UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Prof. Dr. Guido Schneider
Dipl.-Math. Oliver Zink
Dipl.-Math. oec. Norbert Breindl

WS 2002/2003
15.11.2002

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 **a)** $f(z) = (z^2-1)^2+1 = 0 \Longleftrightarrow (z^2-1)^2 = -1 \Longleftrightarrow z^2-1 = \pm i \Longleftrightarrow z^2 = 1 \pm i$.
Wir verwenden die Formel von de Moivre:
$z^2 = |z^2| \cdot (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^2 = |z^2| \cdot (\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi))$.
Fall 1: $z^2 = 1 + i = \sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$
$\Longrightarrow z_k = \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{\pi}{8} + k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{8} + k\pi)) \quad (k = 0, 1)$. Als Lösungen der Gleichung $f(z) = 0$ ergeben sich in diesen Fall somit $z_1 = \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{8}))$ und $z_2 = \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{9\pi}{8}) + i\sin(\frac{9\pi}{8}))$.
Fall 2: $z^2 = 1 - i = \sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{7}{4}\pi) + i\sin(\frac{7}{4}\pi))$
$\Longrightarrow z_k = \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{7\pi}{8} + k\pi) + i\sin(\frac{7\pi}{8} + k\pi)) \quad (k = 0, 1)$. Als weitere Lösungen der Gleichung $f(z) = 0$ ergeben sich hier $z_3 = \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{7\pi}{8}) + i\sin(\frac{7\pi}{8}))$ und $z_4 = \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{15\pi}{8}) + i\sin(\frac{15\pi}{8}))$.

b) Es ist $\arg(-256) = \pi$ und $2^8 = 256$. Mit $\varphi = \arg(z)$ und da $\overline{z} = |z|e^{-i\varphi} = |z|(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = |z|(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi))$ ist eine erste Nullstelle $2 \cdot e^{-\frac{\pi}{8}i} = 2 \cdot e^{\frac{15}{8}\pi i}$.
Als Lösungen mit negativen Winkel haben wir

$$z_l = 2 \cdot e^{-\frac{(\pi+2l\pi)i}{8}} = 2 \cdot e^{(-\frac{\pi}{8} - l\frac{\pi}{4})i} \qquad (l = 0, \ldots 7)$$

Umnummeriert und umgeordnet auf positive Winkel somit $z_k = 2 \cdot e^{(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4})i} \qquad (k = 0, \ldots 7)$.

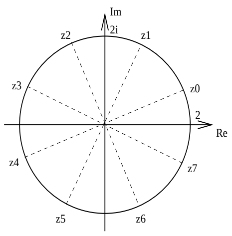


Bild Aufg. 1.b

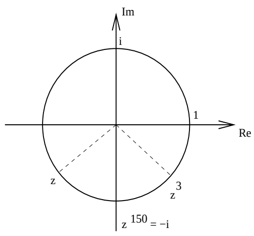


Bild Aufg. 2

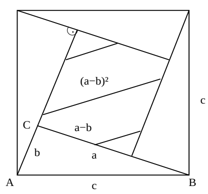
Aufgabe 2 wir haben $\zeta = \cos(\frac{5\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{4})$ und mit der Formel von de Moivre

$$\zeta^3 = \cos\left(\frac{15\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$$

und

$$\zeta^{150} = \cos\left(\frac{750\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{750\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$$

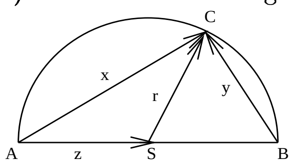
Aufgabe 3 **a)** Gemäß Skizze haben wir 4 kongruente rechtwinklige Dreiecke deren Hypotenusen jeweils den Seiten c des Quadrats entsprechen und deren Katheten mit b und a gekennzeichnet sind. Im Inneren erhalten wir ein Quadrat mit Seitenlänge $a - b$. Mit den Bezeichnungen aus der Skizze



ergibt sich für den Flächeninhalt des Quadrats mit den Seiten c:

