

## 15. Übungsblatt

### Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

**Aufgabe** Die Bewegung einer an beiden Enden eingespannten Saite der Länge  $L$  wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, L), \quad t > 0,$$

wobei  $a$  eine positive Konstante ist, und  $u = u(x, t)$  die Auslenkung senkrecht (in einer Ebene) zur Ruhelage zur Zeit  $t$  am Ort  $x$  beschreibt (Verifizieren Sie dies in der physikalischen Literatur unter dem Stichwort *Wellengleichung*). Der Ausdruck  $\frac{\partial u}{\partial t}$  bedeutet, dass die Variable  $x$  als konstant betrachtet wird und nach  $t$  abgeleitet wird. Entsprechendes gilt für  $\frac{\partial u}{\partial x}$ .  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$  bzw.  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  bedeutet die zweite Ableitung in obigem Sinne. Zur Gleichung hinzu kommen noch die Randbedingungen (Saite an den Enden eingespannt)

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{für } t \geq 0$$

und die Anfangsbedingungen  $u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$  für  $x \in (0, L)$ , die besagen, dass zur Zeit  $t = 0$  die Auslenkung  $u_0$  und die Geschwindigkeit  $v_0$  der Saite vorgegeben wird.

- a) Zeigen Sie, dass für eine Lösung der obigen Gleichung der Gestalt  $u(x, t) = v(x)w(t)$  die beiden Funktionen  $v(x)$  und  $w(t)$  den beiden Differentialgleichungen

$$v'' + \lambda v = 0, \quad \ddot{w} + a^2 \lambda w = 0$$

mit einer gewissen Konstante  $\lambda \in \mathbb{R}$  genügen.

- b) Zeigen Sie: Lösen  $v(x)$  und  $w(t)$  die beiden Gleichungen aus a), so ist  $u(x, t) = v(x)w(t)$  eine Lösung der Gleichung der schwingenden Saite.
- c) Finden Sie alle  $\lambda$ , für die die Gleichung der schwingenden Saite unter den Randbedingungen eine nicht triviale Lösung der Form  $v(x)w(t)$  besitzt.
- d) Unter welchen hinreichenden Bedingungen ist

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \left(A_n \cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{an\pi}{L}t\right)\right)$$

eine Lösung der Saitengleichung mit den Randbedingungen?

- e) Bestimmen Sie die  $A_n$ ,  $B_n$  aus d), wenn zusätzlich noch die obigen Anfangsbedingungen gelten, wobei speziell  $v_0 = 0$  zu wählen ist.
- f) Was ändert sich, wenn noch zusätzlich die Saite an der Stelle  $x = \frac{L}{n}$  für festes  $n \geq 2$  (mit einem Finger o.ä.) berührt wird?

**Aufgabe T1** Die Funktionen  $f$ ,  $g$  und  $h$  seien gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x) &= x & (-\pi < x \leq \pi), & & f(x+2\pi) &= f(x), \\ g(x) &= 1+x+|x| & (-2 < x \leq 2), & & g(x+4) &= g(x), \\ h(x) &= \cos(\tfrac{1}{2}x) & (-\pi < x \leq \pi), & & h(x+2\pi) &= h(x). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Fourierreihen dieser Funktionen.

**Aufgabe T2** Betrachten Sie die Funktion  $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch  $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$  gegeben ist. Entwickeln Sie  $f$  in eine

a) Cosinusreihe

b) Sinusreihe

*Hinweis:* Sie müssen  $f$  jeweils unterschiedlich fortsetzen.

**Aufgabe T3** Bestimmen Sie (unter Verwendung von Aufgabe T2) die Werte der Reihen

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad \text{und} \quad 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots.$$

**Aufgabe T4** Es seien  $a$ ,  $b$  und  $c$  positive, reelle Zahlen. Die Funktion  $f$  sei stetig, stückweise glatt und  $2\pi$ -periodisch. Bestimmen Sie eine Lösung  $x$  der Differentialgleichung

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t)$$

mit  $x(0) = x(2\pi)$  und  $\dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi)$ , indem Sie für  $x$  einen Ansatz in Form einer trigonometrischen Reihe machen.

**Internet** Informationen zur Vorlesung und zu Prüfungen finden Sie im Internet unter

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/>

Dort sind auch die Übungsblätter und deren Lösungen verfügbar.