $\frac{y'}{y}=\frac{2}{1-2x}$. Integrieren liefert Äquivalenz zu $\ln y=-\ln(1-2x)+c$, oder (äquivalent) $y=\frac{c}{1-2x}$. Die Lösung gilt auf dem Intervall $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
Das Anfangsproblem löst sich hier durch Einsetzen von $x=0$ direkt in die Funktion.

Aufgabe T1

a) Als erstes erkennen wir, dass $y = 1$ die DGl löst. Sei also $y \neq 1$. Trennung der Variablen liefert $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx$ oder, äquivalent, $\arcsin y = x + C$ mit $C \in \mathbb{R}$. Die allgemeine Lösung ist also $y(x) = \sin(x + C)$, $C \in \mathbb{R}$, sowie $y = 1$.

b) Hier muss $x \neq 0$ vorgeschrieben werden. Dann ist die Gleichung äquivalent zur homogenen DGl $\sin \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} + y' \cos \frac{y}{x}$. Substituiere $z = \frac{y}{x}$ und erhalte die DGl $\sin z + xz' \cos z = 0$. Hier trennen wir die Variablen: $z' \frac{\cos z}{\sin z} = -\frac{1}{x}$ und integrieren: $\ln|\sin z| = -\ln|x| + C$ mit $C \in \mathbb{R}$. Genau dann ist $|\sin z| = \frac{e^C}{|x|}$, was äquivalent ist zu $\sin z = \pm \frac{e^C}{|x|} = \frac{K}{x}$ mit $K \in \mathbb{R}$ geeignet. Wir sehen, dass K mit C alle reellen Zahlen durchläuft, was uns zur allgemeinen Lösung $y = x \arcsin \frac{K}{x}$, $K \in \mathbb{R}$, auf allen Intervallen, die $x = 0$ nicht enthalten, führt.

c) Gemeint war die DGl $y'(\ln x)^{-1} - y = y^2$. Hier ist $x \neq 1$ vorauszusetzen. Da $y = 0$ eine Lösung und $y = 1$ keine Lösung ist, setzen wir voraus, dass y keine der beiden konstanten Funktionen ist. Trennen wir nun die Variablen: $\frac{y'}{y(y+1)} = \ln x$. Integrieren: $\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) dx = x \ln x - x + C$ mit $C \in \mathbb{R}$. Da die linke Seite gleich $\ln\left|\frac{y}{y+1}\right|$ ist, bekommen wir äquivalent $1 - \frac{1}{y+1} = \pm e^C x^x e^{-x}$. Mit K geeignet haben wir die allgemeine Lösung $y = \frac{Kx^x e^{-x}}{1-Kx^x e^{-x}}$, wobei K die reellen Zahlen durchläuft, nebst $y = 0$. Die von Null verschiedenen Lösungen gelten natürlich nur in Intervallen, in denen der jeweilige Nenner von y nicht verschwindet.

d) Die DGl heißt ja $y \ln y + (x - \ln y)\frac{dy}{dx} = 0$. Schließen wir die Lösung $y = 1$ aus, ist dazu äquivalent $\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y \ln y} = \frac{1}{y}$ (y ist ohnehin ungleich Null). Dies ist, wenn wir x als Funktion in y ansehen, eine (inhomogene) lineare DGl erster Ordnung.

Lösung der homogenen DGl: Integrieren wir $\frac{1}{x}\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y \ln y}$, so erhalten wir $\ln|x| = -\ln|\ln y| + C$ oder, äquivalent, $x(y) = \frac{K}{\ln y}$, wobei C bzw. K die reellen Zahlen durchläuft.

Lösung der inhomogenen DGl: Gelingt mit Variation der Konstante. Setze $x(y) = \frac{K(y)}{\ln y}$. Dann ist $x' = \frac{K'}{\ln y} - \frac{K}{y(\ln y)^2}$. Einsetzen in die DGl liefert $\frac{K'}{\ln y} = \frac{1}{y}$, was sich zu $K(y) = \frac{(\ln y)^2}{2} + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$, integriert.

