UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
J. Bitzer

WS 2001/2002
15.01.2002

12. Übungsblatt – Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

1) Beweisen Sie folgende Aussagen.

   a) Für jedes $\alpha > 0$ gilt: $\ln x = o(x^\alpha)$ für $x \to \infty$
   b) $x \sin(x^{-1}) = O(x)$ für $x \to 0$
   c) $\sin x = x + o(x^2)$ für $x \to 0$
   d) $\sqrt{1+x^2} = x + O(1/x)$ für $x \to \infty$

2) Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

a)	$f(z) = e^z + 1$	**b)**	$f(z) = \cos z - \cosh z$
c)	$f(z) = \tan z$	d)	$f(z) = \sin z - 1$

3) Bestimmen Sie in Abhängigkeit des Parameters c die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin(cx)} - \dfrac{2}{x} & \text{, falls } x \in (-\pi, \pi), x \neq 0 \\ 0 & \text{in } x = 0 \end{cases} \qquad (|c| < 1,\ c \neq 0)$$

an allen Stellen x_0, an denen sie existiert.

4) Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Funktion f_n auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x} & ,\ x \neq 0 \\ 0 & ,\ x = 0\,. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, welche der Funktionen f_n stetig, differenzierbar bzw. stetig differenzierbar sind.

5) Zeigen Sie die folgenden Identitäten

a) $$2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn}(x) \qquad \text{für } |x| > 1$$

b) $$\arctan\left(\tanh \frac{x}{2}\right) + \frac{\pi}{4} = \arctan(e^x) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

– bitte wenden –

6) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{2\sin x}{\cos x - \sin x} \quad .$$

a) Bestimmen Sie das größte Intervall, für das die Funktion f definiert ist und das den Nullpunkt enthält.

b) Berechnen Sie den Wert x_0, für den $f(x_0) = -1$ gilt. Prüfen Sie, ob f invertierbar ist.

c) Zeigen Sie, daß

$$f'(x) = (f(x))^2 + 2f(x) + 2$$

gilt, und berechnen Sie hieraus die Ableitung der Umkehrfunktion g.

d) Entwickeln Sie die Umkehrfunktion g in eine Potenzreihe um $y_0 = -1$ (indem Sie zunächst $g'(y)$ in eine Potenzreihe entwickeln), und bestimmen Sie alle Werte y, für die diese Potenzreihe konvergiert.

7) Zeigen Sie mit Hilfe der Mittelwertsätze:

a) $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) = 0$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^2 + a^2} - \sqrt[3]{n^2}\right) = 0$

c) $x - \frac{x^3}{3} \le \arctan x \le x \qquad$ für $x > 0$

>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>> 2. ÜBUNGSKLAUSUR <<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<

Die **2. Übungsklausur** zur Vorlesung HM I findet am **Samstag, 02.02.2002, 8–10 Uhr** statt.Wer daran teilnehmen möchte, muß sich in der Zeit von **Montag, 21.01. bis Donnerstag, 24.01. (13 Uhr)** in die vor dem Sekretariat ausliegenden Listen eintragen.
Bitte beachten Sie, daß die Listen nach Fachrichtungen getrennt sind, und merken Sie sich den **Hörsaal**, in dem Sie schreiben werden.