$$\begin{aligned} A_{c^2} &= 4 \cdot A_\Delta + A_{(a-b)^2} \\ c^2 &= 4 \cdot \frac{1}{2}ab + (a-b)^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

b) mit den Bezeichnungen aus der Skizze



führen wir die folgenden Vektoren ein: $x := C - A, y := C - B, z := S - A$ und $r := C - S$. Zu zeigen ist nun $< x, y >= 0$. Es gilt $x = z + r$ und $y = r - z$. Somit gilt:
$< x, y >=< z + r, r - z >=< z, r > -\|z\|^2 + \|r\|^2 - < r, z >= \|r\|^2 - \|z\|^2$. Dies ist 0, da $\|z\| = \|r\|$.

Aufgabe 4 zu überprüfen sind die Normaxiome, die gegeben sind durch:

$$\begin{aligned} \|x\| &\geq 0 \text{ und } \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\| &= |\lambda|\|x\| \\ \|x+y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

a) $N_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \geq 0, \qquad N_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 0 \Longleftrightarrow x = y = z = 0$

$$\begin{aligned} N_1\left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}\right) &= \max(|\lambda x|, |\lambda y|, |\lambda z|) = \max(|\lambda||x|, |\lambda||y|, |\lambda||z|) \\ &= |\lambda| \max(|x|, |y|, |z|) = |\lambda| N_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_1\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}\right) &= \max(|x_1 + x_2|, |y_1 + y_2|, |z_1 + z_2|) \\ &\leq \max(|x_1| + |x_2|, |y_1| + |y_2|, |z_1| + |z_2|) \\ &\leq \max(|x_1|, |y_1|, |z_1|) + \max(|x_2|, |y_2|, |z_2|) \\ &= N_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) + N_1\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Die Abbildung N_1 ist somit eine Norm.

b) N_2 ist keine Norm. Setze

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow N_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left|\frac{1 - 1 + 0}{3}\right| = 0$$

c) N_3 ist keine Norm. Setze

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \lambda = 2 \Longrightarrow N_3\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 2^2 + 2^2 + 2^2 = 12$$

$$2N_3\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 2(1^2 + 1^2 + 1^2) = 6$$

$$N_3\left(2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \neq 2N_3\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Aufgabe T1 **a)** Kreis um 0 mit Radius 2.
b) Im(z+i) = Im(x + iy + i) = Im(x + i(y +1)) = y+1 = 4,
d.h. eine konstante Funktion y = 3.
c) Kreis um $-3 + 4i$ mit Radius 5.
d) $\arg\left(z \cdot \exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right)\right) = 0 \Longrightarrow \arg z = \frac{\pi}{4}$. Wir haben somit die Winkelhalbierende $y = x \ \ (x \geq 0)$.
e) Es ist $z\overline{z}-3iz+3i\overline{z}+8 = (x+iy)(x-iy)-3i(x+iy)+3i(x-iy)+8 = 0 \Longrightarrow x^2+(y+3)^2 = 1$ und erhalten einen Kreis um $-3i$ mit Radius 1.
f) Re $(z^2) = x^2 - y^2 = 0 \Longrightarrow |x| = |y|$. Dies sind die beiden Winkelhalbierenden $y = x$ und $y = -x$.

Aufgabe T2

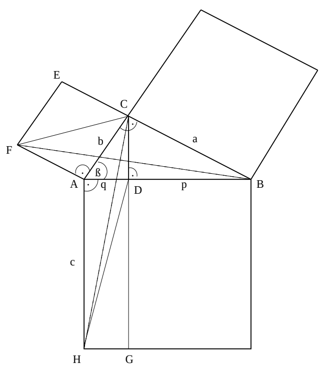
$$\textbf{a)} \quad < u, v > \; = \; < \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} > \; = \frac{7}{2}$$

$$u \times v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{39}{2} \\ \frac{73}{2} \\ \frac{19}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -39 \\ 73 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$[u, v, w] = \; < \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -39 \\ 73 \\ 19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} > \; = -\frac{17}{2}$$

$$\textbf{b)} \quad < \begin{pmatrix} 1 \\ 3\lambda \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4\lambda \\ 6 \end{pmatrix} > \; = 2+12\lambda^2+30 = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 = -\frac{8}{3} \text{ und somit keine Lösung in } \mathbb{R}.$$

