UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. O. Knab
P. E. Bradley

WS 2000/2001
9.2.2001

Lösungsvorschläge zum 15. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe In der Aufgabe geht es stets um *nicht triviale* Lösungen des Problems.

a) Sei $u(x,t) \neq 0$ eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung, und sei $u(x,t) = v(x)w(t)$. Dann ist $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v(x)\ddot{w}(t)$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v''(x)w(t)$. Da $v, w \neq 0$ vorausgesetzt wird, ist die Wellengleichung äquivalent zu

$$\frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} = a^2 \frac{v''(x)}{v(x)},$$

und wir sehen, dass die linke Seite konstant in x und die rechte Seite konstant in t ist, also beide Seiten konstant sind. Setzen wir daher $\frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, so genügen v und w den beiden DGl

$$v'' + \lambda v = 0 \text{ (I)}, \quad \ddot{w}(t) + a^2\lambda w = 0 \text{ (II)}$$

b) Seien umgekehrt v eine Lösung der DGl (I) und w eine Lösung von (II). Dann gilt für $u(x,t) = v(x)w(t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v(x)\ddot{w}(t) \overset{\text{(II)}}{=} -v(x)\lambda a^2 w(t) \overset{\text{(I)}}{=} a^2 v''(x)w(t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

c) Die Randbedingungen übersetzen sich bei unserem Ansatz zu $v(0)w(t) = v(L)w(t) = 0$, also zu $v(0) = v(L) = 0$, da $w \neq 0$ ist. Wir suchen nun Bedingungen an λ für die Existenz nicht trivialer Lösungen von (I) unter dieser Randbedingung.

Wegen $v(0) = 0$ ist v nicht konstant. Dann ist aber $v' \neq 0$.

Zeige $\lambda > 0$: (I) besagt: $\lambda v = -v''$. Da $v \neq 0$ stetig ist, folgt $\int_0^L v^2\,dx > 0$ (Warum?), also $\lambda \int_0^L v^2\,dx = -\int_0^L vv''\,dx = -vv'\Big|_0^L + \int_0^L (v')^2\,dx = \int_0^L (v')^2\,dx > 0.$

Weitere Einschränkungen an λ: Zunächst sind alle Lösungen von $v'' + \lambda v = 0$ über das charakteristische Polynom $\chi(\alpha) = \alpha^2 + \lambda = (\alpha - i\sqrt{\lambda})(\alpha + i\sqrt{\lambda})$ gegeben:

$$v(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung. Die Randbedingung $v(0) = 0$ liefert sofort $C_1 = 0$. Wegen $v \neq 0$ muss dann $C_2 \neq 0$ sein. Die Randbedingung $v(L) = 0$ liefert $C_2 \sin\sqrt{\lambda}L = 0$. Wegen $C_2 \neq 0$ bedeutet dies $\sqrt{\lambda}L = n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}$ ($n = 0$ ist auszuschließen wegen $\lambda, L > 0$). Somit ist das Randwertproblem der schwingenden Saite nur für $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2} =: \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, nicht trivial lösbar.

Löse (II) *für* $\lambda = \lambda_n$: Das charakteristische Polynom für $\ddot{w} + a^2\lambda_n w = 0$ ist $\chi_n(\alpha) = \alpha^2 + a^2\lambda_n = \left(\alpha - i\frac{an\pi}{L}\right)\left(\alpha + i\frac{an\pi}{L}\right)$. Die DGl hat also die allgemeine Lösung

$$w_n(t) = \tilde{C}_1 \cos\frac{an\pi}{L}t + \tilde{C}_2 \sin\frac{an\pi}{L}t$$

mit $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in \mathbb{R}$.

Wir bekommen so Lösungen

$$u_n(x,t) = C_2 \sin\frac{n\pi}{L}x\left(\tilde{C}_1\cos\frac{an\pi}{L}t + \tilde{C}_2\sin\frac{an\pi}{L}t\right) = \sin\frac{n\pi}{L}x\left(A_n\cos\frac{an\pi}{L}t + B_n\sin\frac{an\pi}{L}t\right)$$

der Saitengleichung, wobei A_n, B_n so zu wählen sind, dass $u_n(0,t) = u_n(L,t) = 0$ für alle $t \geqslant 0$ gilt.

d) Aufgabenteil c) liefert jedoch längst nicht alle Lösungen! Überlagern wir die Schwingungen $u_n(x,t)$, so bekommen wir eine weitere Lösung $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ des Randwertproblems, falls die Reihe konvergiert und zweimal gliedweise in x und in t differenzierbar ist (äquivalent hierzu ist die gleichmäßige Konvergenz und zweifache Differenzierbarkeit der Reihe):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^2\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Mit allen u_n erfüllt natürlich auch u die Randbedingungen.

