UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
J. Bitzer

WS 2001/2002
04.12.2001

8. Übungsblatt – Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

1) Ausgehend von einem gleichseitigen Dreieck T_1 mit Kantenlänge 1 entsteht die Figur T_{n+1} aus der Figur T_n, indem auf das mittlere Drittel jeder geradlinigen Berandung von T_n ein gleichseitiges Dreieck aufgesetzt wird.

   a) Bestimmen Sie den Umfang U_n der Figur T_n ($n \in \mathbb{N}$).

   b) Berechnen Sie den Flächeninhalt F_n von T_n.

   c) Überprüfen Sie die Folgen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz, und geben Sie gegebenenfalls den jeweiligen Grenzwert an.

2) Untersuchen Sie die nachstehenden rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz. Zeigen Sie, daß die beiden Folgen den gleichen Grenzwert besitzen, und bestimmen Sie diesen.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)\,, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}\,, \qquad\qquad a_1 = 2, \quad b_1 = 1$$

   Hinweis: Zeigen Sie zuerst: $b_{n+1} \le a_{n+1}$.

3) Zeigen Sie: Die durch $a_n := (1+\frac{1}{n})^n$ und $b_n := (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ gegebenen Folgen (a_n) und (b_n) definieren eine Intervallschachtelung $([a_n, b_n])$ für die Zahl e.

4) Untersuchen Sie die folgenden Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

   a) $a_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$ b) $a_n = \frac{(-1)^n}{3n + (-1)^n}$ **c)** $a_n = \frac{n!}{n^n}$

   d) $a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{n}\right)$ e) $a_n = \frac{i^n}{n}$

   f) $a_n = \max\left\{8\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-4}\right\}$ **g)** $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right)^{3n^2}$

5) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad \text{und} \qquad b_n := \frac{(1+\frac{1}{2}(-1)^n)^n}{n^2}.$$

   a) Beweisen Sie: Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

   b) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergent ist.

   c) Warum ist das Leibnizkriterium hier nicht anwendbar?

   d) Was kann man mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sagen? Und was liefert das Wurzelkriterium?

– bitte wenden –

6) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Reihen, und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{(n+1)!}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k}\right)$ **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{3n-1}}{3^{2n+1}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+n^2}-n)$

7) Für welche $z \in \mathbb{C}$ liegt Konvergenz vor?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$

8) Berechnen Sie mit Hilfe des Cauchyproduktes:

a) $\dfrac{1}{1-x} \cdot \dfrac{1}{1+x}$ für $|x| < 1$

b) $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right)$

≫≫≫≫≫≫≫≫≫≫≫≫ Hinweise zur 1. Übungsklausur: ≪≪≪≪≪≪≪≪≪≪≪≪

- Teilnehmen können nur die Studierenden, die sich bereits angemeldet haben.
- Termin: 8. Dezember (Samstag) von 8 Uhr bis 10 Uhr
- Bringen Sie Studierendenausweis und Schreibgerät mit; Papier wird gestellt.
- Zulässige Hilfsmittel: alle Arten mathematischer Literatur und geheftete Blätter (z. B. Mitschriften, Übungsblätter, alte Klausuren).
- **Nicht zugelassen** sind dagegen lose Blätter und elektronische Hilfsmittel (z. B. Taschenrechner).
- Die korrigierten Übungsklausuren können ab 18.12. (Dienstag) im Sekretariat abgeholt werden.
- Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am 20.12. (Donnerstag) von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 möglich.