UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. O. Knab
P. E. Bradley

WS 2000/2001
05.02.2001

Lösungsvorschläge zur 2. Übungsklausur

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1

a) In der Aufgabe 1 des 8. Übungsblatts wurde gezeigt, dass für alle $|x| < 1$ und $k = 0, 1, 2, \ldots$ die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} x^n$ konvergiert (und zwar gegen $\frac{1}{(1-x)^{k+1}}$). Deshalb gilt notwendigerweise $\lim \binom{n+k}{n} q^n = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $|q| < 1$.

b) Es ist

$$\frac{x \ln(1+x) \sin \frac{1}{x}}{\sinh x} = \frac{x}{\sinh x} \cdot \ln(1+x) \cdot \sin \frac{1}{x}.$$

Weiter gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sinh x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x + O(x^3)}{x} = \lim_{x \to 0} \big(1 + O(x^2)\big) = 1$$

und $\lim\limits_{x \to 0} \ln(1+x) = 0$. Wegen der Beschränktheit von $\sin \frac{1}{x}$ (es ist $\left|\sin \frac{1}{x}\right| < 1$) folgt schließlich $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \ln(1+x) \sin \frac{1}{x}}{\sinh x} = 0$.

c) Es ist $\frac{x^2 \ln(1+x^3)}{\sin x^5} = \frac{x^2 \left(x^3 + O(x^6)\right)}{x^5 + O(x^{15})} = \frac{x^5}{x^5} \cdot \frac{1+O(x^3)}{1+O(x^{10})}$, was für $x \to 0$ gegen 1 konvergiert.

Aufgabe 2

a) Mit $a_n = \frac{(n+2)!}{(2n)!}$ ist $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+2)!}{(2n)!} \frac{(2n+2)!}{(n+3)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{n+3}$. Dies konvergiert für $n \to \infty$ gegen ∞. Das Quotientenkriterium besagt dann, dass die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

b) Ist n gerade, so ist $\sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{2}$. Für ungerades n ist $\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{3^n + 1}$, was für $n \to \infty$ gegen 3 konvergiert. Zusammen bedeutet dies, dass $\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{b_n} = 3$, der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n (x+3)^n$ also gleich $\frac{1}{3}$ ist. Also umfasst der Konvergenzbereich das offene Intervall $\left(-3 - \frac{1}{3}, -3 + \frac{1}{3}\right)$.

Die Randpunkte: Für $x = -3 \pm \frac{1}{3}$ ist mit n ungerade stets $b_n (x+3)^n = (3^n + 1) \left(\pm\frac{1}{3}\right)^n = 1 \pm \frac{1}{3^n}$. Dies konvergiert für $n \to \infty$ gegen 1. Somit bilden die Glieder der Reihen an den Randpunkten keine Nullfolge. Die Reihen divergieren also.

Die Potenzreihe konvergiert demnach genau für alle $x \in \left(-3 - \frac{1}{3}, -3 + \frac{1}{3}\right)$.

Aufgabe 3

a) Um die Grenzfunktion zu bestimmen, ziehen wir die Cosinusreihe heran: $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$. Dann ist $f_n(x) = n\left(1 - \cos\frac{x}{n}\right) = n\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{2n^2} + O\left(\frac{x^4}{n^4}\right)\right)\right) = n\left(\frac{x^2}{2n^2} + O\left(\frac{x^4}{n^4}\right)\right) = \frac{x^2}{2n} + n \cdot O\left(\frac{x^4}{n^4}\right)$.

Somit ist $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ punktweise für alle $x \in [0,1]$.

Ob die Konvergenz auf $[0,1]$ gleichmäßig ist, erkennen wir am Konvergenzverhalten von $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$, wenn f die Grenzfunktion ist. Hier ist $0 \leq \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} n\left(1 - \cos\frac{x}{n}\right) \leq n\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$, da auf $[0,1]$ die Funktion $\cos\frac{x}{n}$ in $x = 1$ minimal wird. Da nach obigem $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) = 0$ ist, liegt gleichmäßige Konvergenz vor.

b) Es ist $g_n(x) = \frac{f_n(x)}{x^3}$, also ist für alle $x \in (0,1]$ auch $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \frac{f(x)}{x^3} = 0$. Dies gilt punktweise.

Setzen wir $x_n = \frac{1}{n}$, so sehen wir:

$g_n(x_n) = n^4\left(1 - \cos\frac{1}{n^4}\right) = n^4\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)\right) = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Dies bedeutet: $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x_n) = \frac{1}{2}$. Dann kann aber nicht $\sup\limits_{x\in(0,1]} |g_n(x) - g(x)|$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergieren. Also ist die Konvergenz auf $(0,1]$ nicht gleichmäßig.

Aufgabe 4

a) Leiten wir uns zunächst einmal die Areatangenshyperbolicusreihe her: Es ist $\operatorname{artanh}(x)' = \frac{1}{1-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (x^2)^n$. Dann ist $\operatorname{artanh}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C$, wobei $C = \operatorname{artanh}(0) = 0$ ist. Es folgt für $f(x) = \operatorname{artanh}(x^2)$, dass $P(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{2n+1}$.

Alternativ können wir auch die Ableitung von f heranziehen: $f'(x) = \frac{2x}{1-x^4} = 2x \sum\limits_{n=0}^{\infty} (x^4)^n = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{4n+1}$. Dann ist $P(x) = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{4n+2} + K = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{2n+1} + K$. Hier ist $K = \operatorname{artanh}(0^2) = 0$.

b) Der Konvergenzradius von P berechnet sich aus $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[4n+2]{2n+1} = 1$: er ist gleich 1. In den fraglichen Randpunkten $x = \pm 1$ haben wir die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$, und diese divergiert. Also ist der Konvergenzbereich von P der offene Einheitskreis $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}$. Dort stimmen auch f und P überein.

c) Es ist

$\int\limits_0^1 \frac{f(\sqrt{t}) - t}{t^2}\, dt = \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{artanh} t - t}{t^2}\, dt = \int\limits_0^1 \frac{1}{t^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\, dt = \int\limits_0^1 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{2n+1}\, dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n(2n+1)}\Bigg|_0^1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)}$. Diese Reihe konvergiert (absolut). Um ihren Wert zu bestimmen zerlegen wir: $\frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}$. Wegen der absoluten Konvergenz dürfen wir nun umordnen: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = 1 - \ln 2$ (letzteres entnehmen wir dem Hinweis).