e) Wir widmen uns nun der Bestimmung der Amplituden A_n, B_n aus d) unter den Anfangsbedingungen

$$\begin{array}{ll} u(x,0) = u_0(x) & \text{(Auslenkung } u_0 \text{ zur Zeit } t=0\text{)} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{(Saite zur Zeit } t=0 \text{ einfach loslassen)} \end{array}$$

Es ist $u(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{L}x =: g(x)$, und

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{an\pi}{L}B_n\sin\frac{n\pi}{L}x = 0$ bedeutet wegen der Orthogonalität des Systems $\left\{\sin\frac{n\pi}{L}x\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, dass $B_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

Um die A_n zu bestimmen, ziehen wir Fourierreihen heran. Die Randbedingungen besagen zunächst $g(0) = g(L) = 0$. Die auf $[0,L]$ definierte Funktion setzen wir auf ganz $\mathbb{R}$ zu einer $2L$-periodischen ungeraden Funktion G fort, die auch zweimal differenzierbar sei. Die Transformation $\gamma(x) := G\left(\frac{L}{\pi}x\right)$ ergibt dann eine 2π-periodische Funktion, die mit ihrer Fourierreihe übereinstimmt. Diese ist eine Sinusreihe:

$$\gamma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx, \quad A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\gamma(\tau)\sin n\tau\,d\tau \overset{\tau=\frac{\pi}{L}t}{=} \frac{2}{L}\int_0^{L} g(t)\sin\frac{n\pi}{L}t\,dt$$

Mit diesen Amplituden bekommen wir tatsächlich eine konvergente Reihe

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{L}x\cos\frac{an\pi}{L}t\,,$$

die das Randwertproblem löst:

Die Randbedingungen und die erste Anfangsbedingung gelten: $u(0,t) = u(L,t) = 0$, $u(x,0) = g(x)$. Für das Weitere besagt das Additionstheorem für $\sin x$, dass

$$\sin\frac{n\pi}{L}x\cos\frac{an\pi}{L}t = \frac{1}{2}\sin\Big(\frac{n\pi}{L}(x-at)\Big) + \frac{1}{2}\sin\Big(\frac{n\pi}{L}(x+at)\Big)$$

gilt, also

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\Big(\frac{n\pi}{L}(x-at)\Big)}_{=:\,G(x-at)} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\Big(\frac{n\pi}{L}(x+at)\Big)}_{=:\,G(x+at)}.$$

Die zweite Anfangsbedingung gilt: $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\frac{a}{2}G'(x-at) + \frac{a}{2}G'(x+at) = 0$. Und $u(x,t)$ löst die DGl:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^2}{2}G''(x-at) + \frac{a^2}{2}G''(x+at) = a^2\Big(\frac{1}{2}G''(x-at) + \frac{1}{2}G''(x+at)\Big) = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

f) Nennen wir erst einmal $\frac{u_1(x,t)}{A_1} = \sin\frac{\pi}{L}x\cos\frac{a\pi}{L}t$ den *Grundton* und für $n \geqslant 2$ die weiteren $\frac{u_n}{A_n} = \sin\frac{n\pi}{L}x\cos\frac{an\pi}{L}t$ den $(n-1)$*-ten Oberton*. Berührung in $x = \frac{L}{n}$ für $n \geqslant 2$ fest bedeutet die zusätzliche Bedingung $u\left(\frac{L}{n},t\right) = 0$ für alle $t \geqslant 0$. Sei nun $m \in \mathbb{N}$. Für den Grundton bzw. den $(m-1)$-ten Oberton bedeutet dies $u_m\left(\frac{L}{n},t\right) = A_m\sin\frac{m}{n}\pi\cos\frac{an\pi}{L}t = 0$. Aber genau dann ist $\sin\frac{m}{n}\pi \neq 0$, wenn n kein Teiler von m ist. Für solche m muss daher die Amplitude A_m verschwinden. Zu hören sind also nur noch die k-ten Obertöne, für die $k+1$ ein Vielfaches von n ist. Anders sieht es aus, wenn die Saite in $x = \frac{L}{n}$ niedergedrückt wird. Dann haben wir im Wesentlichen das ursprüngliche Randwertproblem mit einer Saite der Länge $\frac{L}{n}$ (oder $L - \frac{L}{n}$) vor uns, bei dem wesentlich mehr (und ganz andere) Obertöne mitschwingen können.