Die allgemeine Lösung ist daher $x(y) = \frac{\ln y}{2} + \frac{\kappa}{\ln y}$. Um nun nach y aufzulösen, betrachten wir die äquivalente, in $\ln y$ quadratische Gleichung $(\ln y)^2 - 2x \ln y + \kappa = 0$ mit der Lösung $y(x) = e^{x \pm \sqrt{x^2 - \kappa}}$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Aufgabe T2

a) Trennung der Variablen: $y' = \frac{1+y^2}{yx(1+x^2)}$ (hier ist ohnehin $x, y \neq 0$), was mit $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$ durch Integrieren auf $\frac{\ln(1+y^2)}{2} = \ln|x| - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C$, $C \in \mathbb{R}$, führt. Äquivalent: $\sqrt{1+y^2} = K\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Mit $y(1) = 2$ bekommen wir $K = \sqrt{10}$, was auf $y = \sqrt{\frac{10x^2}{1+x^2} - 1}$ führt. Die negative Wurzel kommt hier nicht in Frage, da $y(1) = 2 > 0$ ist, und das Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist.

b) Wir erkennen, dass die DGl in Wirklichkeit $y' = 1 + \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\frac{y}{x}}$ heißt, eine homogene DGl. Die kanonische Substitution $z(x) = \frac{y}{x}$ führt uns auf das Anfanswertproblem

$$xz' + z = 1 + \frac{z^2}{1+z}, \quad z(1) = 0.$$

Wir können trennen: $(1+z)z' = \frac{1}{x}$ und integrieren: $z + \frac{z^2}{2} = \ln|x|$. Die Konstante verschwindet wegen der Anfangsbedingung $z(1) = 0$. Rücksubstitution liefert $xy + \frac{y^2}{2} = x^2 \ln|x|$ oder (äquivalent) $y(x) = x\left(-1 \pm \sqrt{1 - 2\ln|x|}\right)$ in jedem Intervall, das $x = 0$ nicht enthält ($x = 0$ muss von vorneherein ausgeschlossen werden).

c) Dies ist eine lineare DGl erster Ordnung.

Homogener Teil: $y' + y\cos x = 0$ integrieren wir: $\ln|y| = -\sin x + C$ oder (äquivalent) $y = Ke^{-\sin x}$ mit C bzw. $K \in \mathbb{R}$.

Eine Partikulärlösung: Finden wir mit Variation der Konstante. Hier $y(x) = K(x)e^{-\sin x}$. Eingesetzt: $K'e^{-\sin x} = \sin x \cos x$. Dies liefert $K(x) = \int \sin x e^{\sin x} \cos x\, dx \overset{t=\sin x}{=} \int te^t\, dt = te^t - \int e^t\, dt = \sin x e^{\sin x} - e^{\sin x} + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Die allgemeine Lösung ergibt sich zu $y(x) = \kappa e^{-\sin x} + \sin x - 1$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Mit $y(0) = 1$ bekommen wir $\kappa = 2$, also die Lösung $y(x) = 2e^{-\sin x} + \sin x - 1$.

d) Wir erkennen, dass eine Bernoulli-DGl vorliegt, substituieren $z = y^{1-3} = \frac{1}{y^2}$ und erhalten die lineare DGl $z' - 2xz = x^3$.

Hom. DGl: Trenne und integriere: $\ln|z| = x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$, oder (äquivalent) $z(x) = Ke^{x^2}$, $K \in \mathbb{R}$.

Part. Lsg.: $z(x) = K(x)e^{x^2}$ eingesetzt: $K'e^{x^2} = x^3$, also $K(x) = \int x^2 \cdot xe^{-x^2}\, dx = -\frac{x^2}{2}e^{-x^2} + \int xe^{-x^2}\, dx = -\frac{x^2}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2} + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Allgemeine Lsg.: $z(x) = \kappa e^{x^2} - \frac{x^2+1}{2}$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Anfangsbedingung: $z(0) = \frac{1}{2}$ liefert $\kappa = 1$, also $z = e^{x^2} - \frac{x^2+1}{2}$. Dies bedeutet $y(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{x^2} - \frac{x^2+1}{2}}}$ (es ist die positive Wurzel zu nehmen wegen $y(0) = \sqrt{2} > 0$ und der eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblems).

