UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
J. Bitzer

WS 2001/2002
13.11.2001

5. Übungsblatt – Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

1) Beweisen Sie durch vollständige Induktion die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel, also: Für positive Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ gilt

$$(*) \qquad \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Hinweise: Benutzen Sie zunächst, daß für $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$ $\quad a \leq b \Leftrightarrow a^n \leq b^n$ gilt, um $(*)$ in eine äquivalente Aussage umzuformen. Gehen Sie beim Induktionsschritt dann folgendermaßen vor: Nehmen Sie an, dass $x_{n+1} \geq x_j$ für $j = 1, \ldots n$ gilt und betrachten Sie

$$\xi := \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}, \qquad x := \frac{x_{n+1} - \xi}{\xi(n+1)} \quad .$$

Wenden Sie nun die Bernoullische Ungleichung auf $(1+x)^{n+1}$ an.

2) Es seien $w, z \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie: $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$. Was bedeutet dies geometrisch?

3) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die Lösungen der Gleichung

$$z^3 - (3-i)z^2 - iz + 1 + 3i = 0$$

sind. (Hinweis: Es gibt Lösungen der Gleichung auf der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten.)

4) In der Gaußschen Zahlenebene sind die Punkte $z_1 = \sqrt{3} + 3i$ und $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$ gegeben.

a) Stellen Sie die folgenden Geraden jeweils in der Form

$$g: \quad z + a\bar{z} = b$$

dar, d.h. bestimmen Sie a und $b \in \mathbb{C}$ (zerlegt in Real- und Imaginärteil):

i. Die Gerade g_1 durch z_1 und z_2;
ii. die zu g_1 parallele Gerade g_2 durch die 0;
iii. die Gerade g_3 durch 0 und z_2.

b) Unter welchem Winkel schneiden sich g_1 und g_3 in z_2 ?

c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, welches von der reellen Achse sowie den Geraden g_1 und g_3 berandet wird.

– bitte wenden –

5) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien feste Vektoren. Zeigen Sie: Es gilt $\vec{a} = \vec{b}$ genau dann, wenn $\vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{b} \cdot \vec{x}$ für alle $\vec{x}$ gilt.

6) Gegeben sind ein Vektorraum V und 3 Vektoren in V. Prüfen Sie jeweils nach, ob diese Vektoren linear unabhängig sind.

a) $V = \mathbb{R}^3$; $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) $V = \mathbb{R}^3$; $\vec{a} = \vec{x} \times \vec{y}$, $\vec{b} = \vec{x} \times \vec{z}$, $\vec{c} = \vec{y} \times \vec{z}$, wobei $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ linear unabhängige Vektoren in V sind.

c) V = Menge der Polynome vom Höchstgrad 2;
$f(x) = 1 - x + 2x^2$, $g(x) = 2 - x^2$, $h(x) = -1 + 3x - 7x^2$.

d) V = beliebiger Vektorraum mit linear unabhängigen Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$;
$\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y} - \vec{z}$, $\vec{b} = -\vec{y} + 2\vec{z}$, $\vec{c} = -2\vec{x} + \vec{y}$.

7) Weisen Sie nach, daß sich die drei Seitenhalbierenden eines nichtentarteten Dreieckes ΔABC in einem Punkt S schneiden. In welchem Verhältnis teilt S die Seitenhalbierenden?

8) a) Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems seien $\vec{x}_1 = \binom{x_1}{y_1}$ und $\vec{x}_2 = \binom{x_2}{y_2}$ Vektoren im $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie

i. das Skalarprodukt zwischen $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$;
ii. die Länge von $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$;
iii. den Winkel zwischen $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$;
iv. den durch Drehung von $\vec{x}_1$ um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ entstehenden Vektor;
v. den durch Drehung von $\vec{x}_1$ um einen beliebigen Winkel φ entstehenden Vektor;
vi. die senkrechte Projektion von $\vec{x}_1$ auf $\vec{x}_2$.

b) Fassen Sie nun x_1, x_2 und y_1, y_2 als Real- bzw. Imaginärteile komplexer Zahlen $z = x_1 + iy_1$ und $w = x_2 + iy_2$ auf, und drücken Sie die oben gebildeten Ausdrücke durch $z, \bar{z}$, w und $\bar{w}$ aus.

9) Eine punktförmige Lichtquelle im Punkt $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ scheine auf ein Dreieck mit den Eckpunkten

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} , B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} , C = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie die Fläche des Dreieckschattens auf der Ebene $4x + 6y - 3z = 19$.