Es ist übrigens nicht zwingend $A_k > 0$ für jedes erlaubte k, wie jeder Musiker wissen sollte. Es ist (zwar schwierig, aber) möglich, auch einzelne Obertöne (durch die Art der Anregung) anzusprechen, d. h. alle anderen Amplituden vernachlässigbar klein zu halten. Die Kunst beim Saiteninstrumentenspiel ist es jedoch, außer dem Grundton auch die niedrigen Obertöne (ich schätze bis $n \leqslant 20$) mit recht hoher (nach oben hin abnehmender) Amplitude A_n hinzubekommen. Dies gibt dem Ton mehr Volumen, und verleiht dem Klang eine gewisse „Tiefe“. Zu diesem Zweck sollten Streicher übrigens nicht zu weit weg vom Steg streichen (beim Violoncello: günstiger Abstand $\leqslant$ 1-2 cm!). Denn ein streichender Bogen erzwingt eine Randbedingung von der Art wie in diesem Aufgabenteil, d. h. es werden Obertöne ausgeschaltet. Diese sollten aber möglichst hoch sein. Die Schwierigkeit besteht allerdings, dafür zu sorgen, dass wegen der großen Nähe zum Steg nicht zu hohe Obertöne vom Resonanzkörper verstärkt werden (Kratzgeräusche …).

Aufgabe T1 • Die Funktion f hat die Fourierkoeffizienten

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-ikx}\,dx \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Es ergibt sich $\widehat{f}(0) = 0$, und für $k \neq 0$ liefert Produktintegration

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-ikx}\,dx &= x\cdot\frac{e^{-ikx}}{-ik}\Big|_{x=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ikx}}{-ik}\,dx \\ &= \frac{\pi(-1)^k - (-\pi)(-1)^k}{-ik} - \frac{e^{ikx}}{(-ik)^2}\Big|_{x=-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi i(-1)^k}{k} - 0\,.\end{aligned}$$

(Beachte: Es gilt $e^{ik(\pm\pi)} = (-1)^k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.) Also haben wir $\widehat{f}(k) = i(-1)^k/k$ für $k \neq 0$, und die Fourierreihe von f ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i(-1)^k}{k}(e^{ikx} - e^{-ikx})\,.$$

Wenn man will, kann man daraus auch noch die Koeffizienten in der Darstellung

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)\big)$$

der Fourierreihe gewinnen: Laut Vorlesung gilt

$$\alpha_k = \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k) \quad (k \geqslant 0) \qquad \text{und} \qquad \beta_k = i\big(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)\big) \quad (k \geqslant 1)\,.$$

In unserem Falle ergibt sich $\alpha_k = 0$ und $\beta_k = 2(-1)^{k+1}/k$.

Bemerkung: Da f stückweise glatt ist, stellt die Fourierreihe die Funktion an allen Stetigkeitsstellen dar; an den Unstetigkeitsstellen $x_k = (2k+1)\pi$ (mit $k \in \mathbb{Z}$) konvergiert die Fourierreihe gegen $\frac{1}{2}(f(\pi+) + f(\pi-)) = \frac{1}{2}(-\pi + \pi) = 0$.

• Die Funktion g ist nicht 2π-periodisch, sie hat vielmehr die Periode $T := 4$. Daher setzen wir $\omega := 2\pi/T$ und betrachten die 2π-periodische Funktion G, die gegeben ist durch $G(y) := g(y/\omega)$. Falls $x \in \mathbb{R}$ so gewählt ist, dass die Funktion G an der Stelle ωx durch ihre Fourierreihe dargestellt wird, gilt

$$g(x) = G(\omega x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{G}(k)e^{ik\omega x}\,.$$

Diese Reihe heißt daher die Fourierreihe von g, und man schreibt $\widehat{g}(k) = \widehat{G}(k)$. Es gilt

$$\widehat{G}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(y)e^{-iky}\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y/\omega)e^{-iky}\,dy\,;$$

wegen $g(x) = 1$ für $x \in (-2, 0)$ und $g(x) = 1 + 2x$ für $x \in (0, 2)$ folgt

