UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Prof. Dr. Guido Schneider
Dipl.-Math. Oliver Zink
Dipl.-Math. oec. Norbert Breindl

WS 2002/2003
29.11.2002

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 $f(t) = t^3 - 3$

a) Bisektionsverfahren

i	u_i	v_i
0	1.0000	2.0000
1	1.0000	1.5000
2	1.2500	1.5000
3	1.3750	1.5000
4	1.4375	1.5000

b) Newtonverfahren

i	t_i
0	1.000000
1	1.666666
2	1.471111
3	1.442812
4	1.442249

Aufgabe 2 **a)** Defintion Konvergenz: $\forall \varepsilon > 0\, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \|a_n - a\| < \varepsilon$.
Für $k > 0$ gilt: Die Folge $a_n = n^k$ ist streng monoton wachsend, denn

$$a_{n+1} = (n+1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} n^j > \binom{k}{k} n^k = a_n$$

Sei $C > 0$ beliebig gegeben. Wähle ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \sqrt[k]{C}$, dann ist für alle $n \geq N$ die Folge $a_n \geq a_n = N^k > C \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} = \infty$.

Für $k = 0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$

Für $k < 0$ wählen wir zu beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \sqrt[k]{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n \geq N$

$$|n^k - 0| = n^k = \frac{1}{n^{-k}} \leq \frac{1}{N^{-k}} < \frac{1}{(\sqrt[k]{\varepsilon})^{-k}} = \varepsilon$$

b) Mit $k := \min(n, m)$ gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|_2^2 &= \int_{-1}^{1} (x_n(t) - x_m(t))^2 dt = 2\int_0^{1/k} (x_n(t) - x_m(t))^2\, dt \leq 2\int_0^{1/k} (1-kt)^2\, dt \\ &= -\frac{2}{3k}(1-kt)^3\Big|_0^{1/k} = \frac{2}{3\min(n,m)}. \end{aligned}$$

Für den punktweisen Grenzwert gilt: $x(t) := \lim\limits_{n\to\infty} \notin C[-1,1]$, denn

$$x_n(t) := \begin{cases} -1 & \text{für } -1 \leq t < 0 \\ 0 & \text{für } 0 = t \\ 1 & \text{für } 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Aufgabe 3 **a)** $a_n = \frac{n(\sqrt{n^4+1}-n^2)}{\sqrt{n^2+n}-n} = \frac{n^3(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}-1)}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1)} = \frac{n^2(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}-1)(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)}{1+\frac{1}{n}-1}$
$= \frac{n^2(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}-1)(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)}{\frac{1}{n}} = \frac{n^3(1+\frac{1}{n^4}-1)(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+1} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+1)}$
$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+1)} = 0$
b) $a_n = n(1-\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}}) = \frac{n(1-\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}})(1+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}})}{(1+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}})} = \frac{n(1-\sqrt{1-\frac{1}{n}})}{1+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}}} = \frac{n(1-\sqrt{1-\frac{1}{n}})(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}})}{(1+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}})(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}})}$
$= \frac{n(1-1+\frac{1}{n})}{(1+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}})(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}})} = \frac{1}{(1+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}})(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}})}$
$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}})(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}})} = \frac{1}{4}$
c) $a_n = \sum\limits_{k=2}^{n}(1+\sqrt{2})^{-k} = \sum\limits_{k=0}^{n}(\frac{1}{1+\sqrt{2}})^k - 1 - \frac{1}{1+\sqrt{2}}$
$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n}(\frac{1}{1+\sqrt{2}})^k - 1 - \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+\sqrt{2}}} - 1 - \frac{1}{1+\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}+1.$
d) für jedes $a > 0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
Beweis: Sei $x_n := \sqrt[n]{a}$ und $a \geq 1$. Dann ist auch die n-te Wurzel $x_n \geq 1$ und mit der Bernoullischen Ungleichung ($(1+h)^n \geq 1+nh$ für $h \geq -1$) gilt:

$$a = x_n^n = [1+(x_n-1)]^n \geq 1+n(x_n-1).$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{a-1}{\varepsilon}$. Dann ist mit obiger Ungleichung

$$|x_n - 1| = x_n - 1 \leq \frac{a-1}{n} \leq \frac{a-1}{N} < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Für $a \geq 1$ ist die Behauptung somit gezeigt.
Sei jetzt $a < 1$. Dann ist $x_n \leq 1$ und da $\frac{1}{a} > 1$ ist nach oben bewiesen: $\frac{1}{x_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}$, $n \to \infty$. Wir schätzen nun ab und erhalten

$$|x_n - 1| = |x_n|\left|1 - \frac{1}{x_n}\right| \leq \left|1 - \frac{1}{x_n}\right|$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß $\left|1-\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$ für $n \geq N$. Dann ist auch $|x_n - 1| < \varepsilon$ für $n \geq N$.