Aufgabe T3 Es bezeichne $x(t)$ die Auslenkung der Masse (bezüglich der Ruhelage) zum Zeitpunkt t. Die Rückstellkraft der Feder ist gegeben durch $-Dx(t)$ mit einer positiven Konstante D. Bei ungedämpfter Schwingung würde also nach dem Newtonschen Kraftgesetz

$$m\ddot{x}(t) = -Dx(t)$$

gelten. Da jedoch eine Dämpfungskraft $-r\dot{x}(t)$ (wobei $r > 0$) hinzukommt, müssen wir die Differentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) = -Dx(t) - r\dot{x}(t)$$

betrachten. Setzen wir $a := r/2m$ und $b := D/m$, so haben wir die Gleichung

$$\ddot{x}(t) + 2a\dot{x}(t) + bx(t) = 0$$

vor uns. Aus der Vorlesung sind die Lösungen bekannt:
1. Fall: $a^2 > b$, also $r > 2\sqrt{mD}$ (*starke Dämpfung*). Die allgemeine Lösung lautet dann

$$x(t) = C_1 e^{(-a+\sqrt{a^2-b})t} + C_2 e^{(-a-\sqrt{a^2-b})t} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}),$$

d. h. sie hat die Gestalt $x(t) = C_1 e^{-\delta_1 t} + C_2 e^{-\delta_2 t}$ mit positiven Konstanten δ_1 und δ_2. Offenbar gilt $x(t) \to 0$ für $t \to \infty$, die Schwingung wird also immer schwächer. Weiter haben wir: $x(t) = 0$ ist (wenn o.B.d.A. $C_1 \neq 0$) gleichbedeutend mit $e^{(\delta_2-\delta_1)t} = -C_2/C_1$. Dies kann wegen $\delta_1 \neq \delta_2$ für höchstens ein t erfüllt sein. Bei dieser trägen „Schwingung" wird die Ruhelage also höchstens einmal durchquert.
2. Fall: $a^2 = b$, also $r = 2\sqrt{mD}$ (ebenfalls *starke Dämpfung*). Dann ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$x(t) = C_1 e^{-at} + C_2 te^{-at} = (C_1 + C_2 t)e^{-at} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Auch hier zeigt sich das gleiche Verhalten wie im ersten Fall: $x(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$ und $x(t) = 0$ gilt für höchstens ein t (nämlich $t = -C_1/C_2$).
3. Fall: $a^2 < b$, also $r < 2\sqrt{mD}$ (*schwache Dämpfung*). Dann ist

$$x(t) = C_1 e^{-at}\cos(\sqrt{b-a^2}\, t) + C_2 e^{-at}\sin(\sqrt{b-a^2}\, t) \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Im nichttrivialen Fall (also $A := (C_1^2 + C_2^2)^{1/2} \neq 0$) schreiben wir dies noch um: Wegen $(C_1/A)^2 + (C_2/A)^2 = 1$ gibt es dann ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $(C_2/A) + i(C_1/A) = e^{i\varphi}$. Das bedeutet $C_2/A = \cos\varphi$ und $C_1/A = \sin\varphi$, also

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{-at}\left(\frac{C_1}{A}\cos(\sqrt{b-a^2}\,t) + \frac{C_2}{A}\sin(\sqrt{b-a^2}\,t)\right) \\ &= Ae^{-at}\Big(\sin\varphi\cos(\sqrt{b-a^2}\,t) + \cos\varphi\sin(\sqrt{b-a^2}\,t)\Big) = Ae^{-at}\sin(\varphi + \sqrt{b-a^2}\,t)\,. \end{aligned}$$

Hier haben wir nun eine wirkliche „Schwingung"; sie wird zwar auch immer schwächer, die schwingende Masse durchquert dabei aber immer wieder die Ruhelage.
Die Konstanten können jeweils noch benutzt werden, um die vorgegebene Anfangsauslenkung und Geschwindigkeit zu berücksichtigen.