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iky}\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 2(y/\omega)e^{-iky}\,dy\,;$$

für $k = 0$ ergibt sich hier $1 + \frac{1}{2\pi}\cdot\pi^2/\omega = 2$; sonst gilt (Produktintegration)

$$\begin{aligned} &= 0 + \frac{2}{2\pi\omega}\left(y\cdot\frac{e^{-iky}}{-ik}\Bigg|_{y=0}^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{e^{-iky}}{-ik}\,dy\right) = \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{\pi(-1)^k}{-ik} - \frac{e^{-iky}}{(-ik)^2}\Bigg|_{y=0}^{\pi}\right) \\ &= \frac{2i(-1)^k}{k\pi} - \frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{(-1)^k - 1}{-k^2} = \frac{2i(-1)^k}{k\pi} + \frac{2(-1)^k - 2}{k^2\pi^2}\,. \end{aligned}$$

Damit ist die Fourierreihe berechnet. Will man noch die α_k und β_k bestimmen, so erhält man $\alpha_0 = 4$ und $\alpha_k = 4((-1)^k - 1)/(k^2\pi^2)$ sowie $\beta_k = 4(-1)^{k+1}/(k\pi)$ für $k \geqslant 1$.

Bemerkung: Eine beliebige T-periodische Funktion g hat also die Fourierkoeffizienten

$$\widehat{g}(k) = \widehat{G}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y/\omega)e^{-iky}\,dy = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(x)e^{-ik\omega x}\,dx\,,$$

wie man mit der Substitution $x = y/\omega$ einsieht.

• Die Funktion h ist wieder 2π-periodisch. Zur Abwechslung berechnen wir diesmal direkt die Koeffizienten α_k und β_k in der Cosinus/Sinus-Darstellung der Fourierreihe. Da h eine gerade Funktion ist, gilt $\beta_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k \geqslant 0$ ist

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\tfrac{1}{2}x)\cos(kx)\,dx$$

Zweimalige Produktintegration liefert

$$\begin{aligned}
I_k &:= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\tfrac{1}{2}x)\cos(kx)\,dx \\
&= 2\sin(\tfrac{1}{2}x)\cos(kx)\,\Big|_{x=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2\sin(\tfrac{1}{2}x)(-k\sin(kx))\,dx \\
&= 2\big(\cos(k\pi) + \cos(-k\pi)\big) + 2k\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\tfrac{1}{2}x)\sin(kx)\,dx \\
&= 4(-1)^k + 2k\left(-2\cos(\tfrac{1}{2}x)\sin(kx)\,\Big|_{x=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -2\cos(\tfrac{1}{2}x)(k\cos(kx))\,dx\right) \\
&= 4(-1)^k - 0 + 4k^2 I_k\,.
\end{aligned}$$

Somit haben wir die Gleichung $I_k = 4(-1)^k + 4k^2 I_k$; dies bedeutet $I_k = 4(-1)^k/(1-4k^2)$. Damit kennen wir $\alpha_k = I_k/\pi$ und es ergibt sich die Fourierreihe

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{(1-4k^2)\pi}\cos(kx)\,.$$

Hieraus kann man auch die $\widehat{h}(k)$ ablesen, und zwar mittels der Formeln

$$2\widehat{h}(k) = \alpha_k - i\beta_k \qquad \text{und} \qquad 2\widehat{h}(-k) = \alpha_k + i\beta_k \qquad (\text{wobei } \beta_0 := 0)\,.$$

Aufgabe T2 **a)** Eine reine Cosinusreihe ergibt sich für gerade Funktionen; also setzen wir f hier zu einer 2π-periodischen, geraden Funktion F fort:

$$F(x) := \begin{cases} x - \frac{\pi}{2}, & x \in [0,\pi], \\ -x - \frac{\pi}{2}, & x \in (-\pi, 0), \end{cases} \qquad F(x+2\pi) := F(x)$$

Für die Fourierkoeffizienten α_k und β_k von F gilt dann $\beta_k = 0$ und

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (x - \tfrac{\pi}{2})\cos(kx)\,dx\,.$$

Offenbar ist $\alpha_0 = 0$ und für $k \neq 0$ haben wir

$$\int x\cos(kx)\,dx = \frac{x\sin(kx)}{k} - \int \frac{\sin(kx)}{k}\,dx = \frac{x\sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2}\,.$$

Folglich ist für $k \in \mathbb{N}$

$$\alpha_k = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2}\right)\Bigg|_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k - 1}{k^2} - 0\,.$$

Das bedeutet $\alpha_{2n} = 0$ (gilt auch für α_0) und $\alpha_{2n+1} = -4/((2n+1)^2\pi)$. Da F stetig und stückweise glatt ist, stellt die Fourierreihe die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ dar, es gilt also

$$x - \frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{(2n+1)^2\pi} \cos((2n+1)x) \qquad \text{für } x \in [0,\pi]\,.$$

b) Eine reine Sinusreihe erhalten wir, wenn wir f zu einer ungeraden Funktion fortsetzen:

$$F(x) := \begin{cases} x - \frac{\pi}{2}, & x \in [0,\pi], \\ x + \frac{\pi}{2}, & x \in (-\pi, 0), \end{cases} \qquad F(x+2\pi) := F(x)$$

