UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Prof. Dr. Guido Schneider
Dipl.-Math. Oliver Zink
Dipl.-Math. oec. Norbert Breindl

WS 2002/2003
08.11.2002

**Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt**

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**

**Aufgabe 1** Wir bezeichnen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0,1\}$

| $\oplus$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

zu zeigen ist:

$$\begin{aligned} \text{Assoziativgesetz} &: \quad a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c \\ \text{Existenz des neutralen Elements } e &: \quad a \oplus e = e \oplus a = a \\ \text{Existenz des inversen Elements } a^{-1} &: \quad a \oplus a^{-1} = a^{-1} \oplus a = e \\ \text{Kommuativgesetz} &: \quad a \oplus b = b \oplus a \end{aligned}$$

Assoziativgesetz:

$$\begin{aligned}
\underbrace{0 \oplus \underbrace{(0 \oplus 0)}_{=0}}_{=0} &= \underbrace{\underbrace{(0 \oplus 0)}_{=0} \oplus 0}_{=0} && \text{(wahr)} \\
\underbrace{1 \oplus \underbrace{(0 \oplus 0)}_{=0}}_{=1} &= \underbrace{\underbrace{(1 \oplus 0)}_{=1} \oplus 0}_{=1} && \text{(wahr)} \\
\underbrace{0 \oplus \underbrace{(1 \oplus 0)}_{=1}}_{=1} &= \underbrace{\underbrace{(0 \oplus 1)}_{=1} \oplus 0}_{=1} && \text{(wahr)} \\
\underbrace{0 \oplus \underbrace{(0 \oplus 1)}_{=1}}_{=1} &= \underbrace{\underbrace{(0 \oplus 0)}_{=0} \oplus 1}_{=1} && \text{(wahr)} \\
\underbrace{1 \oplus \underbrace{(1 \oplus 0)}_{=1}}_{=0} &= \underbrace{\underbrace{(1 \oplus 1)}_{=0} \oplus 0}_{=0} && \text{(wahr)} \\
\underbrace{1 \oplus \underbrace{(0 \oplus 1)}_{=1}}_{=0} &= \underbrace{\underbrace{(1 \oplus 0)}_{=1} \oplus 1}_{=0} && \text{(wahr)} \\
\underbrace{0 \oplus \underbrace{(1 \oplus 1)}_{=0}}_{=0} &= \underbrace{\underbrace{(0 \oplus 1)}_{=1} \oplus 1}_{=0} && \text{(wahr)} \\
\underbrace{1 \oplus \underbrace{(1 \oplus 1)}_{=0}}_{=1} &= \underbrace{\underbrace{(1 \oplus 1)}_{=0} \oplus 1}_{=1} && \text{(wahr)}
\end{aligned}$$

Existenz des neutralen Elements ($e = 0$):

$$\begin{aligned} 0 \oplus 0 &= 0 \oplus 0 = 0 && \text{(wahr)} \\ 1 \oplus 0 &= 0 \oplus 1 = 1 && \text{(wahr)} \end{aligned}$$

Existenz des inversen Elements:

$$\text{für } a=0, a^{-1}=0: \quad \underbrace{0}_{a} \oplus \underbrace{0}_{a^{-1}} = \underbrace{0}_{a^{-1}} \oplus \underbrace{0}_{a} = \underbrace{0}_{e} \qquad \text{(wahr)}$$
$$\text{für } a=1: a^{-1}=1, \quad \underbrace{1}_{a} \oplus \underbrace{1}_{a^{-1}} = \underbrace{1}_{a^{-1}} \oplus \underbrace{1}_{a} = \underbrace{0}_{e} \qquad \text{(wahr)}$$

Kommutativgesetz:

$$\begin{aligned} 0 \oplus 0 &= 0 \oplus 0 && \text{(wahr)} \\ 0 \oplus 1 &= 1 \oplus 0 && \text{(wahr)} \\ 1 \oplus 1 &= 1 \oplus 1 && \text{(wahr)} \end{aligned}$$

