

5. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1

- a) Stelle die vier Nullstellen z_1, z_2, z_3 und z_4 des Polynoms

$$f(z) := (z^2 - 1)^2 + 1$$

in der Form $z_k = r_k(\cos(\varphi_k) + i \sin(\varphi_k))$, $r_k \geq 0$, $\varphi_k \in [0, 2\pi)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) dar.

- b) Bestimme alle komplexen Lösungen der Gleichung $\bar{z}^8 = -256$.

Aufgabe 2 Gegeben sei die komplexe Zahl

$$\zeta = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right).$$

Berechne ζ^3, ζ^{150} und skizziere ζ, ζ^3 und ζ^{150} .

Aufgabe 3 Beweise folgende elementargeometrische Sätze:

- a) Satz von Pythagoras: In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Fläche des Quadrats über der Hypotenuse gleich der Summe der Flächen der Quadrate über den Katheten.
- b) Satz von Thales: Der geometrische Ort der Scheitelpunkte C_i aller rechten Winkel, deren Schenkel durch zwei feste Punkte A und B gehen, ist der Kreis über der Strecke $[A, B]$ als Durchmesser.

Aufgabe 4 Entscheide, ob die folgenden Abbildungen eine Norm auf dem $\mathbb{R}^3$ sind.

a) $N_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \max(|x|, |y|, |z|)$

b) $N_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \left| \frac{x+y+z}{3} \right|$

c) $N_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2 + z^2$

Aufgabe T1 Beschreibe anschaulich die Kurven in der komplexen Ebene, die durch folgende Gleichungen gegeben sind

- a) $|z| = 2$ b) $\operatorname{Im}(z + i) = 4$ c) $|z + 3 - 4i| = 5$
 d) $\arg(z \cdot \exp(-\frac{\pi i}{4})) = 0$ e) $z\bar{z} - 3iz + 3i\bar{z} + 8 = 0$ f) $\operatorname{Re} z^2 = 0$

Aufgabe T2

- a) Gegeben seien die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad v = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Berechne $\langle u, v \rangle$, $u \times v$ und $[u, v, w]$.

- b) Existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3\lambda \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4\lambda \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

gilt?

Aufgabe T3 Beweise folgende elementargeometrische Sätze:

- a) Kathetensatz: Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete flächengleich dem Rechteck aus der Länge der Hypotenuse und der Länge der Projektion dieser Kathete auf die Hypotenuse.
 b) Höhensatz: Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe auf der Hypotenuse flächengleich mit dem Rechteck aus den Längen der Hypotenusenabschnitte.

Aufgabe T4 Gegeben seien die Polynome $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ und $p_3(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Definiere das Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.

- a) Zeige p_1, p_2 und p_3 stehen jeweils senkrecht aufeinander.
 b) Bestimme $\|p_1\|$, $\|p_2\|$ und $\|p_3\|$, wobei $\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$ die durch das Skalarprodukt induzierte Norm ist.
 c) Sei $p_4(x) = 9x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$. Bestimme α, β, γ mit $p_4 = \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3$.

Hinweis. Die mit **T** gekennzeichneten Aufgaben sind für die Tutorien gedacht.