Dann gilt $\alpha_k = 0$ für alle $k \geqslant 0$ und

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x)\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \tfrac{\pi}{2})\sin(kx)\,dx$$

für alle $k \geqslant 1$. Produktintegration liefert

$$\int x\sin(kx)\,dx = -\frac{x\cos(kx)}{k} + \int \frac{\cos(kx)}{k}\,dx = -\frac{x\cos(kx)}{k} + \frac{\sin(kx)}{k^2}\,,$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos(kx)}{k} + \frac{\sin(kx)}{k^2}\right)\Bigg|_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin(kx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-\pi(-1)^k}{k} + \frac{\cos(kx)}{k}\Bigg|_{x=0}^{\pi} = \frac{-2(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{k} = -\frac{(-1)^k + 1}{k}\,. \end{aligned}$$

Also ist $\beta_{2n-1} = 0$ und $\beta_{2n} = -1/n$ für alle $n \geqslant 1$. Da F stückweise glatt ist, wird die Funktion in allen Stetigkeitsstellen durch ihre Fourierreihe dargestellt; wir erhalten also

$$x - \frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\sin(2nx) \qquad \text{für } x \in (0,\pi)\,.$$

(An den Stellen $x_k = k\pi$ konvergiert die Fourierreihe gegen $\frac{1}{2}(F(0+) + F(0-)) = 0$.)

Aufgabe T3 Setzen wir in die Darstellung aus **T2 b)** $x = \pi/4$ ein, so ergibt sich

$$-\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\sin(n\pi/2) = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - + \cdots\,.$$

Die erste Reihe hat also den Wert $\pi/4$.

Setzen wir in die Darstellung aus **T2 a)** $x = 0$ ein, so ergibt sich

$$-\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{(2n+1)^2\pi} = -\frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right)\,.$$

Die zweite Reihe ergibt also $\pi^2/8$.

Aufgabe T4 Da f stetig und stückweise glatt ist, wird diese Funktion überall durch ihre Fourierreihe dargestellt. Für x machen wir nun den Ansatz

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

und nehmen an, diese Reihe dürfe gliedweise zweimal differenziert werden. Dann gilt

$$\begin{aligned} a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) &= a \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (ik)^2 e^{ikt} + b \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (ik) e^{ikt} + c \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(-ak^2 + ibk + c) e^{ikt} \end{aligned}$$

Dies muss $= f(t)$ sein, damit x eine Lösung ist. Das ist dann der Fall, wenn

$$\widehat{f}(k) = c_k(-ak^2 + ibk + c) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

gilt. Da wir mit f auch $\widehat{f}(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ kennen, können wir die c_k ausrechnen (in Abhängigkeit von dem jeweils gegebenen f):

$$c_k = \frac{\widehat{f}(k)}{-ak^2 + ibk + c}$$

(Die Zahl im Nenner ist $\neq 0$, denn für $k = 0$ steht hier c und für $k \neq 0$ hat der Nenner den Imaginärteil $bk \neq 0$.)

Trifft unsere Annahme über die trigonometrische Reihe, durch die x dargestellt ist, aber wirklich zu? Um dies nachzuweisen, betrachten wir die folgende Abschätzung des Nenners der c_k: Für hinreichend große k ist $\frac{1}{2}ak^2 \geqslant c$, und damit gilt für diese k

$$|-ak^2 + ibk + c| \geqslant |-ak^2 + c| \geqslant ak^2 - c \geqslant \tfrac{1}{2}ak^2\,,$$

also $|c_k| \leqslant 2|\widehat{f}(k)|/(ak^2)$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|$ konvergiert, weil f stückweise glatt ist. Mit der Abschätzung für $|c_k|$ folgt dann auch die Konvergenz von $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|$ und $\sum_{k=-\infty}^{\infty} k|c_k|$ sowie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2|c_k|$. Die trigonometrische Reihe, durch die x dargestellt wird, und die gliedweise differenzierten Reihen konvergieren folglich gleichmäßig. Also ist $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ tatsächlich zweimal differenzierbar und die Ableitungen dürfen gliedweise gebildet werden. Die c_k liefern somit wirklich eine Lösung x, und diese erfüllt trivialerweise $x(0) = x(2\pi)$ und $\dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi)$.