UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
J. Bitzer

WS 2001/2002
27.11.2001

7. Übungsblatt – Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

1) Geben Sie für die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweis die ersten fünf Folgenglieder an.

a) $a_n = \left(\frac{1+i}{2+i}\right)^n$ b) $a_n = (-i)^n$

c) $a_{n+1} = \frac{2+a_n}{1+a_n}$ $, a_1 = 1$ d) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ $, a_1 = 1$

2) Gegeben sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n = \frac{2n}{n+1} \quad \text{und} \quad b_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}.$$

a) Berechnen Sie jeweils die ersten vier Folgenglieder und den Grenzwert der Folgen.

b) Geben Sie zu jeder Folge einen Index n_0 an, so daß a_n und b_n für alle $n \geq n_0$ vom jeweiligen Grenzwert höchstens den Abstand $\frac{1}{1000}$ haben.

3) Bestimmen Sie sämtliche Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ sowie jeweils eine dagegen konvergierende Teilfolge. Geben Sie — sofern sie existieren — $\liminf(a_n)$, $\limsup(a_n)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ an.

a) $a_n = \frac{3n^2 + \sqrt{n^3+2}}{n^2-n+1}$ b) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

c) $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right)^{3n}$ **d)** $a_n = 2^{1-n}\left(\sqrt{3}+i\right)^n$

e) $a_n = \left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{2n+3}$ f) $a_n = \sqrt{n^2+2n} - n + i2^{-n}n$

g) $a_n = \frac{(1+n)^{42} - n^{42}}{n^{41}}$ h) $a_n = \prod\limits_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k^2})$

i) $a_n = (1 + (-1)^n)^n$

4) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv gegeben:

$$a_1 = 0 \quad , \quad a_{2n} = \frac{1}{2}a_{2n-1} \quad , \quad a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Bestimmen Sie $\limsup(a_n)$ und $\liminf(a_n)$.

– bitte wenden –

5) Zeigen Sie: $\liminf(a_n) = -\limsup(-a_n)$.

6) a) Gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, die *nicht* konvergiert, obwohl die Teilfolgen (a_{2n}) und (a_{2n+1}) konvergieren? Geben Sie eine solche Folge gegebenenfalls an.

b) Wie stellt sich die Situation dar, wenn zusätzlich auch die Konvergenz von (a_{3n}) bekannt ist?

7) Es sei $a > 0$ und $k \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die rekursiv durch

$$c_{n+1} = c_n - \frac{{c_n}^k - a}{k{c_n}^{k-1}} \quad , \quad n = 1, 2, ... \quad ; \quad c_1 \text{ beliebig mit } {c_1}^k > a$$

definiert ist.

a) Zeigen Sie, daß $c_n > 0$ $(n = 1, 2, ...)$ gilt, und daß $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fällt.

b) Zeigen Sie, daß der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} c_n =: c$ der Gleichung $c^k = a$ genügt.

8) $a, b \in \mathbb{C}$ und $c > 0$ seien gegebene Zahlen. Für jedes $\varepsilon > 0$ gelte: $|a - b| \le c\,\varepsilon$. Zeigen Sie, daß dann $a = b$ gilt.

9) Weisen Sie nach, daß für $r > 1$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{k^r} \le \left(\frac{1}{2^{r-1}}\right)^{n-1}$$

gilt. (Hinweis: Wieviele Summanden hat die linksstehende Summe?)

>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>> HINWEIS: <<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<

Wer an der **1. Übungsklausur** zur Vorlesung HM I teilnehmen möchte, kann sich noch bis Donnerstag, 29. November (13 Uhr) in die vor dem Sekretariat ausliegenden Listen eintragen.
Bitte beachten Sie, daß die Listen nach Fachrichtungen getrennt sind, und merken Sie sich den **Hörsaal**, in dem Sie schreiben werden.

Zur **Übungsklausur am Samstag, dem 8. Dezember 2001, 8–10 Uhr** bringen Sie bitte Schreibgerät und Studierendenausweis mit; Papier wird gestellt. Zulässige Hilfsmittel sind alle Arten mathematischer Literatur und geheftete Blätter (z.B. Mitschriften, Übungsblätter, alte Klausuren). Nicht zugelassen sind lose Blätter sowie elektronische Hilfsmittel (z.B. Taschenrechner).