**Aufgabe 2** aus der Abbildung lesen wir ab:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \frac{AE}{OE} = \frac{BD}{OE} + \frac{CE}{OE} = \frac{BD}{OD} \cdot \frac{OD}{OE} + \frac{CE}{ED} \cdot \frac{ED}{OE} \\ &= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \frac{OA}{OE} = \frac{OB}{OE} - \frac{CD}{OE} = \frac{OB}{OD} \cdot \frac{OD}{OE} - \frac{CD}{ED} \cdot \frac{ED}{OE} \\ &= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta \end{aligned}$$

**Aufgabe 3** **a)** $z_1 = \frac{3}{2}i + \frac{2-i}{(1+i)^2} = \frac{3i^2}{2i} + \frac{2-i}{2i} = \frac{-3+2-i}{2i} = \frac{-i-i^2}{2i^2} = \frac{1-i}{-2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$|z_1| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad \arg z_1 = \pi + \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) = \pi + \arctan(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$

Polardarstellung: $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{3}{4}\pi i}$

$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$ $\qquad \arg z_2 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

Polardarstellung: $z_2 = 2e^{\frac{\pi}{4}i}$

**b)** $z_2^8 = 2^8 \underbrace{e^{2\pi i}}_{=1} = 2^8$

**c)** $(w - \sqrt{2} - \sqrt{2}i)^4 = -16 \qquad z := w - \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$z^4 = -16 = 16\, e^{\pi i} \Rightarrow z_k = \sqrt[4]{16}\, e^{\frac{\pi+2\pi k}{4} i} = 2\, e^{\frac{\pi+2\pi k}{4} i} \quad (k = 0,1,2,3)$

$z_0 = 2\, e^{\frac{\pi}{4} i} = 2(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$\Rightarrow w_0 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i + \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2\sqrt{2}(1+i) = 4\, e^{\frac{\pi}{4} i}$

$(|w_0| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4, \arg w_0 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4})$

$z_1 = 2\, e^{\frac{3\pi}{4} i} = 2(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$\Rightarrow w_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i - \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2\sqrt{2}i = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{2} i}$

$z_2 = 2\, e^{\frac{5\pi}{4} i} = 2(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$\Rightarrow w_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i - \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 0$

$z_3 = 2\, e^{\frac{7\pi}{4} i} = 2(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$\Rightarrow w_3 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i + \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2\sqrt{2}$

**Aufgabe 4** **a)** $z_1 = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$. Bestimme Polardarstellung von $z_1$:

$\left|\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$. Für das Argument $\arg z_1 = \varphi$ muß gelten:

$\cos\varphi = \frac{1}{2}$ und $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, d.h. $\varphi = \frac{5}{3}\pi$.

$z_1 = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^3 = (e^{\frac{5}{3}\pi i})^3 = e^{5\pi i} = -1$ und somit $\operatorname{Re} z_1 = -1$ und $\operatorname{Im} z_1 = 0$. $|z_1| = 1$.

$z_2 = \frac{1+i}{1-(1+i)^2} = \frac{1+i}{1-2i} = \frac{(1+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{3i-1}{5} = -\frac{1}{5} + i\frac{3}{5}$ und somit $\operatorname{Re} z_2 = -\frac{1}{5}$ und $\operatorname{Im} z_2 = \frac{3}{5}$. $|z_2| = \sqrt{(-\frac{1}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2} = \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{10}$ und $z_2 = \pi + \arctan(-3) = 1.89254...$

$z_3 = \left(\frac{2i}{1-i}\right)^9 = (i-1)^9$. Bestimme Polardarstellung von $z_3$.
$|i-1| = \sqrt{2}$. Für das Argument $\varphi$ von $i-1$ muß gelten:
$i - 1 = \sqrt{2}e^{i\varphi} = \sqrt{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow \cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, d.h. $\varphi = \frac{3}{4}\pi$.
$z_3 = \left(\frac{2i}{1-i}\right)^9 = (\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i})^9 = \sqrt{2}^9 e^{\frac{3}{4}\pi i} = \sqrt{2}^9(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi) = 16(-1+i)$.
Wir haben somit $|z_3| = 16\sqrt{2}$, $\arg z_3 = \frac{3}{4}\pi$, Re $z_3 = -16$ und Im $z_3 = 16$.

