

6. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1

a) Berechne das Kreuzprodukt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Berechne $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten

$$P_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

a) Die Punkte $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $P_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

bilden Eckpunkte eines Spats. Bestimme dessen Volumen.

b) Für welche Werte c liegen die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$$

in einer Ebene?

Aufgabe 3 Gegeben sind die Punkte $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

und der Vektor $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeige, daß sich die durch P_1 und P_2 gehende Gerade g_1 und die durch Q gehende Gerade g_2 mit Richtungsvektor $\mathbf{a}$ schneiden. Gib den Schnittpunkt an.

b) Gib die Gleichung der Ebene E in Hessescher Normalform an, die durch g_1 und g_2 aufgespannt wird.

c) Zeige, daß die Punkte P_1, P_2 und Q die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks D sind (rechter Winkel bei Q). Berechne den Flächeninhalt von D .

Aufgabe 4 Berechne die Determinanten

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} \quad \det B = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} \quad \det C = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} \quad \det D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Aufgabe T1

- a) Zeige, daß das Volumen des von X, Y und Z aufgespannten Tetraeders $\frac{1}{6}$ des Volumens des von X, Y und Z aufgespannten Spats beträgt
- b) Berechne das Volumen des Tetraeders mit den Eckpunkten

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe T2 Gegeben seien die 3 Punkte A, B und C mit zugehörigen Ortsvektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und ein Vektor } \mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$.
- b) Berechne den Winkel bei A im Dreieck $\triangle ABC$.
- c) Berechne das Volumen des Spats, der von den Richtungsvektoren $\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}$ und dem Ortvektor $\mathbf{z}$ aufgespannt wird.
- d) Bestimme eine Ebene in der das Dreieck $\triangle ABC$ liegt in Hessescher Normalform.

Aufgabe T3 Berechne folgende Determinanten

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} \quad \det B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -6 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} \quad \det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Aufgabe T4

- a) Wie groß muß die Zahl p sein, damit der Vektor $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ p \\ -2 \end{pmatrix}$ mit den Vektoren

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{in einer Ebene liegt.}$$

- b) Berechne $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ und $\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$. Berechne den von den Vektoren $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ eingeschlossenen Winkel.

Hinweis. Die 1. Übungsklausur zu HM I findet am Samstag, den 07.12.2002 von 8-10 Uhr statt. Anmeldung: 25.11 - 28.11.2002 (vorm Sekretariat).

Hinweis. Die mit T gekennzeichneten Aufgaben sind für die Tutorien gedacht.