Aufgabe 4 $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n} \Rightarrow x_n \geq 1$
i) Folge (x_n) ist monoton wachsend (Induktion):
IA: $x_2 = \sqrt{3x_1} = \sqrt{3} > x_1$
IS: Sei $x_n > x_{n-1}\,(IV) \Longrightarrow 3x_n > 3x_{n-1} \Longrightarrow \sqrt{3x_n} \overset{(IV)}{>} \sqrt{3x_{n-1}} \Longrightarrow x_{n+1} > x_n$
ii) Folge (x_n) ist nach oben beschränkt (Induktion):
IA: $x_1 < 10$
IS: sei $x_n < 10\,(IV) \Longrightarrow x_{n+1} = \sqrt{3x_n} \overset{(IV)}{<} \sqrt{30} < 10$
Folge (x_n) ist monoton wachsend und nach oben beschränkt $\Longrightarrow (x_n)$ konvergiert.
$x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Longrightarrow x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{3x_{n-1}} = \sqrt{3x} \Longrightarrow x = \sqrt{3x} \Longleftrightarrow x = 3 \vee (x = 0)$.
Der Grenzwert ist somit 3 da $x_n \geq 1$.

Aufgabe T1 **a)** Folge $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ ist beschränkt aber nicht konvergent
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n| \leq 1$, da $|(-1)^n| = |1| = 1 \Longrightarrow$ Folge a_n ist beschränkt.
Folge a_n ist divergent. Angenommen die Folge (a_n) konvergiert gegen eine reelle Zahl a. Dann gibt es nach Definition der Konvergenz für $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|a_n - a| < 1\, \forall n \geq N$. Für alle $n \geq N$ gilt dann nach der Dreiecksungleichung

$$2 = |a_{n+1} - a_n| = |(a_{n+1} - a) + (a - a_n)| \leq |a_{n+1} - a| + |a - a_n| < 1 + 1 = 2.$$

Dies ist ein Widerspruch.

b) Nachweis der Konvergenz durch Monotonie und Beschränktheit.
$a_1 = -3, \quad a_2 = -\frac{3}{2}, \quad a_3 = -\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{3}{2}}$ (Vermutung: monoton steigend).
Folge a_n ist nach oben beschränkt (nach unten durch -3). Behauptung: $a_n \leq 6$.
Induktionsanfang: für $n = 1$ ist $a_1 = -3$ und $-3 \leq 6$.
Induktionsvoraussetzung: $a_n \leq 6$ gilt für ein $n \in \mathbb{N}$
Induktionsschritt: $n \to n+1$
Induktionsschluß: $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \sqrt{3 + a_n} \overset{(IV)}{\leq} \frac{1}{2} \cdot 6 + \sqrt{3+6} = 6 \Rightarrow$ Beh. gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.
Die Folge a_n ist monoton wachsend, d.h $a_{n+1} > a_n$.
Wegen $a_n \leq 6$ und $a_n \geq 0$ (für $n \geq 3$) ist $\frac{1}{2}a_n \leq 3$ und $\frac{1}{2}a_n = \sqrt{\frac{1}{4}a_n^2} \leq \sqrt{\frac{3}{2}a_n}$.
Es gilt somit $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \sqrt{3 + a_n} \geq \frac{1}{2}a_n + \sqrt{\frac{3}{2}a_n} \geq \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}a_n = a_n$.
Folge a_n ist somit beschränkt und monoton wachsend und ein Grenzwert existiert, es gilt:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$

$$\Longrightarrow a = \frac{1}{2}a + \sqrt{3+a} \iff \frac{1}{2}a = \sqrt{3+a} \iff a^2 = 4(3+a) \iff a^2 - 4a - 12 = 0$$

$$\Longrightarrow a = 6 \vee a = -2 \qquad (a = -2 \text{ entfällt, da } a_n \text{ monoton steigend und } a_2 = -\frac{3}{2} > a = -2).$$