**b)** i) $z^3 = -i = e^{\frac{3}{2}\pi i}$. Wurzelziehen und Aufteilen der Winkel ergibt
$z_0 = e^{\frac{\pi}{2}i}$, $z_1 = e^{\frac{7}{6}\pi i}$, $z_2 = e^{\frac{11}{6}\pi i}$

ii) $z^5 = 16 + \sqrt{768}i = 32e^{\frac{1}{3}\pi i}$, wir erhalten als Lösung
$z_0 = 2e^{\frac{1}{15}\pi i}$ $z_1 = 2e^{\frac{7}{15}\pi i}$ $z_2 = 2e^{\frac{13}{15}\pi i}$ $z_3 = 2e^{\frac{19}{15}\pi i}$ $z_4 = 2e^{\frac{5}{3}\pi i}$

iii) Wir normieren $5z^2 - 2z + 5 = 0$ und erhalten $z^2 - \frac{2}{5}z + 1 = (z - \frac{1}{5})^2 - \frac{1}{25} + 1 = 0$. Es ist also $(z - \frac{1}{5})^2 = -\frac{24}{25}$ und erhalten als Lösungen $z_{1,2} = \frac{1}{5} \pm \frac{1}{5}\sqrt{24}i$

iv)$z^2 + 2z - i = (z+1)^2 - 1 - i = 0$ und mit $(z+1)^2 = 1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ ergibt sich
$z_{1,2} = -1 \pm \sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi}{8}i}$

**Aufgabe T1** **a)** $z_1 = \frac{2+i}{3-i} = \frac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{6+5i-1}{9+1} = \frac{5(1+i)}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$,
und somit $\operatorname{Re} z_1 = \frac{1}{2}$ und $\operatorname{Im} z_1 = \frac{1}{2}$.

**b)** $z_2 = (1+i)^4 = i^4 + 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1 = 1 - 4i - 6 + 4i + 1 = -4$
und somit $\operatorname{Re} z_2 = -4$ und $\operatorname{Im} z_2 = 0$.

**c)** wir bestimmen uns die Polardarstellung von $z_3$:

$$\text{Betrag:} \quad |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2.$$

Da $x > 0, y < 0$ gilt für das Argument $\varphi$ von $1 - \sqrt{3}$

$$\varphi = 2\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = 2\pi + \underbrace{\arctan(-\sqrt{3})}_{=-\frac{\pi}{3}} = \frac{5}{3}\pi.$$

(oder: finde $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $1 - i\sqrt{3} = 2\,e^{i\varphi} = 2(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2}$ und $\sin\varphi = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{5}{3}\pi$)
Somit gilt: $1 - i\sqrt{3} = 2\,e^{\frac{5}{3}\pi i}$,
also: $z_3 = (1 - i\sqrt{3})^{42} = (2\,e^{\frac{5}{3}\pi i})^{42} = 2^{42}\underbrace{e^{70\pi i}}_{=1} = 2^{42}$
und somit $\operatorname{Re} z_3 = 2^{42}$ und $\operatorname{Im} z_3 = 0$.

**d)** bestimme die Polardarstellung:

$$\text{Betrag:} \quad \left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1.$$

für das Argument $\varphi$ von $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ muß gelten: $\quad \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ und $\sin\varphi = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{6}$.
somit: $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{\frac{\pi}{6}i}$,
also: $z_4 = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^{11} = e^{\frac{11}{6}\pi i} = e^{-\frac{1}{6}\pi i} = \cos(-\frac{\pi}{6}) + i\,\sin(-\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} - i\,\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
und somit $\operatorname{Re} z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\operatorname{Im} z_4 = -\frac{1}{2}$.

