

9. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Untersuche jeweils die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ auf Konvergenz

$$\begin{aligned} \text{a) } a_k &= \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{falls } k \leq 1777 \\ 2^{-k} & \text{falls } k > 1777 \end{cases} \\ \text{b) } a_k &= \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 2^{-k} & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} \\ \text{c) } a_k &= \begin{cases} \frac{1}{k^{16}} & \text{falls } k \neq 12 \\ k & \text{falls } k = 12 \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

- a) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeige, daß $A := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ eine abgeschlossene Menge ist.
- b) Zeige, daß die Aussage in a) für unstetige Funktionen im Allgemeinen falsch ist.

Aufgabe 3 Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 2 - x^2 & \text{falls } |x| \leq 2 \\ -\frac{4}{|x|} & \text{falls } |x| > 2. \end{cases}$$

Zeige, daß die Funktion f stetig ist.

Aufgabe 4

- a) Zeige, daß die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{3x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 3x + 6}{x^4 + 3x^2 - 4} + \frac{5}{x^4 + x^2 + 1}$$

auf ihrer Definitionsmenge $D \subset \mathbb{R}$ stetig ist.

- b) Gibt es eine stetige Fortsetzung $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von f ?

Aufgabe 5

- a) Bestimme die Häufungspunkte der Folge $a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$.
- b) Bestimme die Häufungspunkte der Menge $M = \{\sin x \mid x \in (0, 1)\}$.

Aufgabe T1 Untersuche jeweils die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ auf Konvergenz

- a) $a_k = \begin{cases} \frac{1}{k^2 + 1} & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ \frac{k}{k^3 + 17} & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases}$
- b) $a_k = \begin{cases} (-1)^k \frac{1}{k+1} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 2^{-k} & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$
- c) $a_k = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{1}{\sqrt{k+1}} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 2^{-k} & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$

Aufgabe T2 Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := b_n := (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ und $c_n := \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$. Zeige, daß die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergieren, deren Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ jedoch nicht.

Aufgabe T3 Welche der folgenden Funktionen haben in 0 einen Grenzwert? Gib jeweils die stetige Fortsetzung an, falls sie existiert.

- a) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \frac{1 + e^{x^2}}{\sqrt{x}}$
- b) $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) := \frac{|x^3|}{x^2}$
- c) $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Aufgabe T4

- a) Gib eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die injektiv, aber nicht monoton ist.
- b) Gib eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, die ein nichtleeres, offenes Intervall auf ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall abbildet.

Hinweis. Die mit **T** gekennzeichneten Aufgaben sind für die Tutorien gedacht.