Aufgabe T2 **a)** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-3n+(-1)^n}{3n^2-7n+5} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\frac{3}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2}}{3-\frac{7}{n}+\frac{5}{n^2}} = \frac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n}{n-2} + \frac{n+2}{n-4})^2 = (\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n-2} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n-4})^2 = (\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{2}{n}} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{4}{n}})^2$
$= (1+1)^2 = 4$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1}$
$= \frac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^{n^2} = \infty$. Mit der Bernoulli-Ungleichung $(1+h)^n \geq 1 + nh$
ergibt sich $(1+\frac{1}{n})^{n^2} \geq 1 + n^2 \cdot \frac{1}{n} = 1 + n \ (n \to \infty) \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{3n}\frac{1}{n-1} = 0$, da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n-1} = 0$

und $-\frac{1}{n-1} \leq (-1)^{3n}\frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{n-1}$

f) $a_n = \prod\limits_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2}) = \prod\limits_{k=2}^{n}(\frac{k^2-1}{k^2}) = \prod\limits_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \prod\limits_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{\prod_{k=2}^{n} k-1}{\prod_{k=2}^{n} k} \cdot \frac{\prod_{k=2}^{n} k+1}{\prod_{k=2}^{n} k}$

$= \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k}{\prod_{k=2}^{n} k} \cdot \frac{\prod_{k=3}^{n+1} k}{\prod_{k=2}^{n} k} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

Aufgabe T3 $a_n = \frac{\ln(1+r)+7-3r^n}{2r^n+5}$.
Mit einer Fallunterscheidung für r erhalten wir:

$$\begin{aligned}
0 < r < 1 \quad &: \quad r^n \to 0 \Longrightarrow a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(1+r)+7}{5} \\
r = 1 \quad &: \quad a_n = \frac{\ln 2 + 4}{7} \\
r > 1 \quad &: \quad a_n = \frac{(\ln(1+r)+7)/r^n - 3}{2 + 5/r^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe T4 **a)** $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 12$.
Newton-Verfahren: $t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}$
Bisektionsverfahren: $(u_0, v_0) := (a, b)$ für $n = 1, 2, ...;$
$x := (u_{n-1} + v_{n-1})/2$
falls: $(f(x) \cdot f(v_{n-1}) < 0)$: $\quad u_n := x; \quad v_n := v_{n-1};$
sonst: $u_n := u_{n-1}; \quad v_n := x$

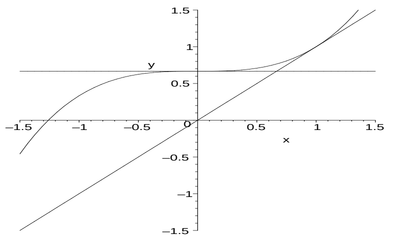
Bisektionsverfahren

i	u_i	v_i
0	0.000000	4.000000
1	0.000000	2.000000
2	1.000000	2.000000
3	1.500000	2.000000
4	1.500000	1.750000
5	1.625000	1.750000
6	1.687500	1.750000
7	1,718750	1.750000
8	1.718750	1,734375
9	1.726563	1.734375
10	1,730469	1.734375

Newtonverfahren

i	t_i
0	4.000000
1	2.649351
2	1.968516
3	1.754233
4	1.732276
5	1.732051

b) $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 2) \Longrightarrow f'(x) = x^2$. Für $x_0 = 1$ ergibt das Newton-Verfahren $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0$.
x_1 ist keine Nullstelle von f, denn $f(0) = \frac{2}{3}$. Das Newton-Verfahren ist wegen $f'(0) = 0$ nicht mehr durchführbar. Graphisch betrachtet: Die Linearisierung von f im Punkt x_1 liefert eine waagrechte Tangente, die keinen Schnittpunkt mit der x-Achse besitzt und somit auch keinen neuen Iterationswert x_2.

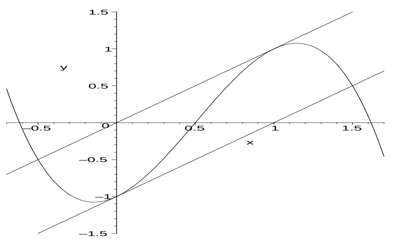


Graph von $f(x)$ und waagrechte Tangente in $x_1 = 0$

c) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + x - 1 \Longrightarrow f'(x) = -6x^2 + 6x + 1$
Für $x_0 = 1$ liefert das Newton-Verfahren

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 \text{ und } x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.$$

Wegen $f(0) = -1$ und $f(1) = 1$ sind x_1 und x_2 keine Nullstellen. Da $x_2 = x_0$ gilt entsteht ein Zyklus und das Newton-Verfahren konvergiert nicht. Es gilt $x_{2n} = x_0$ bzw. $x_{2n+1} = x_1$.



Graph von $f(x)$ und Tangenten in $x_0 = 1$ und $x_1 = 0$