**Aufgabe T2** **a)** Jede komplexe Zahl $\neq 0$ hat genau 2 Quadratwurzel. Wegen

$$z^2 - 4z + 6 = 0 \iff (z-2)^2 + 2 = 0 \iff (z-2)^2 = -2$$

ist die Gleichung genau dann erfüllt, wenn $z-2=\pm i\sqrt{2}$. Die beiden Lösungen sind somit $z_1 = 2+i\sqrt{2}$ und $z_2 = 2-i\sqrt{2}$.

**b)** $z^3 = \frac{6i-10}{4+i} = \frac{(6i-10)(4-i)}{(4+i)(4-i)} = \frac{34i-34}{17} = 2i-2$.
Es gibt genau drei dritte Wurzeln:

$$z_k = \sqrt[3]{|2i-2|}\, e^{\frac{i(\arg(2i-2)+2k\pi)}{3}} \qquad k=0,1,2.$$

Da $|2i-2| = 2\sqrt{2}$ ist $\sqrt[3]{|2i-2|} = \sqrt{2}$ und mit dem $\arg(2i-2) = \frac{3}{4}\pi$ haben wir

$$z_0 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}, \qquad z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{11}{12}\pi i}, \qquad z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{19}{12}\pi i}.$$

**c)** Zu bestimmen sind die 4. Einheitswurzeln.
$z_0 = e^{0i} = 1, \qquad z_1 = e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \qquad z_2 = e^{\pi i} = -1, \qquad z_3 = e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i.$

**d)** $z^4 = -16 = 16e^{i(1+2k)\pi} \quad (k=0,1,2,3)$. Es gibt genau vier Wurzeln
$z_k = \sqrt[4]{16}e^{\frac{\pi+2k\pi i}{4}} = 2e^{\frac{\pi+2k\pi i}{4}} \quad (k=0,1,2,3)$.

**e)** es gilt: $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$. Aufteilen der drei Wurzeln ergibt:
$z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i), \quad z_1 = \cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i),$
$z_2 = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = -i.$

**f)** Mit $x := \mathrm{Re}\, z$ und $y := \mathrm{Im}\, z$ ist $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$ und somit

$$\begin{aligned} z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 + 2ixy - y^2 - 2(x-iy) + 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x^2 - y^2 - 2x + 1) + i(2xy + 2y) = 0. \end{aligned}$$

Eine komplexe Zahl ist genau dann Null, wenn sowohl der Real- als auch der Imaginärteil Null ist. Die Gleichung für den Imaginärteil $2y(x+1)$ ist Null für $y=0$ oder $x=-1$.
1. Fall: $y=0$. Die Gleichung für den Realteil ist dann $x^2-2x+1=0$, also $(x-1)^2=0$ und somit $x=1$. $z_1=1$ ist damit Lösung.
2. Fall: $x=-1$. Die Gleichung für den Realteil ist dann $1-y^2+3=0$, also $y^2=4$. Als Lösungen ergeben sich nun $z_2=-1+2i$ und $z_2=-1-2i$.

**Aufgabe T3** Wir zerlegen 3054 und 1002 in Primfaktoren und erhalten

$$3054 = 2\cdot 3\cdot 509 \qquad\qquad 1002 = 2\cdot 3\cdot 167$$

was zur Folge hat, daß ggT (3054,1002) $= 6$ und kgV (3054,1002) $= 2\cdot 3\cdot 167\cdot 509 = 510018$.

**Aufgabe T4** Gegeben sind die Funktionen $f(u)(x) := x\cdot u(x)$ und $g(u)(x) := u'(x)$ mit $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Wir berechnen nun die Kompositionen

$$\begin{aligned} f(g(u)(x))(x) &= x\cdot u'(x) \\ g(f(u)(x))(x) &= (x\cdot u(x))' = u(x) + x\cdot u'(x). \end{aligned}$$

Für $u\equiv 0$ ist die Komposition $f\circ g = g\circ f$ erfüllt. Ist nun $u\not\equiv 0$ so ist $f\circ g = g\circ f$ nicht erfüllt.