UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Prof. Dr. Guido Schneider
Dipl.-Math. Oliver Zink
Dipl.-Math. oec. Norbert Breindl

WS 2002/2003
07.12.2002

Lösungsvorschläge zur 1. Übungsklausur

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 **a)** Der Behälter wird mit 3 Röhren in x Minuten gefüllt und somit gilt $x(\frac{1}{90}+\frac{1}{45}+\frac{1}{30})=1 \Longleftrightarrow x\frac{1}{15}=1 \Longleftrightarrow x=15$.

b) i) Zu zeigen: $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k^2+1)=\frac{n(n+1)}{4}\Big(n(n+1)+2\Big)$
Induktionsanfang: $n=1$

$$\sum_{k=1}^{1} k(k^2+1)=2=\frac{1(1+1)}{4}\Big(1(1+1)+2\Big) \qquad \text{(ist richtig)}$$

Induktionsschritt: $n \to n+1$
Induktionsannahme (IA): $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k^2+1)=\frac{n(n+1)}{4}\Big(n(n+1)+2\Big)$
Induktionsschluß:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k(k^2+1) &= \sum_{k=1}^{n} k(k^2+1)+(n+1)((n+1)^2+1)\\
&\overset{(IA)}{=} \frac{n(n+1)}{4}\Big(n(n+1)+2\Big)+(n+1)((n+1)^2+1)\\
&= \frac{1}{4}(n^2+n)(n^2+n+2)+(n+1)(n^2+2n+2)\\
&= \frac{1}{4}n^4+\frac{3}{2}n^3+\frac{15}{4}n^2+\frac{9}{2}n+2\\
&= \frac{1}{4}(n^2+3n+2)(n^2+3n+4)\\
&= \frac{1}{4}(n+1)(n+2)((n+1)(n+2)+2)
\end{aligned}$$

ii) Zu zeigen: $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k\binom{n+1}{k}=(n+1)2^n$
Induktionsanfang: $n=1$

$$\sum_{k=1}^{2} k\binom{2}{k}=4=2\cdot 2^1 \qquad \text{(ist richtig)}$$

Induktionsschritt: $n-1 \to n$
Induktionsannahme (IA): $\sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$
Induktionsschluß:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n+1}{k} &= \sum_{k=1}^{n+1} k\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)=\sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n}{k-1}\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\\
&\overset{(IA)}{=} n\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^{n-1}+2^n=(n+1)\cdot 2^n.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 a)

$$\textbf{i) } \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix} \qquad [\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] =< \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\8\\2\end{pmatrix} >= 12$$

$$\cos\varphi = \frac{<\mathbf{a},\mathbf{b}>}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|} = \frac{6}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \implies \varphi = \frac{\pi}{6} = 30^{\circ}$$

$$\textbf{ii) } \mathbf{b}-\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix} \qquad \mathbf{c}-\mathbf{a} = \begin{pmatrix}0\\8\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\6\\-2\end{pmatrix}$$

$$\Delta_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\6\\-2\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}22\\4\\-10\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{600} = 5\sqrt{6}$$

$$\textbf{b) i) } \mathbf{x} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 \\ \lambda &= 4\mu + 3\nu \\ 0 &= 3\mu + 4\nu \end{aligned}$$

$$\implies \quad \mu = \frac{4}{7},\ \nu = -\frac{3}{7} \quad \implies \text{Schnittpunkt } S = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

ii) Wir bestimmen einen Normalenvektor der Ebene E:

$$\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix}$$

Wir bestimmen den Winkel φ der vom Normalenvektor der Ebene und dem Richtungsvektor der Geraden eingeschlossen wird.

$$\cos\varphi = \frac{<\begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}>}{\left\|\begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\|} = \frac{7}{7\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \implies \varphi = \frac{\pi}{4} = 45^{\circ}$$

Für den Winkel ψ unter dem sich Gerade g und Ebene E schneiden ergibt sich:
$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{4} = 45^{\circ}$.

Aufgabe 3 a) i) Wir bringen $z^5 = -32i$ auf Polardarstellung:
Mit $-32i = 32e^{\frac{3}{2}\pi i}$ ist $z_k = \sqrt[5]{32}\, e^{\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{5} i} = 2\, e^{(\frac{3}{10}\pi + \frac{2}{5}k\pi)i} \quad (k = 0,1,2,3,4)$

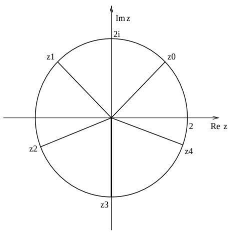

Abb. 3**a) i)**

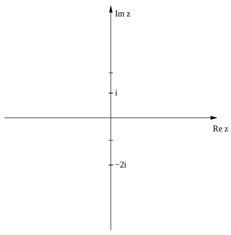

Abb. 3**a) ii)**

ii) $(z-i)(z+2i) = 0 \quad \implies z_1 = i,\ z_2 = -2i$

b) Mit der Grenzwertbetrachtung $\lim\limits_{n\to\infty} z_{n+1} = z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ folgt

$$z = z - \frac{z^3-1}{3z^2} \iff 0 = z^3 - 1 \iff z^3 = 1 \Longrightarrow z_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3} \quad (k = 0,1,2)$$

Als mögliche Limites erhalten wir $z_0 = 1$, $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Aufgabe 4 **a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+5n^2+6n}{7n^2+4+\sqrt{12}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^2}+5+\frac{6}{n}}{7+\frac{4}{n^2}+\frac{\sqrt{12}}{n^2}} = \frac{5}{7}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0$, denn es gilt $\quad -\frac{1}{\sqrt{n}} \le \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}} \quad$ (da $-1 \le \sin n \le 1$)

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \le \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \le \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0 \le \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \le 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+6n+17} - n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n+17}{\sqrt{n^2+6n+17}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6+\frac{17}{n}}{\sqrt{1+\frac{6}{n}+\frac{17}{n^2}}+1} = 3$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{348}}\right)^k$. Wir betrachten die Partialsumme der geometrische Reihe:

$\sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{348}}\right)^k = \frac{1-(\frac{1}{\sqrt{348}})^{n+1}}{1-\frac{1}{\sqrt{348}}} \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{348}}\right)^k = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-(\frac{1}{\sqrt{348}})^{n+1}}{1-\frac{1}{\sqrt{348}}} = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{348}}}$,

da $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{348}}\right)^{n+1} = 0$ wegen $0 < \frac{1}{\sqrt{348}} < 1$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)^{-1} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k})}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \longrightarrow \infty \quad$ (harmonische Reihe)

Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)^{-1} = 0$