UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
J. Bitzer

WS 2001/2002
20.11.2001

6. Übungsblatt – Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

1) Berechnen Sie das Vektorprodukt $\vec{x} \times \vec{z}$ und das Spatprodukt $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\,)$ für

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bilden $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ ein Rechtssystem? Sind sie linear unabhängig?

2) $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ seien feste Vektoren.

a) Zeigen Sie: Es ist $\vec{a} = \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ genau dann, wenn $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b} \times \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt.

b) Rechnen Sie nach: $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind genau dann Ortsvektoren dreier auf einer Geraden im $\mathbb{R}^3$ liegenden Punkte, wenn gilt $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$.

c) Bestimmen Sie alle Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ der Gleichung $\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$.

3) Zeigen Sie: Die Winkelhalbierenden zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzw. $\vec{a}$ und $(-\vec{b})$ stehen senkrecht aufeinander.

4) Begründen Sie geometrisch : Zu gegebenen Vektoren $\vec{x_1}$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ beschreibt

$$G = \{\vec{x} \,:\, (\vec{x} - \vec{x_1}) \times \vec{u} = 0\}$$

die Gerade durch $\vec{x_1}$ in Richtung $\vec{u}$.

5) Im $\mathbb{R}^3$ sind die Geraden

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad h:\ \vec{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R})$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, daß die Geraden g und h windschief sind.

b) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform an, welche g enthält und parallel zu h ist.

c) Berechnen Sie den Abstand der Geraden h von der Ebene E.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P auf der Geraden h, der von g die kürzeste Entfernung hat.

e) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q, der zu P symmetrisch liegt bezüglich der Geraden g.

– bitte wenden –

6) Im $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte A, B und C durch ihre Ortsvektoren

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{OC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie

a) die Abstände der Punkte untereinander;
b) den Winkel bei A im Dreieck ΔABC;
c) den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC;
d) den Inhalt des durch Projektion von ΔABC in die yz–Ebene entstehenden Dreiecks;
e) eine Parameterdarstellung sowie die Hessesche Normalform der Ebene E, welche A, B und C enthält;
f) den Abstand von O zu E;
g) den Abstand von A zur Geraden durch B und C.

7) Durch die Ortsvektoren

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{p}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 34 \\ 14 \end{pmatrix}$$

sind die Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 im $\mathbb{R}^3$ gegeben.

a) Zeigen Sie, daß diese vier Punkte nicht in einer Ebene liegen.
b) Somit existiert genau eine Ebene E, so daß P_1 und P_3 auf der einen, P_2 und P_4 auf der anderen Seite von E liegen, aber alle denselben Abstand d von E besitzen. Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E und die Zahl d.
c) g sei die Gerade durch P_2 und P_3. Berechnen Sie deren Schnitt mit der durch

$$E' \; : \quad 2x - y + 3z = 0$$

gegebenen Ebene sowie die senkrechte Projektion $\bar{g}$ von g auf E'.

8) Gegeben sind die Ebene $E : \; x + 2y + 2z = 18$ und die von einem reellen Parameter s abhängige Gerade

$$g_s : \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2s \\ -2s-1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

a) Durch $||\vec{x} - \vec{x}_M|| = r$ ist im $\mathbb{R}^3$ die Gleichung einer Kugel mit Radius r und Mittelpunkt M gegeben, wobei $\vec{x}_M$ der Ortsvektor von M ist. Bestimmen Sie diejenige Kugel K um den Nullpunkt, die die Ebene E berührt, und berechnen Sie die Koordinaten des Berührpunktes T.
b) Geben Sie für $s = 2$ die Hessesche Normalform der Ebene E_2 an, die durch den Nullpunkt und die Gerade g_2 bestimmt wird. Unter welchem Winkel schneiden sich die Ebenen E und E_2?
c) Zeigen Sie, daß jede Gerade g_s in der Ebene E liegt, und bestimmen Sie s so, daß g_s die Kugel K berührt.

>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>> 1. Übungsklausur <<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<

Die **1. Übungsklausur** zur Vorlesung HM I findet am **Samstag, 8.12.2001, 8–10 Uhr** statt.Wer daran teilnehmen möchte, muß sich in der Zeit von **Montag, 26.11. bis Donnerstag, 29.11. (13Uhr)** in die vor dem Sekretariat ausliegenden Listen eintragen.
Bitte beachten Sie, daß die Listen nach Fachrichtungen getrennt sind, und merken Sie sich den **Hörsaal**, in dem Sie schreiben werden.