Aufgabe T3 **a)** Der Inhalt des Quadrats über einer Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck ist also gleich dem Inhalt des Rechtecks aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt. Mit den Bezeichnungen aus der Skizze

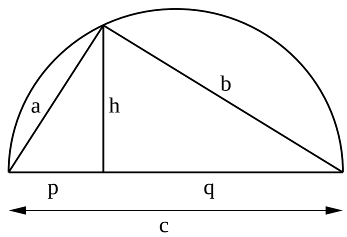


ist zu zeigen, daß der Flächeninhalt des Quadrats $ACEF$ über der Kathete $[AC]$ mit dem Rechteck $ADGH$ aus der Hypotenuse und dem Hypotenusenabschnitt $[AD]$. Es genügt hierbei zu zeigen, daß die Dreiecke ACF und AHD denselben Flächeninhalt haben. Da $BC \parallel AF$ haben die beiden Dreiecke ACF und ABF denselben Flächeninhalt (Grundlinie und Höhe der beiden Dreiecke sind gleich lang). Wegen $CD \parallel AH$ sind auch die Dreiecke AHD und AHC flächengleich.
Für die Dreiecke ABF und AHC gilt nun:

$$\begin{aligned} |AB| &= |AH| \quad (= \text{Hypotenuse } c) \\ |AF| &= |AC| \quad (= \text{Kathete } b) \\ \sphericalangle BAF &= \sphericalangle HAC \quad (= 90^\circ + \beta) \end{aligned}$$

und somit nach dem Kongruenzsatz (2 Seiten und 1 Winkel stimmen überein) sind die Dreiecke ABF und AHC kongruent und somit flächengleich. Die Dreiecke ACF und AHD sind somit flächengleich. In einem rechtwinkligen Dreieck ist also der Flächeninhalt des Kathetenquadrats gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks aus der Hypotenuse und dem zur betreffenden Kathete gehörenden Hypotenusenabschnitts. Es gilt also $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$.

b) Mit den Bezeichnungen aus der Skizze



ergibt sich mit dem Satz von Pythagoras:
i) $a^2 = h^2 + p^2$ *ii)* $b^2 = h^2 + q^2$ *iii)* $c^2 = a^2 + b^2$.
Da $c = p + q$ und Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} (p+q)^2 &= h^2 + p^2 + h^2 + q^2 \\ p^2 + 2pq + q^2 &= 2h^2 + p^2 + q^2 \\ 2pq &= 2h^2 \Longleftrightarrow h^2 = pq \end{aligned}$$

Aufgabe T4 $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ und $p_3(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ [-1,1] und dem Skalarprodukt $< f, g >= \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$.

a) $\int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0$

$\int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\,dx = \frac{1}{2}(x^3 - x)\Big|_{-1}^{1} = 0$

$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{2} \cdot x(3x^2 - 1)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} (\frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x)\,dx = \frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^2\Big|_{-1}^{1} = 0$

b) $\|p_1\| = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} dx} = \sqrt{x\big|_{-1}^{1}} = \sqrt{2}$

$\|p_2\| = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx} = \sqrt{\frac{x^3}{3}\big|_{-1}^{1}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

$\|p_3\| = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\,dx} = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} (\frac{9}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4})\,dx} = \sqrt{(\frac{9}{20}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x)\big|_{-1}^{1}}$
$= \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{10}$

c) $p_4(x) = 9x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4} = \alpha + \beta x + \gamma(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}) = \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3$.
Koeffizientenvergleich: $\gamma = 6, \beta = -\frac{1}{2}$ und $\alpha = \frac{5}{4}$.