

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt
Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}.$

b) $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix},$

$(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} -15 \\ 30 \\ -15 \end{pmatrix}.$

c) $P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Delta_{P_1 P_2 P_3} = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{273}$

Aufgabe 2 a) $P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_4 - P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$

$\left| \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \right] \right| = \left| \left\langle \begin{pmatrix} -6 \\ 16 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle \right| = 91.$

b) $P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad P_4 - P_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ c-1 \end{pmatrix}.$

$\left| \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ c-1 \end{pmatrix} \right] \right| = \left| \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ c-1 \end{pmatrix} \right\rangle \right| = 20 - 4c + 4 \implies c = 6.$

Aufgabe 3 a) Stelle die Gleichung der Geraden g_1 und g_2 auf

$$g_1(\lambda) = P_1 + \lambda \overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g_2(\mu) = Q + \mu \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gleichsetzen der Geraden $g_1(\lambda)$ und $g_2(\mu)$ liefert

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \lambda = 1, \mu = 2$$

und somit ist der Schnittpunkt $S = g_1(1) = g_2(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) Die Normalenrichtung zur Ebene ergibt sich aus dem Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren

$$\mathbf{n} = \pm \overrightarrow{P_1 P_2} \times \mathbf{a} = \pm \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ Normiert: } \mathbf{n}_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das richtige Vorzeichen des Normalenvektors $\mathbf{n}_0$ erhalten wir aus $\langle \mathbf{n}_0, S \rangle \geq 0$.

Die Hessesche Normalform ist somit:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_0 \rangle - \langle S, \mathbf{n}_0 \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x + z - 4) = 0. \end{aligned}$$

c) Bestimme die Richtungsvektoren, die das Dreieck aufspannen und berechne das Skalarprodukt

$$\langle \overrightarrow{QP_1}, \overrightarrow{QP_2} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Flächeninhalt: $\Delta_{QP_1 P_2} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{QP_1}\| \cdot \|\overrightarrow{QP_2}\| = \frac{1}{2} \sqrt{6} \sqrt{12} = 3\sqrt{2}$

Aufgabe 4

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 5 = -5. \quad \det B = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-6) - 3 \cdot (-2) = 0.$$

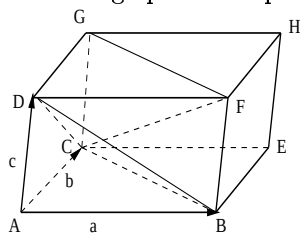
Entwicklung nach der ersten Spalte liefert

$$\det C = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3(-12 - 5) + 2(6 - 1) = 61.$$

Entwicklung nach der 3. Spalte und anschließend nach 2. Zeile liefert

$$\det D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -12.$$

Aufgabe T1 a) Das Volumen des gesamten Körpers entspricht dem von den Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ aufgespannten Spat. Mit den Bezeichnungen aus der Skizze



ist somit, daß Volumen des Körpers mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G gleich dem halben Spatprodukt. Dieses halbe Spatvolumen wird nun in drei Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, D und D, F, G, C sowie D, B, F, C zerlegt. $ABCD$ und $DFGC$ haben kongruente Grundflächen (ABC bzw. DFG) und gleiche Höhen. Weiter haben $ABCD$ und $DBFC$ kongruente Grundflächen (ABD bzw. DBF) und gleiche Höhen. Die drei Tetraeder haben somit das gleiche Volumen. Das Volumen der einzelnen Tetraeder ist somit $\frac{1}{6}$ des Spatvolumens.

b) nach Aufgabenteil a) ist das Volumen des Tetraeders $\frac{1}{6}$ des Spatvolumens. Der Tetraeder wird aufgespannt von den Vektoren

$$\mathbf{x} := \mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} := \mathbf{c} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{z} := \mathbf{d} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{vol}_T &= \frac{1}{6} |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle| = \frac{1}{6} |\langle \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle| = \frac{1}{6} \left| \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \right| \\ &= \frac{1}{6} \left| \left\langle \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \right| = \frac{1}{6} |-23| = \frac{23}{6} \end{aligned}$$

Aufgabe T2 a) Die Fläche des Dreiecks $\Delta ABC = \frac{1}{2} \|(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})\|$. Es ist also

$$\Delta_{ABC} = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = \frac{5}{2} \sqrt{3}$$

$$\text{b) } \cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a} \rangle}{\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{c} - \mathbf{a}\|} = \frac{1}{14} \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{11}{14}. \text{ Somit ist } \varphi = \arccos\left(\frac{11}{14}\right).$$

$$\text{c) Das Volumen des Spats ist } |\langle (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}), \mathbf{z} \rangle| = \left| \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right| = 10.$$

$$\text{d) die Normalenrichtung zur Ebene ergibt sich aus } \mathbf{n} = \pm (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \pm \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{und erhalten so } \mathbf{n}_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{75}} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Das richtige Vorzeichen des Normalenvektors $\mathbf{n}_0$ erhalten wir aus $\langle \mathbf{n}_0, \mathbf{a} \rangle \geq 0$.

Die Hessesche Normalform lautet somit:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_0 \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{n}_0 \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - y - z) - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-x + y + z - 1) = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe T3 Entwicklung nach der dritten Spalte liefert

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 1 - 4(1 - 12) = 49.$$

Mit der Regel von Sarrus ergibt sich

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -6 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -18 + 24 - 40 - (-48 + 20 - 18) = 12.$$

Entwicklung nach der 4. Spalte und anschließend nach 3. Spalte liefert

$$\begin{aligned} \det C &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -3(8 - 10) - 2(8 - 10) = 10 \end{aligned}$$

Aufgabe T4 a) Die drei Vektoren liegen genau dann in einer Ebene, wenn das Spatprodukt Null ist.

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ p \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2p+8 \\ -4 \\ 12+p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle = 10p+68 = 0 \implies p = -6,8$$

$$\text{b) } \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ -13 \end{pmatrix}, \quad \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = 30 \text{ und } \cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle}{\|\mathbf{b}\| \cdot \|\mathbf{c}\|} = \frac{30}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{65}} \implies \varphi = \arccos \frac{30}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{65}}.$$

Der eingeschlossene Winkel beträgt somit $35,7^\circ$.